

Mechanika Kwantowa 3/2

Seria 5

do oddania na 18.05.2011

Zadanie 1 (obowiązkowe) Operacja

$$U = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (1)$$

dla $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ w działaniu na stan $|0\rangle$ pozwala uzyskać dowolny stanu qubitów (dowolny punkt na sferze Blocha).

- a) Udowodnij bezpośrednim rachunkiem (tzn. całkowaniem) fakt, z którego korzystaliśmy podczas wyprowadzania wierności optymalnej estymacji zupełnie nieznanego stanu qubitów, a mianowicie że

$$\int dU U^{\otimes 2} |0\rangle\langle 0|^{\otimes 2} U^{\dagger \otimes 2} = \frac{1}{3} P_+, \quad (2)$$

gdzie $dU = \frac{1}{4\pi} d\theta d\varphi \sin \theta$, a P_+ jest operatorem rzutowym na podprzestrzeń symetryczną dwóch qubitów.

- b) Postaraj się znaleźć skończony (jak najmniejszy) zbiór operacji unitarnych $\{U_i\}$ t. że:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_i^{\otimes 2} |0\rangle\langle 0|^{\otimes 2} U_i^{\dagger \otimes 2} = \frac{1}{3} P_+ \quad (3)$$

W praktyce oznacza to, że możliwe jest zastąpienie optymalnego pomiaru zawierającego nieskończenie wiele operatorów pomiarowych pomiarem o skończonej liczbie operatorów dającym taką samą wierność estymacji. Jest to istotne w praktyce gdzie zazwyczaj łatwiejsze w implementacji są pomiary o małej liczbie możliwych wyników. *Wskazówka: myśl o sferze Blocha i staraj się dbać o symetrię...*

Zadanie 2 Na ćwiczeniach rozważany był schemat pozwalający na jednoczesny pomiar położenia i pędu. W ramach modelu, wyprowadziliśmy prawdopodobieństwo, że wynik pomiaru położenia da wartość q_1 , a wynik pomiaru pędu da wartość p_2 :

$$p(q_1, p_2) = \text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi| \Pi_{q_1, p_2}) \quad (4)$$

gdzie $|\psi\rangle$ jest mierzonym stanem, a Π_{q_1, p_2} są uogólnionymi operatorami pomiarowymi:

$$\Pi_{q_1, p_2} = \langle \Psi_0 | \delta(q_1 - \hat{q} + \hat{q}_f) \delta(p_2 - \hat{p} - \hat{p}_f) | \Psi_0 \rangle, \quad (5)$$

gdzie \hat{q} , \hat{p} są operatorami położenia i pędu mierzonego układu, \hat{q}_f , \hat{p}_f są operatorami położenia i pędu „urządzenia pomiarowego”, a

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}} \int dq_f e^{-q_f^2/2} |q_f\rangle \quad (6)$$

jest stanem początkowym urządzenia pomiarowego.

Udowodnij, że

$$\Pi_{q_1, p_2} = \frac{1}{2\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| \quad (7)$$

gdzie

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}} \int dq' e^{-q'^2/2 + ip_2 q'} |q' + q_1\rangle \quad (8)$$

jest stanem koherentnym o amplitudzie $\alpha = (q_1 + ip_2)/\sqrt{2}$. Tym samym uzyskaliśmy operacyjne znaczenie quassi-rozkładu prawdopodobieństwa Husimi.

Zadanie 3 Korzystając z modelu eksperymentu Sterna-Gerlacha przedstawionego w poprzedniej serii (Seria 4, Zadanie 5), rozważ pomiar uogólniony, polegający na tym, że po przejściu cząstki przez pole magnetyczne dokonywany jest pomiar składowej pędu w kierunku z (p_z), w celu uzyskania informacji o rzucie spinu cząstki na oś z . Znajdź operatory pomiarowe Π_{p_z} działające na spinowe stopnie swobody cząstki. Zastanów się, kiedy pomiar pozwala jednoznacznie wnioskować o wartości rzutu spinu.

Zadanie 4 Na ćwiczeniach przeanalizowaliśmy transformację klonującą, dokonującą optymalnego klonowania dowolnych stanów qubitów. Rozważ nieco ogólniejszą transformację klonującą U sparametryzowaną przez $\gamma \in [0, 1]$:

$$U|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \otimes |0\rangle_A = \sqrt{\gamma}|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \otimes |0\rangle_A + \sqrt{1-\gamma}|\Psi_+\rangle_{12} \otimes |1\rangle \quad (9)$$

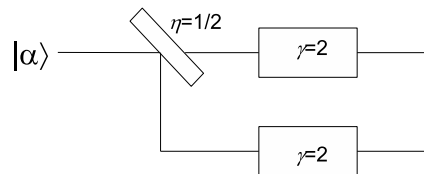
$$U|1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \otimes |0\rangle_A = \sqrt{\gamma}|1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \otimes |1\rangle_A + \sqrt{1-\gamma}|\Psi_+\rangle_{12} \otimes |0\rangle \quad (10)$$

gdzie $|\Psi_+\rangle = (|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle)/\sqrt{2}$, a podukłady pisane są w kolejności: klon 1, klon 2, „maszyna klonująca”. Przypadek rozważany na ćwiczeniach odpowiadał sytuacji $\gamma = 2/3$.

Rozważ sytuację, w której interesuje nas klonowanie jedynie stanów qubitów znajdujących się na równiku sfery Blocha. Czy w tej sytuacji można dobrać parametr γ tak aby zwiększyć wierność klonowania tych stanów?

Zadanie 5 Na optymalną transformację klonującą dowolny stan qubitów (patrz poprzednie zadanie, transformacja z $\gamma = 2/3$), można patrzeć jak na ewolucję układu otwartego, traktując qubit 1 jako nasz układ, a qubity 2 i A jako otoczenie. Zapisz ewolucję qubitów 1 za pomocą operatorów Krausa.

Zadanie 6 (obowiązkowe) Przybliżone klonowanie stanów koherentnych światła można zrealizować za pomocą elementów optycznych tj. płytek światłodzielących i wzmacniaczy liniowych. Na ćwiczeniach przeanalizowaliśmy jeden ze schematów, w którym najpierw światło przechodziło przez wzmacniacz o wzmacnieniu $\gamma = 2$ a następnie przez płytę światłodzielącą o transmisji $\eta = 1/2$. Rozważ alternatywny schemat tak jak na rysunku poniżej



w którym światło najpierw przepuszczamy przez płytkę światłodziącą o transmisji $1/2$ a następnie przez dwa niezależne wzmacniacze o wzmacnieniu 2. Pamiętaj o dodatkowych modach koniecznych do opisanie całego procesu. Przyjmujemy, że wszystkie pozostałe mody poza modem w którym znajduje się wejściowy stan koherentny znajdują się w chwili początkowej w stanie próżni.

- a) Jak transformują się operatory kreacji i anihilacji w tym układzie?
- b) Porównaj średnie kwadratur (równoważnie możesz myśleć o położeniach i pędach cząstki) na wyjściowych klonach ze średnimi na stanie wejściowym.
- c) Porównaj wariancję kwadratur na wyjściowych klonach z wariancjami na stanie wejściowym.
- d) Czy ten schemat klonowania jest lepszy czy gorszy od tego który analizowaliśmy na ćwiczeniach?