

Zadania domowe z analizy funkcjonalnej. Seria I

Zadanie 1 Niech $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ będzie macierzą rzeczywistą o wyznaczniku 1. Pokazać, że odwzorowanie na $L^2(\mathbb{R})$ zadane przez

$$Uf(x) := \frac{1}{|cx+d|} f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

jest unitarne.

Zadanie 2 Niech S^1 oznacza okrąg jednostkowy sparametryzowany kątem $\phi \in [0, 2\pi[$. Niech $S^1 \ni \phi \mapsto \Phi(\phi) \in S^1$ będzie bijekcją klasy C^1 . Zdefiniujmy operator W na funkcjach na S^1 wzorem

$$Wf(\phi) = f(\Phi(\phi)).$$

- (i) Pokazać, że W jest operatorem ograniczonym na $L^2(S^1)$ i znaleźć $\|W\|$.
- (ii) Znaleźć operator unitarny U i operator dodatni A takie, że $W = AU$.

Zadanie 3 Rozważmy $\mathbb{C}^n$ z bazą kanoniczną $(\delta_j : j = 0, 1, \dots, n-1)$. Zdefiniujmy operatory

$$U := \sum_{j=0}^{n-2} |\delta_{j+1}\rangle(\delta_j| + |\delta_0\rangle(\delta_{n-1}|, \quad R = |\delta_0\rangle(\delta_0| + \sum_{j=1}^{n-1} |\delta_{n-j}\rangle(\delta_j|.$$

- (i) Pokazać, że U i R są unitarne.
- (ii) Znaleźć bazę ortonormalną w której U jest diagonalny.
- (iii) Znaleźć bazę ortonormalną w której $U + U^*$ i R są diagonalne.

Zadanie 4 Rozważmy $l^2(\mathbb{Z})$ z bazą kanoniczną $(\delta_j : j \in \mathbb{Z})$. Zdefiniujmy operatory

$$U := \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\delta_{j+1}\rangle(\delta_j|, \quad R = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\delta_{-j}\rangle(\delta_j|.$$

- (i) Pokazać, że U i R są unitarne.
- (ii) Czy istnieje baza ortonormalna w której U jest diagonalny?
- (iii) Podać operator unitarny $W : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(S^1)$ taki, że

$$WUW^* = B, \quad (Bf)(\phi) = e^{i\phi} f(\phi), \quad f \in L^2(S^1).$$

(iv) Podać operator unitarny $V : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(0, \pi) \oplus L^2(0, \pi)$ taki, że

$$VRV^* = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{bmatrix}, \quad V(U + U^*)V^* = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

gdzie

$$(Cg)(\phi) = 2 \cos \phi g(\phi), \quad g \in L^2(0, \pi).$$

Wskazówka. Najpierw rozwiązać poprzednie zadanie.

Zadanie 5 Rozważmy $L^2(S^1)$ z bazą ortonormalną $e_n(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\phi}$, $n \in \mathbb{Z}$. Niech $(c_n : n \in \mathbb{Z})$ będzie ciągiem ograniczonym. Zdefiniujmy operator

$$C = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n |e_n\rangle \langle e_n|.$$

- (i) Pokazać, że C jest ograniczony i ma normę $\sup\{|c_n| : n \in \mathbb{Z}\}$.
- (ii) Pokazać, że jeśli $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$, to C posiada jądro całkowe równe

$$C(\phi, \psi) = \frac{\hat{c}(-\phi + \psi)}{2\pi},$$

$$\text{gdzie } \hat{c}(\psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\psi n} c_n.$$

Zadanie 6 Na $L^2(S^1)$ rozważyć operator P_ϵ z jądrem całkowym

$$P_\epsilon(\phi, \psi) = \frac{\sinh \epsilon}{\cosh \epsilon - \cos(\phi - \psi)}.$$

Pokazać, że $s\text{-}\lim_{\epsilon \searrow 0} P_\epsilon = \mathbb{1}$ i $\|P_\epsilon\| = 1$.

Wskazówka. Pokazać, używając bazy ortonormalnej z poprzedniego zadanie, że

$$P_\epsilon = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon|n|} |e_n\rangle \langle e_n|.$$

Zadanie 7 Niech $f : [0, \infty[\rightarrow [0, 1]$ będzie funkcją ciągłą i malejącą, taką, że $f(0) = 1$ i $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$. Rozważmy przestrzeń Hilberta l^2 z bazą kanoniczną $(\delta_j : j \in \mathbb{N})$. Zdefiniujmy rodzinę operatorów

$$C_\epsilon := \sum_{j=1}^{\infty} f(\epsilon j) |\delta_j\rangle \langle \delta_j|.$$

- (i) Pokazać, że funkcja $[0, \infty[\ni \epsilon \mapsto C_\epsilon$ jest normowo ciągła na $]0, \infty[$ lecz normowo nieciągła w $\epsilon = 0$.

- (ii) Pokazać, że funkcja $[0, \infty[\ni \epsilon \mapsto C_\epsilon$ jest silnie ciągła.

Zadanie 8 Mówimy, że P jest rzutem, gdy $P^2 = P$.

- (i) Pokazać, że jeśli P jest rzutem niezerowym, to $\|P\| \geq 1$.
(ii) Pokazać, że dla każdego $c \geq 1$ istnieje rzut na przestrzeni Hilberta taki, że $\|P\| = c$.
Wskazówka. Wystarczy rozważać 2-wymiarowe przestrzenie Hilberta.
(iii) Pokazać, że jeśli P jest rzutem na przestrzeni Hilberta takim, że $\|P\| = 1$, to jest to rzut ortogonalny.

Zadanie 9 Niech $(U_n : n = 1, 2, \dots)$ będzie ciągiem operatorów unitarnych.

- (i) Pokazać, że jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = U$, to U jest unitarny.
(ii) Pokazać, że jeśli $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = U$ i $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} U_n^* = U^*$, to U jest unitarny.
(iii) Pokazać, że jeśli $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = U$, to U jest izometrią. Podać przykład ciągu operatorów unitarnych, którego silna granica nie jest unitarna.
(iv) Pokazać, że jeśli $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = U$, to $\|U\| \leq 1$. Podać przykład ciągu operatorów unitarnych, którego słaba granica jest zerem.

Zadanie 10 Niech $(P_n : n = 1, 2, \dots)$ będzie ciągiem rzutów. Niech $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$. Pokazać, że P jest rzutem.

Wskazówka. Można założyć, że $\sup \|P_n\| < \infty$. (Wynika to z Tw. Banacha-Steinhaus'a i silnej zbieżności ciągu (P_n)).

Zadanie 11 Niech A_n będzie ciągiem samosprężonych operatorów ograniczonych na przestrzeni Hilberta takich, że $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$. Pokazać, że A jest samosprężony.

Zadanie 12 Niech $(P_n : n = 1, 2, \dots)$ będzie ciągiem rzutów ortogonalnych.

- (i) Niech $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$. Pokazać, że P jest rzutem ortogonalnym.
(ii) Podać przykład ciągu $(P_n : n = 1, 2, \dots)$ rzutów ortogonalnych takich, że $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{1}{2}\mathbb{I}$.