Zadanie 1. Niech $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Dla jakiego m, $(1+|x|)^{-m} f$ należy do $L^1(\mathbb{R}^3)$?

Zadanie 2. Policzyć transformatę Fouriera funkcji $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{3}{4}x^2} \sin(x^2)$.

Zadanie 3. Na przestrzeni $L^2([0,1])$ definiujemy operator $(Tf)(x) := x^2 f(x^2)$. Pokazać, że T jest ograniczony i znaleźć jego normę.

Zadanie 4. W przestrzeni $l^2(\mathbb{N})$ z bazą kanoniczną δ_n, $n = 1, 2, \ldots$, definiujemy ciąg wektorów $e_n := \frac{1}{\sqrt{n}}(\delta_1 + \ldots + \delta_n)$.

(i) Czy ciąg e_n jest zbieżny normowo, to znaczy, czy istnieje wektor $f \in l^2(\mathbb{N})$ taki, że $\lim_{n\to\infty} \|e_n - f\| = 0$?

(ii) Czy ciąg e_n jest zbieżny słabo, to znaczy, czy istnieje wektor $f \in l^2(\mathbb{N})$ taki, że dla każdego $g \in l^2(\mathbb{N})$, $\lim_{n\to\infty}(g|e_n) = (g|f)$?

Zadanie 5. Niech T będzie operatorem izometrycznym na przestrzeni Hilberta, takim, że $T^2 = \mathbb{1}$. Pokazać, że

(i) T jest samosprzężony,

(ii) T jest unitarny,

(iii) $\frac{1}{2}(\mathbb{1} - T)$ jest rzutem ortogonalnym.