

Zadanie 1. Rozważmy przestrzeń $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$. Przypominamy, że dla $f, g \in L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$, ich iloczyn skalarny zadany jest przez

$$(f|g) := \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) e^{-x^2} dx.$$

Niech P będzie rzutem ortogonalnym na przestrzeń rozpiętą na wektorach 1 i e^{-ix^2} . Znaleźć funkcję $(x, y) \mapsto P(x, y)$ dla której

$$Pf(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x, y) f(y) dy.$$

Zadanie 2. Znaleźć transformatę Fouriera funkcji

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto \theta(x + y),$$

gdzie θ jest funkcją Heaviside'a.

Zadanie 3. Znaleźć $g * \cdots * g$, gdzie $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$.
 n razy

Zadanie 4. Dla $f \in L^2([0, 1])$ definiujemy operator liniowy $(Af)(x) = xf(x)$. Pokazać, że $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ nie istnieje, natomiast $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$. (Uwaga: $\lim$ oznacza granicę normową a $s\text{-}\lim$ oznacza granicę silną ciągu operatorów).

Zadanie 5. Niech f będzie dowolną funkcją z $L^2(\mathbb{R}^n)$. Dla jakiego m

$$(1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{m}{2}} f$$

jest na pewno całkowalne?