Kwantowa Teoria Pomiaru i Estymacji

Seria 1

do oddania na 20.10.2014

Zadanie 1 (2 pkt) Niech macierz gęstości ρ_{AB} opisująca stan dwóch qubitów, zapisana w bazie $|0\rangle \otimes |0\rangle$, $|0\rangle \otimes |1\rangle$, $|1\rangle \otimes |0\rangle$, $|1\rangle \otimes |1\rangle$ wygląda następująco:

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Znajdź zredukowane macierze gęstości ρ_A, ρ_B. Podczas obliczeń zastanów się nad ogólnym praktycznym i szybkim przepisem na liczenie zredukowanych macierzy gęstości.

Zadanie 2 (4 pkt) Ogólny stan dwuwymiarowego układu kwantowego (qubitu) możemy zapisać jako

$$|\psi_{\theta,\varphi}\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + \exp(\mathrm{i}\varphi)\sin(\theta/2)|1\rangle \tag{2}$$

gdzie $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ a $|0\rangle$, $|1\rangle$ są wektorami ortogonalnymi. Tym samym stan qubitu można wyobrażać sobie jako punkt na sferze, tzw. sferze Blocha.

Rozważ następujący zestaw operatorów sparametryzowanych θ, φ:

$$\Pi_{\theta,\varphi} = c|\psi_{\theta,\varphi}\rangle\langle\psi_{\theta,\varphi}|, \tag{3}$$

gdzie c pewna stała normalizacyjna niezależna od θ, φ.

a) Czy zestaw operatorów $\Pi_{\theta,\varphi}$ można traktować jako operatory przestawiające pewien pomiar uogólniony? Jeśli tak to ile wynosi wartość stałej c. Uwaga: przyjmujemy domyślną miarę w całkowaniu po sferze $\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\sin\theta$.

b) Stosując powyższy pomiar uogólniony podaj gęstość rozkładu prawdopodobieństwa wyniku pomiaru (θ, φ) jeśli pomiarowi został poddany stan $|0\rangle$. Ten rozkład na sferze Blocha możemy traktować jako reprezentację “informacji” na ile dobrze jesteśmy w stanie zidentyfikować nieznany stan qubitu dysponując jego jedną kopią.

Zadanie 3 (4 pkt) Rozważ operację unitarną U reprezentująca oddziaływanie qubitu (S) z “urządzeniem pomiarowym” (M) w postaci:

$$U|m\rangle_S \otimes |0\rangle_M = \frac{1}{2}|m\rangle_S \otimes |0\rangle_M(\sqrt{2-p} + (-1)^m\sqrt{p}) + \frac{1}{2}|m\rangle_S \otimes |1\rangle_M(\sqrt{2-p} - (-1)^m\sqrt{p}) \tag{4}$$

gdzie $m = 0, 1$ reprezentuje bazę qubitu, a parametr $0 \le p \le 1$ odpowiada za „siłę oddziaływania”.

a) Zapisz za pomocą operatorów Krausa (czyli operatorów K_i wprowadzonych na wykładzie) efektywną ewolucje ogólnego stanu qubitu S pod wpływem takiego oddziaływania w sytuacji gdy nie obserwujemy konkretnego wyniku pomiaru tylko uśredniamy po wszystkich możliwych wynikach – czyli liczymy $\rho_S^{\text{out}} = \sum_i K_i \rho_S K_i^\dagger$. Zinterpretuj ewolucję stanu w języku transformacji kuli Blocha, gdzie ogólny stan mieszany qubitu możemy sparametyzować za pomocą trójwymiarowego wektora $\vec{n}$: $\rho = 1/2(\mathbb{1} + \vec{\sigma} \cdot \vec{n})$, gdzie $|\vec{n}| \leq 1$, a $\vec{\sigma}$ jest wektorem złożonym z macierzy Pauliego.

b) Podaj operatory pomiarowe Π_0, Π_1 działające na układzie S odpowiadające zmierzeniu "urządzenia pomiarowego" w stanach $|0\rangle_M$, $|1\rangle_M$.

c) Rozważ ogólny stan qubitu $|\psi\rangle$ sparametryzowany za pomocą kątów θ, φ na sferze Blocha. Podaj prawdopodobieństwa wyników pomiarów odpowiadających operatorom pomiarowym Π_0, Π_1 oraz podaj końcowe stany qubitu w zależności od wyniku pomiaru.