

Zadania domowe z analizy funkcjonalnej. Seria II

Zadanie 1 Dla $f \in L^2([0, \infty[)$ definiujemy

$$(Tf)(x) := x^{-1}f(x^{-1}).$$

Czy T jest operatorem

- (i) ograniczonym,
- (ii) unitarnym,
- (iii) samosprężonym.

Zadanie 2 Niech $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \alpha \leq 0$. Niech $(\delta_n : n \in \mathbb{N})$ oznacza bazę kanoniczną w $l^2(\mathbb{N})$. Zdefiniujmy następujący operator na $l^2(\mathbb{N})$:

$$T := \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\alpha} |\delta_{n+1}\rangle \langle \delta_n|.$$

- (i) Pokazać, że T jest operatorem ograniczonym i znaleźć jego normę.
- (ii) Dla jakich α operator T jest izometrią?
- (iii) Policzyc T^*T .
- (iv) Policzyc T^2 .
- (v) Dla jakich α istnieje $s - \lim_{n \rightarrow \infty} T^n$?
- (vi) Dla jakich α istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n$?

Zadanie 3 Rozważmy $l^2(\mathbb{Z})$ z bazą kanoniczną $(\delta_n : n \in \mathbb{Z})$. Niech $\theta \in \mathbb{R}$. Zdefiniujmy wektory

$$b_n := \cos(\theta n) \delta_n + \sin(\theta n) \delta_{-n}.$$

Pokazać, że $(b_n : n \in \mathbb{Z})$ jest bazą ortonormalną.

Zadanie 4 Policzyc tranformatę Fouriera funkcji

$$f(x) = e^{-\frac{3}{4}x^2} \cos x^2.$$

Zadanie 5 Niech $0 < \alpha < \pi$. Dla $f \in L^2(S^1)$ zdefiniujmy

$$(Tf)(\phi) = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(\phi - \psi) d\psi.$$

- (i) Policzyc Te_n , gdzie $e_n(\phi) := e^{in\phi}$.
- (ii) Pokazać, że T jest operatorem ograniczonym i znaleźć jego normę.

Zadanie 6 Niech $1 < p < \infty$ i $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$. Niech $|x|$ oznacza normę euklidesową wektora $x \in \mathbb{R}^3$. Dla jakiego m funkcja $(1 + |x|^2)^{-m}f$ należy do $L^1(\mathbb{R}^d)$?

Zadanie 7 Niech d będzie liczbą naturalną. Dla jakiego m następująca funkcja należy do $L^2(\mathbb{R}^d)$:

- (i) $|x|^{-m}$,
- (ii) $(1 + |x|)^{-m}$,
- (iii) $\prod_{i=1}^d (1 + |x_i|)^{-m}$.