Mechanika Kwantowa R 2016/2017, Seria 7

Zadanie 1 Rozważ potencjał postaci

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & x > 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases}$$

Stosując metodę wariacyjną (zastanów się jaką funkcję próbną wybrać), postaraj się uzyskać jak najlepsze oszacowanie na energię stanu podstawowego. Spróbuj znaleźć energię stanu podstawowego stosując metodę WKB. Porównaj wyniki.

Zadanie 2 Znaleźć w przybliżeniu WKB poziomy energii cząstki o masie m poruszającej się w polu jednowymiarowego potencjału:

$$V(x) = V_0 \mathrm{ctg}^2 \frac{\pi x}{a},$$

dla $0 < x < a$.

Zadanie 3 Stosując przybliżenie WKB znajdź współczynnik transmisji cząstki o masie m i energii $0 < E < V_0$przez barierę potencjału postaci:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}.$$

Zadanie 4 W chwili początkowej cząstka o masie m znajduje się w stanie podstawowym nieskończonej studni potencjału o ścianach w punktach $x = 0$ i $x = a$. Rozważ dwie sytuacje:

a) Ściana w punkcie $x = a$ jest bardzo powoli przesuwana do punktu $x = 8a$. Znajdź energię i funkcję falową cząstki na koniec tego procesu.

b) Ściana w punkcie $x = a$ jest bardzo gwałtownie przesunięta do punktu $x = 8a$. Znajdź prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w stanie podstawowym nowej studni oraz w stanie pierwszym wzbudzonym. Jaka jest średnia energia cząstki w stanie końcowym.

Zadanie 5 Cząstka o masie m znajdująca się w stanie podstawowym trójwymiarowego, izotropowego oscylatora harmonicznego o częstości ω począwszy od chwili $t = 0$ jest poddana potencjałowi zaburzającemu $V'(t) = ax\cos(\omega' t)$. Oszacuj w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń prawdopodobieństwo w chwili t znalezienia cząstki w stanie innym niż stan podstawowy.

Zadanie 6 Rozważ dwie cząstki o spinie 1/2, które w chwili $t = 0$ zostały przygotowane w stanie $|s_{1,z} = +\hbar/2\rangle \otimes |s_{2,z} = -\hbar/2\rangle$. Następnie cząstki ewoluują pod wpływem Hamiltonianu:

$$H = \frac{4\Delta}{\hbar^2} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2.$$

a) Znajdź stan cząstek w chwili t

b) Rozwiąż ten problem stosując rachunek zaburzeń zależny od czasu w pierwszym rzędzie, przyjmując że zaburzenie w postaci H zostało włączono w chwili $t = 0$. Porównaj z rozwiązaniem ścisłym.

Zadanie 7 Cząstka o masie m ulega rozproszeniu na płytkim potencjale gaussowskim:

$$V(r) = V_0 e^{-r^2/a^2},$$

gdzie α jest stałą określającą zasięg potencjału. Oblicz amplitudę rozpraszania $f(\theta)$ i rożniczkowy przekrój czynny w przybliżeniu Borna. Pokaż, że w granicy fal długich (powolne cząstki) przekrój czynny jest izotropowy w przestrzeni i oblicz całkowity przekrój czynny w tej granicy. Izotropowość rożniczkowego przekroju czynnego wskazuje na dominującą rolę fali s w rozpraszaniu. Porównaj uzyskaną wartość przekroju czynnego, z przekrojem czynnym klasycznej cząstki punktowej rozpraszającej się na sztywnej kuli o promieniu α.

Zadanie 8 Rozważ cząstkę o masie m i ładunku e rozpraszaną na dipolu, składającym się z ładunków e i $-e$ odległych od siebie o $2a$, o kierunku prostopadłym do kierunku cząstki padającej. W przybliżeniu Borna wyznacz różniczkowy przekrój czynny dla takiego rozpraszania. W jakich kierunkach różniczkowy przekrój czynny będzie największy?

Zadanie 9 Rozważ sferycznie symetryczny potencjał:

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{, dla } r \geq R \\ V_0 & \text{, dla } r < R \end{cases}$$

Stosując metodę fal parcjalnych pokaż, że w granicy $|V_0| \ll E = \hbar k^2/2m$, $kR \ll 1$ różniczkowy przekrój czynny jest izotropowy a całkowity przekrój czynny ma postać:

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{16\pi}{9} \frac{m^2 V_0^2 R^6}{\hbar^4}$$