# Mechanika Kwantowa R 2016/2017, Seria 7

**Zadanie 1** Ponieważ funkcja ma znikać w $x = 0$ nie jest zbyt rozsądnie brać funkcji Gaussa. Bierzemy więc

$$\psi(x) = \begin{cases} Axe^{-\alpha^2 x^2/2} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

. Normalizacja daje $A^2 = 4\alpha^3/\sqrt{\pi}$. Wartość oczekiwana energii

$$\langle H \rangle = \frac{3}{4}\left(\frac{\hbar^2\alpha^2}{m} + \frac{m\omega^2}{\alpha^2}\right)$$

Minimalizacja po $\alpha$ dale $\alpha^2 = \frac{m\omega}{\hbar}$ co odpowiada energii $\frac{3}{2}\hbar\omega$ czyli dokładnie pierwszemu stanowi wzbudzonemu pełnego oscylatora. Jest to jednocześnie rozwiązanie ścisłe.

Stosując warunek WKB (jedna ściana sztywna):

$$\int_0^{x_0} p(x)\mathrm{d}x = (n + 3/4)\hbar\pi,$$

gdzie $x_0 = \sqrt{2E/m\omega^2}$, $p(x) = \sqrt{2m(E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2)}$ dostajemy $E = 2(n+3/4)\hbar\omega$, czyli dla $n = 0$, $E = \frac{3}{2}\hbar\omega$. Dostajemy jednocześnie wszystkie pozostałe poziomy poprawnie—co drugi poziom pełnego oscylatora.

**Zadanie 2** Warunek WKB:

$$\int_{x_-}^{x_+} \sqrt{2mE(1 - \frac{V_0}{E}\cot^2\frac{\pi x}{a})} = \hbar\pi(n + \frac{1}{2})$$

gdzie $x_\pm$ spełniają $\pm = \sqrt{V_0/E}\cot(\pi x_\pm/a)$ Po żmudnym całkowaniu (przepraszam za to zadanie...) dostajemy (chyba)

$$E = V_0\left[1 + \frac{\pi\hbar(n + 1/2)}{\sqrt{2mV_0}a}\right]^2.$$

**Zadanie 3** Współczynnik transmisji wynosi w przybliżeniu WKB:

$$T \approx e^{-\frac{2}{\hbar}\int_{x_-}^{x_+}\sqrt{2m[V_0(1-x^2/a^2)-E]}}\mathrm{d}x,$$

gdzie $x_\pm = \pm a\sqrt{1 - E/V_0}$, otrzymujemy:

$$T \approx e^{-\frac{\pi a}{2\hbar}\sqrt{2mV_0}(1-E/V_0)}.$$

**Zadanie 4** W przypadku a) zgodnie z twierdzeniem adiabatycznym stan przeewoluje do stanu podstawowego nowej studni czyli $\psi(x) = \sqrt{\frac{1}{4a}}\sin(\pi x/8a)$, a odpowiadająca temu stanowi energia wynosi $E = \frac{\hbar^2\pi^2}{128ma^2}$, czyli 64 razy mniejsza niż w stanie początkowym.

W przypadku $b$), postać funkcji falowej się nie zmieni. Ponieważ energia w tym przypadku to wyłącznie wkład od energii kinetycznej wartość oczekiwana energii pozostanie niezmieniona $\langle H\rangle = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$. Prawdopodobieństwo, że zmierzymy naszą cząstkę w stanie podstawowym nowej studni:

$$p_1 = \frac{2}{a}\frac{1}{4a}|\int_0^a \sin(\pi x/8a)\sin(\pi x/a)|^2 = \frac{512(2-\sqrt{2})}{3969\pi^2} \approx 0.76\%$$

W pierwszym stanie wzbudzonym:

$$p_1 = \frac{2}{a}\frac{1}{2a}|\int_0^a \sin(\pi x/4a)\sin(\pi x/a)|^2 = \frac{64}{225\pi^2} \approx 2.9\%$$

**Zadanie 5** Stan początkowy to $|0,0,0\rangle$. Rozważając $\langle n_x, n_y, n_z|V'|0,0,0\rangle$ i pamiętając, że $x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_x + a_x^\dagger)$ widzimy, że jedny niezerowy wkład da stan $|1,0,0\rangle V'|0,0,0\rangle$. Amplituda przejścia do tego stanu w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń ma postać:

$$c_{100} = \frac{-ia}{\hbar}\int_0^t e^{i\omega t'}\cos\omega' t'\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

Całkując otrzymujemy prawdopodobieństwo przejścia do innego stanu:

$$p = |c_{100}|^2 = \frac{a^2}{8m\omega\hbar}\left|\frac{e^{i(\omega+\omega')t}-1}{\omega+\omega'} + \frac{e^{i(\omega-\omega')t}-1}{\omega-\omega'}\right|^2$$

**Zadanie 6** Zapisujemy jawnie hamiltonian w bazie $|s_{1,z}\rangle \otimes |s_{2,z}\rangle$

$$H = \Delta(\sigma_x\otimes\sigma_x + \sigma_y\otimes\sigma_y + \sigma_z\otimes\sigma_z) = \Delta\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Widać stąd, że stanami własnymi są $|+\rangle\otimes|+\rangle$, $|\psi_\pm\rangle = (|+\rangle\otimes|-\rangle \pm |-\rangle\otimes +)/\sqrt{2}$, $|-\rangle\otimes|-\rangle$ z odpowiednimi wartościami własnymi $\Delta, \Delta, -3\Delta, \Delta$. Stan początkowy możemy zapisać jako

$$\psi(0) = |+\rangle\otimes|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle)$$

Stąd stan po czasie $t$ ma postać

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\Delta t/\hbar}|\psi_+\rangle + e^{i3\Delta t/\hbar}|\psi_-\rangle) \equiv \cos(2\Delta t/\hbar)|+\rangle\otimes|-\rangle - i\sin(2\Delta t/\hbar)|-\rangle\otimes|+\rangle$$

Czyli prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w stanie $|-\rangle\otimes|+\rangle$ będzie $p_{|+-\rangle\to|-+\rangle} = \sin^2(2\Delta t/\hbar)$.

Licząc to sam prawdopodbienstwo stosując rachunek zaburzeń (zauważmy, że hamiltonian niezaburzony jest trywialny) dostajeym $p_{|+-\rangle\to|-+\rangle} = |\frac{-i}{\hbar}\int_0^t \Delta \mathrm{d}t|^2 = \frac{4t^2\Delta^2}{\hbar^2}$. Co zgadza sie w pierwszym rzedzie z rozwiązaniem ścisłym.

**Zadanie 7** Amplituda rozpraszania w przybliżeniu Borna:

$$f(\theta) = \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \mathrm{d}^3r' V_0 e^{-r'^2/a^2} e^{i(\vec{k}_0-\vec{k})\vec{r'}}$$

Mimo, że potencjał jest sferycznie symetryczny wygodniej bedzie całkowac w układzie kartezjańskim bo $e^{-r^2/a^2} = e^{-x^2/a^2}e^{-y^2/a^2}e^{-z^2/a^2}$. Oznaczając $\vec{K} = \vec{k}_0 - \vec{k}$ dostajemy:

$$f(\theta) = \frac{mV_0}{2\pi\hbar^2}(\pi a^2)^{3/2}e^{-K^2a^2/4}$$

Oznaczając kąt rozporszenia (kat pomiędzy $\vec{k}_0$) i $\vec{k}$ jako $\theta$, mamy $K^2 = 4k_0^2\sin^2\theta/2$ i ostatecznie różniczkowy przekrój czynny

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{\pi V_0^2 m^2 a^6}{4\hbar^2}e^{-2k_0^2a^2\sin^2\theta/2}$$

w granicy fal długich $k_0 a \ll 1$ eksponens przybliżamy jedynką i otrzymujemy całkowy przekrój czynny równy:

$$\sigma = \frac{2\pi^2 V_0^2 m^2 a^6}{\hbar^4}.$$

**Zadanie 8** Niech $\vec{a}$, $\vec{-a}$ oznaczają odpowiednio wektory zaczepione w początku układu wzpółrzędnych a wsakzujące położenia ładunków odpowiednio $+e$ i $-e$ tworzących dipol. Zapisujemy amplitudę rozpraszania:

$$f(\theta) = \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \mathrm{d}^3r' e^2\left(\frac{1}{|\vec{r'}-\vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{r'}+\vec{a}|}\right)e^{i\vec{K}\vec{r'}}$$

Całkując dwa człony pod całką robimy odpowiednio zamiany zmiennych $\vec{r'}-\vec{a} \to \vec{r'}$ i $\vec{r'}+\vec{a} \to \vec{r'}$ dostajemy:

$$f(\theta)\frac{me^2}{2\pi\hbar^2}\int \mathrm{d}^3r'\frac{1}{r'}\left(e^{i\vec{K}(\vec{r'}+\vec{a})} - e^{i\vec{K}(\vec{r'}-\vec{a})}\right).$$

Całkowanie sprowadza się więc do całkowania potencjału Coulmbowskiego. Przyjmujemy kierunek osi $z$ w kierunku $\vec{k}_0$, a keirunek dipola w kierunku $x$. Otrzymujmemy:

$$f(\theta) = \frac{me^2}{2\hbar^2k_0^2\sin^2\theta/2}\left(e^{i\vec{K}\vec{a}} - e^{i\vec{K}\vec{a}}\right) = \frac{ime^2}{\hbar^2k_0^2\sin^2\theta/2}\sin(k_0a\sin\theta\cos\varphi)$$

Czyli różniczkowy przekrój czynny $\frac{m^2e^4}{\hbar^4k_0^4\sin^4\theta/2}\sin^2(k_0a\sin\theta\cos\varphi)$