Zadanie 1

Szukamy stanów w postaci $|l;m\rangle$ $l \in \{0,1,2\}$, $m \in [-l, l] \wedge \mathbb{Z}$

$m=2$ będzie tylko dla $m_1 = 1 = m_2$, czyli $|2;2\rangle = |1,1\rangle$

$S_- = S_{-1} \otimes id + id \otimes S_{-2}$

$S_- |2;2\rangle = |2;1\rangle \cdot \hbar \sqrt{2\cdot 3 - 2\cdot 1} = |2;1\rangle \cdot \hbar \cdot 2$

$\parallel$

$S_- |1,1\rangle = \hbar \sqrt{1\cdot 2 - 1\cdot 0} \left(|0,1\rangle + |1,0\rangle\right)\hbar$, czyli

$|2;1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0,1\rangle + |1,0\rangle\right)$

$|2;0\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{6}} S_- |2;1\rangle = \frac{1}{2\hbar\sqrt{3}} \cdot \hbar \left(\sqrt{1\cdot 2 - 0\cdot(-1)} |-1,1\rangle + \sqrt{2} |0,0\rangle + \sqrt{2} |0,0\rangle + \right.$

$\left. + \sqrt{2} |1,-1\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(|1,-1\rangle + |-1,1\rangle + 2|0,0\rangle \right)$

$|2;-1\rangle = \frac{1}{6} \cdot \left(|0,-1\rangle \sqrt{2} + |-1,0\rangle \sqrt{2} + 2\cdot\sqrt{2} |0,-1\rangle + 2\sqrt{2} |-1,0\rangle \right) =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(|0,-1\rangle + |-1,0\rangle \right)$

$|2;-2\rangle = |-1,-1\rangle$

stan $|1;1\rangle = \alpha|0,1\rangle + \beta|1,0\rangle$, bo całkowity rzut momentu pędu tego stanu na oś z wynosi +1, jest też ortogonalny do $|2;1\rangle$, czyli $\alpha = -\beta$ i $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, najłatwiej zrealizować to poprzez $\alpha = -\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$|1;1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0,1\rangle - |1,0\rangle \right)$

$|1;0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1\cdot 2 - 1\cdot 0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt{2} |-1,1\rangle + \sqrt{2}|0,0\rangle - \sqrt{2}|0,0\rangle - \sqrt{2}|1,-1\rangle \right) =$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|-1,1\rangle - |1,-1\rangle \right)$

$|1;-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[\sqrt{2} |-1,0\rangle - \sqrt{2}|0,-1\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|-1,0\rangle - |0,-1\rangle \right)$

Wektor $|0;0\rangle$ jest ortogonalny do wszystkich pozostałych, czyli

$|0;0\rangle = a|0,0\rangle + b|-1,1\rangle + c|1,-1\rangle$, $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1$,

$2a + b + c = 0$, $b - c = 0 \Rightarrow a = -b = -c = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e^{i\varphi}$, weźmy $\varphi = 0$, wtedy

$|0;0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|0,0\rangle - |1,-1\rangle - |-1,1\rangle \right)$, na co działając S_- dostajemy 0 tak jak się spodziewamy.

6p

$$\rho_{AB} = \frac{1}{3}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} {\scriptstyle -1,-1} & {\scriptstyle -1,0} & {\scriptstyle -1,1} & & & & & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & 1 & & -1 & & 1 & & \\ \hline & & & & & & & & \\ & & -1 & & 1 & & -1 & & \\ & & & & & & & & \\ \hline & & 1 & & -1 & & 1 & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \end{array}\right] \end{array}$$ i zera w pozostałych miejscach

Można od razu powiedzieć, że stan o całkowitym spinie 0 jest izotropowy, więc prawdopodobieństwo w każdym kierunku jest takie samo, a ponieważ dla kierunku z jest taka sama szansa na +1, 0, -1 to dla każdego te prawdopodobieństwa wynoszą $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$.

$\cancel{S_{\hat{n}} = \sin\theta\cos\varphi\, S_x + }$

+ ? ρ

$$\rho_A = \frac{1}{3}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \frac{1}{3}\mathbb{1}.$$

Aby napisać ~~rozkład~~ prawdopodobieństwa ~~wyników~~ wyników nutów na oś $\hat{n}$ musimy znać macierz $L_{\hat{n}} = \cos\theta\, L_z + \sin\theta\,(\cos\varphi\, L_x + \sin\varphi\, L_y) =$

$$= \cos\theta\, L_z + \sin\theta \left(\cos\varphi \left(\frac{L_+ + L_-}{2}\right) - \sin\varphi \left(\frac{L_+ - L_-}{2i}\right) \right) =$$

$$= \cos\theta\, L_z + \sin\theta \left(e^{i\varphi}\frac{L_+}{2} + e^{-i\varphi}\frac{L_-}{2} \right) = \begin{bmatrix} -\cos\theta & & \\ & 0 & \\ & & \cos\theta \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \begin{bmatrix} 0 & e^{+i\varphi} & 0 \\ e^{-i\varphi} & 0 & e^{+i\varphi} \\ 0 & e^{-i\varphi} & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\cos\theta & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\, e^{+i\varphi} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\, e^{-i\varphi} & 0 & e^{i\varphi}\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{e^{-i\varphi}\sin\theta}{\sqrt{2}} & \cos\theta \end{bmatrix} \end{array}.$$ Szukamy wektora własnego

$L_{\hat{n}}$ o wartości 0, $\underbrace{L_{\hat{n}}}_{\text{własny}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, z drugiego równania $a e^{-i\varphi} = -c e^{+i\varphi}$, ~~z pierwszego~~

czyli wektor własny to $\begin{bmatrix} e^{+i\varphi} \\ \operatorname{ctg}\theta\sqrt{2} \\ -e^{-i\varphi} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 + 2\operatorname{ctg}^2\theta}} = \begin{bmatrix} \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \\ \cos\theta \\ -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \end{bmatrix} \equiv B$. Szansa na

+

uzyskanie wartości 0 to $B^+ \rho_A B = \frac{1}{3}\|B\| = \frac{1}{3}$, analogicznie dla +1, -1.

c) Jeżeli całkowity spin był 0 a $\underset{\text{nut}}{\text{spin}}$ drugiej był równy 1 to pierwsza musimy zmierzyć ~~jako~~ jako -1. Jeżeli nie z tylko $\hat{n}$, to spin $\overset{\text{pierwszej}}{}$ jest wzdłuż $-\hat{n}$ i mierzymy wzdłuż z, czyli tak, jakby był wzdłuż z i mierzymy wzdłuż $\hat{n}$. ~~Szansa~~ wtedy

$\rho_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B^+ \rho_A B = \frac{\sin^2\theta}{2} = p_0$, $p_1 \cdot 1 + p_0 \cdot 0 + p_{-1}\cdot(-1) = \operatorname{Tr}_A(L_{\hat{n}}\rho_A) = \cos\theta$,

czyli $p_1 - p_{-1} = \cos\theta$, $p_1 + p_{-1} = 1 - p_0 = \cancel{\frac{1+\cos^2\theta}{2}}$ ~~czy~~ $1 - \frac{\sin^2\theta}{2}$, czyli $p_1 = \frac{1}{2} + \frac{\cos\theta}{2} - \frac{\sin^2\theta}{4}$, $p_{-1} = \frac{1}{2} - \frac{\cos\theta}{2} - \frac{\sin^2\theta}{4}$

Chyba, że chodziło o to, że obydwie osie zamieniamy na $\hat{n}$, czyli obydwie cząstki mierzymy wzdłuż tej samej osi, wtedy z izotropowości ~~m~~ jest tak samo, co gdyby obie były wzdłuż z, czyli zmierzymy -1

+ 2p

Zad. 2.

$$\vec{B} = B_0 \hat{e}_z + B\cos(\omega t)\hat{e}_x \qquad B_0 = 1,4\,T$$

$$B = 10^{-3}\,T$$

$$H = -\gamma \vec{B}\cdot\vec{S}$$

a)

$$H = -\gamma\left(B_0 \tfrac{1}{2}\hbar \hat{\sigma}_z + B\cos(\omega t)\tfrac{1}{2}\hbar\hat{\sigma}_x\right)$$

$|\psi_0\rangle = |+\rangle$ – w bazie S_z, więc $\hat{\sigma}_z$

$$H_0 = -\frac{\gamma\hbar B_0}{2}\hat{\sigma}_z, \qquad H_1(t) = -\frac{\gamma B\hbar}{2}\hat{\sigma}_x\cos(\omega t)$$

$$|\psi_0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad t=0. \qquad E_0 = E_+ = -\frac{\gamma\hbar B_0}{2}$$

$$E_- = +\frac{\gamma\hbar B_0}{2}$$

$$c_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^{t_0} e^{i\omega_{ni}t'} V_{ni}(t')\,dt'$$

$$V_{ni}(t') = V_{-+}(t') = \langle -|H_1|+\rangle$$

$$\omega_{-+} = \frac{1}{\hbar}(E_- - E_+)$$

$$\langle -|H_1|+\rangle = -\frac{\gamma B\hbar}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cos(\omega t) = -\frac{\gamma B\hbar}{2}\cos(\omega t)$$

$$c_-^{(1)}(t_0) = +\frac{i}{\hbar}\int_0^{t_0} e^{i\omega_{-+}t'}\frac{\gamma B\hbar}{2}\cos(\omega t')\,dt' = \frac{i\gamma B}{4}\int_0^{t_0} dt'\, e^{i\omega_{-+}t'}\left(e^{i\omega t'} + e^{-i\omega t'}\right) =$$

$$= \frac{i\gamma B}{4}\left[\frac{1}{i(\omega_{-+}+\omega)}\left(e^{i(\omega_{-+}+\omega)t_0} - 1\right) + \frac{1}{i(\omega_{-+}-\omega)}\left(e^{i(\omega_{-+}-\omega)t_0} - 1\right)\right] =$$

~~$|c_-^{(1)}(t_0)|^2 = \frac{\gamma^2 B^2}{16}\left[\frac{\sin^2((\omega_{-+}+\omega)t_0)}{(\omega_{-+}-\omega)^2} + \frac{\sin^2((\omega_{-+}-\omega)t_0)}{(\omega_{-+}-\omega)^2}\right]$~~

$$= \frac{\gamma B}{2}\left[\left(e^{i\frac{\omega_{-+}+\omega}{2}t_0}\frac{\sin\left(\frac{\omega_{-+}+\omega}{2}t_0\right)}{\omega_{-+}+\omega}\right) + e^{i\frac{\omega_{-+}-\omega}{2}t_0}\frac{\sin\left(\frac{\omega_{-+}-\omega}{2}t_0\right)}{\omega_{-+}-\omega}\right]$$

prawdopodobieństwo $= |c_-^{(1)}(t_0)|^2 =$

$$= \frac{\gamma^2B^2}{4}\left\{\frac{\sin^2\left(\frac{\omega_{-+}+\omega}{2}t_0\right)}{(\omega_{-+}+\omega)^2} + \frac{\sin^2\left(\frac{\omega_{-+}-\omega}{2}t_0\right)}{(\omega_{-+}-\omega)^2} + \frac{\sin\left(\frac{\omega_{-+}+\omega}{2}t_0\right)\sin\left(\frac{\omega_{-+}-\omega}{2}t_0\right)}{(\omega_{-+}+\omega)(\omega_{-+}-\omega)}\left[e^{-i\omega t_0} + e^{i\omega t_0}\right]\right\}$$

$$= \frac{\gamma^2B^2}{4}\left\{\frac{\sin^2\left(\frac{\omega_{-+}+\omega}{2}t_0\right)}{(\omega_{-+}+\omega)^2} + \frac{\sin^2\left(\frac{\omega_{-+}-\omega}{2}t_0\right)}{(\omega_{-+}-\omega)^2} + 2\cos(\omega t)\frac{\sin\left(\frac{\omega_{-+}+\omega}{2}t_0\right)\sin\left(\frac{\omega_{-+}-\omega}{2}t_0\right)}{(\omega_{-+}+\omega)(\omega_{-+}-\omega)}\right\}$$

---

b)

$$\omega \approx \omega_{-+} = \frac{1}{\hbar}(E_- - E_+) = \frac{1}{\hbar}\gamma\hbar B_0 = \underline{\gamma B_0}$$ – wtedy człony $\frac{1}{(\omega_{-+}-\omega)^2}$ dają duży wkład

+

c) $\omega_{-+} \approx \omega \Rightarrow$ dominuje człon $\frac{1}{(\omega_{-+}-\omega)^2}$, reszta pomijamy

$$P \approx \frac{\gamma^2 B^2}{4} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega_{-+}-\omega}{2} t\right)}{(\omega_{-+}-\omega)^2}$$

d) $\cos(\alpha t) \approx 1$, $\sin(\alpha t) \approx \alpha t$ dla małych t.

$$\cancel{P(t) \approx \frac{\gamma^2 B^2}{4}\left\{\frac{\left(\frac{\omega_{-+}+\omega}{2}t\right)^2}{(\omega_{-+}+\omega)^2} + \frac{\left(\frac{\omega_{-+}-\omega}{2}t\right)^2}{(\omega_{-+}-\omega)^2}\right\}}$$

$$P \approx \frac{\gamma^2 B^2}{4} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega_{-+}-\omega}{2} t\right)}{(\omega_{-+}-\omega)^2} \approx \frac{\gamma^2 B^2}{4} \frac{\left(\frac{\omega_{-+}-\omega}{2} t\right)^2}{(\omega_{-+}-\omega)^2} = \frac{\gamma^2 B^2}{16} t^2$$

$$P = 0{,}01 = \frac{\gamma^2 B^2}{16} t^2$$

$$t^2 = 0{,}16 \cdot \frac{1}{\gamma^2 B^2} = 0{,}16 \cdot \left(\frac{1}{2{,}67}\right)^2 \cdot 10^{-16}\, 10^6 \ \frac{1}{s^2 T^2} =$$

$$t = \frac{1}{2{,}67}\sqrt{0{,}16} \cdot 10^{-5}\ s =$$

$$= \frac{0{,}4}{2{,}67} \cdot 10^{-5}\ s = \frac{4}{2{,}67} \cdot 10^{-6}\ s$$

$1{,}4$
$4 : 2{,}67$
$1{,}33$
$1{,}16$

$$\underline{\underline{t \approx 1{,}4 \cdot 10^{-6}\ s}}$$

Laplasjan we współrzędnych sferycznych wraz z operatorem L^2 w tych współrzędnych daje równanie na część radialną (z równ. Schrödingera):

$$V + -\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rR_l) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}R_l = ER_l.$$ W przybliżeniu fali s kładziemy $l=0$.

Dostajemy: $V + -\frac{\hbar^2}{2m}(rR)'' = E(rR) \Rightarrow (rR)'' - \frac{V_0 r\delta(r-a)R(r)2m}{\hbar^2} = \frac{E(Rr)2m}{\hbar^2}$

Scałkujmy obustronnie wokół $r=a$ i przejdźmy do granicy:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a-\frac{\varepsilon}{2}}^{a+\frac{\varepsilon}{2}}\left\{(rR)'' - \frac{2mV_0}{\hbar^2}[rR(r)]\delta(r-a)\right\}dr = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a-\frac{\varepsilon}{2}}^{a+\frac{\varepsilon}{2}} -\frac{E(Rr)2m}{\hbar^2} \to 0$$

$$\Rightarrow (rR)'\Big|_{a^-}^{a^+} - \frac{2mV_0}{\hbar^2}aR(a) = 0 \Rightarrow [rR(r)]'(a^+) - [rR(r)]'(a^-) = \frac{2mV_0}{\hbar^2}aR(a).$$

Rozwiążmy teraz to równanie poza deltą. (Na zewnątrz i w środku ogólna postać będzie ta sama). $\varrho = rR(r)$ $\quad \varrho'' = -\underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{k^2}\varrho(r)$. (*) Rozpraszanie: $E>0,\ k>0$

$$\Rightarrow \varrho_{wewn} = A\sin kr + B\cos kr. \qquad \varrho_{zewn} = E\sin kr + F\cos kr.$$

Widzimy, że przy $r\approx 0$ $\frac{\cos kr}{r}\approx\frac{1}{r}$. $\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(r)$, ale tutaj nie ma delty w zerze w potencjale, która mogłaby to zrównoważyć, czyli $B=0$. (sprzeczność z (*))

$$R_w = \frac{A\sin kr}{r} \quad R_z = E\frac{\sin kr}{r} + F\frac{\cos kr}{r}.$$

Warunki na $r=a$: równość funkcji i skok pochodnej. (harmoniki pomijamy: takie same)

1) $\frac{A\sin ka}{a} = E\sin ka + F\cos ka$ $\qquad$ 2) $\underbrace{\frac{2mV_0}{\hbar^2 k}}_{\alpha}A\sin ka = E\cos ka\,\cancel{k} - F\cancel{k}\sin ka - A\cos ka\,k$

$$\Rightarrow \alpha[E\sin ka + F\cos ka] = E\cos ka - F\sin ka \Rightarrow E(\cos ka - \alpha\sin ka) = F(\alpha\cos ka + \sin ka)$$

$$\Rightarrow F = E\frac{\cos ka - \alpha\sin ka}{\alpha\cos ka + \sin ka} \overset{ka\ll 1}{\approx} E\frac{1-\alpha ka}{\alpha + ka} = \beta E$$

$$\psi(r) = P_0(\cos\theta)\left[\frac{1}{r}E\sin kr + \beta E\cos kr\frac{1}{r}\right]$$ W $ka \ll 1$ mamy:

$$Aka = Eka + F \qquad \alpha Aka = E - Fka - A \Rightarrow A = E + \frac{F}{ka} \Rightarrow A(ka\alpha + 1) = E - Fka$$

$$\Rightarrow (E + \frac{F}{ka})(ka\alpha + 1) = E - Fka \Rightarrow Eka\alpha + \cancel{E} + F\alpha + \frac{F}{ka} = \cancel{E} - Fka \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = -E\frac{k^2a^2\alpha}{(\alpha ka + 1 + k^2a^2)} \approx -E\frac{k^2a^2\alpha}{\alpha ka + 1} = -E\,\frac{\frac{2mV_0}{\hbar^2}a^2}{\left(1 + \frac{2mV_0}{\hbar^2}a\right)}\cdot k = E\rho ka \gg$$

Jeżeli $x = \frac{2mV_0}{\hbar^2}a$, to możemy zapisać $\beta = \frac{x}{1+x} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$. dla $x>0$ $\beta<1$.

Wtedy $\beta ka \ll 1$, bo $ka \ll 1$.

Nasze rozwiązanie $\psi(r,\theta,\varphi) = P_0(\cos\theta)\frac{1}{k}(E\sin kr - E\beta ka\cos kr)$.

Porównujemy z asymptotyczną formą rozwiązania dla $l=0$:

$P_0(\cos\theta)\sum_l \frac{1}{kr}C_l(\sin kr\cos\delta_l + \cos kr\sin\delta_l)$, czyli $-\beta ka = tg\delta_0$ $\beta ka \ll 1$

czyli $\delta_0 = -\beta ka$.

$\delta_0 \ll 1$.

$\sin\delta_l \approx \delta_0 \Rightarrow \sin^2\delta_l \approx \beta^2 a^2 \cdot k^2$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\cdot\sum_{l=0}^{0}\sin^2\delta_0 \Rightarrow 4\pi a^2\beta^2 = \cancel{\frac{4\pi a^2}{1+\frac{\hbar^2}{4m^2V_0^2a^2}}}\ 4\pi a^2\cdot\frac{1}{\left[1+\frac{\hbar^2}{2mV_0a}\right]^2}$$

Dla $V_0 \to 0$ mamy $\sigma \to 0$, co ma sens, bo wtedy nie ma rozpraszania.

Dla $V_0 \to \infty$ mamy $4\pi a^2 = \sigma$, co jest 4 x szybsza klasyczna, co też jest sensowne, odzyskaliśmy już podobne wyniki.