Mechanika Kwantowa R 2016/2017, Seria 2

Zadanie 1 Znajdź potencjał dla którego stan gaussowski $\psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}$ jest stanem własnym.

Zadanie 2 Rozważ cząstkę o masie m przygotowana w chwili początkowej w stanie

$$\psi(x,0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-x^2/4\sigma^2}$$

i znajdującą się w potencjale liniowym $V(x) = mgx$. Wyznacz średnie i wariancje x i p po czasie t. Posłuż się równaniami na ewolucję wartości oczekiwanych obserwabli (lub wręcz obrazem Heisenberga jeśli chcesz), tak aby nie musieć używać nieoczywistych w tym przypadku stanów własnych.

Wskazówko-dygresja: na ćwiczeniach korzystaliśmy, z równania na ewolucje wartości oczekiwanych: $\frac{\mathrm{d}\langle A\rangle}{\mathrm{d}t} = -\frac{i}{\hbar}\langle[A,H]\rangle$ - to wystarczy do rozwiązania zadania. Można jednak jeszcze inaczej podejść do tego problemu stosując tzw. obraz Heiisenberga. Skoro myślimy o wartościach oczekiwanych $\langle\psi(t)|A|\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)|U^\dagger(t)AU(t)|\psi(0)\rangle$, to możemy formalnie powiedzieć, że to nie stan ewoluuje zgodnie z równaniem $|\psi(t)\rangle = U_t|\psi(0)\rangle$, gdzie $U_t = e^{-iHt/\hbar}$, tylko stan pozostaje niezmieniony, a my ewoluujemy obserwablę $A(t) = U_t^\dagger A U_t = e^{iHt/\hbar} A e^{-iHt/hbar}$. Zwróć uwagę, że wtedy równanie na ewolucję tej obserwabli ma postać: $\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{i}{\hbar}[A(t),H]$—czyli to samo co wcześniej tylko bez wartości oczekiwanych! To jest równanie rożniczkowe na operatory, are rozwiązujemy tak samo i nawet może będzie troche prościej...

Zadanie 3 Powtórz, to samo dla potencjału oscylatora harmonicznego $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Czy istnieje taka σ dla której wariancje położeń i pędów będą niezmienne w czasie.

Zadanie 4 Wykaż, że $[f(\hat{x}),\hat{p}] = i\hbar f'(\hat{x})$, gdzie $f'(x) = \frac{df}{dx}$. Wskazówka: zapisz $f(x)$ w postaci szeregu potęgowego.

Zadanie 5 Rozważ nieskończoną studnie potencjału ($V = 0$ dla $0 < x < a$ i $V = \infty$ dla pozostałych. Przyjmij, że w chwili początkowej cząstka znajdowała się w stanie $\psi(x,0) = Ax(a-x)$.

a) Wyznacz stałą normalizacyjną A

b) Znajdź dla tego stanu $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$, $\Delta^2 x$, $\Delta^2 p$, $\langle E\rangle$

c) Podaj prawdopodobieństwa pomiaru różnych wartości energii cząstki

d) Znajdź postać stanu w chwili t - obejrzyj sobie ewolucję $|\psi(x,t)|^2$ wpisując uzyskaną postać stanu np do programu Mathematica

Zadanie 6 Cząstka o masie m znajduje sie w nieskończonej jednowymiarowej studni potencjału rozciągającej sie od 0 do a. Wiadomo, ze w chwili $t = 0$ cząstka znajdowała się w stanie podstawowym. Nagle szerokość studni została podwojona (z a do $2a$) tak, że w momencie poszerzania studni funkcja falowa cząstki nie zmieniła się.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo zmierzenia cząstki w pierwszym stanie wzbudzonym nowej studni?

b) Napisz wyrażenie na funkcję falową cząstki po czasie t od momentu poszerzenia studni $\psi(x, t)$

c) Oblicz średnią energię cząstki przed i po podwojeniu szerokości studni.