Mechanika Kwantowa R 2016/2017, Seria 1 - odpowiedzi

Zadanie 1 Ponieważ, każde przejście fotonu to zaaplikowanie macierzy obrotu o kąt $\theta/2$, wybieramy $\theta = \pi/2N$, dzięki temu po N przejściach jeśli nie było bomby, otrzymamy na wyjściu foton z prawdopodobieństwem jeden w porcie górnym. Jeśli z kolei była to z prawdopodobieństwem $(\cos^2\theta/2)^N \overset{N\to\infty}{\to} 1$ foton będzie za każdym razem odbity i w końcu zarejestrowany w porcie 2 informując nas o obecności bomby.

Zadanie 3 Kolejne etapy ewolucji odpowiadają: obrotowi stanu wokół osi x o kąt $\pi/2$, obrotowi stanu wokół osi y o kąt $\pi/2$, i obrotowi stanu wokół osi z o kąt $\pi/2$. Ostatecznie stan układu to $|+\rangle_x = (|+\rangle_z + |-\rangle_z)/\sqrt{2}$. To samo moglibysmy uzyskać ewoluując stan początkowy przez cały czas $\frac{3\pi\hbar}{4\mu}$ z Hamiltonianem $H = \mu\sigma_y/3$ co sprowadziłoby sie do obrotu stanu o kąt $\pi/2$ wokół osi y.

Dla spinu 1/2 obrót o kąt 2π wokół dowolnej osi odpowiada macierzy $U_{2\pi,\vec{n}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Oznacza to, że obrót o 2π nie jest macierzą jednostkową! Tak jest dla wszystkich spinów połówkowych—obrót o 2π do nie do końca nic nie robienie, chociaż ten $-$ jako globalna faza nie jest obserwowalny ...

Zadanie 4 Startujemy ze stanu $|+\rangle_z$ i wybieramy czas ewolucji $t = \pi/\omega$ ($\omega = 2\mu B/\hbar$ częstość precesji). W między czasie, w bardzo krótkich odstępach czasu $\tau = t/n$ zbliżamy spin n razy do miejsca gdzie potencjalnie jest bomba - efekt Zenona powoduje, że jeśli bomba faktycznie jest w tym miejscu a my weźmiemy n bardzo duże to pozostajemy w stanie $|+\rangle_z$ i bomba nie wybucha. Jeśli bomby nie ma to ewolucja idzie unitarnie do $|-\rangle_z$. Na końcu mierzymy i wiemy, że bomby nie było.

Zadanie 5 Stan w chwili t ma postać: $|\psi(t)\rangle = (|0\rangle e^{-iEt/\hbar} + |1\rangle e^{-2iEt/\hbar})/\sqrt{2}$. Prawdopodobieństwo pomiaru $|\psi(0)\rangle$ po czasie t wynosi $p = |\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle|^2 = \cos^2\frac{Et}{2\hbar}$

Zadanie 6 Stany własne $|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$ z odpowiadającymi i wartościami własnymi $E \pm g$. Ponieważ $|\psi(0)\rangle = |0\rangle = (|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$, więc $|\psi(t)\rangle = (|+\rangle e^{-i(E+g)t/\hbar} + |-\rangle e^{-i(E-g)t/\hbar})/\sqrt{2} \equiv (|+\rangle e^{-igt/\hbar} + |-\rangle e^{igt/\hbar})/\sqrt{2}$. Stan powróci do stanu poczatkowego dla $gt/\hbar = \pi$, czyli $t = \pi\hbar/g$.

Zadanie 8 Stała normalizacyjna $A = 1/(2\pi\sigma^2)^{1/4}$. Prąd prawdopodobieństwa $j(x) = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}[\psi(x)^*\frac{d\psi(x)}{dx}] = \frac{p_0}{m}A^2e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2} = \frac{p_0}{m}|\psi(x,t)|^2$, czyli jest to średnia prędkość cząstki pomnożona przez gęstość prawdopodobienstwa. Biorąc dla elektornu $m = 9.1\cdot10^{-31}kg$, $\sigma = 10^{-10}m$ mamy charakterystyczny czas rozpływania się stanu $\tau = 1.8\cdot10^{-16}s$, dla pchły $m = 1g, \sigma = 1mm$, $\tau = 10^{18}s$ (wiek wszechświata).

Zadanie 9 Stała normalizacyjna $A = 1/(2\pi\sigma^6)^{1/4}$. Średnie $\langle x\rangle = \langle p\rangle = 0$. Wariancje $\Delta^2x = \langle x^2\rangle = 3\sigma^2$, $\Delta^2p = 3\hbar^2/(4\sigma^2)$. Widzimy, że $\Delta^2x\Delta^2p = 9\hbar^2/4$, czyli spełnia zasadę nieoznaczoności z nawiązką. Po czasie t rozkład pędów sie nie zmienia czyli $\Delta^2p(t) = 3\hbar^2/(4\sigma^2)$, z kolei rozrzut położeń $\Delta^2x(t) = \Delta^2x(0) + \frac{t^2}{m^2}\langle p^2\rangle = \Delta^2x(0) + \frac{3t^2\hbar^2}{4m\sigma^2}$. Jeśli chcemy, żeby początkowo $\Delta^2(x) = \sigma^2$, to musimy zamienić $\sigma \to \sigma/\sqrt{3}$, wtedy wariancja po czasie t będzie $\Delta^2(x)(t) = \sigma^2 + \frac{9t^2\hbar^2}{4m\sigma^2}$, czyli rozpływanie stanu 9-cio krotnie szybsze niż dla stanu gausowskiego o tej samej szerokości początkowej.