Mechanika Kwantowa R 2017/2018, Seria 2

Zadanie 1 Rozważ cząstkę o masie m przygotowana w chwili początkowej w stanie

$$\psi(x,0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-x^2/4\sigma^2}$$

i znajdującą się w potencjale liniowym $V(x) = mgx$. Wyznacz średnie i wariancje x i p po czasie t. Posłuż się równaniami na ewolucję wartości oczekiwanych obserwabli (lub wręcz obrazem Heisenberga jeśli chcesz), tak aby nie musieć używać nieoczywistych w tym przypadku stanów własnych.

Zadanie 2 Powtórz, to samo dla potencjału oscylatora harmonicznego $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Czy istnieje taka σ dla której wariancje położeń i pędów będą niezmienne w czasie. Zadumaj się nad tym...

Zadanie 3 Wykaż, że $[f(\hat{x}), \hat{p}] = i\hbar f'(\hat{x})$, gdzie $f'(x) = \frac{df}{dx}$. Wskazówka: zapisz $f(x)$ w postaci szeregu potęgowego.

Zadanie 4 Rozważ nieskończoną studnie potencjału ($V = 0$ dla $0 < x < a$ i $V = \infty$ dla pozostałych. Przyjmij, że w chwili początkowej cząstka znajdowała się w stanie $\psi(x,0) = Ax(a-x)$.

a) Wyznacz stałą normalizacyjną A

b) Znajdź dla tego stanu $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\Delta^2 x$, $\Delta^2 p$, $\langle E \rangle$

c) Podaj prawdopodobieństwa pomiaru różnych wartości energii cząstki

d) Znajdź postać stanu w chwili t - obejrzyj sobie ewolucję $|\psi(x,t)|^2$ wpisując uzyskaną postać stanu np do programu Mathematica

Zadanie 5 Cząstka o masie m znajduje sie w nieskończonej jednowymiarowej studni potencjału rozciągającej sie od 0 do a. Wiadomo, ze w chwili $t = 0$ cząstka znajdowała się w stanie podstawowym. Nagle szerokość studni została podwojona (z a do $2a$) tak, że w momencie poszerzania studni funkcja falowa cząstki nie zmieniła się.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo zmierzenia cząstki w pierwszym stanie wzbudzonym nowej studni?

b) Napisz wyrażenie na funkcję falową cząstki po czasie t od momentu poszerzenia studni $\psi(x,t)$

c) Oblicz średnią energię cząstki przed i po podwojeniu szerokości studni.

Zadanie 6 Znajdź stany własne i poziomy energetyczne w nieskończonej studni potencjału o szerokości a w środku której dodatkowo znajduje się potencjał typu delty Diraca:

$$V(x) = \begin{cases} \lambda\delta(x) & \text{dla} - a/2 \leq x \leq a/2 \\ \infty & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}, \tag{1}$$

Przedyskutuj wynik w zależności o znaku parametru λ. Które stany własne i energie studni się zmieniają w porównaniu z przypadkiem studni nieskończonej bez delty?

Zadanie 7 Wyznacz zbiór parametrów a i V_0, dla których istnieją stany związane cząstki o masie m w jednym wymiarze w polu sil o potencjale $V(x) = \begin{cases} \infty & \text{dla } x < 0 \\ -V_0 & \text{dla } 0 < x < a \\ 0 & \text{dla } x > a \end{cases}$.