Kwantowa Teoria Pomiaru i Estymacji

Seria 3

do oddania na 16.11.2012

Zadanie 1 (3 pkt) Rozważ cząstkę o spinie 1/2, przygotowaną w chwili początkowej w stanie $|\psi 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$, gdzie $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ odpowiadają stanom własnym operatora σ_z. Cząstka umieszczona została w jednorodnym polu magnetycznym w kierunku z. Hamiltonian opisujący dynamikę cząstki jest postaci $H = -\mu B \sigma_z$, gdzie μ moment magnetyczny cząstki.

a) Podaj stan cząstki po czasie t.

b) Wyobraźmy sobie, że poza umieszczeniem cząstki w jednorodnym polu magnetycznym jak wyżej, na cząstce przez cały czas t wykonywane są pomiary rzutowe spinu w kierunku x (np. idealnym urządzeniem Sterna-Gerlacha), w odstępie czasu δt. Zapisz wyrażenie na prawdopodobieństwo, że cząstka po każdym pomiarze będzie pozostawała w stanie początkowym $|\psi(0)\rangle$. W jakiej granicy można powiedzieć, że cząstka pozostaje zamrożona w stanie początkowym.

c) Zastanów się jakościowo nad tym co by się zmieniło gdyby zamiast pomiaru rzutowego, wykonać słaby pomiar spinu w kierunku x, zgodnie np. z modelem pomiaru Sterna-Gerlacha dyskutowanym na drugim wykładzie.

Zadanie 2 (3 pkt) Rozważ model pomiaru dwóch niezależnych zmiennych losowych x_1, x_2 t.że:

$$x_1 \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2) \tag{1}$$

$$x_2 \sim \begin{cases} \mathcal{N}(\theta, \sigma^2) & \theta \geq 0 \\ \mathcal{N}(\theta, 2\sigma^2) & \theta < 0 \end{cases} \tag{2}$$

gdzie zapis $x \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ oznacza, że rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowe x jest rozkładem gaussowskim o średniej θ i wariancji σ^2. Przyjmując, że σ jest znana a estymowanym parametrem jest θ postaraj się wykazać korzystając z nierówności Cramera-Rao, że optymalnym estymatorem w obszarze $\theta \geq 0$ jest $\tilde{\theta}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, a w obszarze $\theta < 0$ jest $\tilde{\theta}(x_1, x_2) = \frac{1}{3}(2x_1 + x_2)$. Tym samym wykażesz, że nie istniej jeden estymator gwarantujący minimalną wariancję w całym obszarze parametrów.

Zadanie 3 (2 pkt) Rozważ uogólnienie nierówności Cramera-Rao na przypadek estymacji funkcji od parametru $g(\theta)$. Wykaż, że jeśli $p_\theta(x)$ jest rodziną rozkładów prawdopodobieństwa obserwowanych zdarzeń to dla dowolnego nieobciążonego estymatora $\tilde{g}(x)$ zachodzi:

$$\Delta^2 \tilde{g} \geq \frac{g'(\theta)^2}{F} \tag{3}$$

gdzie $g'(\theta) = \frac{\mathrm{d}g(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$ a F jest informacją Fishera dla $p_\theta(x)$.

Zadanie 4 (2 pkt) Mówimy, że $p_\theta(x)$ należy do rodziny wykładniczych rozkładów prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy gdy:

$$p_\theta(x) = e^{a(\theta)+b(x)+c(\theta)d(x)} \tag{4}$$

Wykaż, że w tym przypadku zawsze istnieje funkcja $g(\theta)$ dla której istnieje estymator efektywny tzn. wysycający nierówność Cramera-Rao. Podaj tę funkcję. Bardzo wiele znanych rozkładów prawdopodobieństwa należy do tej rodziny (patrz `http://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_family`).