Mechanika Kwantowa R 2016/2017, Seria 4

Zadanie 1 Wyznacz wartości oczekiwane i wariancję pędu na stanach własnych jednowymiarowego oscylatora harmonicznego $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Obliczenia wykonaj na dwa sposoby: z jednej strony stosując metodę algebraiczną, z drugiej strony wykorzystując funkcję tworzącą wielomianów Hermite'a. Korzystając z uzyskanych na zajęciach wyników dla wariancji operatora położenia, sprawdź spełniania zasady nieoznaczoności dla wszystkich stanów własnych.

Zadanie 2 Zapisz funkcje własne oscylatora harmonicznego w reprezentacji pędowej.

Zadanie 3 Rozważ oscylator harmoniczny w stanie podstawowym. W pewnej chwili przez bardzo krótki czas δt przyłożono to cząstki bardzo dużą siłę $F = \gamma/\delta t$. Przyjmując granicę $\delta t \to 0$ (przy czym $\gamma = \text{const}$), zbadaj w jakim stanie znajdzie się cząstka tuż po takim kopnięciu i jak będzie dalej ewoluować.

Zadanie 4 Stan początkowy cząstki o masie m w potencjale oscylatora harmonicznego o częstotliwości własnej ω jest dany przez:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|n-1\rangle - |n\rangle \right) .$$

a) Po jakim czasie t stan ten przeewoluuje do stanu $|\psi(t)\rangle$, ortogonalnego do $|\psi(0)\rangle$?

b) Znaleźć wartości oczekiwane operatorów $\hat{x}$ i $\hat{p}$ w stanie $|\psi(t)\rangle$.

Zadanie 5 Korzystając z faktu, że n-ty stan wzbudzony oscylatora harmonicznego związany jest z $n-1$-szym relacją:

$$|n\rangle = \frac{a^\dagger}{\sqrt{n}} |n-1\rangle$$

oraz znając funkcję falową stanu podstawowego w reprezentacji położeniowej:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{2m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}x^2 m\omega/\hbar}$$

napisz

a) Funkcję falową $\psi_2(x)$ drugiego stanu wzbudzonego w reprezentacji położeniowej

b) Tę samą funkcję falową w reprezentacji pędowej. Czy możesz sformułować ogólną obserwację dotyczącą reprezentacji położeniowej i pędowej stanów własnych oscylatora harmonicznego.

Zadanie 6 Podaj przykładowy rozkład stanów własnych oscylatora harmonicznego $|n\rangle$ jako superpozycję stanów koherentnych $|z\rangle$.

Zadanie 7 Udowodnij, ze stan koherenty można zapisać jako:

$$|z\rangle = D(z)|0\rangle, \quad \text{gdzie } \hat{D}(z) = e^{z\hat{a}^\dagger - z^* \hat{a}}$$

jest tzw. operatorem przesunięcia. *Wskazówka.* Skorzystaj z tw. Bakera-Cambella-Haussdorfa.

Zadanie 8 Rozważ stan oscylatora harmonicznego postaci:

$$|\psi(0)\rangle = A(|z\rangle + |-z\rangle),$$

gdzie $z \in \mathbf{C}$ a A jest stałą normalizacyjną. Jest to ciekawy stan, bo dla dużych $|z|$ można myśleć o nim jako o superpozycji kwantowej dwóch różnych „klasycznych" stanów oscylatora harmonicznego—na potrzeby medialne czasem nazywa się go nieco nie precyzyjnie stanem kota Schroedingera.

a) Wyznacz A

b) Oblicz stan oscylatora po czasie t. Po jakim czasie powróci on do stanu początkowego?

Zadanie 9 Znajdź stany własne i energie dwuwymiarowego oscylatora harmonicznego $V = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2)$. Zbadaj degenerację poziomów w przypadku oscylatora izotropowego $\omega_x = \omega_y$.

Zadanie 10 Znajdź stany własne i energie w nieskończonej trójwymiarowej studni potencjału gdzie $V(\vec{r}) = 0$, dla $0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$, a w pozostałym obszarze $V = \infty$.