

# Równania różniczkowe fizyki matematycznej

Jan Dereziński

Katedra Metod Matematycznych Fizyki  
Uniwersytet Warszawski  
Hoża 74, 00-682, Warszawa  
e-mail jan.derezinski@fuw.edu.pl

7 czerwca 2012

Metody Matematyczne Fizyki,  
skrypt II, rok 2012

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Równania różniczkowe w dziedzinie zespolonej</b>	<b>2</b>
1.1	Punkty regularne . . . . .	2
1.2	Punkt regularny w nieskończoności . . . . .	6
1.3	Regularne punkty osobliwe. . . . .	7
1.4	Regularny punkt osobliwy w nieskończoności . . . . .	11
1.5	Wrońskian . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Szeregi hipergeometryczne</b>	<b>14</b>
2.1	Funkcja hipergeometryczna albo ${}_2F_1$ . . . . .	15
2.2	Funkcja konfluentna albo ${}_1F_1$ . . . . .	15
2.3	Funkcja ${}_0F_1$ . . . . .	15
2.4	Funkcja ${}_2F_0$ . . . . .	15
2.5	Funkcja potęgowa czyli ${}_1F_0$ . . . . .	15
2.6	Funkcja wykładnicza czyli ${}_0F_0$ . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Równanie konfluentne</b>	<b>16</b>
3.1	Funkcja konfluentna . . . . .	16
3.2	Pierwsza tożsamość Kummera . . . . .	17
3.3	Reprezentacje całkowite rozwiązań równania konfluentnego . . . . .	17
3.4	Punkt w $\infty$ i równanie ${}_2F_0$ . . . . .	18
3.5	Funkcja ${}_2F_0$ . . . . .	19
3.6	Rozwiązania równania konfluentnego mające określone zachowanie w $\infty$ . . . . .	20
3.7	Atom wodoru . . . . .	21

<b>4</b>	<b>Równanie <math>{}_0F_1</math> i równanie Bessela</b>	<b>22</b>
4.1	Zmodyfikowane równanie Bessela . . . . .	22
4.2	Równanie Bessela . . . . .	22
4.3	Równanie Helmholtza w wymiarze 2 . . . . .	23
4.4	Równanie Helmholtza w dowolnym wymiarze . . . . .	23
4.5	Równanie ${}_0F_1$ – równoważność z równaniem Bessela . . . . .	24
4.6	Funkcja ${}_0F_1$ . . . . .	24
4.7	Reprezentacje całkowe . . . . .	25
4.8	Funkcja ${}_0F_1$ dla całkowitych parametrów . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Równanie hipergeometryczne</b>	<b>26</b>
5.1	Rozwiązanie zachowujące się jak $z^{1-c}$ w zerze . . . . .	27
5.2	Rozwiązania mające określone zachowania w 1 . . . . .	27
5.3	Rozwiązania mające określone zachowania w $\infty$ . . . . .	27
5.4	Tożsamości . . . . .	28
5.5	Reprezentacje całkowe . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Równanie Airy’ego</b>	<b>29</b>

## 1 Równania różniczkowe w dziedzinie zespolonej

### 1.1 Punkty regularne

W tym rozdziale rozważamy równania różniczkowe pierwszego rzędu w  $\mathbb{C}^n$  i drugiego rzędu w  $\mathbb{C}$ . W  $\mathbb{C}^n$  będziemy posługiwać się normą wektorów

$$\|v\| = \left( \sum_{j=0}^n |v_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad v \in \mathbb{C}^n.$$

Jeśli  $A$  jest odwzorowaniem liniowym na  $\mathbb{C}^n$ , to norma  $A$  jest zdefiniowana jako

$$\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Będziemy rozważać równanie różniczkowe

$$\partial_z v(z) = A(z)v(z). \tag{1.1}$$

gdzie  $v(z) \in \mathbb{C}^n$ .

**Definicja 1.1** *Jeśli w (1.1) funkcja  $A(z)$  jest analityczna w  $z_0$ , to mówimy, że  $z_0$  jest punktem regularnym tego równania.*

**Twierdzenie 1.2** Niech  $\Omega$  będzie spójnym jednospójnym zbiorem otwartym w  $\mathbb{C}$ . Niech

$$\Omega \ni z \mapsto A(z) = \begin{bmatrix} a_{11}(z) & \dots & a_{1n}(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(z) & \dots & a_{nn}(z) \end{bmatrix}$$

będzie funkcją holomorficzną o wartościach w macierzach  $n \times n$  i  $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ . Wtedy

istnieje jedna i tylko jedna funkcja holomorficzna  $\Omega \ni z \mapsto v(z) = \begin{bmatrix} v_1(z) \\ \dots \\ v_n(z) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$  będąca

rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{cases} \frac{dv(z)}{dz} = A(z)v(z), \\ v(z_0) = w. \end{cases} \quad (1.2)$$

**Dowód.** Ograniczmy się najpierw do koła  $K(z_0, r)$  takiego, że  $\overline{K(z_0, r)} \subset \Omega$ . Można również założyć, że  $z_0 = 0$ .

Niech

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k$$

Wtedy szereg

$$v(z) := \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k,$$

gdzie

$$\begin{cases} v_0 = w, \\ v_{m+1} := \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m A_{m-k} v_k. \end{cases}$$

jest jedynym szeregiem formalnie spełniającym równanie (1.2).

Pokażmy, że szereg ten jest zbieżny w kole  $K(0, r)$ . Wiemy z nierówności Cauchy'ego, że

$$\|A_k\| \leq Cr^{-k}.$$

Jeśli położymy

$$\begin{cases} p_0 = \|w\| \\ p_{m+1} := \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m Cr^{-m+k} p_k, \end{cases}$$

to możemy dowieść indukcyjnie, że

$$\|v_m\| \leq p_m. \quad (1.3)$$

W rzeczy samej, mamy

$$\|v_0\| = p_0.$$

Założmy, że

$$\|v_k\| \leq p_k, \quad k = 0, \dots, m.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \|v_{m+1}\| &\leq \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \|A_{m-k} v_k\| \\ &\leq \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \|A_{m-k}\| \|v_k\| \\ &\leq \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m C r^{k-m} p_k = p_{m+1}. \end{aligned}$$

To kończy dowód (1.3).

Jeśli odejmiemy wzory

$$\begin{aligned} r(m+1)p_{m+1} &= \sum_{k=0}^m C r^{-m+k+1} p_k, \\ m p_m &= \sum_{k=0}^{m-1} C r^{-m+k+1} p_k, \end{aligned}$$

to dostaniemy

$$r(m+1)p_{m+1} = (Cr + m)p_m.$$

Wynika stąd natychmiast że

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{p_{m+1}}{p_m} = r^{-1}.$$

Czyli na mocy kryterium d'Alemberta, szereg

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$$

jest zbieżny w kole  $K(0, r)$ . Zatem również szereg

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k$$

jest zbieżny w kole  $K(0, r)$ .

Powyższe rozumowanie możemy przeprowadzić dla dowolnego koła zawartego w  $\Omega$ . W ten sposób, ponieważ  $\Omega$  jest spójny, możemy przedłużyć funkcję  $v(z)$  na cały obszar  $\Omega$ . Jego jedno-spójność gwarantuje, że nie dostaniemy funkcji wieloznacznej.  $\square$

### Przykład 1.3

$$(\partial_z - 1)v(z) = 0, \quad v(0) = 1.$$

Podstawiamy

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n.$$

Dostajemy wzór rekurencyjny;

$$n v_n = v_{n-1}.$$

Czyli

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Oczywiście,  $v(z) = e^z$ .

**Przykład 1.4** Niech  $\mu \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq -1$

$$(\partial_z - \mu(z+1)^{-1})v(z) = 0, \quad v(0) = 1.$$

Podstawiamy

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n.$$

Dostajemy wzór rekurencyjny;

$$n v_n = (\mu - n + 1) v_{n-1}.$$

Czyli

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu \dots (\mu - n + 1) z^n}{n!}, \quad |z| < 1.$$

Oczywiście,  $v(z) = (1+z)^\mu$ .

Rozważmy teraz równanie skalarne drugiego rzędu

$$(\partial_z^2 + c(z)\partial_z + d(z))u(z) = 0. \quad (1.4)$$

**Definicja 1.5** Mówimy, że punkt  $z_0$  jest regularnym punktem równania (1.4), jeśli  $c(z)$  i  $d(z)$  są analityczne w  $z_0$ .

**Stwierdzenie 1.6** Niech  $c(z)$ ,  $d(z)$  będą holomorphyjne w spójnym jednopójnym zbiorze otwartym  $\Omega$ . Wtedy zagadnienie

$$\begin{cases} (\partial_z^2 + c(z)\partial_z + d(z))u(z) = 0 \\ u(z_0) = w_0, \quad \partial_z u(z_0) = w_1, \end{cases} \quad (1.5)$$

ma jedno i tylko jedno rozwiązanie w  $\Omega$ .

**Dowód.** Zdefiniujemy

$$v(z) := \begin{bmatrix} u(z) \\ u'(z) \end{bmatrix}, \quad w := \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix}$$

oraz

$$A(z) := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -d(z) & -c(z) \end{bmatrix}$$

Wtedy (1.5) możemy przepisać w postaci

$$\begin{cases} \frac{dv(z)}{dz} = A(z)v(z), \\ v(z_0) = w. \end{cases}$$

i zastosować twierdzenie 1.2.  $\square$

Podajmy jeszcze wzór rekurencyjny na współczynniki rozwinięcia

$$u(z) := \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k.$$

dla rozwiązania równania

$$(b(z)\partial_z^2 + c(z)\partial_z + d(z))u(z) = 0,$$

gdzie  $b(0) \neq 0$ . Mamy:

$$\begin{cases} u_0 = w_0, & u_1 = w_1, \\ \sum_{k=0}^m k(k-1)u_k b_{m-k} + \sum_{k=0}^{m-1} k c_{m-k-1} u_k + \sum_{k=0}^{m-2} d_{m-k-2} u_k = 0. \end{cases}$$

## 1.2 Punkt regularny w nieskończoności

**Definicja 1.7** Załóżmy, że  $A(z)$  jest zdefiniowane dla  $|z| > R$ . Mówimy, że  $\infty$  jest punktem regularnym równania (1.1), gdy po zamianie zmiennych  $w = z^{-1}$  dostajemy punkt regularny w 0.

Oczywiście,  $\partial_z = -w^2 \partial_w$ . Dlatego po zamianie zmiennych (1.1) zmienia się w równanie

$$\partial_w v(w^{-1}) = -w^{-2} A(w^{-1}) v(w^{-1}).$$

Dlatego  $\infty$  jest punktem regularnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^2 A(z).$$

**Twierdzenie 1.8** Niech  $\infty$  będzie regularnym punktem równania (1.6). Wtedy dla zadanego  $w \in \mathbb{C}^n$ , istnieje dokładnie jedno analityczne w nieskończoności rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} \frac{dv(z)}{dz} = A(z)v(z), \\ \lim_{z \rightarrow \infty} v(z) = w. \end{cases} \quad (1.6)$$

Rozważmy teraz równania drugiego rzędu postaci (1.4).

**Definicja 1.9** Załóżmy, że  $c(z), d(z)$  są zdefiniowane dla  $|z| > R$ . Mówimy, że  $\infty$  jest punktem regularnym równania (1.4), gdy po zamianie zmiennych  $w = z^{-1}$  dostajemy punkt regularny w 0.

Zamiana zmiennych prowadzi do równania

$$\left( \partial_w^2 + (2w^{-1} - w^{-2}c(w^{-1}))\partial_w + w^{-4}d(w^{-1}) \right) u(w^{-1}) = 0.$$

Zatem  $\infty$  jest punktem regularnym, gdy istnieją granice

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (2z - z^2 c(z)), \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z^4 d(z).$$

**Twierdzenie 1.10** Niech  $\infty$  będzie regularnym punktem równania. Wtedy dla zadanych  $w_0, w_1$  istnieje dokładnie jedno analityczne w nieskończoności rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} (\partial_z^2 + c(z)\partial_z + d(z))u(z) = 0 \\ \lim_{z \rightarrow \infty} u(z) = w_0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} (u(z) - w_0)z = w_1. \end{cases} \quad (1.7)$$

### 1.3 Regularne punkty osobliwe.

Rozważmy teraz równanie różniczkowe (1.2) dla którego prawa strona ma osobliwości.

**Definicja 1.11** *Mówimy, że równanie*

$$\frac{dv(z)}{dz} = \tilde{A}(z)v(z) \quad (1.8)$$

*ma w  $z_0$  regularny punkt osobliwy, gdy  $\tilde{A}(z)$  ma w  $z_0$  biegun co najwyżej pierwszego rzędu.*

Można wtedy zapisać (1.2) w postaci

$$(z - z_0)\partial_z v(z) = A(z)v(z),$$

gdzie  $A(z)$  jest holomorfczne w otoczeniu  $z_0$ . Wartości własne macierzy  $A(z_0)$  nazywamy indeksami punktu osobliwego  $z_0$ . Opiszmy teraz metodę znajdowania rozwiązań wokół regularnego punktu osobliwego. Dla uproszczenia przyjmijmy, że tym punktem jest 0.

**Twierdzenie 1.12 (Metoda Frobeniusa dla układów równań)** *Niech  $\Omega$  będzie spójnym jednodójnym zbiorem otwartym w  $\mathbb{C}$  zawierającym 0. Niech*

$$\Omega \ni z \mapsto A(z) = \begin{bmatrix} a_{11}(z) & \dots & a_{1n}(z) \\ & \dots & \\ a_{n1}(z) & \dots & a_{nn}(z) \end{bmatrix}$$

*będzie funkcją holomorfczną o wartościach w macierzach  $n \times n$ . Niech  $w \in \mathbb{C}^n$  i  $\lambda \in \mathbb{C}$  spełniają*

$$\begin{aligned} (A(0) - \lambda)w &= 0, \\ \lambda + m &\text{ nie jest wartością własną } A(0) \text{ dla } m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.9)$$

*Wtedy istnieje jedna i tylko jedna funkcja  $\tilde{v}(z)$  holomorfczna na  $\Omega$  taka, że  $v(z) := z^\lambda \tilde{v}(z)$  jest rozwiązaniem równania*

$$\begin{cases} z \frac{dv(z)}{dz} = A(z)v(z), \\ \lim_{z \rightarrow 0} z^{-\lambda} v(z) = w. \end{cases} \quad (1.10)$$

**Dowód.** Ograniczmy się najpierw do koła  $K(0, r)$  takiego, że  $\overline{K(0, r)} \subset \Omega$ .

Niech

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k$$

Wtedy szereg

$$v(z) := z^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k,$$

gdzie

$$\begin{cases} v_0 = w \\ v_m := (\lambda + m - A_0)^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} A_{m-k} v_k. \end{cases}$$

jest jedynym szeregiem formalnie spełniającym równanie (1.10).

Pokażemy, że szereg ten jest zbieżny w kole  $K(0, r)$ . Wiemy z nierówności Cauchy'ego, że

$$\|A_k\| \leq Cr^{-k}.$$

Jeśli położymy

$$\begin{cases} p_0 = \|w\| \\ p_m := \|(\lambda + m - A_0)^{-1}\| \sum_{k=0}^{m-1} Cr^{-m+k} p_k, \end{cases}$$

to możemy dowieść indukcyjnie, że

$$\|v_m\| \leq p_m.$$

Jeśli odejmiemy wzory

$$\begin{aligned} r \|(\lambda + m + 1 - A_0)^{-1}\|^{-1} p_{m+1} &= \sum_{k=0}^m Cr^{-m+k} p_k, \\ \|(\lambda + m - A_0)^{-1}\|^{-1} p_m &= \sum_{k=0}^{m-1} Cr^{-m+k} p_k, \end{aligned}$$

to dostaniemy

$$r \|(\lambda + m + 1 - A_0)^{-1}\|^{-1} p_{m+1} = \left( C + \|(\lambda + m - A_0)^{-1}\|^{-1} \right) p_m.$$

łatwo się przekonać, że

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m \|(\lambda + m - A_0)^{-1}\| = 1.$$

Wynika stąd natychmiast że

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{p_{m+1}}{p_m} = r^{-1}.$$

Czyli na mocy kryterium d'Alemberta, szereg definiujący  $\tilde{v}(z)$  jest zbieżny w kole  $K(0, r)$ .

Stosując Twierdzenie 1.2 możemy przedłużyć  $\tilde{v}(z)$  na cały obszar  $\Omega$ .  $\square$

**Przykład 1.13** *Niech*

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & \dots & & \\ 1 & \lambda & \dots & \\ & & \dots & \\ & & \dots & \lambda \\ & & \dots & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Rozważmy równanie  $z\partial_z v(z) = Av(z)$ . Wtedy dostajemy równania

$$\begin{aligned} z\partial_z v_1 &= \lambda v_1, \\ v_1 + z\partial_z v_2 &= \lambda v_2, \\ &\dots \\ v_{n-1} + z\partial_z v_n &= \lambda v_n. \end{aligned}$$



Bazę rozwiązań tego układu stanowią

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ z^\lambda \\ z^\lambda \log z \\ \dots \\ z^\lambda (\log z)^{m-1} \end{bmatrix}, \quad m = 1, \dots, n.$$

**Przykład 1.14** Następujące równanie ma regularny punkt osobliwy w 0:

$$\partial_z v(z) = (az^{-1} + b)v(z).$$

Jego rozwiązaniem jest  $v(z) = z^a e^{bz}$

Rozważymy teraz równania drugiego rzędu.

**Definicja 1.15** Mówimy, że równanie

$$\left( \partial_z^2 + \tilde{b}(z)\partial_z + \tilde{c}(z) \right) u(z) = 0$$

ma w  $z_0$  regularny punkt osobliwy, gdy  $\tilde{b}(z)$  ma w  $z_0$  biegun co najwyżej pierwszego rzędu a  $\tilde{c}(z)$  ma w  $z_0$  biegun co najwyżej drugiego rzędu

Dla uproszczenia założymy, że  $z_0 = 0$ . Możemy wtedy zapisać powyższe równanie w formie:

$$(z^2 \partial_z^2 + b(z)z\partial_z + c(z)) u(z) = 0.$$

**Stwierdzenie 1.16 (Metoda Frobeniusa dla równań drugiego rzędu)** Niech  $b(z), c(z)$  będą holomorfczne w jednospójnym obszarze  $\Omega$  zawierającym 0. Niech  $\lambda \in \mathbb{C}$  spełnia

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda b(0) + c(0) = 0,$$

$$(\lambda + m)(\lambda + m - 1) + (\lambda + m)b(0) + c(0) \neq 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Wtedy istnieje jedna i tylko jedna funkcja  $\tilde{u}(z)$  holomorfczna w  $\Omega$ , taka, że  $u(z) := z^\lambda \tilde{u}(z)$  jest rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{cases} (z^2 \partial_z^2 + b(z)z\partial_z + c(z)) u(z) = 0, \\ \lim_{z \rightarrow 0} z^{-\lambda} u(z) = 1, \end{cases} \quad (1.11)$$

**Dowód.** Zdefiniujmy

$$v(z) := \begin{bmatrix} u(z) \\ zu'(z) \end{bmatrix}, \quad w := \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

oraz

$$A(z) := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c(z) & 1 - b(z) \end{bmatrix}.$$

Mamy wtedy

$$A(z)v(z) = \begin{bmatrix} zu'(z) \\ -c(z)u(z) - b(z)zu'(z) + zu'(z) \end{bmatrix},$$

$$z\partial_z \begin{bmatrix} u(z) \\ zu'(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} zu'(z) \\ z^2u''(z) + zu'(z) \end{bmatrix},$$

$$z^{-\lambda}v(z) = \begin{bmatrix} \tilde{u}(z) \\ z\tilde{u}'(z) + \lambda\tilde{u}(z) \end{bmatrix}.$$

Zatem (1.11) możemy przepisać w postaci

$$\begin{cases} z \frac{dv(z)}{dz} = A(z)v(z), \\ \lim_{z \rightarrow 0} z^{-\lambda}v(z) = w. \end{cases}$$

i zastosować twierdzenie 1.12.  $\square$

Podajmy jeszcze wzór rekurencyjny na współczynniki rozwinięcia

$$u(z) := \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{\lambda+k}$$

dla równania

$$(a(z)z^2\partial_z^2 + b(z)z\partial_z + c(z))u(z) = 0,$$

gdzie  $a(0) \neq 0$ . Mamy:

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_m = -((\lambda + m)(\lambda + m - 1)a_0 + (\lambda + m)b_0 + c_0)^{-1} \\ \quad \times \sum_{k=0}^{m-1} ((\lambda + k)(\lambda + k - 1)a_{m-k} + (\lambda + k)b_{m-k} + c_{m-k})u_k. \end{cases}$$

Czyli, jeśli szukamy rozwiązań równania postaci

$$(a(z)z^2\partial_z^2 + b(z)z\partial_z + c(z))u(z) = 0,$$

gdzie  $a(0) \neq 0$ , to najpierw powinniśmy znaleźć pierwiastki  $\lambda_1, \lambda_2$  tak zwanego równania wskaźnikowego:

$$\lambda(\lambda - 1)a(0) + \lambda b(0) + c(0) = 0.$$

Jeśli  $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$ , to możemy znaleźć dwa liniowo niezależne rozwiązania zachowujące się w zerze jak  $z^{\lambda_1}$  i  $z^{\lambda_2}$ . Jeśli  $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ , to w ogólności możemy wyżej opisaną metodą znaleźć tylko rozwiązanie o zachowaniu  $z^{\lambda_1}$ , gdzie  $\lambda_1 - \lambda_2 \geq 0$ .

## 1.4 Regularny punkt osobliwy w nieskończoności

**Definicja 1.17** Załóżmy, że  $\tilde{A}(z)$  jest zdefiniowane dla  $|z| > R$ . Mówimy, że  $\infty$  jest regularnym punktem osobliwym równania (1.8), gdy po zamianie zmiennych  $w = z^{-1}$  dostajemy regularny punkt osobliwy w 0.

Latwo zauważyć, że równanie (1.8) ma regularny punkt osobliwy w  $\infty$ , gdy istnieje granica

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z\tilde{A}(z).$$

Wtedy możemy przepisać równanie (1.8) w postaci

$$z\partial_z v(z) = A(z)v(z),$$

gdzie  $A(z)$  jest analityczne w  $\infty$ . Wartości własne  $-A(\infty)$  nazywamy indeksami punktu  $\infty$ .

**Twierdzenie 1.18** Niech  $\Omega$  będzie spójnym jednospójnym zbiorem otwartym w  $\overline{\mathbb{C}}$  zawierającym  $\infty$ . Niech

$$\Omega \ni z \mapsto A(z) = \begin{bmatrix} a_{11}(z) & \dots & a_{1n}(z) \\ & \dots & \\ a_{n1}(z) & \dots & a_{nn}(z) \end{bmatrix}$$

będzie funkcją holomorficzną o wartościach w macierzach  $n \times n$ . Niech  $w \in \mathbb{C}^n$  i  $\lambda \in \mathbb{C}$  spełniają

$$\begin{aligned} (A(\infty) + \lambda)w &= 0, \\ \lambda + m &\text{ nie jest wartością własną } A(\infty) \text{ dla } m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

Wtedy istnieje jedna i tylko jedna funkcja  $\tilde{v}(z)$  holomorficzna na  $\Omega$  taka, że  $v(z) := z^{-\lambda}\tilde{v}(z)$  jest rozwiązaniem równania

$$\begin{cases} z \frac{dv(z)}{dz} = A(z)v(z), \\ \lim_{z \rightarrow \infty} z^\lambda v(z) = w. \end{cases} \quad (1.13)$$

**Przykład 1.19** Każde równanie pierwszego rzędu, które w  $\overline{\mathbb{C}}$  ma wyłącznie punkty regularne prócz regularnych punktów osobliwych w  $z_1, z_2$  i  $\infty$  jest postaci

$$\partial_z v(z) = \left( a_1(z - z_1)^{-1} + a_2(z - z_2)^{-1} \right) v(z) \quad (1.14)$$

Ma ono indeksy

$$z_1 : a_1, \quad z_2 : a_2, \quad \infty : -a_1 - a_2,$$

i rozwiązanie  $(z - z_1)^{a_1}(z - z_2)^{a_2}$ .

**Stwierdzenie 1.20** Niech  $b(z), c(z)$  będą holomorficzne w jednospójnym spójnym zbiorze otwartym  $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$  zawierającym  $\infty$ . Niech  $\lambda \in \mathbb{C}$  spełnia

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda + 1) - \lambda b(\infty) + c(\infty) &= 0, \\ (\lambda + m)(\lambda + m + 1) - (\lambda + m)b(\infty) + c(\infty) &\neq 0, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Wtedy istnieje jedna i tylko jedna funkcja  $\tilde{u}(z)$  holomorphyzna w  $\Omega$ , taka, że  $u(z) := z^{-\lambda}\tilde{u}(z)$  jest rozwiązaniem równania

$$\begin{cases} (z^2\partial_z^2 + b(z)z\partial_z + c(z))u(z) = 0, \\ \lim_{z \rightarrow \infty} z^\lambda u(z) = 1. \end{cases} \quad (1.15)$$

**Przykład 1.21** Każde równanie drugiego rzędu, które w  $\overline{\mathbb{C}}$  ma wyłącznie punkty regularne prócz regularnych punktów osobliwych w  $0$  i  $\infty$  jest postaci

$$(z^2\partial_z^2 + bz\partial_z + c)u(z) = 0. \quad (1.16)$$

Bywa ono nazywane **równaniem jednorodnym Eulera**. Jego równania wskaźnikowe mają postać

$$\begin{aligned} 0: \quad & \lambda(\lambda - 1) + b\lambda + c = 0, \\ \infty: \quad & \lambda(\lambda + 1) - b\lambda + c = 0. \end{aligned}$$

Jeśli  $\rho, \tilde{\rho}$  są indeksami równania w  $0$ , to  $-\rho, -\tilde{\rho}$  są indeksami w  $\infty$ . Rozwiązania są równe  $z^\rho, z^{\tilde{\rho}}$  jeśli  $\rho \neq \tilde{\rho}$  i  $z^\rho, z^\rho \log z$  gdy  $\rho = \tilde{\rho}$ . Można równanie (1.16) zapisać w postaci

$$(z^2\partial_z + (1 - \rho - \tilde{\rho})z\partial_z + \rho\tilde{\rho})u(z) = 0.$$

**Przykład 1.22** Każde równanie drugiego rzędu, które w  $\overline{\mathbb{C}}$  ma wyłącznie punkty regularne prócz regularnych punktów osobliwych w  $z_1$  i  $z_2$  jest postaci

$$\left(\partial_z^2 + \left(g_1(z - z_1)^{-1} + g_2(z - z_2)^{-1}\right)\partial_z + h(z - z_1)^{-2}(z - z_2)^{-2}\right)u(z) = 0, \quad (1.17)$$

gdzie  $g_1 + g_2 = 2$ . Mamy równania wskaźnikowe

$$\begin{aligned} z_1: \quad & \lambda(\lambda - 1) + g_1\lambda + h(z_1 - z_2)^{-2} = 0, \\ z_2: \quad & \lambda(\lambda - 1) + g_2\lambda + h(z_1 - z_2)^{-2} = 0. \end{aligned}$$

Jeśli  $\rho, \tilde{\rho}$  są indeksami w  $z_1$ , to  $-\rho, -\tilde{\rho}$  są indeksami w  $z_2$ . Rozwiązania mają postać  $(z - z_1)^\rho(z - z_2)^{-\rho}, (z - z_1)^{\tilde{\rho}}(z - z_2)^{-\tilde{\rho}}$ , jeśli  $\rho \neq \tilde{\rho}$  i  $(z - z_1)^\rho(z - z_2)^{-\rho}, (z - z_1)^\rho(z - z_2)^{-\rho} \log(z - z_1)(z - z_2)^{-1}$ , jeśli  $\rho = \tilde{\rho}$ .

Równanie (1.17) można przepisać w postaci

$$\begin{aligned} & \left(\partial_z^2 + \left((1 - \rho - \tilde{\rho})(z - z_1)^{-1} + (1 + \rho + \tilde{\rho})(z - z_2)^{-1}\right)\partial_z \right. \\ & \left. + \rho\tilde{\rho}(z_1 - z_2)^2(z - z_1)^{-2}(z - z_2)^{-2}\right)u(z) = 0. \end{aligned}$$

**Przykład 1.23** Każde równanie drugiego rzędu, które w  $\overline{\mathbb{C}}$  ma wyłącznie punkty regularne prócz regularnych punktów osobliwych w  $z_1, z_2$  i  $\infty$  jest postaci

$$\begin{aligned} & \left(\partial_z^2 + \left(g_1(z - z_1)^{-1} + g_2(z - z_2)^{-1}\right)\partial_z \right. \\ & \left. + h_1(z - z_1)^{-2} + h_2(z - z_2)^{-2} + h(z - z_1)^{-1}(z - z_2)^{-1}\right)u(z) = 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Jest to szczególna postać **równania Riemanna** (albo **równania Riemanna-Papperitza**) Mamy równania wskaźnikowe

$$\begin{aligned} z_1 : \quad & \lambda(\lambda - 1) + g_1\lambda + h_1 = 0, \\ z_2 : \quad & \lambda(\lambda - 1) + g_2\lambda + h_2 = 0, \\ \infty : \quad & \lambda(\lambda + 1) - (g_1 + g_2)\lambda + h_1 + h_2 + h = 0. \end{aligned}$$

Jeśli  $\rho_1, \tilde{\rho}_1$  są indeksami w  $z_1$ ,  $\rho_2, \tilde{\rho}_2$  są indeksami w  $z_2$  i  $\rho_3, \tilde{\rho}_3$  są indeksami w  $\infty$ , to

$$\rho_1 + \tilde{\rho}_1 + \rho_2 + \tilde{\rho}_2 + \rho_3 + \tilde{\rho}_3 = 1. \quad (1.19)$$

Równanie (1.18) można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} & \left( \partial_z^2 + \left( (1 - \rho_1 - \tilde{\rho}_1)(z - z_1)^{-1} + (1 - \rho_2 - \tilde{\rho}_2)(z - z_2)^{-1} \right) \partial_z \right. \\ & + \rho_1 \tilde{\rho}_1 (z_1 - z_2)(z - z_1)^{-2}(z - z_2)^{-1} + \rho_2 \tilde{\rho}_2 (z_2 - z_1)(z - z_2)^{-2}(z - z_1)^{-1} \\ & \left. + \rho_3 \tilde{\rho}_3 (z - z_1)^{-1}(z - z_2)^{-1} \right) u(z) = 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Oznaczmy operator różniczkowy występujący w (1.20) przez

$$\mathcal{P} \begin{bmatrix} z_1, & z_2, & \infty \\ \rho_1, & \rho_2, & \rho_3 \\ \tilde{\rho}_1, & \tilde{\rho}_2, & \tilde{\rho}_3 \end{bmatrix}.$$

Wtedy przez podstawienie  $u(z_1(1-t) + z_2t) = t^{\rho_1}(1-t)^{\rho_2}u(t)$  równanie (1.20) przechodzi w

$$\mathcal{P} \begin{bmatrix} 0, & 1, & \infty \\ 0, & 0, & \rho_3 - \rho_1 - \rho_2 \\ \tilde{\rho}_1 - \rho_1, & \tilde{\rho}_2 - \rho_2, & \tilde{\rho}_3 - \rho_1 - \rho_2 \end{bmatrix} w(t) = 0. \quad (1.21)$$

Równanie (1.21) można parametryzować trzema dowolnymi liczbami  $a, b, c$ :

$$\mathcal{P} \begin{bmatrix} 0, & 1, & \infty \\ 0, & 0, & a \\ 1 - c, & c - a - b, & b \end{bmatrix} w(t) = 0. \quad (1.22)$$

Jeśli pomnożymy (1.22) przez  $t(1-t)$ , to dostajemy równanie hipergeometryczne (Patrz rozdział 5).

## 1.5 Wrońskian

Niech  $u_1(z), u_2(z)$  będzie parą rozwiązań równania

$$(\partial_z^2 + b(z)\partial_z + c(z))u(z) = 0.$$

Wrońskian tej pary jest zdefiniowany jako

$$W(u_1, u_2)(z) = W(z) := u_1(z)u_2'(z) - u_1'(z)u_2(z).$$

Spełnia on równanie

$$(\partial_z + b(z))W(z) = 0.$$

Jeśli

$$\tilde{u}_1(z) = a_{11}u_1(z) + a_{12}u_2(z), \quad \tilde{u}_2(z) = a_{21}u_1(z) + a_{22}u_2(z)$$

jest drugą parą rozwiązań, to mamy

$$W(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})W(u_1, u_2).$$

## 2 Szeregi hipergeometryczne

Przypomnijmy, że dla  $a \in \mathbb{C}$  wprowadziliśmy oznaczenie

$$(a)_n := a(a+1) \cdots (a+n-1).$$

Niech  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ ,  $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$  definiujemy (uogólniony) szereg hipergeometryczny typu  ${}_kF_m$

$${}_kF_m(a_1, \dots, a_k; c_1, \dots, c_m; z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_1)_j \cdots (a_k)_j z^j}{(c_1)_j \cdots (c_m)_j j!}. \quad (2.23)$$

Zauważmy, że

- (1) jeśli  $m+1 > k$ , to szereg (2.23) zbieżny dla  $z \in \mathbb{C}$ ;
- (2) jeśli  $m+1 = k$ , to szereg (2.23) zbieżny dla  $|z| < 1$ ;
- (3) jeśli  $m+1 < k$ , to szereg (2.23) rozbieżny (ale mimo to czasem można nadać sens funkcji  ${}_kF_m$ ).

Wynika to z kryterium d'Alemberta: jeśli  $f_j$  jest  $j$ -tym współczynnikiem szeregu (2.23), to

$$\frac{f_{j+1}}{f_j} = \frac{(a_1 + j) \cdots (a_k + j)}{(c_1 + j) \cdots (c_m + j)}.$$

Można również używać

$$\begin{aligned} {}_k\Phi_m(a_1, \dots, a_k; c_1, \dots, c_m; z) &:= \frac{{}_kF_m(a_1, \dots, a_k; c_1, \dots, c_m; z)}{\Gamma(c_1) \cdots \Gamma(c_m)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_1)_j \cdots (a_k)_j z^j}{\Gamma(c_1 + j) \cdots \Gamma(c_m + j) j!}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

wtedy nie musimy ograniczać wartości  $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$ . (Wtedy, jeśli któreś  $c_i \in \{0, -1, -2, \dots\}$ , to funkcja  $\Phi$  jest równa zero).

W praktyce, najczęściej spotykamy następujące funkcje hipergeometryczne:

## 2.1 Funkcja hipergeometryczna albo ${}_2F_1$

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n.$$

Szereg jest zbieżny dla  $|z| < 1$ , przedłuża się do funkcji wieloznaczonej na nakryciu  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ .

Funkcja jest rozwiązaniem analitycznym i równym w zerze 1 równania hipergeometrycznego

$$(z(1-z)\partial_z^2 + (c - (a+b+1)z)\partial_z - ab)u(z) = 0.$$

## 2.2 Funkcja konfluentna albo ${}_1F_1$

$$F(a; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n! (c)_n} z^n.$$

Szereg jest zbieżny dla wszystkich  $z \in \mathbb{C}$ . Funkcja rozwiązaniem analitycznym i równym 1 w zerze równania konfluentnego

$$(z\partial_z^2 + (c-z)\partial_z - a)u(z) = 0,$$

## 2.3 Funkcja ${}_0F_1$

$$F(-; c; z) = F(c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! (c)_n} z^n.$$

Jest rozwiązaniem analitycznym i równym w zerze 1 równania (spokrewnionego z równaniem Bessela):

$$(z\partial_z^2 + c\partial_z - 1)u(z) = 0.$$

## 2.4 Funkcja ${}_2F_0$

Dla tej funkcji szereg hipergeometryczny jest rozbieżny. Jest to wieloznaczna funkcja na nakryciu  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  i dlatego nie można jej zdefiniować szeregiem. Niemniej szereg hipergeometryczny daje jej rozwinięcie asymptotyczne:

$$F(a, b; -; z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!} z^n$$

Jest ono rozwiązaniem następującego równania (spokrewnionego z równaniem konfluentnym):

$$(z^2\partial_z^2 + (-1 + (a+b+1)z)\partial_z + ab)u(z) = 0.$$

## 2.5 Funkcja potęgowa czyli ${}_1F_0$

$$F(a; -; z) = (1-z)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} z^n$$

Szereg jest zbieżny dla  $|z| < 1$ , przedłuża się do funkcji wieloznaczonej na nakryciu  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$   
Rozwiązanie równania

$$((z-1)\partial_z - a)u(z) = 0.$$

## 2.6 Funkcja wykładnicza czyli ${}_0F_0$

$$F(-; -; z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

Rozwiązanie równania

$$(\partial_z - 1)u(z) = 0.$$

## 3 Równanie konfluentne

### 3.1 Funkcja konfluentna

Równaniem konfluentnym nazywamy równanie

$$(z\partial_z^2 + (c - z)\partial_z - a)u(z) = 0.$$

Ma ono w 0 regularny punkt osobliwy z indeksami 0,  $1 - c$ .

Używając  $z^{-\gamma}\partial_z z^\gamma = \partial_z + \frac{\gamma}{z}$  dostajemy tożsamość

$$\begin{aligned} & z^{-\gamma}(z\partial_z^2 + (c - z)\partial_z - a)z^\gamma \\ &= z\partial_z^2 + (2\gamma + c - z)\partial_z - \gamma - a + (-\gamma + \gamma^2 + c\gamma)z^{-1}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

W szczególności,

$$\begin{aligned} & z^{c-1}(z\partial_z^2 + (c - z)\partial_z - a)z^{1-c} \\ &= z\partial_z^2 + (2 - c - z)\partial_z - 1 + c - a, \end{aligned} \quad (3.26)$$

co jest równaniem konfluentnym z parametrami  $1 + a - c$ ,  $2 - c$ .

Równanie na współczynniki szeregu będącego rozwiązaniem:

$$f_n(n + \lambda)(n + \lambda - 1 + c) = (n + \lambda - 1 + a)f_{n-1}.$$

Rozwiązanie analityczne i równe 1 w zerze nazywa się funkcją konfluentną

$$F(a; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!(c)_n} z^n.$$

Z tożsamości (3.26) wynika, że rozwiązanie zachowujące się w zerze jak  $z^{1-c}$  można zapisać jako

$$z^{1-c}F(a - c + 1; 2 - c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a - c + 1)_n}{n!(2 - c)_n} z^{1-c+n}.$$



### 3.2 Pierwsza tożsamość Kummera

Korzystając z  $e^{-z}\partial_z e^z = \partial_z + 1$  dostajemy

$$\begin{aligned} & e^{-z}(z\partial_z^2 + (c-z)\partial_z - a)e^z \\ &= z\partial_z^2 + (c+z)\partial_z + c - a. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Podstawiamy  $z = -w$  i mnożymy przez  $-1$ , dostając

$$w\partial_w^2 + (c-w)\partial_w - c + a.$$

Jest to równanie konfluentne z parametrami  $c-a$ ,  $c$ . Zatem  $e^z F(c-a; c; -z)$  jest rozwiązaniem równania konfluentnego analitycznym i równym 1 w zerze. Dostajemy zatem tożsamość

$$F(a; c; z) = e^z F(c-a; c; -z). \quad (3.28)$$

### 3.3 Reprezentacje całkowe rozwiązań równania konfluentnego

Jeśli  $[0, 1] \ni t \mapsto \gamma(t) \in \Omega$  jest krzywą i  $f$  jest funkcją na  $\Omega$ , to wprowadzamy oznaczenie

$$f \Big|_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} := f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)).$$

**Twierdzenie 3.1** *Niech krzywa  $\gamma$  spełnia*

$$e^{zs} s^a (1-s)^{c-a} \Big|_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} = 0. \quad (3.29)$$

Wtedy

$$\int_{\gamma} e^{zs} s^{a-1} (1-s)^{c-a-1} ds \quad (3.30)$$

jest rozwiązaniem równania konfluentnego.

**Dowód.**

$$\begin{aligned} & (z\partial_z^2 + (c-z)\partial_z - a)e^{zs} s^{a-1} (1-s)^{c-a-1} \\ &= ze^{zs} s^{a+1} (1-s)^{c-a-1} + (c-z)e^{zs} s^a (1-s)^{c-a-1} - ae^{zs} s^{a-1} (1-s)^{c-a-1} \\ &= -ze^{zs} s^a (1-s)^{c-a} - ae^{zs} s^{a-1} (1-s)^{c-a} + (c-a)e^{zs} s^a (1-s)^{c-a-1} \\ &= -\partial_s e^{zs} s^a (1-s)^{c-a}. \end{aligned}$$

□

Dlatego dla  $\operatorname{Re} a > 0$ ,  $\operatorname{Re}(c-a) > 0$  mamy

$$\int_0^1 e^{zs} s^{a-1} (1-s)^{c-a-1} ds = \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} F(a; c; z). \quad (3.31)$$

Mamy bowiem wtedy spełnione założenia (funkcja w (3.29) ma na końcach przedziału wartości zerowe) i dostajemy rozwiązanie analityczne w otoczeniu zera. Sprawdzamy, że w zerze ma ono wartość

$$\int_0^1 s^{a-1}(1-s)^{c-a-1} ds = \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}.$$

Zauważmy, że jeśli  $n = -a \in \{0, 1, 2, \dots\}$ , to  $F(-n; c; z)$  jest wielomianem stopnia  $n$ . Są to tzw. wielomiany Laguerre'a. Można je zapisać przez całkę w której krzywą  $\gamma$  jest krzywa okrążająca punkt 0:

$$\begin{aligned} L_n^\alpha(z) &:= \frac{(1+\alpha)_n}{n!} F(-n; 1+\alpha; z) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{[0^+]} e^{tz} t^{-n-1} (1-t)^{\alpha+n} dt. \end{aligned}$$

### 3.4 Punkt w $\infty$ i równanie ${}_2F_0$

Stosując (3.25) z  $\gamma = -a$  dostajemy

$$\begin{aligned} & z^{a+1}(z\partial_z^2 + (c-z)\partial_z - a)z^{-a} \\ &= z^2\partial_z^2 + z(-2a+c-z)\partial_z + a(1+a-c). \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$= z^2\partial_z^2 + z(1-a-b-z)\partial_z + ab, \quad (3.33)$$

gdzie podstawiliśmy  $b := 1+a-c$ . Podstawiając  $w = -z^{-1}$  (przy odwrotnym przekształceniu  $z = -w^{-1}$ ), korzystając z tego, że  $\partial_z = w^2\partial_w$ , dostajemy, że (3.33) jest równe

$$w^2\partial_w^2 + (-1 + (1+a+b)w)\partial_w + ab.$$

Dostaliśmy w ten sposób równanie typu  ${}_2F_0$ . Zauważmy, że 0 jest nieregularnym punktem osobliwym dla tego równania. Dlatego też,  $\infty$  jest nieregularnym punktem osobliwym równania konfluentnego.

Jeśli

$$(w^2\partial_w^2 + (-1 + (1+a+b)w)\partial_w + ab)g(w) = 0,$$

to

$$(z\partial_z^2 + (c-z)\partial_z - a)z^{-a}g(-z^{-1}) = 0. \quad (3.34)$$

I na odwrót, jeśli

$$(z\partial_z^2 + (c-z)\partial_z - a)f(z) = 0,$$

to

$$(w^2\partial_w^2 + (-1 + (1+a+b)w)\partial_w + ab)w^{-a}f(-w^{-1}) = 0.$$

### 3.5 Funkcja ${}_2F_0$

Równanie (3.34) próbujemy rozwiązać szeregiem

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n w^n.$$

Dostajemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n(n-1)g_n w^n - n g_n w^{n-1} + (1+a+b)n g_n w^n + a b g_n w^n) = 0$$

Zatem

$$(n-1+a)(n-1+b)g_{n-1} = n g_n.$$

Daje to współczynniki

$$g_n = \frac{(a)_n (b)_n}{n!} g_0$$

i prowadzi do rozbieżnego szeregu.

**Twierdzenie 3.2** *Niech krzywa  $\gamma$  spełnia*

$$e^{-t^a} (1-wt)^{1-b} \Big|_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} = 0 \quad (3.35)$$

Wtedy

$$\int_{\gamma} e^{-t^a} (1-wt)^{-b} dt$$

jest rozwiązaniem równania (3.34).

**Dowód.** Z Twierdzenia 3.1

$$\int_{\gamma} e^{zs} s^{a-1} (1-s)^{c-a-1} ds$$

jest rozwiązaniem równania konfluentnego. Więc

$$w^{-a} \int_{\gamma} e^{-sw^{-1}} s^{a-1} (1-s)^{c-a-1} ds,$$

dla  $b = 1 + a - c$  jest rozwiązaniem równania (3.34). Następnie podstawimy  $t = \frac{s}{w}$ .  $\square$

Dla  $w \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty[$ ,  $\operatorname{Re} a > 0$  definiujemy

$$F(a, b; -; w) := \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-t^a} (1-wt)^{-b} dt. \quad (3.36)$$

(Na inne wartości  $a$  definiujemy przez przedłużenie analityczne). Mamy następujące rozwinięcie asymptotyczne:

$$F(a, b; -; w) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!} w^n,$$

to znaczy, dla każdego  $n$ , dla  $|\arg w| \geq \epsilon > 0$ ,

$$\lim_{w \rightarrow 0} w^{-n} \left( F(a, b; -; w) - \sum_{j=0}^n \frac{(a)_j (b)_j}{j!} w^j \right) = 0.$$

Aby się o tym przekonać, korzystamy ze wzoru

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(0)z^j}{j!} + z^n \int_0^1 \frac{f^{(n)}(sz)n(1-s)^{n-1}}{n!} ds,$$

z którego wynika

$$(1-z)^{-b} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(b)_j z^j}{j!} + \frac{(b)_n z^n}{n!} \int_0^1 n(1-s)^{n-1} (1-zs)^{-b-n} ds.$$

Dlatego też

$$\begin{aligned} & F(a, b; -; w) \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-t} t^{a-1} (1-wt)^{-b} dt \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-t} t^{a-1} \frac{(b)_j w^j t^j}{j!} dt \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-t} t^{a-1} \frac{(b)_n w^n t^n}{n!} \int_0^1 (1-wts)^{-b-n} n(1-s)^{n-1} ds \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(b)_j \Gamma(a+j) w^j}{\Gamma(a) j!} \\ &\quad + \frac{w^n (b)_n}{\Gamma(a) n!} \int_0^1 n(1-s)^{n-1} ds \int_0^\infty e^{-t} t^{a-1+n} (1-wts)^{-b-n} dt \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(b)_j (a)_j w^j}{j!} \\ &\quad + \frac{w^n (b)_n (a)_n}{n!} \int_0^1 n(1-s)^{n-1} ds F(a+n, b+n; -; ws). \end{aligned}$$

### 3.6 Rozwiązania równania konfluentnego mające określone zachowanie w $\infty$

Rozważmy funkcję analityczną określoną na górnej półpłaszczyźnie

$$s \mapsto e^{zs} s^{a-1} (1-s)^{c-a-1},$$

gdzie potęgi są rozumiane w sensie wartości głównych. Załóżmy, że  $\operatorname{Re} a > 0$ ,  $\operatorname{Re}(c-a) > 0$ . Pamiętajmy, że

$$F(z) = \int_0^1 e^{zs} s^{a-1} (1-s)^{c-a-1} ds = \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} F(a; c; z)$$

jest jednym z rozwiązań równania konfluentnego. Jeśli  $\text{Im}z > 0$ , to możemy jeszcze napisać następujące rozwiązanie:

$$\begin{aligned} F_0(z) &= \int_0^{e^{i\phi}\infty} e^{zs} s^{a-1} (1-s)^{c-a-1} ds, \\ F_1(z) &= \int_1^{e^{i\phi}\infty} e^{zs} s^{a-1} (1-s)^{c-a-1} ds, \end{aligned}$$

gdzie  $\phi \in ]\frac{\pi}{2} - \arg z, \frac{3\pi}{2} - \arg z[$  gwarantuje, że  $e^{zs}$  wzdłuż półprostej po której całkujemy dąży szybko do zera (co zapewnia spełnienie odpowiedniego warunku). Zauważmy, że

$$F(z) + F_1(z) - F_0(z) = 0. \quad (3.37)$$

Podstawiając  $s = -z^{-1}t$ , gdzie  $t \in [0, \infty[$ , dostajemy dla  $\text{Re}a > 0$

$$\begin{aligned} F_0(z) &= \int_0^\infty e^{-t} (-tz^{-1})^{a-1} (1+z^{-1}t)^{c-a-1} (-z^{-1}) dt \\ &= (-z)^{-a} \Gamma(a) F(a, a+1-c; -, -z^{-1}). \end{aligned}$$

Podstawiając  $s = 1 - z^{-1}t$  gdzie  $t \in [0, \infty[$  możemy napisać dla  $\text{Re}(c-a) > 0$

$$\begin{aligned} F_1(z) &= -e^z \int_0^\infty e^{-t} (1-z^{-1}t)^{a-1} z^{-c+a} t^{c-a-1} dt \\ &= -e^z z^{-c+a} \Gamma(c-a) F(c-a, 1-a; -, z^{-1}). \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę (3.37), dostajemy

$$\frac{F(a; c; z)}{\Gamma(c)} = (-z)^{-a} \frac{F(a, a+1-c; -, -z^{-1})}{\Gamma(c-a)} + z^{-c+a} \frac{e^z F(c-a, 1-a; -, z^{-1})}{\Gamma(a)}$$

### 3.7 Atom wodoru

Przekształcamy równanie konfluentne:

$$\begin{aligned} e^{-z/2} (z\partial_z^2 + (c-z)\partial_z - a) e^{z/2} \\ = z\partial_z^2 + c\partial_z + \frac{c}{2} - a - \frac{z}{4}; \end{aligned} \quad (3.38)$$

Następnie

$$z^{-(1-c)/2} \left( z\partial_z^2 + c\partial_z + \frac{c}{2} - a - \frac{z}{4} \right) z^{(1-c)/2} \quad (3.39)$$

$$= z\partial_z^2 + \partial_z - \frac{z}{4} + \frac{c}{2} - a - \frac{(1-c)^2}{4z}. \quad (3.40)$$

Dzielimy (3.39) przez  $z$  i podstawiamy  $z = 2w$ . Dostajemy

$$\partial_w^2 + \frac{1}{w}\partial_w - 1 + (c-2a)\frac{1}{w} - \left(\frac{1-c}{2}\right)^2 \frac{1}{w^2}, \quad (3.41)$$

Mnożymy (3.41) przez  $w^2$  i dostajemy

$$w^2 \partial_w^2 + w \partial_w - w^2 + (c - 2a)w - \left(\frac{1-c}{2}\right)^2. \quad (3.42)$$

czyli równanie na część radialną funkcji falowej dla potencjału coulombowskiego w 2 wymiarach (które łatwo przekształcić na równanie na część radialną dla potencjału coulombowskiego dla większego wymiaru).

Czyli jeśli funkcja  $f$  spełnia równanie konfluentne, to  $e^{-w} w^{(-1+c)/2} f(2w)$  spełnia równanie (3.42).

## 4 Równanie ${}_0F_1$ i równanie Bessela

### 4.1 Zmodyfikowane równanie Bessela

Naszym punktem wyjścia jest równanie (3.41). Załóżmy, że  $c = 2a$  i  $m := (-1 + c)/2$ . Wtedy dostajemy zmodyfikowane równanie Bessela

$$\partial_w^2 + \frac{1}{w} \partial_w - 1 - \frac{m^2}{w^2}, \quad (4.43)$$

Czyli jeśli  $f$  jest rozwiązaniem następującego szczególnego przypadku równania konfluentnego

$$\left( z \partial_z^2 + (2m + 1 - z) \partial_z - \left(m + \frac{1}{2}\right) \right) f(z) = 0,$$

to  $w^m e^{-w} f(2w)$ , jak również  $w^m e^w f(-2w)$ , są rozwiązaniami zmodyfikowanego równania Bessela (4.43).

W szczególności, jedyne rozwiązanie (4.43) zachowujące się w zerze jak  $\frac{w^m}{2^m \Gamma(m+1)}$  nosi nazwę *zmodyfikowanej funkcji Bessela*:

$$\begin{aligned} I(w) &:= \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{w}{2}\right)^m e^{-w} F\left(m + \frac{1}{2}; 2m + 1; 2w\right) \\ &:= \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{w}{2}\right)^m e^w F\left(m + \frac{1}{2}; 2m + 1; -2w\right). \end{aligned} \quad (4.44)$$

### 4.2 Równanie Bessela

Częściej od zmodyfikowanego równania Bessela używane jest równanie zwane po prostu *równaniem Bessela*, otrzymane z (4.43) przez podstawienie  $w = iz$ :

$$\partial_z^2 + \frac{1}{z} \partial_z + 1 - \frac{m^2}{z^2}. \quad (4.45)$$

Rozwiązanie (4.45) zachowujące się w zerze jak  $\frac{w^m}{2^m \Gamma(m+1)}$  nazywamy *funkcją Bessela*:

$$\begin{aligned} J(z) &:= \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^m e^{-iz} F\left(m + \frac{1}{2}; 2m + 1; 2iz\right) \\ &:= \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^m e^{iz} F\left(m + \frac{1}{2}; 2m + 1; -2iz\right) \\ &= e^{-i\frac{\pi}{2}m} I(iz). \end{aligned} \quad (4.46)$$

### 4.3 Równanie Helmholtza w wymiarze 2

Równanie Helmholtza ma postać

$$(\Delta + \kappa)F = 0.$$

Rozwiążmy równanie Helmholtza w wymiarze  $d = 2$  w układzie biegunowym przez separację zmiennych. Jeśli zapiszemy  $F = f(r)g(\phi)$ , to na część kątową dostajemy równanie  $\partial_\phi g(\phi) = Cg(\phi)$ . Rozwiązuje je  $g(\phi) = e^{im\phi}$ , gdzie  $m^2 = -C$ . Na część radialną dostajemy równanie

$$\left( \frac{1}{r} \partial_r r \partial_r - \frac{m^2}{r^2} + \kappa \right) f(r) = 0.$$

Czyli jeśli  $\kappa > 0$ , to rozwiązania są postaci

$$F(r, \phi) = e^{im\phi} g(\sqrt{\kappa}r),$$

gdzie  $g$  jest rozwiązaniem równania Bessela a jeśli  $\kappa < 0$ , to rozwiązania są postaci

$$F(r, \phi) = e^{im\phi} g(\sqrt{-\kappa}r),$$

gdzie  $g$  jest rozwiązaniem zmodyfikowanego równania Bessela.

Jeśli  $\kappa = 0$ , to dostajemy równanie Laplace'a. Równanie na część radialną jest postaci

$$\left( \frac{1}{r} \partial_r r \partial_r - \frac{m^2}{r^2} \right) f(r) = 0$$

i ma rozwiązania  $r^m$  i  $r^{-m}$ . Czyli rozwiązanie jest kombinacją liniową  $r^m e^{im\phi}$  i  $r^{-m} e^{im\phi}$ . We współrzędnych kartezjańskich odpowiada to kombinacjom liniowym  $(x + iy)^m$  i  $(x - iy)^m$ .

### 4.4 Równanie Helmholtza w dowolnym wymiarze

W dowolnym wymiarze równanie na część radialną ma postać

$$\left( r^{-d+1} \partial_r r^{d-1} \partial_r - \frac{l(l+d-2)}{r^2} + \kappa \right) f(r) = 0$$

Zauważając, że

$$\begin{aligned} & r^{\frac{d-2}{2}} \left( r^{d-1} \partial_r r^{d-1} \partial_r - \frac{l(l+d-2)}{r^2} + \kappa \right) r^{-\frac{d-2}{2}} \\ &= r^{-1} \partial_r r \partial_r - \left( l + \frac{d-2}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

widzimy, że i tym razem dostajemy równanie Bessela.

#### 4.5 Równanie ${}_0F_1$ – równoważność z równaniem Bessela

Zamiast równania i funkcji Bessela wygodniej jest używać równania  ${}_0F_1$ :

$$(w\partial_w^2 + \tilde{c}\partial_w - 1)f(w) = 0. \quad (4.47)$$

Równanie to jest w pełni równoważne równaniu Bessela.

Aby je uzyskać wygodnie jest wystartować z równania (3.39) dla  $c = 2a$ :

$$z\partial_z^2 + c\partial_z - \frac{z}{4}. \quad (4.48)$$

Podstawiamy w nim  $w = \frac{z^2}{16}$ , czyli  $z = 4w^{\frac{1}{2}}$ . Używając  $\partial_z = \frac{w^{\frac{1}{2}}}{2}\partial_w$ , dostajemy

$$w^{\frac{3}{2}}\partial_w^2 + \frac{w^{\frac{1}{2}}}{2}\partial_w + \frac{c}{2}w^{\frac{1}{2}}\partial_w - w^{\frac{1}{2}}. \quad (4.49)$$

Dzielimy przez  $w^{\frac{1}{2}}$  i dostajemy (4.47) dla  $\tilde{c} = \frac{1+c}{2}$ .

#### 4.6 Funkcja ${}_0F_1$

Równanie

$$(z\partial_z^2 + c\partial_z - 1)f(z) = 0. \quad (4.50)$$

ma regularny punkt osobliwy w 0 z indeksami 0,  $1-c$  i nieregularny punkt osobliwy w  $\infty$ . Posiada ono symetrię

$$z^{c-1}(z\partial_z^2 + c\partial_z - 1)z^{1-c} = z\partial_z^2 + (2-c)\partial_z - 1. \quad (4.51)$$

Rozwiązaniem analitycznym w zerze i równym w nim 1 jest funkcja

$$F(c; z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(c)_n n!}.$$

Stosując symetrię (4.51) widzimy, że rozwiązaniem zachowującym się w zerze jak  $z^{1-c}$  jest  $z^{1-c}F(2-c; z)$ .

Wygodnie jest używać zamiast funkcji  $F(c; z)$  funkcji

$$\Phi(c; z) := \frac{F(c; z)}{\Gamma(c)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(c+j)j!}.$$

Oto wyrażenia przedstawiające funkcję Bessela i zmodyfikowaną funkcję Bessela poprzez funkcję  ${}_0\Phi_1$ :

$$\begin{aligned} I_m(w) &= \left(\frac{w}{2}\right)^m \Phi(1+m; w^2/4); \\ J_m(w) &= \left(\frac{w}{2}\right)^m \Phi(1+m; -w^2/4); \end{aligned}$$



Funkcję  ${}_0F_1$  możemy przedstawić poprzez funkcję konfluentną dostając drugą tożsamość Kummera:

$$\begin{aligned} F(c; z) &= e^{-2\sqrt{z}} F\left(\frac{2c-1}{2}; 2c-1; 4\sqrt{z}\right) \\ &= e^{2\sqrt{z}} F\left(\frac{2c-1}{2}; 2c-1; -4\sqrt{z}\right). \end{aligned}$$

Żeby się o tym przekonać, sprawdzamy, że prawa strona spełnia równanie (4.50), że w zerze jest analityczna i równa 1.

## 4.7 Reprezentacje całkowe

**Twierdzenie 4.1** *Niech krzywa  $\gamma$  spełnia*

$$e^t e^{z/t} t^{-c} \Big|_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} = 0.$$

Wtedy

$$\int_{\gamma} e^{t+z/t} t^{-c} dt$$

jest rozwiązaniem równania (4.50).

**Dowód.** Sprawdzamy, że

$$(z\partial_z^2 + c\partial_z - 1)e^{t+z/t} t^{-c} = \partial_t e^{t+z/t} t^{-c}.$$

□

Stąd dostajemy reprezentację całkową

$$\Phi(c; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{]-\infty, 0^+, \infty[} e^{t+z/t} t^{-c} dt. \quad (4.52)$$

Aby ją uzyskać wystarczy sprawdzić, że całka (4.52) spełnia założenia twierdzenia 4.1 i w zerze jest analityczna i równa

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{]-\infty, 0^+, \infty[} e^{t-t} t^{-c} dt = \frac{1}{\Gamma(c)}.$$

Następująca reprezentacja wynika natychmiast z Twierdzenia 3.1 o reprezentacjach całkowych rozwiązań równania konfluentnego:

**Twierdzenie 4.2** *Niech krzywa  $\gamma$  spełnia*

$$(t^2 - 1)^{c-\frac{1}{2}} e^{2t\sqrt{z}} \Big|_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} = 0.$$

Wtedy

$$\int_{\gamma} (t^2 - 1)^{c-\frac{3}{2}} e^{2\sqrt{z}t} dt$$

jest rozwiązaniem równania (4.50).

Z tego twierdzenia dostajemy

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{c-\frac{3}{2}} e^{2t\sqrt{z}} dt = F(c; z) \frac{\Gamma(c-\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}{\Gamma(c)}. \quad (4.53)$$

Sprawdzamy bowiem, że całka w (4.53) spełnia założenia Twierdzenia 4.2, w zerze jest analityczna i równa

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{c-\frac{3}{2}} dt = \frac{\Gamma(c-\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}{\Gamma(c)}.$$

#### 4.8 Funkcja ${}_0F_1$ dla całkowitych parametrów

Dla  $k \in \mathbb{Z}$  mamy tożsamość:

$$\Phi(1+k; z) = z^{-k} \Phi(1-k; z).$$

Wynika to z rachunku

$$z^{-k} \Phi(2-k; z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{z^{n-k}}{(-k+n)!n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!(k+m)!} = \Phi(1+k; z).$$

Mamy też funkcję tworzącą

$$e^{t+z/t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^n \Phi(n+1, z)$$

oraz reprezentację całkową

$$\Phi(n+1; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{[0^+]} e^{t+z/t} t^{-n-1} dt. \quad (4.54)$$

Zauważmy, że (4.54) wynika z Twierdzenia 4.1.

## 5 Równanie hipergeometryczne

Równanie hipergeometryczne ma postać

$$(z(1-z)\partial_z^2 + (c-(a+b+1)z)\partial_z - ab) f(z) = 0. \quad (5.55)$$

Ma ono punkty następujące regularne punkty osobliwe:

0, indeksy: 0,  $1-c$ ;

1, indeksy: 0,  $c-a-b$ ;

$\infty$ , indeksy:  $a, b$ .

Rozwiązaniem analitycznym w zerze i równym w nim 1 jest *funkcja hipergeometryczna*

$$F(a, b; c; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_j}{(c)_j} \frac{z^j}{j!},$$

Funkcja  $F(a, b; c; z)$  jest zdefiniowana dla  $c \neq 0, -1, -2, \dots$ . Czasem wygodniej jest rozważać funkcję

$$\Phi(a, b; c; z) := \frac{F(a, b, c, z)}{\Gamma(c)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_j}{\Gamma(c+j) j!} z^j$$

zdefiniowaną dla wszystkich  $a, b, c$ .

### 5.1 Rozwiązanie zachowujące się jak $z^{1-c}$ w zerze

Równanie hipergeometryczne ma symetrię

$$\begin{aligned} & z^{c-1} (z(1-z)\partial_z^2 + (c - (a+b+1)z)\partial_z - ab) z^{1-c} \\ = & (z(1-z)\partial_z^2 + (2-c - (a+b-2c+3)z)\partial_z - (b-c+1)(a-c+1)) \end{aligned}$$

Dlatego rozwiązaniem równania (5.55) zachowującym się jak  $z^{1-c}$  w zerze jest

$$z^{1-c} F(b+1-c, a+1-c; 2-c; z) \quad (5.56)$$

### 5.2 Rozwiązania mające określone zachowania w 1

Podstawienie, które zamienia 0 i 1 to  $w = 1 - z$ :

$$\begin{aligned} & z(1-z)\partial_z^2 + (c - (a+b+1)z)\partial_z - ab \\ = & w(1-w)\partial_w^2 + (c - a - b + 1 - (a+b+1)w)\partial_w - ab. \end{aligned}$$

Dlatego, rozwiązaniem analitycznym w 1 i przyjmującym tam wartość 1 jest

$$F(a, b; a+b+1-c; 1-z).$$

### 5.3 Rozwiązania mające określone zachowania w $\infty$

Punkt w nieskończoności jest regularnym punktem osobliwym z indeksami  $a, b$ . Podstawienie zamieniające 0 i  $\infty$  to  $w = z^{-1}$ .

$$(-z)^{1+a} (z(1-z)\partial_z^2 + (c - (a+b+1)z)\partial_z - ab) (-z)^{-a} \quad (5.57)$$

$$= (w(1-w)\partial_w^2 + (a-b+1 - (2a-c+2)w)\partial_w - a(a-c+1)). \quad (5.58)$$

Stąd dostajemy rozwiązanie zachowujące się w nieskończoności jak  $z^{-a}$

$$z^{-a} F(a, a-c+1; a-b+1; z^{-1}),$$

Drugie rozwiązanie dostajemy zamieniając  $a$  i  $b$ :

$$z^{-b} F(b-c+1, b; b-a+1; z^{-1}).$$

## 5.4 Tożsamości

Następujące podstawienie nie zmienia 0, a zamienia 1 i  $\infty$ :  $z \mapsto w = \frac{z}{z-1}$ . Prowadzi ono do

$$\begin{aligned} & -(1-z)^{1+a} (z(1-z)\partial_z^2 + (c - (a+b+1)z)\partial_z - ab) (1-z)^{-a} \\ &= (z(1-z)\partial_z^2 + (c - (c+1)z)\partial_z - a(c-b)), \end{aligned} \quad (5.59)$$

Podobnie z zamianą  $a$  i  $b$ . Stąd dostajemy tożsamości

$$\begin{aligned} & F(a, b; c; z) \\ &= (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z) \\ &= (1-z)^{-a} F\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right) \\ &= (1-z)^{-b} F\left(c-a, b; c; \frac{z}{z-1}\right). \end{aligned}$$

## 5.5 Reprezentacje całkowe

**Twierdzenie 5.1** *Niech krzywa  $\gamma$  spełnia*

$$t^{a-c+1}(1-t)^{c-b}(t-z)^{-a-1} \Big|_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} = 0.$$

Wtedy

$$\int_{\gamma} t^{a-c}(1-t)^{c-b-1}(t-z)^{-a} dt \quad (5.60)$$

jest rozwiązaniem równania hipergeometrycznego.

**Dowód.** Sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} & (z(1-z)\partial_z^2 + (c - (a+b+1)z)\partial_z - ab) t^{a-c}(1-t)^{c-b-1}(t-z)^{-a} dt \\ &= -a\partial_t t^{a-c+1}(1-t)^{c-b}(t-z)^{-a-1}. \end{aligned}$$

□

Wynika stąd następująca reprezentacja całkowa funkcji hipergeometrycznej:

$$\begin{aligned} & \int_1^{\infty} t^{a-c}(t-1)^{c-b-1}(t-z)^{-a} dt \\ &= \Gamma(b)\Gamma(c-b)\Phi(a, b; c; z), \quad \operatorname{Re}(c-b) > 0, \operatorname{Re}b > 0. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Aby ją dostać, zauważmy, że (5.61) spełnia założenia Twierdzenia 5.1, w zerze jest analityczne i przyjmuje wartość

$$\int_1^{\infty} t^{a-c}(t-1)^{c-b-1}(t-z)^{-a} dt = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}.$$

## 6 Równanie Airy'ego

Równanie Airy'ego ma postać

$$(\partial_z^2 - z)u(z) = 0.$$

**Twierdzenie 6.1** *Jeśli  $u(z)$  jest rozwiązaniem równania Airy'ego, to  $u(e^{\pm \frac{2\pi i}{3}} z)$  jest też jego rozwiązaniem.*

**Twierdzenie 6.2** *Niech krzywa  $\gamma$  spełnia*

$$e^{\frac{i}{3}t^3 + itz} \Big|_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} = 0.$$

Wtedy

$$C \int_{\gamma} e^{\frac{i}{3}t^3 + itz} dt$$

jest rozwiązaniem równania Airy'ego.

**Dowód.**

$$\begin{aligned} & (\partial_z^2 - z) \int_{\gamma} e^{\frac{i}{3}t^3 + itz} dt \\ &= \int_{\gamma} (-t^2 - z) e^{\frac{i}{3}t^3 + itz} dt = \int_{\gamma} i \partial_t e^{\frac{i}{3}t^3 + itz} dt = 0. \end{aligned}$$

□

Podstawienie  $t = is$  daje analogiczne twierdzenie z funkcją  $e^{\frac{1}{3}t^3 - tz}$ .

Funkcja Airy'ego jest zdefiniowana wzorem

$$\begin{aligned} \text{Ai}(z) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{]-\infty, \infty[} e^{\frac{i}{3}t^3 + itz} dt = \frac{1}{2i\pi} \int_{]-i\infty, i\infty[} e^{-\frac{1}{3}t^3 + tz} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{]-\infty, \infty[} \cos(-\frac{1}{3}t^3 + tz) dt \\ &= \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s^3}{3} - sz} e^{\frac{i\pi}{3}} ds - \frac{e^{-\frac{i\pi}{3}}}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s^3}{3} - sz} e^{-\frac{i\pi}{3}} ds \end{aligned}$$

Punkt 0 jest regularnym punktem równania. Szukając rozwiązania w postaci  $u(z) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m z^m$  dostajemy równanie rekurencyjne

$$n(n-1)u_n = u_{n-3}.$$

Zatem ogólne rozwiązanie jest kombinacją liniową funkcji

$$\begin{aligned} \text{Ai}_{(0)}(z) &:= \sum_{m=0}^{\infty} \prod_{j=1}^m \frac{1}{3j(3j-1)} z^{3m}, \\ \text{Ai}_{(1)}(z) &:= \sum_{m=0}^{\infty} \prod_{j=1}^m \frac{1}{3j(3j+1)} z^{3m+1}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \text{Ai}_{(0)}(0) &= 1, & \text{Ai}_{(0)}'(0) &= 0; \\ \text{Ai}_{(1)}(0) &= 0, & \text{Ai}_{(1)}'(0) &= 1. \end{aligned}$$

### Twierdzenie 6.3

$$\text{Ai}(z) = \frac{3^{-\frac{2}{3}}}{\Gamma(\frac{2}{3})} \text{Ai}_{(0)}(z) + \frac{3^{-\frac{1}{3}}}{\Gamma(\frac{1}{3})} \text{Ai}_{(1)}(z).$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \text{Ai}(0) &= \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{s^3}{3}} ds = \frac{3^{-\frac{2}{3}}}{\Gamma(\frac{2}{3})}, \\ \text{Ai}'(0) &= -\frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{s^3}{3}} s ds = \frac{3^{-\frac{1}{3}}}{\Gamma(\frac{1}{3})}. \end{aligned}$$

□

Związki z funkcjami Bessela:

$$\begin{aligned} \text{Ai}_{(0)}(z) &= I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right)z^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \\ &= J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}(-z)^{\frac{3}{2}}\right)(-z)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right), \\ \text{Ai}_{(1)}(z) &= I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right)z^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \\ &= -J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}(-z)^{\frac{3}{2}}\right)(-z)^{\frac{1}{2}}3^{-\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right), \\ \text{Ai}(z) &= \pi^{-1}\left(\frac{z}{3}\right)^{\frac{1}{3}}K_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{3}z^{\frac{1}{2}}\left(I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right) - I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{3}(-z)^{\frac{1}{2}}\left(J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}(-z)^{\frac{3}{2}}\right) + J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}(-z)^{\frac{3}{2}}\right)\right) \end{aligned}$$