Mechanika Kwantowa R 2016/2017, Seria 3 - odpowiedzi

Zadanie 1 W przypadku braku potencjału delty mamy rozwiązania symetryczne i antymsymetryczne odpowiednio: $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos(xn\pi/a)$ (dla n nieparzystych) i $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(xn\pi/a)$ (dla n parzystych), odpowiadające im energie to: $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$. Obecność delty powoduje skok pochodnej w punkcie $x = 0$ o $\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\psi(0)$. Dla funkcji antysymetrycznych, które w tym punkcie są równe zero obecność potencjału delty nic nie zmieni, więc będą to wciąż poprawne rozwiązania i te energie (n parzyste) się nie zmienią.

Rozważmy więc tylko rozwiązania symetryczne. W tym przypadku funkcja po lewej i prawej strony bariery ma postać:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x}, & x < 0 \\ Ae^{-i\alpha x} + Be^{i\alpha x}, & x > 0 \end{cases}$$

gdzie $\alpha = \sqrt{2mE/\hbar^2}$. Warunek zszycia pochodnych uwzględniając skok związany z funkcją delta implikuje

$$-i\alpha A + i\alpha B - i\alpha A + iB\alpha = \frac{2m\lambda}{\hbar^2}(A + B)$$

Warunek znikania funkcji w punktach $x = \pm a/2$ daje warunek:

$$Ae^{-i\alpha a/2} + Be^{i\alpha a/2} = 0$$

Łącząc powyższe dwa równania otrzymujemy:

$$\alpha \cot\left(\frac{\alpha a}{2}\right) = -\frac{m\lambda}{\hbar^2}$$

Co jest jednocześnie warunkiem na dopuszczalne energie. W przypadku braku potencjału $\lambda = 0$ mielibyśmy rozwiązania $\alpha a/2 = n\pi/2$ (dla n nieparzystych) i odtwarzamy znany wynik. Ponieważ funkcja $\alpha\cot\alpha a/2$ jest malejąca z α to dla $\lambda > 0$ dopuszczalne rozwiązania α będą przesunięte do większych wartości w porównaniu z przypadkiem braku potencjału—wyższe energie. W przypadku $\lambda < 0$ energie będą odpowiednio obniżone.

Zadanie 2 Stany związane będą odpowiadać energiom $-V_0 < E \leq 0$. Warunek znikania funkcji w $x = 0$ i zanikania w $x = \infty$ implikuje

$$\psi(x) = \begin{cases} A\sin\alpha x, & x < a \\ Be^{-\beta x}, & x > a \end{cases}$$

gdzie $\alpha = \sqrt{2m(E + V_0)/\hbar^2}$, $\beta = \sqrt{-2mE/\hbar^2}$ Warunki zszycia:

$$A\sin\alpha a = Be^{-\beta a}, \quad \alpha A\cos\alpha a = -\beta Be^{-\beta a}$$

Dostajemy warunek

$$-\alpha\cot\alpha a = \beta = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2} - \alpha^2}$$

Analizując graficznie rozwiązanie powyższego równania (przecięcie funkcji $\alpha\cot\alpha a$ z fragmentem okręgu o promieniu $\sqrt{2mV_0/\hbar^2}$) wnioskujemy, że nie będzie żadnego stanu własnego wtedy i tylko wtedy gdy $a\sqrt{2mV_0/\hbar^2} < \pi/2$.

Zadanie 3 Piszemy rozwiązanie odpowiadające fali padającej na barierę z lewej strony postaci:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x}, & x < 0, \alpha = \sqrt{2mE/\hbar^2} \\ Ce^{i\beta x}, & x > 0, \beta = \sqrt{2m(E - V_0)/\hbar^2} \end{cases}$$

Warunki zszycia dają:

$$A + B = C, \quad i\alpha A - i\alpha B = i\beta,$$

z czego wynika:

$$\frac{C}{A} = \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}, \quad \frac{B}{A} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$$

Pamiętamy, że współczynnik transmisji i odbicia do stosunek odpowiednich prądów prawdopodbieństwa czyli:

$$T = \left|\frac{C}{A}\right|^2 \frac{\beta}{\alpha} = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}, \quad R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2}$$

Widać, że $T + R = 1$.

Zadanie 4 Wiemy, że dla prostokątnej bariery potencjału, współczynnik transmisji dla silnych tłumień zależy od szerokości bariery jak $e^{-2\sqrt{2m(V-E)/\hbar^2}a}$. W sytuacji gdy mamy barierę nieprostokątną, i potencjał zmienia się wraz z x możemy przybliżyć to serią wąskich barier prostokątnych o zmieniającej się wartości potencjału i oszacować współczynnik transmisji jako $e^{-2\int_{10\,\mathrm{fm}}^{50\,\mathrm{fm}} \mathrm{d}x \sqrt{2m(V(x)-E)/\hbar^2}}$ (tak naprawdę robimy tu nieformalnie coś co się nazywa przybliżeniem WKB). Gdzie dolna granica całkowania odpowiada początkowi bariery potencjału, a górna granica położeniu x dla którego $V(x) = 5\,\mathrm{MeV}$, czyli miejsca w którym cząstka „już uwolniła się ze studni potencjału'. Stąd możemy oszacować, że współczynnik transmisji przez taką barierę Coulombowską wynosi około $T \approx e^{-88} \approx 10^{-38}$. Aby oszacować czas życia jądra, musimy obliczyć wielkość, którą można by zinterpretować jako częstotliwość „uderzania cząstki w barierę". Cząstka α wewnątrz studni ma energię kinetyczną równą $35\,\mathrm{MeV}$. Traktując cząstkę klasycznie i uwzględniając jej masę $m = 4 \cdot 1.6 10^{-27}\mathrm{kg}$ odpowiadałoby to prędkości $v = 8 \cdot 10^7 \mathrm{m/s}$. Klasyczna cząstka o takiej prędkości odbijałaby się $v/(2a) \approx 10^{21}$ razy na sekundę. Stąd prawdopodobieństwo rozpadu na sekundę $10^{-38}10^{21} = 10^{-17}\,\mathrm{s}$. Wychodzi nam czas życia $10^{17}\mathrm{s} \approx 3\,\mathrm{mld}$ lat. Faktyczna wartość to $4.5\,\mathrm{mld}$ lat. Czyli widzimy, że rząd wielkości się zgadza.

Zadanie 5 Stan gaussowski możemy rozłożyc na fale płaskie, czyli zapisać go w reprezentacji pędowej:

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{(2\pi\sigma_p^2)^{1/4}} e^{-\frac{p-p_0}{4\sigma_p^2} + ipx_0/\hbar}$$

, gdzie $\sigma_p = \hbar/(2\sigma)$. W wyniku rozpraszania, uzyskamy na wyjściu superpozycję fal płaskich, z których każda będzie miała odpowiednio przemnożoną amplitudę zgodnie z rozwiązaniem dla rozpraszania fal płaskich na potencjale delty, czyli z czynnikiem $1/(1 - \frac{m\lambda}{i\sqrt{2mE/\hbar^2}\hbar^2}) = \frac{1}{1-\frac{m\lambda}{ip\hbar}}$. Prawdopodobieństwo transmisji będzie wynosić:

$$T = \int \mathrm{d}p\, |\tilde{\psi}(p)|^2 \frac{1}{1 + \frac{m^2\lambda^2}{p^2\hbar^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_p^2}} \int \mathrm{d}p \frac{e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma_p^2}}}{1 + \frac{m^2\lambda^2}{p^2\hbar^2}}$$

Jako sensowne przybliżenie można przyjąć współczynnik transmisji odpowiadający $p = p_0$:

$$T \approx \frac{1}{1 + \frac{m^2\lambda^2}{p_0^2\hbar^2}}$$

Zadanie 6 Rozwiązanie jest analogiczne jak dla $\lambda > 0$. W sytuacji gdy $E > 0$, dochodzimy do tego samego równania:

$$\frac{\sin(qd)}{qd}\frac{m\lambda d}{\hbar^2} + \cos(qd) = \cos(kd)$$

gdzie $q = \sqrt{2mE/\hbar^2}$. Ujemna wartość λ w powyższym równaniu nie zmienia jakościowo faktu istnienia pasm. Nie mniej w sytuacji ujemnej λ możemy również szukać rozwiązań odpowiadających $E < 0$. Warunek na dopuszczalne energie ma wtedy postać:

$$\frac{\sinh(qd)}{qd}\frac{m\lambda d}{\hbar^2} + \cosh(qd) = \cos(kd)$$

gdzie $q = \sqrt{-2mE/\hbar^2}$. Dzięki temu, że $\lambda < 0$ to równanie też może być spełnione i będzie co najmniej jedno dodatkowe pasmo odpowiadające ujemnym energiom.