Kwantowa Teoria Pomiaru i Estymacji

Seria 6

do oddania na 24.11.2014

Zadanie 1 (7 pkt) Rozważ rodzinę stanów qubitu postaci:

$$|\psi_\varphi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + \sin(\theta/2)\exp(i\varphi)|1\rangle \tag{1}$$

przy czym θ traktujemy jako znany parametr a parametrem, który mamy za zadanie wyestymować jest φ.

a) Co mówi nierówność Cramera-Rao (CR) o możliwej do uzyskania precyzji estymacji φ jeśli mielibyśmy do dyspozycji N kopii stanu czyli: $|\psi_\varphi\rangle^{\otimes N}$

b) Jaki jest optymalny pomiar, który gwarantuje wysycanie nierówności CR dla dużych N - czy pomiar zależy od wartości estymowanego parametru φ?.

c) Powtórz powyższe punkty w sytuacji gdy zamiast N kopii $|\psi_\varphi\rangle$ otrzymujemy N kopii zaszumionego stanu postaci $\rho_\varphi = p|\psi_\varphi\rangle\langle\psi_\varphi| + (1-p)\mathbb{1}/2$, gdzie p przyjmujemy, że jest znanym parametrem.

d) Zastanów się nad przypadkiem estymacji wieloparametrowej, w której przyjęlibyśmy, że poza φ również θ i p są nieznanymi parametrami, które należy wyestymować. Zapisz kwantową macierz Fishera i zastanów się, nad tym czy możliwe są pomiary które jednocześnie dałyby możliwość wysycenia nierówności CR z punktu widzenia estymacji wszystkich parametrów naraz.

Zadanie 2 (3 pkt) Na wykładzie wprowadziliśmy metrykę Bures'a, dla której element odległości zadany jest przez:

$$d_B^2\rho = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\rho\,\Lambda^2), \quad d\rho = \frac{1}{2}(\Lambda\rho + \rho\Lambda). \tag{2}$$

Wykaż, że w przypadku qubitu, którego ogólny stan możemy sparametryzować jako:

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{r}\cdot\vec{\sigma}), \quad \vec{r} = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta), \tag{3}$$

metryka Bures'a ma postać:

$$d_B^2\rho = \frac{1}{4}\left[\frac{d^2r}{1-r^2} + r^2(d^2\theta + \sin^2\theta d^2\varphi)\right]. \tag{4}$$

Wskazówka: Zacznij od parametryzacji za pomocą współrzędnych kartezjańskich (x,y,z) i postaraj się wyznaczyć Λ z warunku (2)—pamiętaj, że Λ jest hermitowska a to znaczy, że można ją zawsze zapisać jako $\Lambda = \sum_{i=0}^{3}\lambda_i\sigma_i$, gdzie $\lambda_i \in \mathbb{R}$, a $\sigma_0 = \mathbb{1}$.