Mechanika Kwantowa R 2017/2018, Seria 1

Zadanie 1 Udowonij, że każdą macierz unitarną można zapisać jako $U = e^{iH}$, gdzie H jest pewną macierzą hermitowską.

Zadanie 2 Udowodnij, że wszystkie macierze hermitowskie 2x2 można zapisać jako rzeczywiste kombinacje macierzy Pauliego σ_i oraz $\mathbb{1}$. Na tej podstawie uzasadnij, że wszystkie fizycznie istotne operacje unitarne w przestrzeni dwuwymiarowej da się zapisać jako $U = e^{i\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\alpha/2}$, gdzie $\alpha \in [0, 2\pi]$. Przypominając, sobię interpretację takich operacji jako reprezentacji trójwymiarowego obrotu o kąt α wokół osi $\vec{n}$ w zespolonej przestrzeni dwuwymiarowej, zastanów się nad przypadkiem $\alpha = 2\pi$. Czy U w tym przypadku jest macierzą jednostkową? Zadumaj się nad tym.

Zadanie 3 Na ćwiczeniach udowodniliśmy, że próbując optymalnie rozróżnić dwa stany kwantowe $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ przesyłane do nas z równymi prawdopodobieństwami, minimalny błąd jaki popełniamy to $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2})$. Uogólnij to rozwiązanie na przypadek, gdy stany są przysyłane z nierównymi prawdopodobieństwami p_1, p_2.

Zadanie 4 Jedną z fizycznych realizacji qubitu, jest polaryzacja fotonu. Możemy myśleć o stanie polaryzacyjnym fotonu jako o superpozycji $|\psi\rangle = \alpha|\leftrightarrow\rangle + \beta|\updownarrow\rangle$—w analogii do superpozycji dwóch fal płaskich o prostopadłych liniowych polaryzacjach, które mogą dawać różne stany polaryzacyjne. Zastanów się w języku sfery Blocha, gdzie będą znajdować się stany o polaryzacji liniowej pod kątem α do poziomu, a gdzie stany o polaryzacji kołowej—przy czym utożsamiamy $|0\rangle = |\leftrightarrow\rangle$, $|1\rangle = |\updownarrow\rangle$. Jeśli teraz chciał(a)byś napisać operację unitarną działającą w przestrzeni Hilberta odpowiadającą obrotowi polaryacji światła wokół osi jego propagacji, jaką postać miałaby ta operacja—porównaj z operacją odpowiadającą obrotowi spinu 1/2 o dany kąt wokół pewnej osi w przestrzeni trójwymiarowej.

Zadanie 5 Rozważ atom dwupoziomowy, gdzie $|0\rangle$, $|1\rangle$ są stanami o określonej energii wynoszącej odpowiednio E i $2E$. Niech stan atomu w chwili początkowej będzie postaci: $|\psi(0)\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$.

a) Znajdź postać stanu w chwili t

b) Po czasie t dokonano pomiaru cząstki, w którym rzutowano stan cząstki na stan początkowy $|\psi(0)\rangle$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że istotnie zmierzono stan $|\psi(0)\rangle$

Zadanie 6 Rozważ układ dwupoziomowy, przygotowany w chwili początkowej w stanie $|0\rangle$. W chwili $t = 0$ został „właczony" następujacy ciąg Hamiltonianów: $\hat{H}_1 = \mu\sigma_x$ dla $t \in (0, \frac{\pi\hbar}{4\mu})$, $\hat{H}_2 = \mu\sigma_y$ dla $t \in (\frac{\pi\hbar}{4\mu}, \frac{\pi\mu}{2\hbar})$ oraz $\hat{H}_3 = \mu\sigma_z$ dla $t \in (\frac{\pi\hbar}{2\mu}, \frac{3\pi\hbar}{4\mu})$. Wyznacz prawdopodobieństwo, że w chwili $t = \frac{3\pi\hbar}{2\mu}$ spin był nadal w stanie $|0\rangle$. Wyznacz pojedynczy Hamiltonian niezależny od czasu i taki, ze jego działanie na cząstkę w przedziale czasowym $t \in (0, \frac{3\pi\hbar}{4\mu})$ doprowadziłby ją do tego samego stanu końcowego, co ciąg Hamiltonianów $\hat{H}_1$, $\hat{H}_2$, $\hat{H}_3$.

Zadanie 7 Na ćwiczeniach omawiany był eksperyment z kwantowym wykrywaniem bomby przy pomocy interfereomtru Macha-Zehndera, gdzie można było z prawdopodobieństwem 1/4 wykryć bombę (która wybucha przy kontakcie z pojedynczym fotonem) bez powodowania wybuchu. Sformułuj równoważny schemat dla ewoluującego qubitu. Przyjmujemy, że bomba wybucha gdy „zmierzy” stan cząstki $|0\rangle$. Wyobrażamy sobie, że qubit możemy przygotować w dowolnym stanie początkowym, oraz że możemy ewoluować go zgodnie z dowolnym Hamiltonianem i kiedy chcemy umieszczamy go w miejscu podejrzanym o istnienie w nim bomby. Czy można ten schemat usprawnić, tak żeby prawdopodobieństwo sukcesu (czyli wykrycie bomby lub stwierdzenie jej nieobecności, nie powodując przy tym wybuchu) było dowolnie bliskie 1. Wskazówka: pomyśl o efekcie Zenona...

Zadanie 8 Rozważ atom dwupoziomowy gdzie Hamiltonian zapisany w bazie $|0\rangle$, $|1\rangle$ ma postać:

$$H = \begin{pmatrix} E & g \\ g & E \end{pmatrix} \tag{1}$$

gdzie E, g pewne parametry rzeczywiste—obecność g może być interpretowana jako pewne zaburzenie sytuacji w której oba poziomy miały tę samą energię E.

a) Znajdź stany własne i energie własne układu

b) Napisz ewolucję czasową stanu $|\psi(t)\rangle$ jeśli w chwili $t = 0$: $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$. Po jakim czasie stan powróci do stanu początkowego

Zadanie 9 Udowodnij, że transformata Fouriera zachowuje iloczyn skalarny funkcji (innymi słowy, że jest operacją unitarną), czyli że:

$$\int \mathrm{d}x\, \psi^*(x)\phi(x) = \int \mathrm{d}p\, \tilde{\psi}^*(p)\tilde{\phi}(p), \quad \tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \mathrm{d}x e^{-ipx/\hbar}\psi(x).$$

Zadanie 10 Rozważ cząstkę swobodną o masie m przygotowaną w stanie opisanym funkcją falową

$$\psi(x) = Axe^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} \tag{2}$$

a) Wyznacz stałą normalizacyjną A

b) Oblicz $\Delta^2 x$, $\Delta^2 p$ i sprawdź spełnienie zasady nieoznaczoności Heisenberga

c) Znajdź funkcję falową tej cząstki po czasie t. Wyznacz, też $\Delta^2 x(t)$, $\Delta^2 p(t)$. Porównaj, czy stan tego typu doznaje szybszego rozpływania się, co analogiczny stan gaussowski, tzn. stan gaussowski o takim samym początkowym rozrzucie położeń.

Zadanie 11 Udowodnij, że dla funkcji $\psi(x)$ czysto rzeczywistej $\langle p\rangle = 0$.

Zadanie 12 Rozważ układ odniesienia X oraz falę elektromagnetyczną falę płaską poruszającą się z prędkością c w kierunku z. Rozważmy następnie wirtualny sześcian o oboku a współporuszający się z tą falą. Oznaczmy przez E energię promieniowania zawartą w tym sześcianie. Następnie rozważmy obserwatora X' poruszającego się z prędkością v w kierunku z względem X. Przechodząc do układu X', wykaż, że w tym układzie odniesienia energia zawarta w wirtualnym sześcianie wynosi $E' = E\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}$. Jest to dokładnie taka sama reguła transformacji jakiej podlega częstotliwość fali elektro-magnetycznej zgodnie z relatywistycznym efektem Dopplera. Pokazuje to, że jeśli faktycznie energia fotonu jest funkcją częstotliwości musi to być zależność o charakterze proporcjonalności — Jest to argument z pracy Einsteina, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik 17, 891 (1905). *Wskazówka*: Transformacje pół e-m przy przejściu do układu primowanego:

$$\vec{\mathcal{E}}'_{\parallel} = \vec{\mathcal{E}}_{\parallel}, \quad \vec{\mathcal{E}}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{\mathcal{E}}_{\perp} + \vec{v}\times\vec{B}\right),$$
$$\vec{\mathcal{B}}'_{\parallel} = \vec{\mathcal{B}}_{\parallel}, \quad \vec{\mathcal{B}}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{\mathcal{B}}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{\mathcal{E}}\right),$$

gdzie $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$, a $\vec{\mathcal{E}}_{\parallel}$, $\vec{\mathcal{E}}_{\perp}$ oznacza składowe równoległe i prostopadłe pola do kierunku wyznaczonego przez $\vec{v}$.