

Zadanie 1. Rozważmy przestrzeń $L^2([0, \infty[, e^{-x})$. Przypominamy, że dla $f, g \in L^2([0, \infty[, e^{-x})$ ich iloczyn skalarny zadany jest przez

$$(f|g) := \int_0^\infty \overline{f(x)}g(x)e^{-x}dx.$$

Niech P będzie rzutem ortogonalnym na przestrzeń rozpiętą na wektorach 1 i x . Znaleźć funkcję $(x, y) \mapsto P(x, y)$ dla której

$$Pf(x) = \int_0^\infty P(x, y)f(y)dy.$$

Zadanie 2. Znaleźć wszystkie dystrybucje $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ spełniające równanie

$$(x^2 - 1)T = 1.$$

Zadanie 3. Niech T będzie pochodną w sensie dystrybucyjnym funkcji $x^{\frac{1}{2}}\theta(x)$ (θ jest funkcją Heaviside'a). Znaleźć wzór na T i policzyć jej transformatę Fouriera.

Zadanie 4. Dla $a \in \mathbb{R}$ i $\epsilon > 0$ kładziemy $g_\epsilon(x) := \frac{\epsilon}{(x-a)^2 + \epsilon^2}$. Dla $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definiujemy $T_\epsilon f := g_\epsilon * f$. Pokazać, że T_ϵ rozszerza się do operatora ograniczonego na $L^2(\mathbb{R})$ i policzyć jego normę. Zbadać zbieżność normową, silną i słabą T_ϵ przy $\epsilon \searrow 0$. Ewentualnie, policzyć granicę.

Wskazówka. Warto zastosować transformację Fouriera.

Zadanie 5. Niech $g(x) = \frac{\sin x}{x}$. Dla $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definiujemy $Tf := g * f$. Pokazać, że T rozszerza się do operatora ograniczonego na $L^2(\mathbb{R})$ i policzyć T^2 .

Wskazówka. Warto zastosować transformację Fouriera.