

Kwantowa Teoria Pomiaru i Estymacji

Seria 11 (Ostatnia!)

do oddania na 25.01.2013

Zadanie 1 (5 pkt) Na wykładzie pokazaliśmy analizując kwantową informację Fishera, że dzięki wykorzystaniu stanów splątanych N fotonów (stanów N00N) możliwe jest teoretycznie osiągnięcie precyzji estymacji fazy $\Delta\varphi = 1/N$ (skalowanie Heisenberga) dające kwadratową poprawę precyzji w stosunku do przypadku użycia stanów produktowych, w których fotony nie są splątane i gdzie osiągalna precyzja ograniczona jest przez $\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{N}}$. Jak to z kwantową informacją Fishera bywa nie od razu jest jasne jakiego rodzaju pomiar pozwoliłby osiągnąć takie zachowanie. W ogólności pomiar niezbędny do osiągnięcia skalowania Heisenberga mógłby wymagać pomiarów kolektywnych na N fotonach. Postaraj się zaproponować najprostszy naturalny pomiar lokalny, gdzie każdy foton mierzymy osobno i sprawdź czy to wystarczy, żeby osiągnąć skalowanie Heisenberga. W ten sposób odpowiesz sobie na pytanie, czy trudność kwantowej metrologii sprowadza się do przygotowania splątanych stanów czy też jest ona podwójna i wymaga i splątanych stanów na wejściu i kolektywnych pomiarów na wyjściu. ¹

Zadanie 2 (5 pkt) W podejściu Bayesowskim bez wiedzy a priori optymalne N fotonowe stany do estymacji fazy w bazie obsadzeniowej mają postać:

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{N+2}} \sum_{n=0}^N \sin \frac{(n+1)\pi}{N+2} |n, N-n\rangle. \quad (1)$$

Zasymuluj numerycznie estymację fazy na tych stanach ale nie używając optymalnych pomiarów kowariantnych ale prostych pomiarów takich jak w poprzednim zadaniu. Uzyskaj wyniki numeryczne dla różnych N , powtarzając estymację wielokrotnie i dla różnych „prawdziwych” faz (równomiernie rozłożonych). Zastosuj metodę max-likelihood i postaraj się uzyskać dane na temat średniej wariancji estymacji w funkcji N , które można by porównać z wyrażeniem dla optymalnej strategii wyprowadzonej na wykładzie:

$$\Delta^2\varphi = 2 \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{N+2} \right) \right]. \quad (2)$$

Dowiemy się na ile blisko jesteśmy w stanie zbliżyć się pomiarami lokalnymi do fundamentalnej precyzji.

¹Wskazówka. Przez naturalny pomiar rozumiemy, że interferujemy dwa mody na płytce światłodzieliącej 50% i mierzymy którym portem wyjdzie foton. Możesz myśleć o fotonach jako o cząstkach rozróżnialnych (np. okienkami czasowymi), w ten sposób Twój pomiar będzie ciągiem zer i jedynek odpowiadających kolejnym fotonom trafiającym do górnego lub dolnego detektora. Na podstawie wyników możesz albo napisać jakiś prosty estymator który będzie sensowny lokalnie i sprawdzić jego wariancję albo obliczyć klasyczna informację Fishera i sprawdzić czy równa się kwantowej. Jeśli wolisz możesz też myśleć o fotonach jako nierozróżnialnych i pracować w bazie obsadzeniowej patrząc tylko na całkowitą liczbę fotonów jaka trafi do górnego lub dolnego detektora po przejściu przez płytkę światłodzieliącą.