

Kwantowa Teoria Pomiaru i Estymacji

Seria 7

do oddania na 09.12.2016

Zadanie 1 (7 pkt) Rozważ rodzinę stanów qubitów postaci:

$$|\psi_\varphi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + \sin(\theta/2)\exp(i\varphi)|1\rangle \quad (1)$$

przy czym θ traktujemy jako znany parametr a parametrem, który mamy za zadanie wyestymować jest φ .

- Co mówi nierówność Cramera-Rao (CR) o możliwej do uzyskania precyzji estymacji φ jeśli mielibyśmy do dyspozycji N kopii stanu czyli: $|\psi_\varphi\rangle^{\otimes N}$
- Jaki jest optymalny pomiar, który gwarantuje wysycanie nierówności CR dla dużych N - czy pomiar zależy od wartości estymowanego parametru φ ?
- Powtórz powyższe punkty w sytuacji gdy zamiast N kopii $|\psi_\varphi\rangle$ otrzymujemy N kopii zaszumionego stanu postaci $\rho_\varphi = p|\psi_\varphi\rangle\langle\psi_\varphi| + (1-p)\mathbb{1}/2$, gdzie p przyjmujemy, że jest znanym parametrem.
- Zastanów się nad przypadkiem estymacji wieloparametrowej, w której przyjęlibyśmy, że poza φ również θ i p są nieznanymi parametrami, które należy wyestymować. Zapisz kwantową macierz Fishera i zastanów się, nad tym czy możliwe są pomiary które jednocześnie dałyby możliwość wysycenia nierówności CR z punktu widzenia estymacji wszystkich parametrów naraz.

Zadanie 2 (3 pkt) Na wykładzie wprowadziliśmy metrykę Bures'a, dla której element odległości zadany jest przez:

$$d_B^2\rho = \frac{1}{4}\text{Tr}(\rho\Lambda^2), \quad d\rho = \frac{1}{2}(\Lambda\rho + \rho\Lambda). \quad (2)$$

Wykaż, że w przypadku qubitów, którego ogólny stan możemy sparametryzować jako:

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}), \quad \vec{r} = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta), \quad (3)$$

metryka Bures'a ma postać:

$$d_B^2\rho = \frac{1}{4} \left[\frac{d^2 r}{1-r^2} + r^2(d^2\theta + \sin^2\theta d^2\varphi) \right]. \quad (4)$$

Wskazówka: Zaczynij od parametryzacji za pomocą współrzędnych kartezjańskich (x,y,z) i postaraj się wyznaczyć Λ z warunku (??)—pamiętaj, że Λ jest hermitowska a to znaczy, że można ją zawsze zapisać jako $\Lambda = \sum_{i=0}^3 \lambda_i \sigma_i$, gdzie $\lambda_i \in \mathbb{R}$, a $\sigma_0 = \mathbb{1}$.