Mechanika Kwantowa R 2017/2018, Seria 6 - ostatnia

Zadanie 1 W chwili początkowej cząstka o masie m znajduje się w stanie podstawowym nieskończonej studni potencjału o ścianach w punktach $x = 0$ i $x = a$. Rozważ dwie sytuacje:

a) Ściana w punkcie $x = a$ jest bardzo powoli przesuwana do punktu $x = 8a$. Znajdź energię i funkcję falową cząstki na koniec tego procesu.

b) Ściana w punkcie $x = a$ jest bardzo gwałtownie przesunięta do punktu $x = 8a$. Znajdź prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w stanie podstawowym nowej studni oraz w stanie pierwszym wzbudzonym. Jaka jest średnia energia cząstki w stanie końcowym.

Zadanie 2 Cząstka o masie m znajdująca się w stanie podstawowym trójwymiarowego, izotropowego oscylatora harmonicznego o częstości ω począwszy od chwili $t = 0$ jest poddana potencjałowi zaburzającemu $V'(t) = ax\cos(\omega' t)$. Oszacuj w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń prawdopodobieństwo w chwili t znalezienia cząstki w stanie innym niż stan podstawowy.

Zadanie 3 Rozważ dwie cząstki o spinie 1/2, które w chwili $t = 0$ zostały przygotowane w stanie $|s_{1,z} = +\hbar/2\rangle \otimes |s_{2,z} = -\hbar/2\rangle$. Następnie cząstki ewoluują pod wpływem Hamiltonianu:

$$H = \frac{4\Delta}{\hbar^2}\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2.$$

a) Znajdź stan cząstek w chwili t

b) Rozwiąż ten problem stosując rachunek zaburzeń zależny od czasu w pierwszym rzędzie, przyjmując że zaburzenie w postaci H zostało włączono w chwili $t = 0$. Porównaj z rozwiązaniem ścisłym.

Zadanie 4 Wyznacz współczynnik transmisji i odbicia fali płaskiej przy rozpraszaniu na schodku potencjału:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ V_0 & \text{dla } x > 0 \end{cases} \tag{1}$$

Uwaga: pamiętaj, że współczynniki transmisji/odbicia są związane ze stosunkami prądów prawdopodobieństwa związanych z odpowiednimi falami.

Zadanie 5 Wiadomo, że rozpad α związany jest z efektem tunelowania kwantowego. Rozważmy następujący, bardzo uproszczony (w szczególności jednowymiarowy), model rozpadu jądra Uranu $^{238}\mathrm{U} \to 234^{\mathrm{Th}} + \alpha$. Zakładamy, że potencjał jaki "widzi" cząstka α w trakcie rozpadu w funkcji odległości od centrum jądra ma następująca postać:

$$V(r) = \begin{cases} -30\,\mathrm{MeV} & 0 < r < 10\,\mathrm{fm} \\ 300\,\mathrm{MeV}\cdot\mathrm{fm}/r & r > 10\,\mathrm{fm} \end{cases}$$

czyli mamy prostokątną studnie potencjału, a następnie Coulombowsko zanikający potencjał. Obserwuje się, że emitowane cząstki α mają energię kinetyczną równą 5MeV. Postaraj się na tej podstawie oszacować czas życia jądra Uranu. Porównaj z wartością faktycznie obserwowaną.

Wskazówka: To zadanie jest bardzo trudne. Należy silnie posłużyć się fizyczną intuicją i myśleniem w stylu Feymana, aby robić pewne rzeczy poprawnie jakościowo i nie przejmować się, że nie potrafimy rozwiązać tego problemu ściśle. Rozwiązujemy ten problem tak jakby był to problem jednowymiarowy, gdzie ograniczamy się do $r > 0$, a w punkcie $r = 0$ wkładamy tak jakby nieskończona barierę potencjału, myślimy o prawdopodobieństwie transmisji cząstki o takiej energii przez rozważaną barierę, a żeby mieć na koniec czas życia to musimy jakoś włożyć jeszcze wielkość, która powie jak wiele razy na sekunde cząstka "próbuje" uderzać w barierę... Pamiętaj że chodzi nam o rząd wielkości, a nie o ścisłe rozwiązanie.

Zadanie 6 Rozważ cząstkę przygotowaną w stanie gaussowskim $\psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4\sigma^2} + \frac{ip_0 x}{\hbar}}$, gdzie $p_0 \gg \hbar/\sigma$, $x_0 \gg \sigma$ (cząstka znajduje się wyraźnie z lewej strony potencjału i ma pęd skierowany wyraźnie w prawo) padającą na barierę potencjału $V(x) = \lambda\delta(x)$. Zapisz wyrażenie na prawdopodobieństwo przejścia cząstki przez tę barierę. Zostaw w postaci wyrażenia całkowego (z pojedyncza całką), które możnaby obliczyć numerycznie. Jeśli koniecznie trzebaby podać jakieś konkretne wyrażenie w miarę dobrze przybliżająca prawdziwą wartość współczynnika transmisji, jakie byś podał(a)?

Zadanie 7 Cząstka o masie m ulega rozproszeniu na płytkim potencjale gaussowskim:

$$V(r) = V_0 e^{-r^2/a^2},$$

gdzie α jest stałą określającą zasięg potencjału. Oblicz amplitudę rozpraszania $f(\theta)$ i rożniczkowy przekrój czynny w przybliżeniu Borna. Pokaż, że w granicy fal długich (powolne cząstki) przekrój czynny jest izotropowy w przestrzeni i oblicz całkowity przekrój czynny w tej granicy. Izotropowość rożniczkowego przekroju czynnego wskazuje na dominującą rolę fali s w rozpraszaniu. Porównaj uzyskaną wartość przekroju czynnego, z przekrojem czynnym klasycznej cząstki punktowej rozpraszającej się na sztywnej kuli o promieniu α.

Zadanie 8 Rozważ cząstkę o masie m i ładunku e rozpraszaną na dipolu, składającym się z ładunków e i $-e$ odległych od siebie o $2a$, o kierunku prostopadłym do kierunku cząstki padającej. W przybliżeniu Borna wyznacz różniczkowy przekrój czynny dla takiego rozpraszania. W jakich kierunkach różniczkowy przekrój czynny będzie największy?

Zadanie 9 Rozważ sferycznie symetryczny potencjał:

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{, dla } r \geq R \\ V_0 & \text{, dla } r < R \end{cases}$$

Stosując metodę fal parcjalnych pokaż, że w granicy $|V_0| \ll E = \hbar k^2/2m$, $kR \ll 1$ różniczkowy przekrój czynny jest izotropowy a całkowity przekrój czynny ma postać:

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{16\pi}{9} \frac{m^2 V_0^2 R^6}{\hbar^4}$$