

Egzamin z Analizy Funkcjonalnej I

Zadanie 1 Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ istnieje granica w sensie dystrybucji ciągu $T_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ zadanego przez funkcje

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto n^s e^{-n(x^2+y^2)} \quad ?$$

Znaleźć tę granicę.

Zadanie 2 Dla $t > 0$ zdefiniujmy $g_t(x) := \frac{1}{x^2+t^2}$.

- (i) Policzyc $\hat{g}_t(\xi) := \int g_t(x) e^{-ix\xi} dx$.
- (ii) Znaleźć $g_t * g_s$.

Zadanie 3 (i) Znaleźć dystrybucje $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ spełniające

$$(\partial_x^2 - 3\partial_x + 2)G(x) = \delta'(x).$$

- (ii) Które z tych dystrybucji należą do $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$?

Zadanie 4 Niech T będzie operatorem na $L^2(\mathbb{R})$ zdefiniowanym wzorem

$$(Tf)(x) := \int e^{-2x^2-y^2} f(y) dy.$$

- (i) Policzyc jak działa na funkcje operator $A := T^*T$.
- (ii) Pokazać, że istnieje $\lambda > 0$ takie, że $\frac{1}{\lambda}A$ jest rzutem ortogonalnym.
- (iii) Znaleźć normę operatora T .

Odpowiedzi.

ad Zad 1

$$s < 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 0;$$

$$s = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \pi \delta(x) \delta(y);$$

$$s > 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_n \text{ nie istnieje.}$$

ad Zad. 2

$$(i) \hat{g}_t(\xi) = \frac{\pi}{t} e^{-t|\xi|}.$$

$$(ii) g_t * g_s(x) = \frac{\pi(t+s)}{st(x^2+(t+s)^2)}.$$

ad Zad. 3

$$(i) G(x) = Ae^{2x} + Be^x + G_0(x), \\ G_0(x) = \theta(-x)(-2e^{2x} + e^x).$$

(ii) Tylko G_0 .

ad Zad. 4

$$(i) T^*Tf(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int e^{-x^2} e^{-y^2} f(y) dy.$$

$$(ii) \lambda = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

$$(iii) \|T\| = \sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}.$$