

Zadania domowe z analizy funkcjonalnej. Seria III

Zadanie 1 Dla $t > 0$ kładziemy $g_t(x) := (2\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/2t}$. Znaleźć $g_t * g_s$.

Wskazówka. $\hat{g}_t(\xi) = e^{-t\xi^2/2}$.

Zadanie 2 Dla $t \neq 0$ kładziemy $g_t(x) = (ix + t)^{-1}$. Znaleźć $g_t * g_s$.

Wskazówka. $\hat{g}_t(\xi) = 2\pi(\operatorname{sgn} t)\theta(\xi\operatorname{sgn} t)e^{-t\xi}$.

Zadanie 3 Pokazać, że $\operatorname{Span}\{(x + \alpha)^{-1} : \operatorname{Im}\alpha > 0\}$ nie jest podprzestrzenią gęstą w $L^2(\mathbb{R})$.

Zadanie 4 Niech $g \in L^1(\mathbb{R})$. Pokazać, że operator $Tf := f * g$ jest dobrze zdefiniowany dla $f \in L^2(\mathbb{R})$, jest ograniczony i $\|T\| \leq \|g\|_1$. Czy zawsze $\|T\| = \|g\|_1$?

Wskazówka. Zastosować transformację Fouriera.

Zadanie 5 Niech $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$. Pokazać, że

$$L^p(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R}) \subset L^r(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R}) + L^q(\mathbb{R}).$$

Zadanie 6 Dla $m \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ definiujemy

$$L_m^p(\mathbb{R}) := \{f : \|(1 + |x|)^m f\|_p < \infty\}.$$

Pokazać, że jeśli $r \leq q$, $m > \frac{1}{r} - \frac{1}{q} + k$, to $L_k^r(\mathbb{R}) \supset L_m^q(\mathbb{R})$.

Wskazówka. Wykorzystać uogólnioną nierówność Höldera

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad 1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$