Mechanika Kwantowa R 2017/2018, Seria 3

Zadanie 1 Wyznacz wartości oczekiwane i wariancję pędu na stanach własnych jednowymiarowego oscylatora harmonicznego $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Obliczenia wykonaj na dwa sposoby: z jednej strony stosując metodę algebraiczną, z drugiej strony wykorzystując funkcję tworzącą wielomianów Hermite'a. Korzystając z uzyskanych na zajęciach wyników dla wariancji operatora położenia, sprawdź spełniania zasady nieoznaczoności dla wszystkich stanów własnych.

Zadanie 2 Rozważ problem szukania stanów własnych oscylatora harmonicznego w reprezentacji pędowej. W tym celu, zapisz równanie Schroedingera w reprezentacji pędowej i zastanów sie czy potrafisz podać stany własne znając rozwiązanie uzyskane w reprezentacji położeniowej. Jakie wnioski można z tego wyciągnąć odnośnie stanów własnych oscylatora harmonicznego oraz operacji transformaty Fouriera?

Zadanie 3 Stan początkowy cząstki o masie m w potencjale oscylatora harmonicznego o częstotliwości własnej ω jest dany przez:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|n-1\rangle - |n\rangle\right) .$$

a) Po jakim czasie t stan ten przeewoluuje do stanu $|\psi(t)\rangle$, ortogonalnego do $|\psi(0)\rangle$?

b) Znaleźć wartości oczekiwane operatorów $\hat{x}$ i $\hat{p}$ w stanie $|\psi(t)\rangle$.

Zadanie 4 Korzystając z faktu, że n-ty stan wzbudzony oscylatora harmonicznego związany jest z $n-1$-szym relacją:

$$|n\rangle = \frac{a^\dagger}{\sqrt{n}}|n-1\rangle$$

oraz znając funkcję falową stanu podstawowego w reprezentacji położeniowej:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{2m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}x^2 m\omega/\hbar}$$

napisz

a) Funkcję falową $\psi_2(x)$ drugiego stanu wzbudzonego w reprezentacji położeniowej

b) Tę samą funkcję falową w reprezentacji pędowej. Czy możesz sformułować ogólną obserwację dotyczącą reprezentacji położeniowej i pędowej stanów własnych oscylatora harmonicznego.

Zadanie 5 Podaj przykładowy rozkład stanów własnych oscylatora harmonicznego $|n\rangle$ jako superpozycję stanów koherentnych $|z\rangle$.

Zadanie 6 Udowodnij, ze stan koherenty można zapisać jako:

$$|z\rangle = D(z)|0\rangle, \quad \text{gdzie } \hat{D}(z) = e^{z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}}$$

jest tzw. operatorem przesunięcia. *Wskazówka.* Skorzystaj z tw. Bakera-Cambella-Haussdorfa.

Zadanie 7 Rozważ stan oscylatora harmonicznego postaci:

$$|\psi(0)\rangle = A(|z\rangle + |-z\rangle),$$

gdzie $z \in \mathbf{C}$ a A jest stałą normalizacyjną. Jest to ciekawy stan, bo dla dużych $|z|$ można myśleć o nim jako o superpozycji kwantowej dwóch różnych „klasycznych" stanów oscylatora harmonicznego—na potrzeby medialne czasem nazywa się go nieco nie precyzyjnie stanem kota Schroedingera.

a) Wyznacz A

b) Oblicz stan oscylatora po czasie t. Po jakim czasie powróci on do stanu początkowego?

Zadanie 8 Rozważ stan cząstki o momencie pędu $l = 1$, który w standardowej bazie $|l, m\rangle$ ma postać

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Jakie wartości i z jakimi prawdopodobieństwami można uzyskać mierząc y-kową składową momentu L_y.

Zadanie 9 Rozważ cząstkę o masie m w izotropowym potencjale oscylatora harmonicznego $V = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$. Rozważ podprzestrzeń stanów o energii $E = \frac{7}{2}\hbar\omega$ (drugi poziom wzbudzony). W ramach tej podprzestrzeni znajdź stany własne L_z oraz L^2.

Zadanie 10 Rozważ stan własny operatorów $\hat{L}^2$ i $\hat{L}_z$, $|l, m\rangle$. Oblicz wartość oczekiwaną i dyspersję operatora rzutu momentu pędu na kierunek $\vec{n} = (\sin\theta_0 \cos\varphi_0, \sin\theta_0 \sin\varphi_0, \cos\theta_0)$ w stanie $|l, m\rangle$.