Mechanika Kwantowa 3/2

Seria 2 (RDD)

do oddania na 5.06.2015

Zadanie 1 Operacja

$$U = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{1}$$

dla $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ w działaniu na stan $|0\rangle$ pozwala uzyskać dowolny stanu qubitu (dowolny punkt na sferze Blocha).

a) Udowodnij bezpośrednim rachunkiem (tzn. całkowaniem) fakt, z którego korzystaliśmy podczas wyprowadzania wierności optymalnej estymacji zupełnie nieznanego stanu qubitu, a mianowicie że

$$\int \mathrm{d}U\, U^{\otimes 2}|0\rangle\langle 0|^{\otimes 2}U^{\dagger\otimes 2} = \frac{1}{3}P_+, \tag{2}$$

gdzie $\mathrm{d}U = \frac{1}{4\pi}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\sin\theta$, a P_+ jest operatorem rzutowym na podprzestrzeń symetryczną dwóch qubitów.

b) Postaraj się znaleźć skończony (jak najmniejszy) zbiór operacji unitarnych $\{U_i\}$ t. że:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} U_i^{\otimes 2}|0\rangle\langle 0|^{\otimes 2}U_i^{\dagger\otimes 2} = \frac{1}{3}P_+ \tag{3}$$

W praktyce oznacza to, że możliwe jest zastąpienie optymalnego pomiaru zawierającego nieskończenie wiele operatorów pomiarowych pomiarem o skończonej liczbie operatorów dającym taką samą wierność estymacji. Jest to istotne w praktyce gdzie zazwyczaj łatwiejsze w implementacji są pomiary o małej liczbie możliwych wyników. *Wskazówka: myśl o sferze Blocha i staraj się dbać o symetrię...*

Zadanie 2 Na wykładzie wyprowadziliśmy wzór na maksymalną wierność zupełnie nieznanego stanu qubitu: $F = 1 - 1/(N+2)$. Przeprowadź następującą prostą symulację numeryczną. Losujemy stan $|\psi\rangle$. Przyjmujemy, że mamy $N = 3n$ kopii stanu $|\psi\rangle$. Na każdej z grup n qubitów, wykonujemy pomiar odpowiedni w bazie σ_x, σ_y, σ_z. Uzyskujemy w ten sposób przybliżoną wartość $\langle\sigma_i\rangle$. Znajdujemy odpowiadającą takim średnim wartościom macierz gęstości, $\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \sum_i \sigma_i\langle\sigma_i\rangle)$. Ona wyjdzie zapewne niedodatnia, więc jako nasz zgadywany stan $|\tilde{\psi}\rangle$ wybieram stan odpowiadający największej wartości własnej ρ Następnie liczę wierność $|\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle|^2$ Powtarzam to dla dużej liczby stanów $|\psi\rangle$ równomiernie rozłożonych na sferze Porównuje wynik na średnią wierność w zależności od N, z teoretycznym ograniczeniem.