

Mechanika Kwantowa R 2016/2017, Seria 2

Zadanie 1 Wstawiamy do równania Schroedingera i otrzymujemy potencjał oscylatora harmonicznego $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$, gdzie $\omega = \frac{\hbar}{2m\sigma^2}$

Zadanie 2 W obrazie Heisenberga mamy następujące równania:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{p}/m \quad (1)$$

$$\dot{\hat{p}} = mg \quad (2)$$

Stąd mamy rozwiązanie: $\dot{p}(t) = \dot{p}(0) + mgt$, $\hat{x}(t) = \hat{x}(0) + \hat{p}(0)t/m + gt^2/2$ Widzimy, że $\langle x \rangle(t) = \langle x \rangle(0) + \langle p(0) \rangle t/m + gt^2/2 = p_0 t/m + gt^2/2$, $\langle p \rangle(t) = \langle p \rangle(0) + mgt = p_0 + mgt$, a wariancje będą takie same jak w przypadku ewolucji swobodnej.

Zadanie 3 Równania Heisenberga dają nam związki na operatorach takie same jak klasycznie co prowadzi do rozwiązań:

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(0) \cos \omega t + \frac{\hat{p}(0)}{m\omega} \sin \omega t \quad (3)$$

$$\hat{p}(t) = \hat{p}(0) \cos \omega t - \hat{x}(0)m\omega \sin \omega t \quad (4)$$

Liczą wariancję w czasie t na stanie gausowskim dostajemy:

$$\Delta^2 x(t) = \sigma^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2\sigma^4}).$$

Jeśli dobierzemy $\sigma^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$ widzimy że $\Delta^2 x(t) = \sigma^2$ i paczka gausowska się nie rozplywa. Tak naprawdę to nieświadomie znaleźliśmy w ten sposób stan własny (podstawowy) oscylatora harmonicznego.

Zadanie 5 Stała normalizacyjna $A = \sqrt{30/a^5}$. Wartości oczekiwane: $\langle x \rangle = a/2$, $\langle p \rangle = 0$, $\Delta^2 x = a^2/28$, $\Delta^2 p = 10\hbar^2/a^2$, $\langle E \rangle = 10\hbar^2/(2ma^2)$. W studni mamy dostępne energie $E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}n^2$ odpowiadające stanom własnym $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(n\pi x/a)$. Rozkładamy stan $\psi(x, 0)$ w bazie $\psi_n(x)$: $\psi(x, 0) = \sum_n c_n \psi_n(x)$. $c_n = \int_0^a dx \psi_n^*(x) \psi(x) = \frac{2\sqrt{60}}{\pi^3 n^3} (1 - (-1)^n)$. Czyli niezerowe dla n nieparzystych $c_n = \frac{4\sqrt{60}}{\pi^3 n^3}$ (całkujemy przez części $\int t \sin t$, $\int t^2 \sin t$). Prawdopodobieństwo pomiaru wartości energii E_n : $p_n = |c_n|^2 = 960/(\pi^6 n^6)$ (przy okazji udowodniliśmy, że $\sum_{1,3,\dots} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{960}$). Stan po czasie t : $\psi(x, t) = \sum_n c_n \psi_n e^{-iE_n t/\hbar}$.

Zadanie 6 W chwili początkowej cząstka znajduje się w stanie $\psi(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\pi x/a)$. Po rozszerzeniu studni to już nie jest stan podstawowy i musimy rozłożyć naszą funkcję

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\pi x/a) & x \in [0, a] \\ 0 & \in [a, 2a] \end{cases}$$

w bazie stanów własnych poszerzonej studni: $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \sin(\pi n x/2a)$ Szukamy rozkładu $\psi(x, 0) = c_n \phi_n(x)$. Znajdujemy $c_n = \int dx \phi_n^*(x) \psi(x, 0) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{\sin(n\pi/2)}{4-n^2}$, przy czym $c_2 = 1/\sqrt{2}$. Funkcja falowa po czasie

t , $\psi(x, t) = \sum_n c_n \phi_n e^{-iE_n t/\hbar}$, przy czym E_n to energie w nowej studni: $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2} n^2$. Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w stanie podstawowym nowej studni: $p(E_1) = |c_1|^2 = 32/(9\pi^2) \approx 0.36$. Średnią energię można liczyć $\langle E \rangle = \sum_n |c_n|^2 E_n$ ale po co ... Lepiej bezpośrednio licząc wartość oczekiwaną na Hamiltonianie. Ponieważ energia zależy tylko od części kinetycznej Hamiltonianu, więc po rozszerzeniu studni średnia energia stanu się nie zmieni i wynosi: $\langle E \rangle = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$.