Kwantowa Teoria Pomiaru i Estymacji

Seria 2

do oddania na 27.10.2014

Zadanie 1. Pomiar jednoczesny położenia i pędu Rozważmy cząstkę kwantową S poruszającą się w jednym wymiarze, z którą związane są operatory położenia i pędu (bezwymiarowe) $\hat{x}_S$, $\hat{p}_S$, spełniające $[\hat{x}_S, \hat{p}_S] = \mathrm{i}$. Cząstka w chwili początkowej znajduje się w stanie $|\psi\rangle_S$. Rozważ protokół jednoczesnego pomiaru położenia i pędu w którym cząstka S oddziałuje z dwoma "urządzeniami pomiarowymi" M_1 i M_2 poprzez ewolucję unitarną:

$$|\Psi\rangle_{SM_1M_2} = U|\psi\rangle_S \otimes |0\rangle_{M_1,M_2}, \quad U = e^{-\mathrm{i}(\hat{x}_S\hat{p}_{M_1} - \hat{p}_S\hat{x}_{M_2})}, \tag{1}$$

gdzie $|0\rangle_{M_1,M_2}$ jest stanem początkowym urządzenia pomiarowego. Po zadziałaniu operacji U mierzone jest położenie (x_{M_1}) i pęd (p_{M_2}) odpowiednio urządzeń pomiarowych M_1 i M_2. W wyniku pomiaru uzyskujemy pewien łączny rozkład prawdopodobieństwa pomiaru położenia i pędu $J(x,p)$ na stanie $|\psi\rangle_S$

a) W obrazie Heisenbegra, przewoluuj operatory pomiarowe x_{M_1}, p_{M_2} tak by móc działać nimi bezpośrednio na stan wejściowy $|\psi\rangle_S \otimes |0\rangle_{M_1,M_2}$. Nazwijmy przewoluowane operatory $\tilde{x}_{M_1}$, $\tilde{p}_{M_2}$

b) Rozważ operatory $\delta\hat{x} = \tilde{x}_{M_1} - \hat{x}_S$ i $\delta\hat{p} = \tilde{p}_{M_2} - \hat{p}_S$, które można traktować jako operatory reprezentujące różnicę operatora efektywnie mierzonego na cząstce i idealnego pomiaru położenia lub pędu. Patrząc na postać $\delta\hat{x}$ oraz $\delta\hat{p}$ jaki wybrał(a)byś stan $|0\rangle_{M_1,M_2}$ aby pomiar łączny był jak najbliższy idealnym niezależnym pomiarom położenia i pędu i nie wyróżniał żadnego z nich.

c) [TRUDNE] Biorąc stan $|0\rangle_{M_1,M_2}$ wydedukowany w poprzednim podpunkcie, wykaż że odpowiadający temu modelowi zbiór operatorów pomiarowych $\Pi_{x,p}$ działających na S reprezentujący taki pomiar łączny [czyli t.że $J(x,p) = \mathrm{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi|\Pi_{x,p})$] jest postaci:

$$\Pi_{x,p} = \frac{1}{2\pi}|(x,p)\rangle\langle(x,p)|, \quad |(x,p)\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}}\int \mathrm{d}x'\, e^{\frac{-(x'-x)^2}{2}} e^{\mathrm{i}px'}|x'\rangle \tag{2}$$

gdzie $|(x,p)\rangle$ jest tzw. stanem koherentnym o średniej wartości położenia i pędu odpowiednio x i p. Tym samym mamy bardzo ładną interpretację łącznego pomiaru położenia i pędu jako rzutowania na stany koherentne:

$$J(x,p) = \frac{1}{2\pi}|\langle\psi|(x,p)\rangle|^2 \tag{3}$$

Uwaga: w optyce kwantowej, taki rozkład prawdopodobieństwa pochodzący z rzutowania stanu na stany koherentne nosi nazwę reprezentacji Q Hussimi.