Mechanika Kwantowa 3/2

Seria 2

do oddania na 30.05.2017

Zadanie 1 Na ćwiczeniach rozważany był schemat pozwalający na jednoczesny pomiar położenia i pędu. W ramach modelu, wyprowadziliśmy prawdopodobieństwo, że wynik pomiaru położenia da wartość q_1, a wynik pomiaru pędu da wartość p_2:

$$p(q_1, p_2) = \mathrm{Tr}\left(|\psi\rangle\langle\psi|\Pi_{q_1,p_2}\right) \tag{1}$$

gdzie $|\psi\rangle$ jest mierzonym stanem, a Π_{q_1,p_2} są uogólnionymi operatorami pomiarowymi:

$$\Pi_{q_1,p_2} = \langle\Psi_0|\delta(q_1 - \hat{q} + \hat{q}_f)\delta(p_2 - \hat{p} - \hat{p}_f)|\Psi_0\rangle, \tag{2}$$

gdzie $\hat{q}$, $\hat{p}$ są operatorami położenia i pędu mierzonego układu, $\hat{q}_f$, $\hat{p}_f$ są operatorami położenia i pędu „urządzenia pomiarowego", a

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}} \int \mathrm{d}q_f\, e^{-q_f^2/2}|q_f\rangle \tag{3}$$

jest stanem początkowym urządzenia pomiarowego.

Udowodnij, że

$$\Pi_{q_1,p_2} = \frac{1}{2\pi}|\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{4}$$

gdzie

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}} \int \mathrm{d}q' e^{-q'^2/2 + ip_2 q'}|q' + q_1\rangle \tag{5}$$

jest stanem koherentnym o amplitudzie $\alpha = (q_1 + ip_2)/\sqrt{2}$. Tym samym uzyskaliśmy operacyjne znaczenie quassi-rozkładu prawdopodobieństwa Husimi.

Zadanie 2 Korzystając z modelu eksperymentu Sterna-Gerlacha przedstawionego w poprzedniej serii, rozważ pomiar uogólniony, polegający na tym, że po przejściu cząstki przez pole magnetyczne dokonywany jest pomiar składowej pędu w kierunku z (p_z), w celu uzyskania informacji o rzucie spinu cząstki na oś z. Znajdź operatory pomiarowe Π_{p_z} działające na spinowe stopnie swobody cząstki. Zastanów się, kiedy pomiar pozwala jednoznacznie wnioskować o wartości rzutu spinu.

Zadanie 3 Rozważ model defazowania atomu dwupoziomowego, w którym ewolucja opisana jest za pomocą dwóch operatorów Krausa:

$$K_0 = \sqrt{\frac{1 + e^{-\gamma t}}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \sqrt{\frac{1 - e^{-\gamma t}}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Rozwiń powyższe operatory w najniższym rzędzie w t i sprawdź czy operatory są takiej postaci jaka jest wymagana do zapisanie równania Kossakowskiego-Lindblada. Jeśli warunek jest spełniony zapisz to równanie.