

Zadanie 1. Pokazać, że dla $\epsilon \geq 0$, transformata Fouriera funkcji $\theta(x)x^\lambda$ dla $\lambda > -1$, jest równa $e^{-i(1+\lambda)\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\xi-i\epsilon)^{-1-\lambda}$.

Zadanie 2. Pokazać, że dla $m \geq 0$ transformata Fouriera funkcji na $\mathbb{R}^3$ $Y_m(x, y, z) := r^{-1}e^{-mr}$ jest równa $\frac{4\pi}{|\xi|^2+m^2}$.

Zadanie 3. Niech P będzie wielomianem takim, że $P(\xi) \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}$. Niech $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pokazać, że istnieje $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ taka, że

$$P(i\partial_x)f = g.$$

Pokazać, że istnieje G zależne tylko od P takie, że to rozwiązanie może być zapisane jako

$$f = G * g.$$

Znaleźć G dla $P(\xi) = \xi^2 + m^2$

Zadanie 4. Niech δ_a będzie deltą Diraca w punkcie $a \in \mathbb{R}$. Pokazać, że operator $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni f \mapsto T_a f := \delta_a * f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ rozszerza się do operatora unitarnego na $L^2(\mathbb{R})$. Czy T_a dla $a \rightarrow \infty$ jest zbieżny normowo, silnie lub słabo? Ewentualnie policzyć granicę.

Zadanie 5. Pokazać, że dla $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$Tf(x) := \mathcal{P} \int \frac{f(y)}{x-y} dy$$

należy do $L^2(\mathbb{R})$ i że T rozszerza się do operatora ograniczonego na $L^2(\mathbb{R})$. Policzyć T^2 .

Wskazówka. Warto zastosować transformatę Fouriera.