Kwantowa Teoria Pomiaru i Estymacji

Seria 6

do oddania na 7.12.2012

Zadanie 1 (3 pkt) Entropia względna $D(q \parallel p) = \sum_a q(a) \log_2 \frac{q(a)}{p(a)}$ jest ważną wielkością do oceny na ile empirycznie uzyskany rozkład prawdopodobieństwa (częstości) q jest zgodny z hipotezą, że prawdziwy rozkład jest p. Wiemy z wykładu, że prawdopodobieństwo, że q jest zgodny z p w granicy wielu powtórzeń N: $p^{(N)}(q) \doteq 2^{-ND(q\|p)}$, gdzie $\doteq$ oznacza równość „z dokładnością do pierwszego rzędu w wykładniku”.

Pokaż, że jeśli rozwiniemy $D(q \parallel p)$ wokół p, to początek rozwinięcia będzie miał postać:

$$D(q \parallel p) = \frac{1}{2}\chi^2 + \dots, \quad \text{gdzie } \chi^2 = \sum_a \frac{[q(a) - p(a)]^2}{p(a)} \tag{1}$$

gdzie χ^2 jest popularną wielkością „chi kwadrat” mierzącą zgodność pomiarów z hipotetycznym rozkładem prawdopodobieństwa.

Zadanie 2 (7 pkt) Rozważmy rzut monetą. Staramy się rozróżnić pomiędzy dwoma hipotezami, w których prawdopodobieństwa wypadnięcia orła i reszki są odpowiednio $p_0 = (1/2, 1/2)$ (moneta uczciwa), $p_1 = (1/4, 3/4)$ (moneta nie uczciwa). Przyjmujemy, że prawdopodobieństwa apriori obu hipotez są takie same. Wykonujemy N rzutów monetą.

a) Zapisz warunek na optymalny Bayesowski wybór hipotezy 1 lub 0 w zależnośći od zaobserwowanej liczby orłów i reszek.

b) Oblicz numerycznie średni błąd optymalnego rozróżniania Bayesowskiego w funkcji N (do takiego N do jakiego jesteś w stanie doliczyć) — zrób wykres

c) Wyprowadź ograniczenie Chernoffa dla tego przypadku i porównaj graficznie z uzyskanymi wynikami numerycznymi