

# Kwantowa Teoria Pomiaru i Estymacji

## Seria 3

do oddania na 28.10.2014

**Zadanie 1. Pomiar jednoczesny położenia i pędu** Rozważmy cząstkę kwantową  $S$  poruszającą się w jednym wymiarze, z którą związane są operatory położenia i pędu (bezwymiarowe)  $\hat{x}_S, \hat{p}_S$ , spełniające  $[\hat{x}_S, \hat{p}_S] = i$ . Cząstka w chwili początkowej znajduje się w stanie  $|\psi\rangle_S$ . Rozważ protokół jednoczesnego pomiaru położenia i pędu w którym cząstka  $S$  oddziałuje z dwoma “urządzeniami pomiarowymi”  $M_1$  i  $M_2$  poprzez ewolucję unitarną:

$$|\Psi\rangle_{SM_1M_2} = U|\psi\rangle_S \otimes |0\rangle_{M_1, M_2}, \quad U = e^{-i(\hat{x}_S \hat{p}_{M_1} - \hat{p}_S \hat{x}_{M_2})}, \quad (1)$$

gdzie  $|0\rangle_{M_1, M_2}$  jest stanem początkowym urządzenia pomiarowego. Po zadziałaniu operacji  $U$  mierzone jest położenie ( $x_{M_1}$ ) i pęd ( $p_{M_2}$ ) odpowiednio urządzeń pomiarowych  $M_1$  i  $M_2$ . W wyniku pomiaru uzyskujemy pewien łączny rozkład prawdopodobieństwa pomiaru położenia i pędu  $J(x, p)$  na stanie  $|\psi\rangle_S$

- W obrazie Heisenbega, przewoluuj operatory pomiarowe  $x_{M_1}, p_{M_2}$  tak by móc działać nimi bezpośrednio na stan wejściowy  $|\psi\rangle_S \otimes |0\rangle_{M_1, M_2}$ . Nazwijmy przewoluowane operatory  $\tilde{x}_{M_1}, \tilde{p}_{M_2}$
- Rozważ operatory  $d\hat{x} = \tilde{x}_{M_1} - \hat{x}_S$  i  $d\hat{p} = \tilde{p}_{M_2} - \hat{p}_S$ , które można traktować jako operatory reprezentujące różnicę operatora efektywnie mierzonego na cząstce i idealnego pomiaru położenia lub pędu, czyli w jakim sensie zaburzenie pomiaru. Patrząc na postać  $d\hat{x}$  oraz  $d\hat{p}$  jaki wybrał(a)byś stan  $|0\rangle_{M_1, M_2}$  aby pomiar łączny był jak najbliższy idealnym niezależnym pomiarom położenia i pędu i nie wyróżniał żadnego z nich.
- [TRUDNE] Biorąc stan  $|0\rangle_{M_1, M_2}$  wydedukowany w poprzednim podpunkcie, wykaż że odpowiadający temu modelowi zbiór operatorów pomiarowych  $\Pi_{x,p}$  działających na  $S$  reprezentujący taki pomiar łączny [czyli t.ż.  $J(x, p) = \text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi|\Pi_{x,p})$ ] jest postaci:

$$\Pi_{x,p} = \frac{1}{2\pi} |(x, p)\rangle\langle(x, p)|, \quad |(x, p)\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}} \int dx' e^{-\frac{(x'-x)^2}{2}} e^{ipx'} |x'\rangle \quad (2)$$

gdzie  $|(x, p)\rangle$  jest tzw. stanem koherentnym o średniej wartości położenia i pędu odpowiednio  $x$  i  $p$ . Tym samym mamy bardzo ładną interpretację łącznego pomiaru położenia i pędu jako rzutowania na stany koherentne:

$$J(x, p) = \frac{1}{2\pi} |\langle\psi|(x, p)\rangle|^2 \quad (3)$$

*Uwaga:* w optyce kwantowej, taki rozkład prawdopodobieństwa pochodzący z rzutowania stanu na stany koherentne nosi nazwę reprezentacji Q Hussimi.