

Mechanika Kwantowa R 2017/2018, Seria 1 - odpowiedzi

Zadanie 3 Minimalny błąd ma postać: $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4p_0p_1|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2})$.

Zadanie 4 Obrót polaryzacji liniowej o kąt α , będzie opisany operacją unitarną $U_\alpha = e^{-i\alpha\sigma_z}$ —zauważmy brak czynnika $1/2$ w wykładniku, w porównaniu z sytuacją gdy mówilibyśmy o obrocie spinu $1/2$ w przestrzeni o kąt α wokół osi z .

Zadanie 5 Stan w chwili t ma postać: $|\psi(t)\rangle = (|0\rangle e^{-iEt/\hbar} + |1\rangle e^{-2iEt/\hbar})/\sqrt{2}$. Prawdopodobieństwo pomiaru $|\psi(0)\rangle$ po czasie t wynosi $p = |\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle|^2 = \cos^2 \frac{Et}{2\hbar}$

Zadanie 6 Kolejne etapy ewolucji odpowiadają: obrotowi stanu wokół osi x o kąt $\pi/2$, obrotowi stanu wokół osi y o kąt $\pi/2$, i obrotowi stanu wokół osi z o kąt $\pi/2$. Ostatecznie stan układu to $|+\rangle_x = (|+\rangle_z + |-\rangle_z)/\sqrt{2}$. To samo moglibyśmy uzyskać ewoluując stan początkowy przez cały czas $\frac{3\pi\hbar}{4\mu}$ z Hamiltonianem $H = \mu\sigma_y/3$ co sprowadziłoby się do obrotu stanu o kąt $\pi/2$ wokół osi y .

Zadanie 7 Startujemy ze stanu $|+\rangle_z$ i wybieramy czas ewolucji $t = \pi/\omega$ ($\omega = 2\mu B/\hbar$ częstość precesji). W między czasie, w bardzo krótkich odstępach czasu $\tau = t/n$ zbliżamy spin n razy do miejsca gdzie potencjalnie jest bomba - efekt Zenona powoduje, że jeśli bomba faktycznie jest w tym miejscu a my weźmiemy n bardzo duże to pozostajemy w stanie $|+\rangle_z$ i bomba nie wybucha. Jeśli bomby nie ma to ewolucja idzie unitarnie do $|-\rangle_z$. Na końcu mierzymy i wiemy, że bomby nie było.

Zadanie 8 Stany własne $|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$ z odpowiadającymi im wartościami własnymi $E \pm g$. Ponieważ $|\psi(0)\rangle = |0\rangle = (|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$, więc $|\psi(t)\rangle = (|+\rangle e^{-i(E+g)t/\hbar} + |-\rangle e^{-i(E-g)t/\hbar})/\sqrt{2} \equiv (|+\rangle e^{-igt/\hbar} + |-\rangle e^{igt/\hbar})/\sqrt{2}$. Stan powróci do stanu początkowego dla $gt/\hbar = \pi$, czyli $t = \pi\hbar/g$.

Zadanie 10 Stała normalizacyjna $A = 1/(2\pi\sigma^6)^{1/4}$. Średnie $\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0$. Wariancje $\Delta^2 x = \langle x^2 \rangle = 3\sigma^2$, $\Delta^2 p = 3\hbar^2/(4\sigma^2)$. Widzimy, że $\Delta^2 x \Delta^2 p = 9\hbar^2/4$, czyli spełnia zasadę nieoznaczoności z nawiązką. Po czasie t rozkład pędów się nie zmienia czyli $\Delta^2 p(t) = 3\hbar^2/(4\sigma^2)$, z kolei rozrzut położeń $\Delta^2 x(t) = \Delta^2 x(0) + \frac{t^2}{m^2} \langle p^2 \rangle = \Delta^2 x(0) + \frac{3t^2\hbar^2}{4m\sigma^2}$. Jeśli chcemy, żeby początkowo $\Delta^2(x) = \sigma^2$, to musimy zamienić $\sigma \rightarrow \sigma/\sqrt{3}$, wtedy wariancja po czasie t będzie $\Delta^2(x)(t) = \sigma^2 + \frac{9t^2\hbar^2}{4m\sigma^2}$, czyli rozplýwanie stanu 9-cio krotnie szybsze niż dla stanu gausowskiego o tej samej szerokości początkowej.