Kwantowa Teoria Pomiaru i Estymacji

Seria 2

do oddania na 9.11.2012

Zadanie 1 (5 pkt) Słabe pomiary Rozważ układ kwantowy S znajdujący się w stanie $|\psi\rangle_S$ oraz „urządzeniem pomiarowe” M które w chwili początkowej przygotowane jest w stanie gaussowskim $|0\rangle_M$:

$$|0\rangle_M = \frac{1}{(2\pi\sigma_p^2)^{1/4}} \int \mathrm{d}p\, e^{-\frac{p^2}{4\sigma_p^2}} |p\rangle_M. \tag{1}$$

Rozważmy obserwablę $\hat{A} = \sum_i a_i |a_i\rangle\langle a_i|$ działającą na S. Chcielibyśmy dokonać słabego pomiaru obserwabli A na układzie S tzn. takiego który daje nam pewną informację (niedużą) o wartości oczekiwanej $\langle\psi|A|\psi\rangle$ ale pozostawia stan układu S praktycznie niezaburzony.

Rozważmy oddziaływanie S i M poprzez operację unitarną $U = e^{\mathrm{i}\hat{A}\hat{q}_M}$, gdzie $\hat{q}_M$ jest operatorem położenia na M (przyjmujemy wszystkie operatory jako bezwymiarowe, w szczególności $[q,p] = \mathrm{i}$). Po zadziałaniu operacji unitarnej wykonywany jest pomiar wartości pędu na M.

a) Pokaż, że wartość oczekiwana pomiaru pędu na M jest równa wartości oczekiwanej obserwabli A na $|\psi\rangle$

b) Jaki warunek powinno spełniać σ_p określające stan początkowy M aby pomiar można było określić jako słaby. W jakiej granicy stan układu S nie dozna praktycznie żadnego zaburzenia?

c) Wyobraźmy sobie, że po wykonanym pomiarze słabym obserwabli A jak wyżej zmierzono bezpośrednio na stanie $|\psi\rangle$ obserwablę B (pomiar von Neumana). Postaraj się oszacować jakie co najmniej zaburzenie wprowadził słaby pomiar obserwabli A na wartości obserwabli B jako funkcję σ_p — tu nie musi być jakieś super ograniczenie, wystarczy coś sensownego ilościowego z czego widać, że im słabszy pomiar A tym możemy oczekiwać mniejszego zaburzenia B.

Uwaga: Mimo, że wykonując słabe pomiary w pojedynczym pomiarze dowiadujemy się bardzo mało, możemy powtórzyć pomiar na większej liczbie tak samo przygotowanych stanów i w ten sposób dość dobrze określić wartość oczekiwaną. Jednocześnie każdy z mierzonych egzemplarzy będzie praktycznie nie zaburzony co jest przydatne w niektórych sytuacjach, gdy na tym samym stanie chcemy znów wykonać pomiar np. innej obserwabli. Pomysł wykorzystania pomiarów słabych pojawił się w pracy: Aharonov, Albert, Vaidman, Phys. Rev. Lett. **60**, 1351 (1988). Praca w której dzięki słaby pomiarom analizowane są „trajektorie” w eksperymentach interferencyjnych: Sacha Kocsis et al., Science **332**, 1170 (2011). Praca pokazująca, że dzięki słabym pomiarom można zmierzyć zaburzenia obserwabli takie jakie występują w zasadzie nieoznaczoności Ozawy: Lund, Wiseman, New J. Phys. 12, 093011 (2010).

Zadanie 2 (5 pkt) Pomiar jednoczesny położenia i pędu Rozważmy cząstkę kwantową S poruszającą się w jednym wymiarze, z którą związane są operatory położenia i pędu (bezwymiarowe) $\hat{q}_S$, $\hat{p}_S$, spełniające $[\hat{q}_S, \hat{p}_S] = \mathrm{i}$. Cząstka w chwili początkowej znajduje się w stanie $|\psi\rangle_S$. Rozważ protokół jednoczesnego pomiaru położenia i pędu w którym cząstka S oddziałuje z dwoma “urządzeniami pomiarowymi” M_1 i M_2 poprzez ewolucję unitarną:

$$|\Psi\rangle_{SM_1M_2} = U|\psi\rangle_S \otimes |0\rangle_{M_1,M_2}, \quad U = e^{-\mathrm{i}(\hat{q}_S\hat{p}_{M_1} - \hat{p}_S\hat{q}_{M_2})}, \tag{2}$$

gdzie $|0\rangle_{M_1,M_2}$ jest stanem początkowym urządzenia pomiarowego. Po zadziałaniu operacji U mierzone jest położenie (q_{M_1}) i pęd (p_{M_2}) odpowiednio urządzeń pomiarowych M_1 i M_2. W wyniku pomiaru uzyskujemy pewien łączny rozkład prawdopodobieństwa pomiaru położenia i pędu $p_{\text{joint}}(q,p)$ na stanie $|\psi\rangle_S$

Pamiętamy z wykładu, że „operatory szumu" odpowiadające pomiarowi q i p wynosiły dla tego modelu odpowiednio: $\hat{N}_q = \hat{q}_{M_1} - \frac{1}{2}\hat{q}_{M_2}$, $\hat{N}_p = \hat{p}_{M_2} - \frac{1}{2}\hat{p}_{M_1}$. Stan początkowy urządzeń pomiarowych $|0\rangle_{M_1,M_2}$ wybieramy tak aby precyzja pomiarów $\delta_q = \sqrt{\langle \hat{N}_q^2 \rangle}$ i $\delta_p = \sqrt{\langle \hat{N}_p^2 \rangle}$ były sobie równe i możliwie małe. Będzie to odpowiadało pomiarowi łącznemu q i p który nie faworyzuje żadnej z obserwabli i jest możliwie precyzyjny.

Wykaż, że w tej sytuacji zbiór operatorów $\Pi_{q,p}$ działających na S reprezentujące taki pomiar uogólniony (czyli t.że $p_{\text{joint}}(q,p) = \langle\psi|\Pi_{q,p}|\psi\rangle$) jest postaci:

$$\Pi_{q,p} = \frac{1}{2\pi}|(q,p)\rangle\langle(q,p)|, \quad |(q,p)\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}}\int \mathrm{d}q'\, e^{\frac{-(q'-q)^2}{2}} e^{\mathrm{i}pq'}|q'\rangle \tag{3}$$

gdzie $|(q,p)\rangle$ jest tzw. stanem koherentnym o średniej wartości położenia i pędu odpowiednio q i p. Tym samym mamy bardzo ładną interpretację łącznego pomiaru położenia i pędu jako rzutowania na stany koherentne:

$$p_{\text{joint}}(q,p) = \frac{1}{2\pi}|\langle\psi|(q,p)\rangle|^2 \tag{4}$$

Uwaga: w optyce kwantowej, taki rozkład prawdopodobieństwa pochodzący z rzutowania stanu na stany koherentne nosi nazwę reprezentacji P Glaubera.