Mechanika Kwantowa R 2016/2017, Seria 8, odpowiedzi

Zadanie 1 Stan układu i otoczenia po zadziałaniu operacji U ma psotać:

$$|\Psi'\rangle_{SE} = U|\Psi\rangle_{SE} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{2}e^{i\varphi}(|1\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{e^{i\varphi}}{2}|1\rangle\right) \otimes |0\rangle + \frac{e^{i\varphi}}{2}|0\rangle \otimes |1\rangle$$

Zredukowana macierz gęstości:

$$\rho_S = \mathrm{Tr}_E(|\Psi'\rangle_{SE}\langle\Psi'|) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{e^{-i\varphi}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{e^{i\varphi}}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Jako miarę dekoherencji można przyjąć jakąś miarę zmieszania stanu ρ_S czyli tego jak różni się on od stanu czystego. Można np. wziąć $\mathrm{Tr}(\rho^2)$, która to wielkość dla stanów czystych jest 1 a dla mieszanych będzie mniejsza od 1. Można wziąć też np. entropię von Neumana $S(\rho) = -\mathrm{Tr}(\rho \log \rho)$ która jest 0 dla stanów czystych i większa od 0 dla stanów mieszanych. Miary te zależą jedynie od wartości własnych ρ_S, które wynoszą $1/4(2 \pm \sqrt{3})$ i nie zależą od φ. Czyli wszystkie stany z równika sfery Blocha doznają tak samo silnej dekoherencji.

Zadanie 2 Liczymy wartości oczekiwane

$$\langle \sigma_i \otimes \sigma_j \rangle = \mathrm{Tr}(\rho \sigma_i \otimes \sigma_j) = -p\delta_{ij}$$

Widzimy, że korelacje są identyczne jak dla stanu singletowego a jedynie osłabione o czynnik p. Z tego wynika, że optymalne kierunki pomiaru spinu będą takie same a wielkość pojawiająca sie w nierówności Bella CHSH będzie wynosić:

$$\langle C \rangle = p2\sqrt{2}$$

Oznacza to, że nierówności Bella będą łamane pod warunkiem, ze $p > 1/\sqrt{2}$.

Zadanie 3 Stan ten ma doskonałe antykorelacje w kierunku z, $\langle \Psi_p|\sigma_z \otimes \sigma_z|\Psi_p\rangle = -1$, ale w kierunku x juz nie będzie tak doskonałych antykorelacji: $\langle \Psi_p|\sigma_x \otimes \sigma_x|\Psi_p\rangle = -2\sqrt{p(1-p)}$. Jeśli weźmiemy kierunki optymalne dla stanu Ψ_- otrzymamy:

$$\langle C \rangle = -\sqrt{2}(1 + 2\sqrt{p(1-p)})$$

Widzimy, że łamanie nierówności Bella zachodzi jedynie dla

$$p(1-p) > \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2, \quad p \in [p_-, p_+], \quad p_\pm = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{2(\sqrt{2}-1)}\right)$$

Nie złamiemy więc nierówności w ten sposób dla dowolnych stanów z $p \neq 0, 1$. Rozważmy jednak pomiary w następujacych kierunkach $\vec{a}_1 = (1,0,0)$, $\vec{a}_2 = (0,0,1)$, $\vec{b}_1 = (\cos\theta, 0, \sin\theta)$ $\vec{b}_2 = (\cos\theta, 0, -\sin\theta)$ (intuicja, będziemy brać małe θ, bo chcemy bardziej wykorzystywać kierunek z w którym są silniejsze antykorelacje niż x). Dla takiego wyboru otrzymujemy:

$$\langle C \rangle = -2(\cos\theta + 2\sqrt{p(1-p)}\sin\theta)$$

minimaliujemy po θ, i otrzymujemy minimum dla $\theta = \arctan(\sqrt{p(1-p)})$ o wartości

$$C = \frac{4p^2 - 4p - 2}{\sqrt{1 + p - p^2}}$$

które jest mniejsze od -2 dla dowolnych $p \neq 0, 1$.

Zadanie 4 Możemy myśleć o otrzymywanym przez odbiorcę jako o:

$$\rho' \int \mathrm{d}U \, U \otimes U \rho U^\dagger \otimes U^\dagger$$

Gdzie $\rho = |+\rangle\langle+| \otimes |+\rangle\langle+|$ to stan wysyłany przez nadawce, a U reprezentuje transformację spinu pod wpływem obrotu - macierz $SU(2)$. Należy jeszcze doprecyzować, co oznacza $\mathrm{d}U$ czyli całkowanie po wszystkich obrotach, co ma reprezentować uśrednienie po przypadkowym obrocie układu współrzędnych. Jedyną naturalną miarą jest miara Haara na grupie $SU(2)$. Uśrednienie z miarą Haara spowoduje, że stan końcowy będzie sumą prostą macierzy jednostkowych działających nad podprzestrzeniami na których działają nieredukowalne reprezentacje grupy SU(2). W tym przypadku będzie to podprzestrzeń singletowa i trypletowa:

$$\rho' = p \mathbb{1}_0 + \frac{(1-p)}{3} \mathbb{1}_1$$

gdzie $\mathbb{1}_0 = |\Psi_-\rangle\langle\Psi_-|$ jest rzutem na stan singletowy, a $\mathbb{1}_1$ jest rzutem na trójwymiarową podprzestrzeń trypletową. Aby wyznaczyć współczynnik p wystarczy zauważyć, że uśrednianie nie zmienia wyrażeń $\mathrm{Tr}(\rho \mathbb{1}_0)$, $\mathrm{Tr}(\rho \mathbb{1}_1)$ (niezmienniczość podprzestrzeni względem działania reprezentacji) a w związku z tym $p = \mathrm{Tr}(\rho \mathbb{1}_0) = 0$, czyli ostatecznie

$$\rho' = \frac{1}{3} \mathbb{1}_1.$$

Widzimy, że jeśli wyślemy stan z przestrzeni trypletowej to pozostanie od w przestrzeni trypletowej. Jeśli wyślemy stan z przestrzeni singletowej to pozostanie on w przestrzeni singletowej. Oznacza to, że wysyłając parę spinów możemy przesłać jeden bit informacji, mimo braku uzgodnionego układu odniesienia!