Wielomiany ortogonalne

Jan Dereziński

Katedra Metod Matematycznych Fizyki
Uniwersytet Warszawski
Hoża 74, 00-682, Warszawa
e-mail jan.derezinski@fuw.edu.pl

5 listopada 2017

Metody Matematyczne Fizyki
rok 2012, skrypt III

Spis treści

1 Przestrzenie Hilberta

1.1 Przestrzenie Hilberta

Pamiętamy, że w przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$ wyposażonej w iloczyn skalarny $v, w \mapsto (v|w)$ definiuje się normę $\|v\| := (v|v)^{\frac{1}{2}}$. Mówimy, że $\mathcal{V}$ jest przestrzenią Hilberta, jeśli $\mathcal{V}$ z metryką $d(v,w) := \|v-w\|$ jest zupełna.

Przykład. Rozważmy funkcję dodatnią mierzalną $[a,b] \ni x \mapsto \rho(x)$. ($a$ może być równe $-\infty$ a b może być równe $+\infty$). Definiujemy przestrzeń $L^2([a,b],\rho)$ jako przestrzeń funkcji mierzalnych

$$f : [a,b] \to \mathbb{C}$$

takich, że

$$\int_a^b |f(x)|^2 \rho(x) \mathrm{d}x < \infty.$$

Jest to przestrzeń Hilberta, jeśli wyposażymy ją w iloczyn skalarny

$$(f|g) := \int_a^b \overline{f(x)} g(x) \rho(x) \mathrm{d}x, \quad f, g \in L^2([a,b],\rho).$$

Przykład. Niech $f_n(x) = n^\alpha x \mathrm{e}^{-nx}$ i $1 < \alpha < \frac{3}{2}$. Wtedy $\sup f_n \to \infty$ i $\|f\|_2 \to 0$.

1.2 Bazy ortogonalne

Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią Hilberta. Jeśli $W \subset \mathcal{V}$, definiujemy dopełnienie ortogonalne zbioru W:

$$W^\perp := \{v \in \mathcal{V} \ : \ (w|v) = 0, \quad w \in W\}.$$

Zauważmy, że $W^\perp$ jest zawsze domkniętą podprzestrzenią w $\mathcal{V}$.

Niech $\{f_1, f_2, \cdots\} \subset L^2([a,b],\rho)$. Mówimy, że jest to układ ortogonalny, gdy

$$(f_n|f_m) = 0, \quad n \neq m.$$

Jeśli w dodatku $(f_n|f_n) = 1$, to mówimy, że jest to układ ortonormalny.

Mówimy, że $\{f_1, f_2, \dots\}$ jest bazą ortogonalną w $\mathcal{V}$, gdy jest to układ ortogonalny składający się z niezerowych wektorów i taki, że $\{f_1, f_2, \dots\}^\perp = \{0\}$.

Mówimy, że $\{f_1, f_2, \dots\}$ jest bazą ortonormalną w $L^2([a, b], \rho)$, gdy jest to układ ortonormalny i $\{f_1, f_2, \dots\}^\perp = \{0\}$.

Oczywiście, jeśli $\{f_1, f_2, \cdots\}$ jest bazą ortogonalną, to można zrobić z niej bazę ortonormalną zastępując f_n przez $\frac{f_n}{\|f_n\|}$.

Twierdzenie 1.1 *Niech $(f_1, f_2, \dots)$ będzie bazą ortonormalną w przestrzeni Hilberta $\mathcal{V}$.*

(1) *Niech $(c_1, c_2, \dots)$ będzie ciągiem zespolonym takim, że*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty. \tag{1.1}$$

Połóżmy

$$h_n := \sum_{j=1}^{n} c_j f_j. \tag{1.2}$$

Wtedy istnieje $h \in \mathcal{V}$ taki, że $\|h - h_n\| \to 0$.

(2) *Niech $h \in \mathcal{V}$. Niech $c_j := (f_j|h)$. Wtedy (1.1) jest prawdziwe i jeśli zdefiniujemy h_n jak w (1.2), to $\|h - h_n\| \to 0$.*

Dowód. (1) Dla $n \geq m$ mamy

$$\|h_n - h_m\|^2 = \sum_{j=m+1}^{n} |c_j|^2. \tag{1.3}$$

Z (1.1) widzimy, że (1.3) dąży do zera, gdy $n, m \to \infty$. Czyli ciąg h_n jest ciągiem Cauchy'ego. Wiemy, że przestrzeń $\mathcal{V}$ jest zupełna. Więc h_n posiada granicę.

(2) Najpierw sprawdzamy, że

$$\sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 \leq \|h\|^2.$$

Stąd

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 \leq \|h\|^2.$$

Zatem(1.1) jest spełnione. Na mocy (1) istnieje granica $\tilde{h} := \lim_{n\to\infty} h_n$. Sprawdzamy, że $(h - \tilde{h}|f_j) = 0$, $j = 1, 2, \dots$. Zatem $h - \tilde{h} = 0$. □

Będziemy pisać

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j f_j := h,$$

gdzie h jest zdefiniowany tak, jak w powyższym twierdzeniu.

Przykład 1. W $L^2([-\pi,\pi])$, $e_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi}$, $n \in \mathbb{Z}$, jest bazą ortogonalną i $(e_n|e_n) = 2\pi$. Jeśli $f \in L^2([-\pi,\pi])$, dostajemy

$$\left\| f - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{|j|\leq n} \hat{f}_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi} \right\| \to 0,$$

gdzie

$$\hat{f}_n := \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\phi}\mathrm{d}\phi$$

są współczynnikami Fouriera funkcji f.

Przykład 2. Inną pokrewną bazę ortogonalną w $L^2([-\pi,\pi])$ stanowią $f_n^+ := \cos n\phi$, $f_n^- := \sin n\phi$, $n = 1,2,\dots$, $(f_n^\pm|f_n^\pm) = \pi$, $f_0 := 1$, $(f_0|f_0) = 2\pi$.

Przykład 3. W $L^2([0,\pi])$ mamy bazę ortogonalną $c_n := \cos n\phi$, $n = 1,2,\dots$, $(c_n|c_n) = \frac{\pi}{2}$, $c_0 = 1$, $(c_0|c_0) = \pi$.

Przykład 4. W $L^2([0,\pi])$ mamy bazę ortogonalną $s_n := \sin n\phi$, $n = 1,2,\dots$, $(s_n|s_n) = \frac{\pi}{2}$.

Przykład 4. Jedne funkcje lepiej jest rozwijać w szereg kosinusów a inne w szereg sinusów:

$$\begin{aligned}
1 &= c_0 \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{2m+1} s_{2m+1}, \\
\sin\phi &= \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m+1}\right) c_{2m} \\
&= s_1.
\end{aligned}$$

1.3 Szeregi Fouriera

Przykład 1. $h(\phi) := (a - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})^{-1}$, $a > 1$. Wtedy

$$\hat{h}_n = \begin{cases} 2\pi a^{-n-1}, & n = 0,1,\dots; \\ 0, & n = -1,-2,\dots. \end{cases}$$

Przykład 2. $h(\phi) := (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} - a)^{-1}$, $a < 1$. Wtedy

$$\hat{h}_n = \begin{cases} 0, & n = 0,1,2,\dots; \\ 2\pi a^{-n-1}, & n = -1,-2,\dots. \end{cases}$$

Przykład 3. $h(\phi) := \phi$. Wtedy

$$\hat{h}_n = \begin{cases} \frac{\mathrm{i}2\pi(-1)^n}{n}, & n \neq 0 \\ 0. & n = 0. \end{cases}$$

Aby to otrzymać można zauważyć, że $h(\phi) = -\mathrm{i}\log(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}) + \mathrm{i}\log(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi})$.

Jeśli zsumujemy

$$h_{(n)}(\phi) := \sum_{|j|\leq n} \frac{\hat{h}_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi}}{2\pi},$$

To zaobserwujemy w otoczeniu $\phi = \pm\pi$ tzw. zjawisko Gibbsa: funkcja $h_{(n)}$ "przestrzeliwuje" wartość funkcji h. Mamy bowiem

$$h_{(n)}(-\pi + \epsilon) = -2\sum_{j=1}^{n} \frac{\sin \epsilon j}{j}.$$

W otoczeniu nieciągłości funkcji h obserwujemy "zafalowanie" funkcji $h_{(n)}$, które w miarę wzrostu n zwęża się, ale nie zmniejsza swej wysokości zachowując swoją wysokość. To zafalowanie ma w granicy ściśle określony kształt (z dokładnością do zwężania), mamy bowiem

$$\lim_{n\to\infty} h_{(n)}\left(-\pi + \frac{c}{n}\right) = -2\int_0^c \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

Jest to zjawisko występujące zawsze, kiedy mamy do czynienia z szeregiem Fouriera dla nieciągłej funkcji. Prowadzi ono do tego, że dla funkcji nieciągłej o skoku $a\pi$ w sumie częściowej szeregu Fouriera będzie skok $2ac$, gdzie $c = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x > \frac{\pi}{2}$ jest tzw. stałą Wilbrahama-Gibbsa.

1.4 Rzuty ortogonalne

Mówimy, że operator P jest rzutem ortogonalnym, gdy $P^2 = P$ i $\mathrm{Ker}P = \mathrm{Ran}P^\perp$. Mówimy wtedy, że jest to rzut ortogonalny na $\mathrm{Ran}P$.

Jeśli v jest niezerowym wektorem, to rzut ortogonalny na $\mathbb{C}v$ jest równy

$$P_v w = \frac{v(v|w)}{(v|v)}.$$

W literaturze fizycznej operator ten często jest zapisywany jako $\frac{|v)(v|}{(v|v)}$.

Jeśli $v_1, \ldots, v_n$ jest bazą ortogonalną podprzestrzeni $\mathcal{V}_0$, to rzut ortogonalny na $\mathcal{V}_0$ jest równy

$$P_{\mathcal{V}_0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{|v_j)(v_j|}{(v_j|v_j)}.$$

Przykład. W przestrzeni $L^2([-\pi,\pi])$ rzut ortogonalny P_n na podprzestrzeń rozpiętą przez $\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\phi}$ z $|j| < n$ jest równy

$$P_n(\phi,\psi) = \frac{\sin\frac{(2n+1)(\phi-\psi)}{2}}{2\pi\sin\frac{(\phi-\psi)}{2}}.$$

Przykład. W przestrzeni $L^2([0,\pi])$ rzut na przestrzeń rozpiętą przez $\sin j\phi$, $j = 1,\ldots,n$ ma jądro całkowe

$$P_n(\phi,\psi) = \frac{\sin\frac{(2n+1)(\phi+\psi)}{2}}{2\pi\sin\frac{\phi+\psi}{2}} - \frac{\sin\frac{(2n+1)(\phi-\psi)}{2}}{2\pi\sin\frac{\phi-\psi}{2}}.$$

1.5 Ortogonalizacja Grama-Schmidta

Niech $(g_1, g_2, \dots)$ będzie ciągiem wektorów liniowo niezależnym. Niech $\mathcal{V}_n$ będzie podprzestrzenią rozpiętą przez $g_1, \dots, g_n$. Wtedy $\mathcal{V}_n$ jest przestrznią wymiaru n i $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \cdots$.

Definiujemy indukcyjnie

$$f_n := g_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f_j(f_j|g_n)}{\|f_j\|^2} = (1 - P_{n-1})g_n,$$

gdzie P_n jest rzutem ortogonalnym na $\mathcal{V}_n$. $(f_1, f_2, \dots)$ jest układem ortogonalnym. $(f_1, \dots, f_n)$ jest bazą ortogonalną $\mathcal{V}_n$.

2 Operatory

2.1 Operatory ograniczone

Niech A będzie operatorem liniowym z przestrzeni Hilberta $\mathcal{V}$ w $\mathcal{W}$. Mówimy, że A jest operatorem ograniczonym, gdy

$$\sup\{\|Av\| \ : \ v \in \mathcal{V}, \ \|v\| \le 1\} =: \|A\|$$

jest skończone. Zbiór operatorów ograniczonych z $\mathcal{V}$ w $\mathcal{W}$ oznaczamy przez $B(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Jeśli $\mathcal{V} = \mathcal{W}$, to piszemy $B(\mathcal{V})$.

2.2 Jądro całkowe

Rozważmy przestrzeń $L^2([a,b], \rho)$. Często można opisać operator A poprzez funkcję $[a,b]\times[a,b] \ni (x,y) \mapsto A(x,y)$:

$$Af(x) := \int_a^b A(x,y)f(y)\rho(y)\mathrm{d}y.$$

Na przykład, jeśli $v_1, \dots, v_n$ jest bazą ortonormalną podprzestreni $\mathcal{V}_0$, to $P_{\mathcal{V}_0}$, czyli rzut ortogonalny na $\mathcal{V}$, ma jądro całkowe

$$P_{\mathcal{V}_0}(x,y) = \sum_{j=1}^{n} v_j(x)\overline{v_j(y)}.$$

Można pokazać, że jeśli $\int_a^b |A(x,y)|^2 \rho(x)\mathrm{d}x\rho(y)\mathrm{d}y < \infty$, to A jest operatorem ograniczonym.

2.3 Operatory sprzężone

Niech $A \in B(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Wtedy wzór

$$(w|Av) = (A^* w|v), \quad v \in \mathcal{V}, \ w \in \mathcal{W}$$

definiuje operator A^* (hermitowsko) sprzężony do A. Mamy $A^* \in B(\mathcal{W}, \mathcal{V})$. Jeśli A ma jądro całkowe $A(x,y)$, to A^* ma jądro całkowe $\overline{A}(y,x)$.

Mówimy, że A jest samosprzężony, gdy

$$A = A^*.$$

Mówimy, że A jest unitarny, gdy

$$AA^* = A^*A = 1.$$

A jest normalny, gdy

$$AA^* = A^*A.$$

2.4 Widmo punktowe

Niech A będzie operatorem liniowym na przestrzeni liniowej $\mathcal{V}$. Przypomnijmy, że mówimy, iż $\lambda \in \mathbb{C}$ jest wartością własną operatora A jeśli istnieje niezerowy wektor $v \in \mathcal{V}$ taki, że $Av = \lambda v$. Zbiór wartości własnych nazywamy spektrum (widmem) punktowym operatora A. Oznaczamy je przez $\mathrm{sp}_\mathrm{p}(A)$.

2.5 Widmo

Załóżmy dodatkowo, że $\mathcal{V}$ jest przestrzenią Hilberta. Mówimy, że ograniczony operator B jest odwracalny, gdy B jest bijekcją i B^{-1} jest ograniczone.

Mówimy, że $\lambda \in \mathbb{C}$ należy do spektrum (widma) operatora A, gdy $\lambda - A$ nie jest odwracalne. Spektrum operatora A oznaczamy przez $\mathrm{sp}(A)$.

Jeśli $z \in \mathbb{C}$ nie należy do $\mathrm{sp}A$, to istnieje rezolwenta operatora A

$$(z - A)^{-1}.$$

Zachodzi następujące łatwe twierdzenie:

Twierdzenie 2.1 *Spektrum punktowe operatora A jest podzbiorem jego spektrum, czyli* $\mathrm{sp}_\mathrm{p}(A) \subset \mathrm{sp}(A)$.

2.6 Widmo w skończonym wymiarze

Niech $\mathcal{V}$ będzie skończenie wymiarowe. Wtedy istnieją wygodne kryteria na odwracalność operatorów liniowych:

Twierdzenie 2.2 *Niech B będzie operatorem na $\mathcal{V}$. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *B jest odwracalny.*

(2) $\mathrm{Ker}B$ *jest równe* $\{0\}$.

(3) $\det B \neq 0$

Dlatego też w skończonym wymiarze widmo można zdefiniować na kilka sposobów:

Twierdzenie 2.3 *Niech A będzie operatorem na $\mathcal{V}$ i $\lambda \in \mathbb{C}$. Następujące warunki są równoważne:*

(1) λ *jest wartością własną operatora* A.

(2) $\lambda - A$ *jest nieodwracalny.*

(3) $\det(\lambda - A) = 0$.

W nieskończonym wymiarze, warunek pierwszy implikuje warunek drugi, ale trzeci na ogół nie ma sensu.

2.7 Twierdzenie spektralne w skończonym wymiarze

Na algebrze poznaliśmy tzw. Twierdzenie Spektralne:

Twierdzenie 2.4 *Niech* A *będzie operatorem normalnym na skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta. Wtedy istnieje baza ortonormalna złożona z wektorów własnych operatora* A.

A jest samosprzężony wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne są rzeczywiste.

A jest unitarny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne mają moduł 1

Przykład. Niech e_j, $j = 1, \dots, n$, będzie bazą kanoniczną w $\mathbb{C}^n$. Zdefiniujmy operator U wzorem

$$Ue_j := e_{j+1}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad Ue_n = e_1.$$

Wtedy U jest operatorem unitarnym, wartościami własnymi są $\mathrm{e}^{\frac{ik2\pi}{n}}$, odpowiadają im unormowane wektory własne

$$w_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}jk2\pi}{n}} e_j.$$

Przykład. Niech $v\sigma = \sum_{i=1}^{3} v_i \sigma_i$, gdzie $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ i σ_i są macierzami Pauliego na $\mathbb{C}^2$. Wtedy $v\sigma$ jest samosprzężony. Jest unitarny gdy $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$. Wartości własne wynoszą $\pm\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ a wektory własne

$$w_+ = \sqrt{1 + v_1} e_1 + \frac{v_2 + v_3}{\sqrt{1 + v_1}} e_2, \quad w_- = \sqrt{1 - v_1} e_1 + \frac{-v_2 + v_3}{\sqrt{1 - v_1}} e_2.$$

2.8 Widmo ciągłe

W nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta istnieje uogólnienie Twierdzenia Spektralnego, ale dużo trudniejsze. Poniżej omówimy pierwszą dodatkową trudność, która pojawia się w nieskończonym wymiarze.

Wektory własne odnoszące się do różnych wartości własnych są ortogonalne. Może jednak nie istnieć baza ortonormalna złożona z wektorów własnych. Wynika to z pojawienia się tzw. widma ciągłego.

Przykład. Na $L^2([0, 1])$ definiujemy $(Af)(x) = xf(x)$. Operator ten jest samosprzężony ale nie ma wektorów własnych.

Przykład. Na $L^2(\mathbb{Z})$, niech e_j oznacza bazę kanoniczną. Definiujemy operator U wzorem $Ue_n := e_{n+1}$. Jest on unitarny, ale nie ma wektorów własnych.

2.9 Operatory nieograniczone

Jednym z kłopotliwych aspektów teorii operatorów w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach Hilberta jest to, że wiele ważnych dla fizyki operatorów jest nieograniczonych. Wiąże się to z dodatkowym kłopotem: takich operatorów w praktyce nie można zdefiniować na całej przestrzeni Hilberta, tylko na pewnej podprzestrzeni liniowej gęstej. Podprzestrzeń ta jest nazywana dziedziną danego operatora. Dziedzina operatora A będzie oznaczana przez $\mathrm{Dom}A$.

Problemu tego nie ma dla skończenie wymiarowych przestrzeni, gdzie wszystkie operatory są ograniczone.

Przykład. Na $L^2(\mathbb{R})$ próbujemy zdefiniować operator $(Af)(x) = xf(x)$. Wektor $(x+\mathrm{i})^{-1}$ należy do $L^2(\mathbb{R})$ ale $x(x+\mathrm{i})^{-1}$ nie należy do $L^2(\mathbb{R})$. Dlatego, $(x+\mathrm{i})^{-1}$ nie należy do dziedziny operatora A.

Przykład. Na $L^2(\mathbb{R})$ próbujemy zdefiniować operator $pf(x) = \frac{1}{\mathrm{i}}\partial_x f(x)$. Wektor $\theta(x)\mathrm{e}^{-x}$ należy do $L^2(\mathbb{R})$ ale $\frac{1}{\mathrm{i}}\partial_x \theta(x)\mathrm{e}^{-x}$ nie należy do $L^2(\mathbb{R})$. ($\theta(x)$ oznacza funkcję Heaviside'a). Dlatego $\theta(x)\mathrm{e}^{-1}$ nie należy do dziedziny operatora p.

Dla operatorów nieograniczonych spektrum i spektrum punktowe definiuje się podobnie jak dla operatorów ograniczonych.

2.9.1 Hermitowskość nie wystarczy do samosprzężoności

Dla operatorów nieograniczonych istnieje kilka różnych uogólnień pojęcia samosprzężoności (hermitowskości).

Rozważmy przestrzeń Hilberta $\mathcal{V}$. Niech A będzie operatorem z dziedziną $\mathrm{Dom}A$. ($\mathrm{Dom}A$ jest gęstą podprzestrzenią w $\mathcal{V}$, obraz A leży też w $\mathcal{V}$). Mówimy, że A jest hermitowski (albo symetryczny), gdy

$$(w|Av) = (Aw|v), \quad v, w \in \mathrm{Dom}A.$$

Jest to warunek, który w praktyce dość łatwo jest sprawdzić. Niestety, z teoretycznego punktu widzenia, dużo ciekawsze jest pojęcie operatora samosprzężonego i istotnie samosprzężonego. Każdy operator samosprzężony jest istotnie samosprzężony, każdy operator istotnie samosprzężony jest hermitowski, ale nie na odwrót. Nie będziemy w tym kursie omawiać pojęcia (istotnej) samosprzężoności dla operatorów nieograniczonych.

Sama hermitowskość wystarcza jednak do udowodnienia następujących własności:

Twierdzenie 2.5 *Niech A będzie operatorem hermitowskim z dziedziną* $\mathrm{Dom}A$.

(1) *Jeśli $v \in \mathrm{Dom}A$ jest jego wektorem własnym z wartością własną λ, czyli $Av = \lambda v$, to $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(2) *Jeśli $\lambda_1 \neq \lambda_2$ są wartościami własnymi z wektorami własnymi v_1 i v_2, to v_1 jest ortogonalne do v_2.*

Dowód. Dowód jest identyczny jak w przypadku skończenie wymiarowym. By dowieść (1) liczymy

$$\lambda(v|v) = (v|Av) = (Av|v) = \overline{\lambda}(v|v).$$

Następnie dzielimy przez $(v|v) \neq 0$.

Dowód (2):

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(v_1|v_2) = (Av_1|v_2) - (v_1|Av_2) = (v_1|Av_2) - (v_1|Av_2) = 0.$$

$\square$

3 Operatory różniczkowe

Szczególnie ważną klasą operatorów są operatory różniczkowe. Nestety, są one nieograniczone, a w dodatku trudność definiowania ich jako operatorów samosprzężonych występuje w nich wyjątkowo wyraźnie. Wiąże się to z tzw. problemem warunków brzegowych. Omówmy najpierw ten problem na prostych przykładach.

3.1 Operator pędu na odcinku

Rozważmy operator $pf(x) = \frac{1}{\mathrm{i}}\partial_x f(x)$ określony na dziedzinie $f \in C^\infty([-\pi,\pi])$ traktowanej jako podprzestrzeń przestrzeni Hilberta $L^2([-\pi,\pi]$. Chcemy znaleźć jego wektory własne, czyli rozwiązujemy równanie

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\partial_x f = \lambda f, \quad f \in C^\infty([-\pi,\pi]). \tag{3.4}$$

Oczywiście, rozwiązaniem tego równania jest $f(x) = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}$ dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{C}$. Oznacza to, że mamy bardzo dużo rozwiązań, co świadczy o tym, że to równanie (i operator p) nie jest zbyt pożyteczny w zastosowaniach.

Zmodyfikujmy ten problem przez zmniejszenie dziedziny. Ograniczmy się do $f \in C^\infty([-\pi,\pi])$ dla których spełnione są warunki brzegowe

$$f(\pi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\kappa} f(-\pi).$$

Operator $\frac{1}{\mathrm{i}}\partial_x$ z taką dziedziną będziemy oznaczać przez p_κ (3.4) ma wtedy rozwiązania $\lambda = n+\kappa$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$ i funkcje własne $e_n(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\kappa+n)x}$. Funkcje własne tworzą bazę ortgonalną w $L^2([-\pi,\pi])$. Ma spektrum $\mathrm{sp} p_\kappa = \mathrm{sp_p} p = \{n+\kappa \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$.

Operator p_κ jest hermitowski (a nawet istotnie samosprzężony). Jest to użyteczny i ważny operator w zastosowaniach. Warunek hermitowskości łatwo sprawdzić całkując przez części:

$$\begin{aligned} (f|p_\kappa g) &= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} \frac{1}{\mathrm{i}}\partial_x g(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\overline{\frac{1}{\mathrm{i}}\partial_x f(x)}\right) g(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{\mathrm{i}}\Big(\overline{f(\pi)}g(\pi) - \overline{f(-\pi)}g(-\pi)\Big) = (p_\kappa f|g), \end{aligned}$$

gdzie wyrazy brzegowe znikają na mocy warunków brzegowych.

Policzmy rezolwentę operatora p_κ, czyli $R_\kappa(z) = (z - p_\kappa)$. Niech $(z-p_\kappa)g = f$ czyli

$$(z - \frac{1}{\mathrm{i}}\partial_x)g(x) = f(x). \tag{3.5}$$

Równanie jednorodne

$$(z - \frac{1}{\mathrm{i}}\partial_x)g(x) = 0. \tag{3.6}$$

rozwiązanie $g(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}zx}$. Uzmienniamy stałą kładąc $g(x)=c(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}zx}$. Dostajemy

$$\mathrm{i}c'(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}zx}=f(x)$$

Stąd

$$\begin{aligned} c(x) &= c(-\pi)-\mathrm{i}\int_{-\pi}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}zy}f(y)\mathrm{d}y \\ &= c(\pi)+\mathrm{i}\int_{x}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}zy}f(y)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

g należy do dziedziny p_κ, zatem warunek brzegowy $g(\pi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\kappa}g(-\pi)$, o daje

$$c(\pi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\kappa-z)}c(-\pi).$$

Stąd

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zy}f(y)\mathrm{d}y &= c(-\pi)-c(\pi) \\ &= c(-\pi)(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\kappa-z)}). \end{aligned}$$

Czyli

$$c(-\pi)=\frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\kappa-z)}}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zy}f(y).$$

Zatem

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\kappa-z)}}\int_{-\pi}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z(x-y)}f(y)\mathrm{d}y \\ &\quad+\frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\kappa-z)}}\int_{x}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z(x-y)}f(y)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Jądro całkowe operatora $R_\kappa(z)=(z-p_\kappa)^{-1}$ (zwane czasem funkcją Greena) jest zatem równe

$$\begin{aligned} R_\kappa(z)(x,y) &= \frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\kappa-z)}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z(x-y)}\theta(x-y) \\ &\quad+\frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\kappa-z)}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z(x-y)}\theta(y-x). \end{aligned}$$

Dla $z\in\mathbb{Z}+\kappa$, rezolwenta $R_\kappa(z)$ nie jest zdefiniowana, dla pozostałych z jest ograniczonym operatorem.

3.2 Laplasjan na odcinku

Rozważmy prestrzeń $L^2([0,\pi])$. Niech $\mathcal{D}_{\min}$ będzie zbiorem funkcji $f\in C^\infty([0,\pi])$, które są równe zero w otoczeniu 0 i π. Jest to gęsta podprzestrzeń w $L^2([0,\pi])$.

Definiujemy operator na $\mathcal{D}_{\min}$ wzorem

$$H_{\min}f:=-\partial_x^2 f(x),\quad f\in\mathcal{D}_{\min}.$$

Zauważmy, że nie ma on wcale wektorów własnych. Spełnia on natomiast warunek hermitowskości, który dowodzimy całkując przez części:

$$\begin{aligned}(g|H_{\min}f) &= -\int_0^\pi \overline{g}(x)\partial_x^2 f(x)\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^\pi (\partial_x^2\overline{g}(x))f(x)\mathrm{d}x = (H_{\min}g|f).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Dziedzina operatora $H_{\min}$ jest za mała, by był on ciekawy.

Zastąpmy teraz $\mathcal{D}_{\min}$ przez $\mathcal{D}_{\max}$ – wszystkie funkcje gładkie na $[0,\pi]$. Operator $H_{\max}$ jest zdefinowany tym samym wzorem co $H_{\min}$, tylko na większej dziedzinie.

$$H_{\max}f := -\partial_x^2 f(x), \quad f \in \mathcal{D}_{\max}.$$

Wtedy wszystkie liczby zespolone są wartościami własnymi, bo $f_\omega(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$ spełnia

$$H_{\max}f_\omega = \omega^2 f_\omega. \tag{3.8}$$

Wektory własne odnoszące się do różnych wartości własnych nie są wzajemnie ortogonalne. Operator $H_{\max}$ nie spełnia warunku hermitowskości, bo przy całkowaniu przez części pojawiają się wyrazy brzegowe:

$$\begin{aligned}(g|H_{\max}f) &= -\int_0^\pi \overline{g}(x)\partial_x^2 f(x)\mathrm{d}x \qquad (3.9)\\ &= \overline{g}(0)\partial_x f(0) - \overline{g}(\pi)\partial_x f(\pi) + \int_0^\pi (\partial_x\overline{g}(x))\partial_x f(x)\mathrm{d}x \\ &= \overline{g}(0)\partial_x f(0) - \overline{g}(\pi)\partial_x f(\pi) - (\partial_x\overline{g}(0))f(0) + (\partial_x\overline{g}(\pi))f(\pi) - \int_0^\pi (\partial_x^2\overline{g}(x))f(x)\mathrm{d}x \\ &= \overline{g}(0)\partial_x f(0) - \overline{g}(\pi)\partial_x f(\pi) - (\partial_x\overline{g}(0))f(0) + (\partial_x\overline{g}(\pi))f(\pi) + (H_{\max}g|f).\end{aligned}$$

Czyli dziedzina $H_{\max}$ jest za duża, by był ciekawy.

3.3 Laplasjan na odcinku z warunkami brzegowymi Dirichleta

Niech H_{D} będzie równy $-\partial_x^2$ na funkcjach gładkich spełniających $f(0) = f(\pi) = 0$. Wtedy operator H_{D} definiuje operator samosprzężony zwany Laplasjanem z warunkami brzegowymi Dirichleta i z jego wektorów własnych można utworzyć bazę ortonormalną:

$$s_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin xn, \quad H_{\mathrm{D}}s_n = n^2 s_n, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{3.10}$$

Zatem

$$\mathrm{sp}H_{\mathrm{D}} = \mathrm{sp}_{\mathrm{p}}H_{\mathrm{D}} = \{n^2 \ : \ n = 1, 2, \dots\}.$$

Można policzyć jego rezolwentę $R_{\mathrm{D}}(\omega^2) = (\omega^2 - H_{\mathrm{D}})^{-1}$. Niech

$$(\partial_x^2 + \omega^2)g(x) = f(x), \quad g(0) = g(\pi) = 0.$$

Stosujemy metodę uzmienniania stałej: $c_+(\pi) = c_-(0) = 0$,

$$\begin{aligned} g(x) &= c_+(x)\sin\omega x + c_-(x)\sin\omega(x-\pi), \\ g'(x) &= c_+(x)\omega\cos\omega x + c_-(x)\omega\cos\omega(x-\pi). \end{aligned}$$

Stąd, zakładając, że $\sin\omega \neq 0$,

$$\begin{aligned} c'_+(x)\sin\omega x + c'_-(x)\sin\omega(x-\pi) &= 0, \\ c'_+(x)\omega\cos\omega x + c'_-(x)\omega\cos\omega(x-\pi) &= f(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -c'_+(x) &= f(x)\frac{\sin\omega(x-\pi)}{\omega\sin\omega\pi}, \\ c'_-(x) &= f(x)\frac{\sin\omega x}{\omega\sin\omega\pi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_+(x) &= \int_x^\pi \frac{\sin\omega(y-\pi)}{\omega\sin\omega\pi} f(y)\mathrm{d}y, \\ c_-(x) &= \int_0^x \frac{\sin\omega y}{\omega\sin\omega\pi} f(y)\mathrm{d}y; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin\omega x \int_x^\pi \frac{\sin\omega(y-\pi)}{\omega\sin\omega\pi} f(y)\mathrm{d}y \\ &\quad + \sin\omega(x-\pi)\int_0^x \frac{\sin\omega y}{\omega\sin\omega\pi} f(y)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Zatem jądro całkowe rezolwenty $R_\mathrm{D}(\omega)$ (funkcja Greena dla problemu Dirichleta) jest równe

$$\begin{aligned} R_\mathrm{D}(\omega^2)(x,y) &= \frac{\sin\omega x \sin\omega(y-\pi)\theta(x-y)}{\omega\sin\omega\pi} \\ &\quad + \frac{\sin\omega(x-\pi)\sin\omega y\theta(y-x)}{\omega\sin\omega\pi} \end{aligned}$$

3.4 Laplasjan na odcinku z warunkami brzegowymi Neumanna

Niech H_N będzie równy $-\partial_x^2$ na funkcjach gładkich spełniających $f'(0) = f'(\pi) = 0$. Wtedy operator H_N definiuje operator samosprzężony zwany Laplasjanem z warunkami brzegowymi Neumanna i z jego wektorów własnych można utworzyć bazę ortonormalną:

$$c_0 := \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad c_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos xn, \quad H_\mathrm{N}c_n = n^2 c_n, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{3.11}$$

Zatem

$$\mathrm{sp}H_\mathrm{N} = \mathrm{sp_p}H_\mathrm{N} = \{n^2 \ : \ n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Można policzyć jego rezolwentę $R_{\mathrm{N}}(\omega^2) = (\omega^2 - H_{\mathrm{N}})^{-1}$. Niech

$$(\partial_x^2 + \omega^2) g(x) = f(x), \quad g'(0) = g'(\pi) = 0.$$

Stosujemy metodę uzmienniania stałej: $c_+(\pi) = c_-(0) = 0$,

$$\begin{aligned} g(x) &= c_+(x)\cos\omega x + c_-(x)\cos\omega(x-\pi), \\ g'(x) &= -c_+(x)\omega\sin\omega x - c_-(x)\omega\sin\omega(x-\pi). \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} c_+'(x)\cos\omega x + c_-'(x)\cos\omega(x-\pi) &= 0, \\ -c_+'(x)\omega\sin\omega x - c_-'(x)\omega\sin\omega(x-\pi) &= f(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -c_+'(x) &= f(x)\frac{\cos\omega(x-\pi)}{\omega\sin\omega\pi}, \\ c_-'(x) &= f(x)\frac{\cos\omega x}{\omega\sin\omega\pi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_+(x) &= \int_x^\pi \frac{\cos\omega(y-\pi)}{\omega\sin\omega\pi} f(y)\mathrm{d}y, \\ c_-(x) &= \int_0^x \frac{\cos\omega y}{\omega\sin\omega\pi} f(y)\mathrm{d}y; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \cos\omega x \int_x^\pi \frac{\cos\omega(y-\pi)}{\omega\sin\omega\pi} f(y)\mathrm{d}y \\ &\quad + \sin\omega(x-\pi) \int_0^x \frac{\cos\omega y}{\omega\sin\omega\pi} f(y)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Zatem jądro całkowe rezolwenty $R_{\mathrm{N}}(\omega)$ (funkcja Greena dla problemu Neumanna) jest równe

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{D}}(\omega^2)(x,y) &= \frac{\cos\omega x\cos\omega(y-\pi)\theta(x-y)}{\omega\sin\omega\pi} \\ &\quad + \frac{\cos\omega(x-\pi)\cos\omega y\theta(y-x)}{\omega\sin\omega\pi}. \end{aligned}$$

3.5 Laplasjan na odcinku z periodycznymi warunkami brzegowymi

Niech H_{per} będzie równy $-\partial_x^2$ na funkcjach gładkich spełniających $f(0) = f(\pi)$, $f'(0) = f'(\pi)$. Wtedy operator H_{per} definiuje operator samosprzężony zwany Laplasjanem z periodycznymi warunkami brzegowymi i z jego wektorów własnych można utworzyć bazę ortonormalną:

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2nx}, \quad H_{\mathrm{per}} e_n = 4n^2 e_n, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \dots . \tag{3.12}$$

Zatem

$$\mathrm{sp} H_{\mathrm{per}} = \mathrm{sp}_{\mathrm{p}} H_{\mathrm{per}} = \{4n^2 \ : \ n = 0, 1, 2, \dots\},$$

przy czym wartości własne odpowiadające $n = 1, 2, \dots$ są dwukrotnie zdegenerowane.

3.6 Laplasjan na odcinku z antyperiodycznymi warunkami brzegowymi

Niech H_{ant} będzie równy $-\partial_x^2$ na funkcjach gładkich spełniających $f(0) = -f(\pi)$, $f'(0) = -f'(\pi)$. Wtedy operator H_{ant} definiuje operator samosprzężony zwany Laplasjanem z antyperiodycznymi warunkami brzegowymi i z jego wektorów własnych można utworzyć bazę ortonormalną:

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1)x}, \quad H_{\mathrm{ant}} f_n = (2n+1)^2 f_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots. \tag{3.13}$$

Zatem

$$\mathrm{sp} H_{\mathrm{ant}} = \mathrm{sp}_{\mathrm{p}} H_{\mathrm{ant}} = \{(2n+1)^2 \ : \ n = 0, 1, 2, \dots\},$$

i wszystkie wartości własne są dwukrotnie zdegenerowane.

3.7 Operatory różniczkowe drugiego rzędu w jednym wymiarze

W fizyce szczególną rolę odgrywają operatory drugiego rzędu

$$\mathcal{C} := \sigma(x)\partial_x^2 + \tau(x)\partial_x. \tag{3.14}$$

Często wygodnie jest zapisać taki operator w innej formie. Niech $\rho(x)$ spełnia

$$\sigma(x)\rho'(x) = (\tau(x) - \sigma'(x))\rho(x). \tag{3.15}$$

Wtedy mamy

$$\mathcal{C} = \rho(x)^{-1}\partial_x \rho(x)\sigma(x)\partial_x. \tag{3.16}$$

Twierdzenie 3.1 *Niech*

$$\mathcal{D} = \{f \in C^\infty([a,b]) \ : \ f = 0 \ \ w \ otoczeniu \ \ a, b\}.$$

Zakładamy, że $\mathcal{C}$ jest operatorem zdefiniowanym na $\mathcal{D}$ wzorem (3.14), $\rho > 0$, σ jest rzeczywiste. Rozważmy przestrzeń Hilberta $L^2([a,b], \rho)$. Wtedy $\mathcal{C}$ jest hermitowski.

Niestety, powyższa dziedzina jest z reguły za mała aby dostać operator posiadający wektory własne.

3.8 Warunki brzegowe dla problemu Sturma-Liouville'a

Rozważmy teraz operator zadany tym samym wzorem różniczkowym ale na większej dziedzinie. Przy odpowiednich założeniach nadal dostaniemy operator hermitowski:

Twierdzenie 3.2 *Niech σ, ρ będą rzeczywistymi różniczkowalnymi funkcjami na $[a,b]$. Niech $\rho > 0$ i*

$$\sigma(a)\rho(a) = \sigma(b)\rho(b) = 0.$$

Wtedy $\mathcal{C}$ jest hermitowski na dziedzinie $C^2([a,b])$ w sensie przestrzeni $L^2([a,b], \rho)$

Dowód.

$$
\begin{aligned}
(g|\mathcal{C}f) &= \int_a^b \rho(x)\overline{g}(x)\rho(x)^{-1}\partial_x\sigma(x)\rho(x)\partial_x f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \overline{g}(x)\partial_x\sigma(x)\rho(x)\partial_x f(x)\mathrm{d}x \\
&= \overline{g(x)}\rho(x)\sigma(x)f'(x)\Big|_a^b - \int_a^b (\partial_x\overline{g}(x))\sigma(x)\rho(x)\partial_x f(x)\mathrm{d}x \\
&= -\overline{g'(x)}\rho(x)\sigma(x)f(x)\Big|_a^b + \int_a^b (\partial_x\rho(x)\sigma(x)\partial_x\overline{g(x)})f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \rho(x)\overline{(\rho(x)^{-1}\partial_x\sigma(x)\rho(x)\partial_x g(x))}f(x)\mathrm{d}x = (\mathcal{C}g|f).
\end{aligned}
$$

□

Analogicznie dowodzimy następującego twierdzenia:

Twierdzenie 3.3 *Niech σ, ρ będą rzeczywistymi różniczkowalnymi funkcjami na $[-\infty, \infty]$. Niech $\rho > 0$ i*

$$\lim_{x\to-\infty} \sigma(x)\rho(x)|x|^n = \lim_{x\to+\infty} \sigma(x)\rho(x)|x|^n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wtedy $\mathcal{C}$ jest hermitowski na dziedzinie będącej przestrzenią wielomianów w sensie przestrzeni Hilberta $L^2([-\infty, \infty], \rho)$.

Oczywiście, podobne twierdzenia zachodzą dla odcinków $]-\infty, b]$ i $[a, \infty[$.
Szukanie wartości własnych operatora $\mathcal{C}$ bywa nazywane problemem Sturma-Liouville'a.

4 Wielomiany ortogonalne

4.1 Wielomiany ortogonalne

Niech $\rho > 0$ jest ustaloną wagą na odcinku $[a, b]$. Załóżmy, że

$$\int_a^b |x|^n \rho(x)\mathrm{d}x < \infty, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Wtedy jednomiany $1, x, x^2, \ldots$ tworzą układ liniowo niezależny w $L^2([a, b], \rho)$. Stosując do nich procedurę Grama-Schmidta dostajemy wielomiany ortogonalne $P_0, P_1, P_2, \ldots$. gdzie $\mathrm{deg}P_n = n$.

Istnieje proste kryterium pozwalające sprawdzić, kiedy jest to baza ortogonalna.

Twierdzenie 4.1 *Załóżmy, że dla pewnego $\epsilon > 0$*

$$\int_a^b \mathrm{e}^{\epsilon|x|}\rho(x)\mathrm{d}x < \infty.$$

Wtedy wielomiany są gęste w $L^2([a, b], \rho)$. Dlatego też, wielomiany $P_0, P_1, \ldots$ stanowią bazę ortogonalną w $L^2([a, b], \rho)$.

Dowód. Niech $h \in L^2([a,b],\rho)$. Wtedy dla $|\mathrm{Im}z| \leq \frac{\epsilon}{2}$

$$\int_a^b |\rho(x)h(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xz}|\mathrm{d}x \quad \leq \quad \left(\int_a^b \rho(x)\mathrm{e}^{\epsilon|x|}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b \rho(x)|h(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Zatem dla $|\mathrm{Im}z| \leq \frac{\epsilon}{2}$ możemy zdefiniować

$$F(z) := \int_a^b \rho(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx}h(x)\mathrm{d}x.$$

A więc F jest analityczna na pasku $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |\mathrm{Im}z| < \frac{\epsilon}{2}\}$. Niech $(x^n|h) = 0$, $n = 0, 1, \ldots$. Wtedy

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}F(z)\Big|_{z=0} = (-\mathrm{i})^n \int_a^b x^n\rho(x)h(x)\mathrm{d}x = (-\mathrm{i})^n(x^n|h) = 0.$$

Ale funkcja analityczna, która znika wraz ze wszystkimi pochodnymi w jednym punkcie, znika na całej dziedzinie (jeśli ta dziedzina jest spójna). Zatem $F = 0$ na całej dziedzinie, w szczególności na prostej rzeczywistej. Czyli $\hat{h} = 0$. Z odwrotnej transformaty Fouriera wynika, że $h = 0$.

Czyli nie istnieje niezerowy wektor ortogonalny do wielomianów. Zatem wielomiany są gęste w $L^2([a,b],\rho)$. □

4.2 Wzór Christoffela-Darboux

Niech $p_n(x) = \frac{P_n(x)}{\|P_n\|}$ będzie bazą ortonormalną powstałą z bazy ortogonalnej $P_1, P_2, \ldots$.

Elementy macierzowe operatora x oznaczamy przez

$$\beta_{jm} := (p_j|xp_m) = \int_a^b \rho(x)xp_j(x)p_m(x)\mathrm{d}x.$$

Twierdzenie 4.2

$$\beta_{jm} = \beta_{mj},$$

$$\beta_{jm} = 0, \qquad |j-m| \geq 2.$$

Niech k_j będzie współczynnikiem p_j przy potędze x^j. Wtedy

$$\beta_{j,j+1} = \frac{k_j}{k_{j+1}},$$

bo xp_j ma najwyższy wyraz k_jx^{j+1}. Dostajemy wzór rekurencyjny

$$xp_n = \beta_{n,n-1}p_{n-1} + \beta_{n,n}p_n + \beta_{n,n+1}p_{n+1}.$$

Twierdzenie 4.3 (Wzór Christoffela-Darboux) *Jądro całkowe rzutu na przestrzeń wielomianów stopnia $\leq n$ jest równe*

$$\begin{aligned} P_n(x,y) &= \sum_{k=0}^n p_k(x)p_k(y) \\ &= \tfrac{k_n}{k_{n+1}}\tfrac{p_n(y)p_{n+1}(x)-p_{n+1}(y)p_n(x)}{x-y}, \end{aligned}$$

a na diagonali

$$P_n(x,x) = \frac{k_n}{k_{n+1}}(p_n(x)p'_{n+1}(x) - p_{n+1}(x)p'_n(x)).$$

Dowód. Niech Q_k będzie rzutem na p_k. Ma on jądro całkowe

$$Q_k(x,y) = p_k(x)p_k(y).$$

$[x, Q_k]$ ma jądro całkowe

$$\begin{aligned} xQ_k(x,y) - Q_k(x,y)y &= xp_k(x)p_k(y) - p_k(x)p_k(y)y \\ &= \beta_{k,k-1}(p_{k-1}(x)p_k(y) - p_k(x)p_{k-1}(y)) \\ &+\beta_{k+1,k}(p_{k+1}(x)p_k(y) - p_k(x)p_{k+1}(y)). \end{aligned}$$

Zatem $[x, P_n] = \sum_{k=0}^{n}[x, Q_k]$ ma jądro całkowe

$$xP_n(x,y) - P_n(x,y)y = \beta_{n,n+1}(p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)).$$

□

4.3 Wielomiany Czebyszewa 1-go rodzaju

Rozważamy przestrzeń

$$L^2([-1,1], (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}).$$

Definiujemy

$$\begin{aligned} T_n(\cos\phi) &= \cos n\phi, & \phi \in [0,\pi], \\ T_n(x) &= \tfrac{1}{2}((x + \mathrm{i}\sqrt{1-x^2})^n + (x - \mathrm{i}\sqrt{1-x^2})^n), & x \in [-1,1]. \end{aligned}$$

Twierdzenie 4.4 *Wielomiany T_m są bazą ortogonalną i*

$$\|T_0\| = \pi, \qquad \|T_n\|^2 = \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Spełniają równanie

$$((1-x^2)\partial_x^2 - x\partial_x + n^2)T_n(x) = 0. \tag{4.17}$$

Dowód. Zdefiniujmy

$$W : L^2([-1,1], (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}) \to L^2([0,\pi]),$$
$$Wf(\phi) := f(\cos\phi).$$

Wtedy

$$\|Wf\|^2 = \int_0^\pi |f(\cos\phi)|^2 \mathrm{d}\phi = -\int_0^\pi |f(\cos\phi)|^2 \sin^{-1}\phi \mathrm{d}\cos\phi = \int_{-1}^1 |f(x)|^2 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x,$$

czyli operator W jest unitarny. Poza tym

$$WT_n(\phi) = T_n(\cos\phi) = \cos n\phi.$$

Mamy

$$(\partial_\phi^2 + n^2)\cos n\phi = 0. \tag{4.18}$$

Aby zobaczyć (4.17) liczymy:

$$\partial_\phi W f(\phi) = -\sin\phi f'(\cos\phi),$$

$$W^*\partial_\phi W f(x) = -\sin(\arccos x) f'(x) = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\partial_x f(x).$$

Zatem

$$W^*\partial_\phi W = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\partial_x.$$

Stąd

$$W^*\partial_\phi^2 W = (W^*\partial_\phi W)^2 = (1-x^2)\partial_x^2 - x\partial_x.$$

□

Własności:

$$\begin{aligned}
|T_n(x)| &\leq 1, \quad |x| < 1, \\
T_n(\pm 1) &= (\pm 1)^n, \\
\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) r^n &= \frac{1 - rx}{1 - 2rx + r^2}, \\
\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)\frac{r^n}{n} &= -\log(1 - 2rx + r^2).
\end{aligned}$$

4.4 Wielomiany Czebyszewa 2-go rodzaju

Rozważamy przestrzeń

$$L^2([-1,1],(1-x^2)^{\frac{1}{2}}).$$

Definiujemy

$$\begin{aligned}
U_n(\cos\phi) &= \tfrac{\sin(n+1)\phi}{\sin\phi}, & \phi \in [0,\pi], \\
U_n(x) &= \tfrac{(x+\mathrm{i}\sqrt{1-x^2})^{n+1} - (x-\mathrm{i}\sqrt{1-x^2})^{n+1}}{2\mathrm{i}\sqrt{1-x^2}}, & x \in [-1,1].
\end{aligned}$$

Twierdzenie 4.5 *Wielomiany U_m są bazą ortogonalną i*

$$\|U_n\|^2 = \frac{\pi}{2}, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Spełniają równanie

$$((1-x^2)\partial_x^2 - 3x\partial_x + n(n+2))U_n(x) = 0. \tag{4.19}$$

Dowód. Zdefinujmy
$$V : L^2([-1,1],(1-x^2)^{\frac12}) \to L^2([0,\pi]),$$
$$Vf(\phi) := f(\cos\phi)\sin\phi.$$

Wtedy
$$\|Vf\|^2 = \int_0^\pi |f(\cos\phi)|^2 \sin^2\phi \mathrm{d}\phi = -\int_0^\pi |f^2(\cos\phi)| \sin\phi \mathrm{d}\cos\phi = \int_{-1}^1 |f(x)|^2(1-x^2)^{\frac12}\mathrm{d}x,$$
czyli operator V jest unitarny. Poza tym
$$VU_n(\phi) = U_n(\cos\phi)\sin\phi = \sin(n+1)\phi.$$

Mamy
$$(\partial_\phi^2 + (n+1)^2))\sin(n+1)\phi = 0. \tag{4.20}$$
Aby zobaczyć (4.19) liczymy
$$\partial_\phi Vf(\phi) = -\sin^2\phi f'(\cos\phi) + \cos\phi f(\cos\phi),$$
Zatem
$$V^*\partial_\phi V = -(1-x^2)^{\frac12}\partial_x + x(1-x^2)^{-\frac12}.$$
Stąd
$$V^*\partial_\phi^2 V = (V^*\partial_\phi V)^2 = (1-x^2)\partial_x^2 - 3x\partial_x - 1.$$
□

Własności:
$$\begin{aligned} |U_n(x)| &\le (1-x^2)^{-1/2}, \quad |x|<1, \\ U_n(\pm1) &= (\pm1)^n(n+1), \\ \sum_{n=0}^\infty U_n(x)r^n &= (1-2rx+r^2)^{-1}. \end{aligned}$$

5 Klasyczne wielomiany ortogonalne

5.1 Wielomiany typu hipergeometrycznego

Szukamy operatorów różniczkowych drugiego rzędu, których wektorami własnymi są wielomiany każdego stopnia.

Twierdzenie 5.1 *Niech*
$$\mathcal{C} := \sigma(z)\partial_z^2 + \tau(z)\partial_z + \eta(z) \tag{5.21}$$
będzie operatorem różniczkowym takim, że istnieją wielomiany P_0, P_1, P_2 stopnia odpowiednio $0,1,2$ spełniające
$$\mathcal{C}P_n = \lambda_n P_n.$$
Wtedy

(1) $\sigma(z)$ *jest wielomianem stopnia* ≤ 2,

(2) $\tau(z)$ *jest wielomianem stopnia* ≤ 1,

(3) $\eta(z)$ *jest wielomianem stopnia* ≤ 0 *(jest liczbą).*

Dowód. $\mathcal{C}P_0 = \eta(z)P_0$, więc deg$\eta = 0$.
$\mathcal{C}P_1 = \tau(z)P_1' + \eta P_1$, więc deg$\tau \leq 1$.
$\mathcal{C}P_2 = \sigma(z)P_2'' + \tau(z)P_2'(z) + \eta P_2$, więc deg$\sigma \leq 2$. □

Zatem wystarczy ograniczyć się do operatorów postaci

$$\mathcal{C} := \sigma(z)\partial_z^2 + \tau(z)\partial_z, \tag{5.22}$$

gdzie deg$\sigma \leq 2$ i deg$\tau \leq 1$. Pokażemy, że dla szerokiej klasy (5.22) dla każdego n naturalnego istnieje wielomian P_n będący wektorem własnym (5.22).

Stwierdzenie 5.2 *Załóżmy, że*

$$\big(\sigma(z)\partial_z^2 + \tau(z)\partial_z + \eta\big)P = 0 \tag{5.23}$$

dla pewnego wielomianu stopnia k. *Wtedy*

$$\frac{k(k-1)}{2}\sigma'' + k\tau' + \eta = 0. \tag{5.24}$$

Dowód. Pochodna (5.23) stopnia k jest równa (5.24) razy $\partial_z^k P \neq 0$. □

5.2 Uogólniony wzór Rodrigues'a

Niektóre własności wielomianów będących funkcjami własnymi operatora postaci opisanej w Twierdzeniu 5.1 można wyprowadzić w jednolity sposób nie rozbijając rozumowania na przypadki szczególne. (Niniejszy rozdział można pominąć, odpowiednie wzory będą później wyprowadzone dla przypadków szczególnych).

Ustalamy σ, ale będziemy jawnie zaznaczali zależność od τ. Niech ρ będzie funkcją spełniającą równanie

$$\sigma(z)\partial_z\rho(z) = \big(\tau(z) - \sigma'(z)\big)\,\rho(z). \tag{5.25}$$

Zauważmy, że ρ wyraża się poprzez funkcje elementarne. Operator $\mathcal{C}$ można zapisać jako

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\tau) &= \rho^{-1}(z)\partial_z\sigma(z)\rho(z)\partial_z \\ &= \partial_z\rho^{-1}(z)\sigma(z)\partial_z\rho(z) - \tau' + \sigma''.\end{aligned} \tag{5.26}$$

Zdefiniujmy

$$P_n(\tau; z) := \frac{1}{n!}\rho^{-1}(z)\partial_z^n\sigma^n(z)\rho(z) \tag{5.27}$$

$$= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\rho^{-1}(z)\int_{[0^+]}\sigma^n(z+t)\rho(z+t)t^{-n-1}\mathrm{d}t. \tag{5.28}$$

Twierdzenie 5.3 *Mamy*

$$\begin{aligned}
\big(\sigma(z)\partial_z^2+\tau(z)\partial_z\big)\,P_n(\tau;z) &= (n\tau'+n(n-1)\frac{\sigma''}{2})P_n(\tau;z), && (5.29)\\
\big(\sigma(z)\partial_z+\tau(z)-\sigma'(z)\big)\,P_n(\tau;z) &= (n+1)P_{n+1}(\tau-\sigma';z), && (5.30)\\
\partial_z P_n(\tau;z) &= \left(\tau'+(n-1)\frac{\sigma''}{2}\right)P_{n-1}(\tau+\sigma';z), && (5.31)\\
\frac{\rho(z+t\sigma(z))}{\rho(z)} &= \sum_{n=0}^{\infty}t^nP_n(\tau-n\sigma';z). && (5.32)
\end{aligned}$$

Dowód. Wprowadzamy następujące "operatory kreacji i anihilacji":

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^+(\tau): &= \sigma(z)\partial_z+\tau(z)=\rho^{-1}(z)\partial_z\rho(z)\sigma(z),\\
\mathcal{A}^- &:= \partial_z.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(\tau) &= \mathcal{A}^+(\tau)\mathcal{A}^-\\
&= \mathcal{A}^-\mathcal{A}^+(\tau-\sigma')-(\tau'-\sigma'').
\end{aligned}$$

Niech $\mathcal{C}(\tau+\sigma')F=\lambda F$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(\tau)\mathcal{A}^+(\tau)F &= A^+(\tau)A^-A^+(\tau)F\\
&= A^+(\tau)(\mathcal{C}(\tau+\sigma')+\tau')F\\
&= (\lambda+\tau')A^+F.
\end{aligned}$$

Zatem jeśli $\mathcal{C}(\tau+n\sigma')F_0=\lambda_0F_0$, to

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(\tau) &\quad A^+(\tau)\cdots A^+(\tau+(n-1)\sigma')F_0\\
= &\quad (\lambda_0+n\tau'+n(n-1)\frac{\sigma''}{2})A^+(\tau)\cdots A^+(\tau+(n-1)\sigma')F_0.
\end{aligned}$$

Korzystając z tego, że

$$\begin{aligned}
A^+(\tau) &= \rho^{-1}(z)\partial_z\rho(z)\sigma(z),\\
A^+(\tau+\sigma') &= \rho^{-1}(z)\sigma^{-1}(z)\partial_z\rho(z)\sigma^2(z),\\
\cdots &= \cdots\\
A^+(\tau+(n-1)\sigma') &= \rho^{-1}(z)\sigma^{-(n-1)}\partial_z\rho(z)\sigma^n(z),
\end{aligned}$$

dostajemy

$$A^+(\tau)\cdots A^+(\tau+(n-1)\sigma')F_0 \quad=\quad \rho(z)^{-1}\partial_z^n\rho(z)\sigma^n(z)F_0(z).$$

Weźmy teraz $F_0=1$, dla którego $\lambda_0=0$. Dostajemy wtedy (5.29). □

5.3 Klasyczne wielomiany ortogonalne jako wektory własne operatora Sturma-Liouville'a

Szukamy takich odcinków $[a,b] \subset \mathbb{R}$ i wag $[a,b] \ni x \mapsto \rho(x)$, dla których istnieją wielomiany $P_0, P_1, \ldots$ w spełniające $\mathrm{deg} P_n = n$,

$$\int \overline{P}_n(x) P_m(x) \rho(x) \mathrm{d}x = c_n \delta_{n,m} \tag{5.33}$$

i będące funkcjami własnymi operatora różniczkowego drugiego rzędu $\mathcal{C} := \sigma(x)\partial_x^2 + \tau(x)\partial_x$, czyli dla pewnych $\lambda_n \in \mathbb{R}$

$$\left(\sigma(x)\partial_x^2 + \tau(x)\partial_x + \lambda_n\right) P_n(x) = 0. \tag{5.34}$$

(Dopuszczamy $a = -\infty$ lub $b = \infty$).

Wiemy już, że należy w tym celu spełnić następujące warunki:

(1) σ musi być wielomianem stopnia co najwyżej 2 a τ wielomianem stopnia co najwyżej 1. (Patrz Twierdzenie 5.1).

(2) Waga ρ musi być rozwiązaniem równania

$$\sigma(x)\rho'(x) = (\tau(x) - \sigma'(x))\rho(x), \tag{5.35}$$

być dodatnia a σ rzeczywiste. Wtedy bowiem operator $\mathcal{C}$, który można zapisać jako

$$\mathcal{C} = \rho(x)^{-1}\partial_x \rho(x)\sigma(x)\partial_x,$$

jest hermitowski przynajmniej na funkcjach znikających w otoczeniu końców przedziału $[a,b]$. (Patrz Twierdzenie 3.1).

(3) Należy sprawdzić, czy operator jest hermitowski na przestrzeni wielomianów.

   (i) W przypadku gdy koniec przedziału, powiedzmy a, jest skończoną liczbą, jest to równoznaczne z warunkiem $\rho(a)\sigma(a) = 0$. (Patrz Twierdzenie 3.2).

   (ii) Jeśli koniec przedziału jest w nieskończoności, np. $a = -\infty$, to trzeba spełnić

$$\lim_{x \to -\infty} |x|^n \sigma(x)\rho(x) = 0$$

   dla każdego n.

Dodatkowo, P_n powinny należeć do przestrzeni Hilberta $L^2([a,b],\rho)$, dla każdego n, a więc musi zachodzić

$$\int_a^b \rho(x)|x|^n \mathrm{d}x < \infty. \tag{5.36}$$

Trochę mocniejszy warunek

$$\int_a^b \mathrm{e}^{\epsilon|x|}\rho(x)\mathrm{d}x < \infty \tag{5.37}$$

dla pewnego $\epsilon > 0$, wystarcza, aby dostać bazę ortogonalną. (Patrz Twierdzenie 4.1).

Znajdziemy wszystkie przestrzenie z wagą $L^2([a,b],\rho)$ dla których takie wielomiany ortogonalne istnieją. Będziemy upraszczać nasze odpowiedzi do standardowych postaci

(1) dokonując zamiany zmiennych $x \mapsto ax + b$ dla $a \neq 0$;

(2) dzieląc (zarówno równanie różniczkowe, jak i wagę) przez stałą.

Otrzymamy w ten sposób wszystkie tak zwane *klasyczne wielomiany ortogonalne.*

5.4 Klasyczne wielomiany ortogonalne dla $\deg\sigma = 0$

Można przyjąć, że $\sigma(x) = 1$.

Jeśli $\deg\tau = 0$, to

$$\mathcal{C} = \partial_y^2 + c\partial_y.$$

Latwo odrzucić ten przypadek.

Zatem $\deg\tau = 1$. Czyli

$$\mathcal{C} = \partial_y^2 + (ay + b)\partial_y.$$

Podstawmy $x = \sqrt{\frac{|a|}{2}}\left(y + \frac{b}{a}\right)$. Dostajemy

$$\mathcal{C} = \partial_x^2 + 2x\partial_x, \qquad a > 0; \tag{5.38}$$

$$\mathcal{C} = \partial_x^2 - 2x\partial_x, \qquad a < 0. \tag{5.39}$$

Dostajemy $\rho(x) = \mathrm{e}^{\pm x^2}$.

$\sigma(x)\rho(x) = \mathrm{e}^{\pm x^2}$ nigdy się nie zeruje, zatem jedynym możliwym przedziałem jest $[-\infty, \infty]$.

W przypadku $a > 0$, $\rho(x) = \mathrm{e}^{x^2}$, co jest niemożliwe ze względu na (3ii).

W przypadku $a < 0$, $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ i dostajemy operator Hermite'a. Przedział $[-\infty, \infty]$ jest dopuszczalny, a nawet spełnia warunek (5.37). Dostajemy równanie i wagę dla wielomianów Hermite'a, które zostaną omówione w następnym podrozdziale.

5.5 Wielomiany Hermite'a

Twierdzenie 5.4 *Zdefiniujmy wielomiany Hermite'a*

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}\mathrm{e}^{x^2}\partial_x^n \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Spełniają one równanie Hermite'a

$$(\partial_x^2 - 2x\partial_x + 2n)H_n(x) = 0.$$

oraz relacje

$$(-\partial_x + 2x)H_n(x) = (n+1)H_{n+1}(x) \tag{5.40}$$

$$\partial_x H_n(x) = 2H_{n-1}(x), \tag{5.41}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n H_n(x) = \mathrm{e}^{2tx - t^2}. \tag{5.42}$$

H_n jest wielomianem stopnia n i jest to (z dokładnością do czynnika) jedyny wektor własny operatora $\partial_x^2 - 2x\partial_x$ będący wielomianem stopnia n.

Dowód. Twierdzenie to wynika z Twierdzenia 5.3 dla

$$\sigma(x) = -1, \quad \rho = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Poniżej podajemy dowód bezpośredni. Wprowadźmy "operatory kreacji i anihilacji"

$$\begin{aligned} A^- &= \partial_x, \\ A^+ &= -\partial_x + 2x = -\mathrm{e}^{x^2}\partial_x\mathrm{e}^{-x^2}. \end{aligned}$$

Spełniają one relacje

$$[A^-, A^+] \quad = \quad 2. \tag{5.43}$$

Mamy $H_n = \frac{(A^+)^n 1}{n!}$. (1 oznacza tu wektor w $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{e}^{-x^2})$ zadany przez funkcję równą 1. Natomiast w (5.43) 2 oznacza operator mnożenia przez liczbę 2.) Stąd wynika

$$A^+ H_n \quad = \quad (n+1)H_{n+1}, \tag{5.44}$$

$$A^- H_n \quad = \quad 2H_{n-1}. \tag{5.45}$$

Aby dowieść (5.45) używamy (5.43).

(5.44), (5.45) pokazują, że

$$A^+ A^- H_n = 2nH_n. \tag{5.46}$$

Ale

$$-\partial_x^2 + 2x\partial_x = A^+ A^-. \tag{5.47}$$

Mnożąc definicję wielomianów Hermite'a przez $t^n\mathrm{e}^{-x^2}$ dostajemy

$$t^n\mathrm{e}^{-x^2} H_n(x) = \frac{(-t)^n}{n!}\partial_x^n\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Wzór Taylora daje

$$\mathrm{e}^{-x^2}\sum_{n=0}^{\infty} t^n H_n(x) = \mathrm{e}^{-(x-t)^2},$$

z czego wynika (5.42). □

Twierdzenie 5.5 *H_n stanowią bazę ortogonalną w $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{e}^{-x^2})$ z normalizacją*

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}2^n}{n!}.$$

Dowód. Załóżmy, że $n \geq m$. Wtedy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x &= \frac{(-1)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\partial_x^n\mathrm{e}^{-x^2}\right)H_m(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\partial_x^n H_m(x)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5.48}$$

(5.48) równa się zero dla $n > m$.

Niech $n = m$. Z (5.41) i $H_0 = 1$ wynika $\partial_x^n H_n(x) = 2^n$. Zatem (5.48) jest równe

$$\frac{2^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{2^n}{n!}\sqrt{\pi}.$$

□

Uwaga. Definicja wielomianów Hermite'a którą wprowadziliśmy jest zgodna z uogólnionym wzorem Rodrigues'a (5.27). W literaturze spotyka się też inne definicje dla wielomianów Hermite'a, np. $H_n(x) := (-1)^n \mathrm{e}^{x^2}\partial_x^n \mathrm{e}^{-x^2}$.

5.6 Klasyczne wielomiany ortogonalne dla $\mathrm{deg}\sigma = 1$

Wystarczy ograniczyć się do przypadku $\sigma(y) = y$.

Jeśli $\mathrm{deg}\tau = 0$, to

$$\mathcal{C} = y\partial_y^2 + c\partial_y$$

Ale takie $\mathcal{C}$ zawsze obniża stopień wielomianu. Czyli jeśli $\mathcal{C}P = \lambda P$ dla pewnego wielomianu, to $\lambda = 0$. To oznacza, że $P(x) = x^{-c+1}$. Czyli nie dostaniemy wielomianów wszystkich stopni jako funkcji własnych.

Zatem $\mathrm{deg}\tau = 1$. Czyli, dla $b \neq 0$,

$$y\partial_y^2 + (a + by)\partial_y. \tag{5.49}$$

Przeskalowując, dostajemy operator występujący w równaniu Laguerre'a

$$\mathcal{C} = -x\partial_x^2 + (-\alpha - 1 + x)\partial_x.$$

Obliczamy, że $\rho = x^\alpha \mathrm{e}^{-x}$. $\rho(x)\sigma(x) = x^{\alpha+1}\mathrm{e}^{-x}$ zeruje się jedynie dla $x = 0$ i $\alpha > -1$. Przedział $[-\infty, 0]$ jest wyeliminowany przez warunek (3ii). Przedział $[0, \infty]$ jest dopuszczalny dla $\alpha > -1$, a nawet spełnia wtedy warunek 5.37.

Dostajemy równanie i wagę dla wielomianów Laguerre'a, które zostaną omówione w następnym podrozdziale.

5.7 Wielomiany Laguerre'a

Twierdzenie 5.6 *Zdefiniujmy wielomiany Laguerre'a*

$$\begin{aligned} L_n^\alpha(x) &= \frac{1}{n!}\mathrm{e}^x x^{-\alpha}\partial_x^n \mathrm{e}^{-x}x^{n+\alpha} \\ &= \frac{(1+\alpha)_n}{n!}F(-n; 1+\alpha; x). \end{aligned}$$

Spełniają one równanie Laguerre'a, które jest równaniem konfluentnym ze zmodyfikowanymi parametrami:

$$\left(x\partial_x^2 + (\alpha + 1 - x)\partial_x + n\right)L_n^\alpha(x) = 0$$

oraz relacje

$$
\begin{aligned}
(x\partial_x + \alpha - x)L_n^\alpha(x) &= (n+1)L_{n+1}^{\alpha-1}(x), && (5.50)\\
\partial_x L_n^\alpha(x) &= -L_{n-1}^{\alpha+1}(x). && (5.51)
\end{aligned}
$$

L_n jest wielomianem stopnia n i jest to (z dokładnością do czynnika) jedyny wektor własny operatora $x\partial_x^2 + (\alpha+1-x)\partial_x$ będący wielomianem stopnia n.

Dowód. Można zastosować Twierdzenie 5.3 dla

$$\sigma(x) = x, \quad \rho(x) = \mathrm{e}^{-x}x^\alpha.$$

Poniżej podajemy dowód bezpośredni. Wprowadźmy "operatory kreacji i anihilacji"

$$
\begin{aligned}
A^- &= -\partial_x,\\
A_\alpha^+ &= x\partial_x + \alpha - x = x^{-\alpha+1}\mathrm{e}^x\partial_x x^\alpha \mathrm{e}^{-x}.
\end{aligned}
$$

Spełniają one relacje

$$A^- A_\alpha^+ - A_{\alpha+1}^+ A^- = 1. \tag{5.52}$$

Mamy

$$L_n^\alpha = \frac{A_{\alpha+1}^+ \cdots A_{\alpha+n}^+ 1}{n!}. \tag{5.53}$$

(1 oznacza w (5.53) wektor zadany przez funkcję równą 1. Natomiast w (5.52) 1 oznacza operator mnożenia przez liczbę 1.) Stąd wynika

$$
\begin{aligned}
A_\alpha^+ L_n^\alpha &= (n+1)L_{n+1}^{\alpha-1}, && (5.54)\\
A^- L_n^\alpha &= L_{n-1}^{\alpha+1}. && (5.55)
\end{aligned}
$$

Aby dowieść (5.55) używamy (5.52).

Wreszcie (5.54), (5.55) pokazuje, że

$$A_{\alpha+1}^+ A^- L_n^\alpha = nL_n^\alpha. \tag{5.56}$$

Ale

$$-x\partial_x^2 - (\alpha+1-x)\partial_x = A_{\alpha+1}^+ A^-. \tag{5.57}$$

□

Twierdzenie 5.7 *Jeśli $\alpha > -1$, to wielomiany Laguerre'a stanowią bazę ortogonalną w $L^2([0,\infty[, \mathrm{e}^{-x}x^\alpha)$ z normalizacją*

$$\int_0^\infty L_n^\alpha(x)^2 x^\alpha \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{n!}.$$

Dowód. Załóżmy, że $n \geq m$. Wtedy

$$\begin{aligned}\int_0^\infty L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) x^\alpha \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x &= \frac{1}{n!}\int_0^\infty \left(\partial_x^n x^{n+\alpha}\mathrm{e}^{-x}\right) L_m^\alpha(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty x^{n+\alpha}\mathrm{e}^{-x}\partial_x^n L_m^\alpha(x)\mathrm{d}x. \qquad (5.58)\end{aligned}$$

(5.58) równa się zero dla $n > m$.

Niech $n = m$. Z (5.51) i $L_0^\alpha = 1$ wynika $\partial_x^n L_n^\alpha(x) = (-1)^n$. Zatem (5.58) jest równe

$$\frac{1}{n!}\int_0^\infty x^{n+\alpha}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}.$$

□

5.8 Klasyczne wielomiany ortogonalne dla $\deg\sigma = 2$, σ ma pierwiastek podwójny

Można przyjąć, że $\sigma(x) = x^2$.

Jeśli $\tau(0) = 0$, to

$$\mathcal{C} = x^2\partial_x^2 + cx\partial_x.$$

Funkcjami własnymi tego operatora są co prawda wielomiany x^n, ale waga $\rho(x) = x^{c-2}$ jest niedobra.

Załóżmy zatem, że $\tau(0) \neq 0$. Przez przeskalowanie można założyć, że

$$\tau(x) = 1 + (\gamma + 2)x.$$

To daje $\rho(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}x^\gamma$. Jedyny punkt, gdzie $\rho(x)\sigma(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}x^{\gamma+2}$ może się zerować jest $x = 0$. Zatem jedynymi możliwymi przedziałami są $[-\infty, 0]$ i $[0, \infty]$. Oba są wyeliminowane przez warunek (3ii).

5.9 Klasyczne wielomiany ortogonalne dla $\deg\sigma = 2$, σ ma dwa pierwiastki

Jeśli oba pierwiastki są różne i urojone, wystarczy założyć, że $\sigma(x) = 1 + x^2$. Można przyjąć, że $\tau(x) = a + (b+2)x$. Wtedy $\rho(x) = \mathrm{e}^{a\arctan x}(1+x^2)^b$. $\sigma(x)\rho(x)$ nigdzie się nie zeruje i dlatego trzeba rozważać przedział $[-\infty, \infty]$. Przypadek ten odrzucamy, gdyż $\lim_{|x|\to\infty}\rho(x)|x|^n(1+x^2) = \infty$ dla dostatecznie dużych n.

Czyli można założyć, że pierwiastki są różne i rzeczywiste. Wystarczy założyć, że $\sigma(x) = 1 - x^2$. Niech

$$\tau(x) = \beta - \alpha - (\alpha + \beta - 2)x.$$

Dostajemy $\rho(x) = |1-x|^\beta|1+x|^\alpha$. Podobnie jak powyżej, warunek (3ii) eliminuje przedziały $[-\infty, -1]$ i $[1, \infty]$. Zostaje przedział $[-1, 1]$, który spełnia warunek (3i) dla $\alpha, \beta > -1$. Prowadzi on do wielomianów Jacobiego omawianych w następnym podrozdziale.

5.10 Wielomiany Jacobiego

Twierdzenie 5.8 *Zdefiniujmy wielomiany Jacobiego*

$$\begin{aligned} P_n^{\alpha,\beta}(x) &= \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\partial_x^n(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n} \\ &= \frac{(n+\alpha)_n}{n!}F(-n,n+\alpha+\beta+1;\alpha+1;\frac{1-x}{2}). \end{aligned} \tag{5.59}$$

Spełniają one równanie Jacobiego, które jest nieco zmodyfikowanym równaniem hipergeometrycznym:

$$\big((1-x^2)\partial_x^2+(\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x)\partial_x+n(n+\alpha+\beta+1)\big)\,P_n^{\alpha,\beta}(x)=0.$$

oraz relacje

$$\partial_x P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{\alpha+\beta+n+1}{2}P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}, \tag{5.60}$$

$$-\frac{(1-x^2)\partial_x+\beta-\alpha-(\alpha+\beta)x}{2}P_n^{\alpha,\beta}(x) = (n+1)P_{n+1}^{\alpha-1,\beta-1}(x). \tag{5.61}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{\alpha-n,\beta-n}(x)2^n t^n=\big(1+t(1+x)\big)^{\alpha}\big(1-t(1-x)\big)^{\beta}. \tag{5.62}$$

Jeśli $-\alpha-\beta\not\in\{n+1,\dots,2n\}$, to $P_n^{\alpha,\beta}$ są wielomianami stopnia n. Są to wtedy, z dokładnością do czynnika, jedyne wielomiany stopnia n będące wektorem własnym operatora $\mathcal{C}:=(1-x^2)\partial_x^2+(\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x)\partial_x$.

Dowód. Można zastosować Twierdzenie 5.3 dla

$$\sigma(x)=\frac{x^2-1}{2},\quad \rho(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}.$$

Poniżej podajemy dowód bezpośredni. Wprowadźmy "operatory kreacji i anihilacji"

$$\begin{aligned} A^- &= \partial_x, \\ A^+_{\alpha,\beta} &= -\frac{1}{2}\big((1-x^2)\partial_x+\beta-\alpha-(\alpha+\beta)x\big) \\ &= -\frac{1}{2}(1-x)^{-\alpha+1}(1+x)^{-\beta+1}\partial_x(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}. \end{aligned}$$

Spełniają one relacje

$$A^-A^+_{\alpha,\beta}-A^+_{\alpha+1,\beta+1}A^- = \frac{\alpha+\beta}{2}. \tag{5.63}$$

Mamy

$$P_n^{\alpha,\beta}=\frac{A^+_{\alpha+1,\beta+1}\cdots A^+_{\alpha+n,\beta+n}1}{n!}. \tag{5.64}$$

Stąd wynika

$$
\begin{aligned}
A^{+}_{\alpha,\beta} P_n^{\alpha,\beta} &= (n+1) P_{n+1}^{\alpha-1,\beta-1}, && (5.65)\\
A^{-} P_n^{\alpha,\beta} &= \frac{\alpha+\beta+n+1}{2} P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}. && (5.66)
\end{aligned}
$$

Aby dowieść (5.66) używamy (5.63) i sumujemy szereg arytmetyczny.

Wreszcie (5.65), (5.66) pokazuje, że

$$
A^{+}_{\alpha+1,\beta+1} A^{-} P_n^{\alpha,\beta} = \frac{n(\alpha+\beta+n+1)}{2} P_n^{\alpha,\beta}. \tag{5.67}
$$

Ale

$$
-\frac{1}{2}(1-x^2)\partial_x^2 + \frac{1}{2}(-\beta+\alpha+(\alpha+\beta)x)\partial_x = A^{+}_{\alpha+1,\beta+1} A^{-}. \tag{5.68}
$$

Zamieńmy w definicji wielomianów Jacobiego α, β na $\alpha-n, \beta-n$ i pomnóżmy przez $2^n t^n (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$. Dostajemy

$$
2^n t^n P_n^{\alpha-n,\beta-n}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta = \frac{(-t)^n}{n!}(1-x)^n(1+x)^n \partial_x^n (1-x)^\alpha (1+x)^\beta.
$$

Po przesumowaniu i zastosowaniu wzoru Taylora dostajemy

$$
(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \sum_{n=0}^{\infty} 2^n t^n P_n^{\alpha,\beta}(x) = \big(1-x+t(1-x)(1+x)\big)^\alpha \big(1+x-t(1-x)(1+x)\big)^\beta,
$$

z czego wynika wzór na funkcję tworzącą (5.62).

Z (5.61) i $P_0^{\alpha,\beta} = 1$ wynika

$$
\partial_x^n P_n^{\alpha,\beta}(x) = 2^{-n}(\alpha+\beta+n+1)\cdots(\alpha+\beta+2n). \tag{5.69}
$$

Oczywiście, $\deg P_n^{\alpha,\beta} = n$ kiedy prawa strona (5.69) jest różna od zera.

Załóżmy, że mamy dwa wielomiany P_1, P_2 stopnia n takie, że

$$
(\mathcal{C}+\eta_1)P_1 = (\mathcal{C}+\eta_2)P_2 = 0.
$$

Ze Stwierdzenia 5.2 wynika, że

$$
\eta_1 = \eta_2 = n(n+\alpha+\beta+1).
$$

Zatem $P_1 - P_2$, który jest wielomianem stopnia $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, jest rozwiązaniem równania Jacobiego. Stosując jeszcze raz Stw. 5.2 dostajemy

$$
-k(k+\alpha+\beta+1) + n(n+\alpha+\beta+1).
$$

Równanie to ma dwa rozwiązania: $k = n$ i $k = -n-\alpha-\beta-1 \notin \{0, 1, \dots, n-1\}$. Drugie rozwiązanie należy odrzucić. $\square$

Twierdzenie 5.9 *Jeśli $\alpha, \beta > -1$, to wielomiany Jacobiego stanowią bazę ortogonalną w $L^2([-1,1],(1-x)^\alpha(1+x)^\beta)$ z normalizacją*

$$\int_{-1}^{1}(P_n^{\alpha,\beta}(x))^2(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \mathrm{d}x = \frac{\Gamma(1+\alpha+n)\Gamma(1+\beta+n)2^{\alpha+\beta+1}}{(1+2n+\alpha+\beta)n!\Gamma(1+\alpha+\beta+n)}.$$

Dowód. Załóżmy, że $n \geq m$. Wtedy

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} P_n^{\alpha,\beta}(x)P_m^{\alpha,\beta}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \mathrm{d}x \\
=\ & \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\left(\partial_x^n(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right)P_m^{\alpha,\beta}(x)\mathrm{d}x \\
=\ & \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\partial_x^n P_m^{\alpha,\beta}(x)\mathrm{d}x. \qquad (5.70)
\end{aligned}$$

(5.70) równa się zero dla $n > m$.

Niech $n = m$. Zatem (5.58) jest równe

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^{2n}n!}\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}(\alpha+\beta+n+1)\cdots(\alpha+\beta+2n)\mathrm{d}x \\
=\ & \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{n!}\int_{0}^{1}t^{\alpha+n}(1-t)^{\beta+n}(\alpha+\beta+n+1)\cdots(\alpha+\beta+2n)\mathrm{d}t \\
=\ & \frac{\Gamma(1+\alpha+n)\Gamma(1+\beta+n)2^{\alpha+\beta+1}}{(1+2n+\alpha+\beta)n!\Gamma(1+\alpha+\beta+n)}.
\end{aligned}$$

□

Twierdzenie 5.10 *Niech $\alpha + \beta = m = 1, 2, \ldots.$ Wtedy*

$$P_{m+1}^{-\alpha-1,\beta-1}(x) = (-\alpha)_{m+1}2^{m+1}.$$

Dowód.

$$P_{m+1}^{-\alpha-1,\beta-1}(x) = \frac{1}{2^{m+1}(m+1)!}(x-1)^{\alpha+1}(x+1)^{m-\alpha+1}\partial_x^{m+1}(x-1)^{m-\alpha}(x+1)^\alpha. \qquad (5.71)$$

Liczymy

$$\begin{aligned}
&\partial_x^{m+1}(x-1)^{m-\alpha}(x+1)^\alpha \\
=&\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}(m-\alpha)\cdots(m-\alpha-k+1)\alpha\cdots(\alpha-m+k)(x-1)^{m-\alpha-k}(x+1)^{\alpha-m+k-1} \\
=&(-\alpha)_{m+1}\Big(1-\frac{1+x}{x-1}\Big)^{m+1}(x-1)^{m-\alpha}(x+1)^{\alpha-m-1}(-1)^{m+1} \\
&= (-\alpha)_{m+1}(x-1)^{-\alpha-1}(x+1)^{-m+\alpha-1}2^{m+1}.
\end{aligned}$$

$\square$

Dla każdego α, β mamy reprezentację $sl(2,\mathbb{C})$ na

$$P_0^{\alpha,\beta}, \dots, P_j^{\alpha-j,\beta-j}, \dots$$

(1) Jeśli $\alpha+\beta \notin \{0,1,2\dots\}$, reprezentacja jest nieprzywiedlna i $\deg P_j^{\alpha-j,\beta-j} = j$.

(2) Jeśli $\alpha+\beta \in \{0,1,2\dots\}$ ale $\alpha \notin \{0,1,\dots\}$, reprezentacja jest przywiedlna ale nierozkładalna.

$$\deg P_j^{\alpha-j,-\beta-j} = j, \quad j = 0,1,\dots \alpha+\beta, \tag{5.72}$$

$$\deg P_{\alpha+\beta+k}^{-\beta-k,-\alpha-k} = k, \quad k = 1,\dots. \tag{5.73}$$

Przestrzeń rozpięta na

$$P_{\alpha+\beta+k}^{-\beta-k,-\alpha-k}, \quad k = 0,1,\dots$$

jest niezmiennicza.

(3) Jeśli $\alpha \in \{0,1,\dots\}$, $\beta \in \{0,1,\dots\}$, to przestrzeń rozpięta na

$$P_0^{\alpha,\beta}, \dots, P_j^{\alpha-j,\beta-j}, \dots, P_{\alpha+\beta}^{-\beta,-\alpha}$$

jest niezmiennicza, (5.72) jest spełnione, zaś

$$P_{\alpha+\beta+k}^{-\beta-k,-\alpha-k} = 0, \quad k = 1,\dots.$$

Twierdzenie 5.11 *Niech $k, m = 0,1,\dots$. Wtedy*

$$P_n^{-k,-m}(x) = \frac{(-1)^{n-m}}{2^n(n-k-m)!}\partial_x^{n-k-m}(1-x)^{n-m}(1+x)^{n-k}, \qquad k+m \le n; \tag{5.74}$$

$$P_n^{-k,-m}(x) = 0, \quad k+m > n. \tag{5.75}$$

Poza tym,

$$P_n^{-k,-m}(x) = (-1)^k 2^{-k-m}(1-x)^k(1+x)^m P_{n-k-m}^{k,m}(x). \tag{5.76}$$

Dowód. Na mocy (5.59),

$$P_{k+m}^{-k,-m}(x) = \frac{(-1)^{k+m}}{2^{k+m}(k+m)!}(1-x)^k(1+x)^m\partial_x^{k+m}(1-x)^m(1+x)^k \tag{5.77}$$

$$= \frac{(-1)^k}{2^{k+m}}(1-x)^k(1+x)^m \tag{5.78}$$

To pokazuje (5.74) dla $n = k+m$.

Ze wzoru rekurencyjnego (5.60) dostajemy

$$\frac{2^p}{(\alpha+\beta+j+1)\cdots(\alpha+\beta+j+p)}\partial_x^p P_j^{\alpha,\beta}(x) = P_{j-p}^{\alpha+p,\beta+p}(x). \tag{5.79}$$

Podstawiając $\alpha+\beta=-j$ dostajemy

$$\frac{2^p}{p!}\partial_x^p P_{-\alpha-\beta}^{\alpha,\beta}(x) = P_{-\alpha-\beta-p}^{\alpha+p,\beta+p}(x). \tag{5.80}$$

Następnie kładziemy

$$p = n-k-m, \quad \alpha = m-n, \quad \beta = k-n, \tag{5.81}$$

by dostać

$$\begin{aligned} P_n^{-k,-m}(x) &= \frac{2^{n-k-m}}{(n-k-m)!}\partial_x^{n-k-m} P_{2n-k-m}^{m-n,k-n}(x) &(5.82)\\ &= \frac{2^{n-k-m}}{(n-k-m)!}\partial_x^{n-k-m} \frac{(-1)^{m-n}(1-x)^{n-m}(1+x)^{n-k}}{2^{2n-k-m}}, &(5.83)\end{aligned}$$

w drugim kroku stosując (5.78), co pokazuje (5.74).

Zastępując n przez $n-k-m$ w (5.59) dostajemy

$$P_{n-k-m}^{k,m}(x) = \frac{(-1)^{n-k-m}}{2^{n-k-m}(n-k-m)!}(1-x)^{-k}(1+x)^{-m}\partial_x^{n-k-m}(1-x)^{n-m}(1+x)^{n-k}. \tag{5.84}$$

Porównując to z (5.74) dostajemy (5.76). □

5.11 Wielomiany ultrasferyczne (Jacobiego z $\alpha = \beta$)

Rozważmy szczególny przypadek wielomianów Jacobiego dla $\alpha = \beta = m$. Dla konsystencji z późniejszymi zastosowaniami, zmieniamy nazwę zmiennej z x na w.

Mamy

$$\sigma(w) = \frac{w^2-1}{2}, \quad \rho(w) = (1-w^2)^m.$$

Twierdzenie 5.12 *Mamy*

$$\begin{aligned} P_n^{m,m}(w) &= \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-w^2)^{-m}\partial_w^n(1-w^2)^{m+n}\\ &= \frac{(n+m)_n}{n!}F(-n, n+2m+1; m+1; \frac{1-w}{2}).\end{aligned}$$

Spełniają one równanie

$$\left((1-w^2)\partial_w^2 - 2(m+1)w)\partial_w + n(n+2m+1)\right) P_n^m(w) = 0.$$

oraz relacje

$$\begin{aligned} \partial_w P_n^{m,m}(w) &= \frac{2m+n+1}{2}P_{n-1}^{m+1,m+1}, &(5.85)\\ -\frac{(1-w^2)\partial_w - 2mw}{2}P_n^{m,m}(w) &= (n+1)P_{n+1}^{m-1,m-1}(w). &(5.86)\end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{m-n,m-n}(w)2^n t^n = \big(1 + 2tw + t^2(w^2-1)\big)^m. \tag{5.87}$$

$$P_n^{m,m}(1) = \frac{(m+1)_n}{n!}. \tag{5.88}$$

Jeśli

$$-2m \notin \{n+1, \dots, 2n\}, \tag{5.89}$$

to $P_n^{m,m}$ *są wielomianami stopnia* n*. Są to wtedy, z dokładnością do czynnika, jedyne wielomiany wielomianem stopnia* n *będące wektorem własnym operatora* $\mathcal{C} := (1-w^2)\partial_w^2 - 2(m+1)w\partial_w$*.*

5.12 Wielomiany Legendre'a

Szczególnie ważnym przypadkiem wielomianów Jacobiego jest $\alpha = \beta = 0$ Mamy wtedy

$$\sigma(w) = \frac{w^2-1}{2}, \quad \rho(w) = 1.$$

Dostajemy wtedy wielomiany Legendre'a:

$$P_l(w) := P_l^{0,0}(w) = \frac{(-1)^l}{2^l l!}\partial_w^l (1-w^2)^l.$$

Spełniają one równanie Legendre'a

$$\big((1-w^2)\partial_w^2 - 2w\partial_w + l(l+1)\big)\, P_l(w) = 0. \tag{5.90}$$

Stanowią one układ ortogonalny w $L^2([-1,1])$ z normalizacją

$$\int_{-1}^{1} P_l(w)^2 \mathrm{d}w = \frac{2}{(1+2l)}.$$

Mamy $P_0 = 1$, $P_1(w) = w$, $P_2(w) = \frac{1}{2}(3w^2-1)$.

Twierdzenie 5.13 *Wielomian Legendre'a jest jedynym rozwiązaniem wielomianowym równania Legendre'a spełniającym* $P_l(1) = 1$*.*

Dowód. Przez indukcję sprawdzamy, że dla $k = 1, \dots, l$,

$$\partial_w^k (1-w^2)^l = (-1)^k (2w)^k l \cdots (l-k+1)(1-w^2)^{l-k} + C(w)(1-w^2)^{l-k+1},$$

gdzie $C(w)$ jest wielomianem. Kładąc $k = l$ i stosując wzór Rodrigueza dostajemy $P_l(1) = 1$.

Z bardziej ogólnego faktu dotyczącego równania Jacobiego wynika, że wszystkie rozwiązania wielomianowe są proporcjonalne do P_l. □

6 Harmoniki sferyczne na S^2

6.1 Laplasjan we współrzędnych sferycznych

Rozważamy $\mathbb{R}^3$ we współrzędnych sferycznych

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta.$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \theta = \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}, \quad \phi = \arctan\frac{y}{x}.$$

Macierz Jacobiego jest równa

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \frac{\cos\theta\cos\phi}{r} & \frac{\cos\theta\sin\phi}{r} & -\frac{\sin\theta}{r} \\ -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta} & \frac{\cos\phi}{r\sin\theta} & 0 \end{bmatrix}.$$

Zamiast θ będziemy chętnie używali $w = \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Zanotujmy, że $\partial_\theta = (1-w^2)^{\frac{1}{2}}\partial_w$.

Standardowa miara na sferze wynosi

$$\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}w\mathrm{d}\phi.$$

Laplasjan we współrzędnych sferycznych

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta \sin\theta\partial_\theta + \frac{\partial_\phi^2}{\sin^2\theta}\Big).$$

6.2 Operator Laplace'a Beltramiego na S^2

Operator Laplace'a Beltramiego na S^2 ma postać

$$\begin{aligned} \Delta_{S^2} &= \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\sin\theta\partial_\theta + \frac{\partial_\phi^2}{\sin^2\theta} \\ &= \partial_w(1-w^2)\partial_w + \frac{\partial_\phi^2}{1-w^2} \\ &= (1-w^2)\partial_w^2 - 2w\partial_w + \frac{\partial_\phi^2}{1-w^2}, \end{aligned}$$

Operator ten można traktować jako operator działający na $C^\infty(S^2) \subset L^2(S^2)$. Z postaci (6.91) widać, że Δ_{S^2} jest operatorem hermitowski, np. na funkcjach C^2 we współrzędnych w, ϕ

Laplasjan możemy zapisać jako

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^2}. \tag{6.91}$$

6.3 Przypomnienie na temat wielomianów ultrasferycznych

W zastosowaniach stopień jest dany często przez $n = l - m$. Wielomiany Jacobiego w tym wypadku są zdefiniowane wzorem

$$P_{l-m}^{m,m}(w) = \frac{(-1)^{l-m}}{2^{l-m}(l-m)!}(1-w^2)^{-m}\partial_w^{l-m}(1-w^2)^l.$$

Spełniają one równanie

$$\left((1-w^2)\partial_w^2 - 2(m+1)w\partial_w + (l-m)(l+m+1)\right) P_{l-m}^{m,m}(w) = 0. \tag{6.92}$$

Dla $m > -1$ i $l - m = 0, 1, 2, \dots$ stanowią one układ ortogonalny w $L^2([-1,1],(1-w^2)^m)$ z normalizacją

$$\int_{-1}^{1}(P_{l-m}^{m,m}(w))^2(1-w^2)^m\mathrm{d}w = \frac{\Gamma(1+l)^2 2^{2m+1}}{(1+2l)(l-m)!\Gamma(1+l+m)}. \tag{6.93}$$

Twierdzenie 6.1 *Niech $l = 0, 1, \dots$ i $m = -l, \dots, l$. Mamy wtedy tożsamości dla wielomianów Jacobiego*

$$\begin{aligned} (-1)^m 2^{-m}(1-w^2)^{\frac{m}{2}} P_{l-m}^{m,m}(w) &= \frac{(-1)^l}{2^l(l-m)!}(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}\partial_w^{l-m}(1-w^2)^l \\ = \quad 2^m(1-w^2)^{-\frac{m}{2}} P_{l+m}^{-m,-m}(w) &= \frac{(-1)^{l+m}}{2^l(l+m)!}(1-w^2)^{\frac{m}{2}}\partial_w^{l+m}(1-w^2)^l \end{aligned}$$

Jest to szczególny przypadek (5.76). Poniżej dajemy niezależny dowód.

Lemat 6.2 *Wyraz o najwyższej potędze w $P_{l-m}^{m,m}(w)$ jest równy $w^{l-m}\frac{\Gamma(2l+1)}{2^{l-m}(l-m)!\Gamma(l+m+1)}$.*

Dowód. Dla dużych w

$$\begin{aligned} P_{l-m}^{m,m}(w) &= \frac{(-1)^{l-m}}{2^{l-m}(l-m)!}(-w^2)^{-m}\partial_w^{l-m}(-w^2)^l \\ &= w^{l-m}\frac{2l\cdots(l+m+1)}{2^{l-m}(l-m)!}. \end{aligned}$$

Dowód Tw. 6.1. Zauważmy najpierw, że

$$(1-w^2)^m\left((1-w^2)\partial_w^2 - 2(m+1)w\partial_w + (l-m)(l+m+1)\right)(1-w^2)^{-m}$$

$$= \left((1-w^2)\partial_w^2 - 2(-m+1)w\partial_w + (l+m)(l-m+1)\right). \tag{6.94}$$

Zatem operator (6.94) anihiluje zarówno $(1-w^2)^m P_{l-m}^{m,m}(w)$ jak i $P_{l+m}^{-m,-m}(w)$. Obie funkcje są wielomianami, pierwsza ma najstarszy wyraz $w^{l-m+2m}(-1)^m\frac{(2l)!}{2^{l-m}(l-m)!(l+m)!}$, druga ma najstarszy wyraz $w^{l+m}\frac{(2l)!}{2^{l+m}(l-m)!(l+m)!}$. Warunek (5.89) jest pełniony, więc z jednoznaczności rozwiązań wielomianowych dla równania Jacobiego wynika, że te funkcje są proporcjonalne do siebie. □

6.4 Standardowa baza harmonik sferycznych w $L^2(S^2)$

Harmoniki sferyczne definiujemy jako funkcje własne operatora Laplace'a-Beltramiego. Okaże się, że wartości własne tego operatora mają postać $-l(l+1)$, $l = 0, 1, \ldots$.

Harmoniką sferyczną stopnia l będziemy nazywali funkcję własną operatora Δ_{S^2} z wartością własną $-l(l+1)$.

Szukamy harmonik sferycznych w postaci $Y(\theta, \phi) = f(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$. Dostajemy równanie

$$\left(\partial_w(1-w^2)\partial_w - \frac{m^2}{1-w^2} + l(l+1)\right) f(w) = 0 \tag{6.95}$$

(6.95) znane jest jako stowarzyszone równanie Legendre'a. Równanie to można przekształcić do równania Jacobiego z $\alpha = \beta = m$ (równania Gegenbauera):

$$\begin{aligned} & (1-w^2)^{-\frac{m}{2}} \left((1-w^2)\partial_w^2 - 2w\partial_w - \frac{m^2}{1-w^2} + l(l+1)\right)(1-w^2)^{\frac{m}{2}} && (6.96) \\ = \; & (1-w^2)\partial_w^2 - (2+2m)w\partial_w + (l-m)(l+m+1), && (6.97) \end{aligned}$$

(patrz (6.94)). Pamiętamy, że wielomiany Jacobiego $P_{l-m}^{m,m}$ są zabijane przez (6.97).

Zatem

$$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}m\phi}(1-w^2)^{\frac{m}{2}} P_{l-m}^{m,m}(w) = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}m\phi} \sin^m(\theta) P_{l-m}^{m,m}(\cos\theta). \tag{6.98}$$

są funkcjami własnymi Δ_{S^2} z wartościami własnymi $l(l+1)$. Jak zobaczymy, należy ograniczyć się do

$$m = -l, -l+1, \ldots, l. \tag{6.99}$$

Jedną ze standardowych normalizacji harmonik (6.98) jest

$$\begin{aligned} Y_{l,m}(w,\phi) &= (-1)^m \frac{\sqrt{(l+m)!(l-m)!}}{l!} \frac{(1-w^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m} P_{l-m}^{m,m}(w)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} && (6.100) \\ &= \frac{\sqrt{(l+m)!(l-m)!}}{l!} \frac{(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}}{2^{-m}} P_{l+m}^{-m,-m}(w)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 6.3 *Funkcje $Y_{l,m}$ dla (6.99) stanowią bazę ortogonalną w $L^2(S^2)$ spełniającą*

$$\int_0^\pi \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\phi \, |Y_{l,m}(\cos(\theta), \phi)|^2 = \frac{4\pi}{1+2l}.$$

Dowód. Niech

$$\begin{aligned} e_m &:= \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}, && (6.101) \\ f_{m,l} &:= \epsilon_m \sqrt{\frac{(l+1)\cdots(l+|m|)}{(l-|m|+1)\cdots l}} 2^{-|m|}(1-w^2)^{\frac{|m|}{2}} P_{l-|m|}^{|m|,|m|}(w), && (6.102) \end{aligned}$$

gdzie $\epsilon_m = 1$ dla $m \leq 0$ i $\epsilon_m = (-1)^m$ dla $m \geq 0$. Mamy wtedy

$$Y_{l,m}(w,\phi) = f_{m,l} \otimes e_m. \tag{6.103}$$

Oczywiście, e_m, $m \in \mathbb{Z}$, stanowią bazę ortogonalną w $L^2([-\pi,\pi],\mathrm{d}\phi)$.

Ustalmy na chwilę $m = 0, 1, \ldots$. Mamy dla $l, l' \geq m$,

$$\int_{-1}^{1} P_{l-m}^{m,m}(w) P_{l'-m}^{m,m}(w)(1-w^2)^m \mathrm{d}w = \delta_{l,l'} \frac{2^{2m+1} l \cdots (l-m+1)}{(1+2l)(l+1)\cdots(l+m)}.$$

(Patrz (6.93)). Dlatego też $f_{m,l}$, $l = m, m+1, \ldots$ stanowią bazę ortogonalną w $L^2([0,\pi],\mathrm{d}w)$.

Z tego wynika, że

$$f_{m,l} \otimes e_m, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad l = m, m+1, \ldots$$

stanowi bazę ortogonalną w

$$L^2([0,\pi],\mathrm{d}w) \otimes L^2([-\pi,\pi],\mathrm{d}\phi) \simeq L^2([0,\pi]\times[-\pi,\pi],\mathrm{d}w\mathrm{d}\phi) \simeq L^2(S^2).$$

□

6.5 Algebra Liego $so(3)$

Δ_{S^2} wiąże się z algebrą Liego $so(3)$ rozpiętą na L_x, L_y, L_y. Oto te operatory we współrzędnych sferycznych:

$$\begin{aligned}
L_x &= y\partial_z - z\partial_y &&= -\sin\phi\partial_\theta - \frac{\cos\theta\cos\phi}{\sin\theta}\partial_\phi \\
& &&= -\sin\phi\sqrt{1-w^2}\partial_w + \frac{w}{\sqrt{1-w^2}}\cos\phi\partial_\phi, \\
L_y &= z\partial_x - x\partial_z &&= -\cos\phi\partial_\theta - \frac{\cos\theta\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\phi \\
& &&= \cos\phi\sqrt{1-w^2}\partial_w + \frac{w}{\sqrt{1-w^2}}\sin\phi\partial_\phi, \\
L_z &= x\partial_y - y\partial_x &&= \partial_\phi.
\end{aligned}$$

Z $so(3)$ komutuje generator skalowania

$$A = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z = r\partial_r. \tag{6.104}$$

Stwierdzenie 6.4 *Pokażmy, że*

$$\Delta_{S^2} = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2.$$

Dowód. Latwo sprawdzamy (6.104). Następnie pokazujemy, że

$$r^2\Delta = A(A+1) + L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \tag{6.105}$$

i porównujemy to z (6.91). □

Zauważmy, że L_x, L_y i L_z komutują z Δ_{S^2}. Dlatego, operatory te zachowują przestrzeń harmonik sferycznych stopnia l. Dotyczy to też

$$L_+ := \mathrm{i}(L_x + \mathrm{i}L_y) = -(1-w^2)^{\frac{1}{2}}\partial_w \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} + \mathrm{i}\frac{w}{(1-w^2)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\partial_\phi, \tag{6.106}$$

$$L_- := \mathrm{i}(L_x - \mathrm{i}L_y) = (1-w^2)^{\frac{1}{2}}\partial_w \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} + \mathrm{i}\frac{w}{(1-w^2)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\partial_\phi. \tag{6.107}$$

6.6 Harmoniki sferyczne jako baza algebry $so(3)$

Relacje rekurencyjne dla $P_n^{m,m}$ przepisujemy w formie zaadaptowanej do naszej sytuacji:

$$\partial_w P_{l-m}^{m,m}(w) = \frac{1}{2}(l+m+1)P_{l-m}^{m+1,m+1}(w), \tag{6.108}$$

$$-\frac{1}{2}(1-w^2)^{-m+1}\partial_w(1-w^2)^m P_{l-m}^{m,m} = (l-m+1)P_{l-m}^{m-1,m-1}. \tag{6.109}$$

Używając

$$(1-w^2)^{\pm\frac{m+1}{2}}\partial_w(1-w^2)^{\mp\frac{m}{2}} = (1-w^2)^{\frac{1}{2}}\partial_w \pm m\frac{w}{(1-w^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{6.110}$$

dostajemy

$$\left((1-w^2)^{\frac{1}{2}}\partial_w + m\frac{w}{(1-w^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{(1-w^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m}P_{l-m}^{m,m}(w) = (l+m+1)\frac{(1-w^2)^{\frac{m+1}{2}}}{2^{m+1}}P_{l-m-1}^{m+1,m+1}(w),$$

$$\left(-(1-w^2)^{\frac{1}{2}}\partial_w + m\frac{w}{(1-w^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{(1-w^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m}P_{l-m}^{m,m}(w) = (l-m+1)\frac{(1-w^2)^{\frac{m-1}{2}}}{2^{m-1}}P_{l-m+1}^{m-1,m-1}(w).$$

Zdefiniujmy harmoniki sferyczne z inną normalizacją:

$$\mathcal{Y}_{l,m}(w,\phi) := (-1)^m\frac{(1-w^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m}P_{l-m}^{m,m}(w)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} \tag{6.111}$$

$$= \frac{(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}}{2^{-m}}P_{l+m}^{-m,-m}(w)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}. \tag{6.112}$$

Standardowe harmoniki sferyczne różnią się o czynnik:

$$Y_{l,m}(w,\phi) = \frac{\sqrt{(l+m)!(l-m)!}}{l!}\mathcal{Y}_{l,m}(w,\phi). \tag{6.113}$$

Dostajemy relacje

$$L_z\mathcal{Y}_{l,m} = \mathrm{i}m\mathcal{Y}_m, \tag{6.114}$$

$$L_+\mathcal{Y}_{l,m} = (l+m+1)\mathcal{Y}_{l,m+1}, \tag{6.115}$$

$$L_-\mathcal{Y}_{l,m} = (l-m+1)\mathcal{Y}_{l,m-1}. \tag{6.116}$$

6.7 Funkcje Legendre'a

W literaturze używa się jeszcze innej konwencji. Wprowadza się często tzw. stowarzyszone funkcje Legendre'a

$$\begin{aligned} P_l^m(w) &:= \frac{2^m(l+m)!}{l!}(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}P_{l+m}^{-m,-m}(w) \\ &= \frac{(-1)^{m+l}}{2^l l!}(1-w^2)^{\frac{m}{2}}\partial_w^{l+m}(1-w^2)^l, \\ \text{lub} \quad P_l^m(w) &:= (-1)^m\frac{2^m(l+m)!}{l!}(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}P_{l+m}^{-m,-m}(w) \\ &= \frac{(-1)^l}{2^l l!}(1-w^2)^{\frac{m}{2}}\partial_w^{l+m}(1-w^2)^l, \end{aligned}$$

Pierwszy wzór stosuje tzw. konwencję Condona-Shockley'a, której będziemy się trzymać. Są one rozwiązaniami stowarzyszonego równania Legendre'a (6.95).

Dla $m \geq 0$ możemy wyrazić stowarzyszone funkcje Legendre'a poprzez wielomiany Legendre'a:

$$P_l^m(w) \quad := \quad (-1)^m (1-w^2)^{\frac{m}{2}} \partial_w^m P_l(w),$$

Mamy też tożsamość

$$P_l^{-m}(w) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(w).$$

Dostajemy więc następujące wyrażenie harmonik sferycznych

$$Y_{l,m}(w,\phi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(w).$$

6.8 Rzut na harmoniki sferyczne l-tego rzędu

Rozważmy przestrzeń $L^2(S^2)$. Niech $\mathbb{P}_l$ oznacza rzut ortogonalny na harmoniki sferyczne l-tego rzędu. Innymi słowy

$$\Delta_{S^2} = \sum_{l=0}^{\infty} l(l+1)\mathbb{P}_l.$$

Można przyjąć, że jest zadany jądrem całkowym

$$\mathbb{P}_l f(\xi) = \int \mathbb{P}_l(\xi,\eta) f(\eta) \mathrm{d}\eta,$$

gdzie $\xi, \eta \in S^2$ i $\mathrm{d}\eta$ oznacza miarę na sferze.

Stwierdzenie 6.5

$$\mathbb{P}_l(\xi,\eta) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\xi \cdot \eta). \tag{6.117}$$

Dowód. Zauważmy, że

$$\Delta_{S^2}\mathbb{P}_l = l(l+1)\mathbb{P}_l.$$

Zatem, dla ustalonego η, $\xi \mapsto \mathbb{P}_l(\xi,\eta)$ jest harmoniką sferyczną stopnia l. Jeśli wybierzemy $\eta = (0,0,1)$, to dostaniemy, że $\mathbb{P}_l(\xi,\eta)$ jest niezmiennicze względem obrotów wokół osi z. Czyli zależy tylko od z-towej składowej ξ, czyli od $w = \xi \cdot (1,0,0)$. musi być proporcjonalne do

Wszystkie harmoniki sferyczne stopnia l niezmiennicze względem obrotów wokół osi z są proporcjonalne do $Y_{l,0}$, która jest proporcjonalna do wielomianu Legendre'a $P_l(w)$. Ale $\mathbb{P}_l(\xi,\eta)$ jest niezmiennicze względem obrotów, zależy więc jedynie od kąta między ξ i η. Czyli

$$\mathbb{P}_l(\xi,\eta) = c_l P_l(\xi \cdot \eta). \tag{6.118}$$

$\mathbb{P}_l$ jest rzutem, zatem

$$\mathbb{P}_l^2 = \mathbb{P}_l.$$

Czyli
$$\int \mathbb{P}_l(\xi,\eta)\mathbb{P}_l(\eta,\zeta)\mathrm{d}\eta = \mathbb{P}_l(\xi,\zeta).$$

Podstawiając $\xi = \zeta = (0,0,1)$ dostajemy
$$c_l^2 2\pi \int_{-1}^{1} P_l^2(w)\mathrm{d}w = c_l P_l(1).$$

Ale $\int_{-1}^{1} P_l^2(w)\mathrm{d}w = \frac{2}{2l+1}$ i $P_l(1) = 1$. □

6.9 Funkcje harmoniczne i harmoniki bryłowe

Mówimy, że funkcja F jest harmoniczna, jeśli $\Delta F = 0$. Na przykład, każda funkcja analityczna zależna tylko od $x + \mathrm{i}y$ jest harmoniczna.

Mówimy, że funkcja F jest jednorodna stopnia l jeśli
$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^l F(x,y,z), \quad \lambda > 0. \tag{6.119}$$

Różniczkując po λ dostajemy równoważny warunek
$$(x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z)F = lF. \tag{6.120}$$

We współrzędnych sferycznych operator z lewej strony jest równy $r\partial_r$. Każdą funkcję jednorodną stopnia l we współrzędnych sferycznych możemy zapisać jako
$$F(r,\theta,\phi) = r^l G(\theta,\phi), \tag{6.121}$$

gdzie G jest obcięciem F do S^2.

Twierdzenie 6.6 *Jeśli funkcja F jest harmoniczna i jednorodna stopnia l, to*
$$-\Delta_{S^2} F = l(l+1)F. \tag{6.122}$$

Dowód.
$$\begin{aligned} 0 = \Delta F &= \Big(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^2}\Big)F && (6.123) \\ &= \frac{1}{r^2}\Big(r\partial_r(r\partial_r + 1) + \Delta_{S^2}\Big)F. && (6.124) \end{aligned}$$

□

Mówimy, że H jest harmoniką bryłową stopnia l jeśli jest wielomianem harmonicznym jednorodnym stopnia l. Z Twierdzenia 6.6 wynika, że jeśli H jest harmoniką bryłową, to jej obcięcie Y do sfery jest gładką funkcją spełniającą
$$\Delta_{S^2} Y = -l(l+1)Y, \tag{6.125}$$

czyli jest harmoniką sferyczną. Można pokazać twierdzenie odwrotne:

Twierdzenie 6.7 *Każda harmonika sferyczna jest obcięciem harmoniki bryłowej do sfery.*

Przykłady harmonik bryłowych i odpowiadających im harmonik sferycznych:

$$\begin{aligned}
1 = &\quad r^0 &\sim Y_{0,0},\\
x+\mathrm{i}y = &\quad r(1-w^2)^{\frac12}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} &\sim rY_{1,1},\\
z = &\quad rw &\sim rY_{1,0},\\
x-\mathrm{i}y = &\quad r(1-w^2)^{\frac12}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} &\sim rY_{1,-1},\\
(x+\mathrm{i}y)^2 = &\quad r^2(1-w^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\phi} &\sim r^2Y_{2,2},\\
z(x+\mathrm{i}y) = &\quad r^2(1-w^2)^{\frac12}w\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} &\sim r^2Y_{2,1},\\
2z^2-x^2-y^2 = &\quad r^2(3w^2-1) &\sim r^2Y_{2,0},\\
z(x-\mathrm{i}y) = &\quad r^2(1-w^2)^{\frac12}w\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} &\sim r^2Y_{2,-1},\\
(x-\mathrm{i}y)^2 = &\quad r^2(1-w^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\phi} &\sim r^2Y_{2,-2}.
\end{aligned}$$

6.10 Potencjał elektrostatyczny

Mamy

$$\Delta(x^2+y^2+z^2)^{-\frac12} = -4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z).$$

Zatem przykładem funkcji harmonicznej na $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ jest $(x^2+y^2+z^2)^{-\frac12}$. Po przesunięciu też jest harmoniczna. Zatem

$$(x^2+y^2+(z-1)^2)^{-\frac12} \tag{6.126}$$

jest harmoniczna na $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,1)\}$

Twierdzenie 6.8 *Dla $|r|<1$ i $-1\leq w=-\cos\theta\leq 1$ mamy*

$$(r^2-2r\cos\theta+1)^{-\frac12} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(w). \tag{6.127}$$

Zatem

$$P_l(w) = \frac{1}{l!}\partial_r^l(r^2-2rw+1)^{-\frac12}\Big|_{r=0}. \tag{6.128}$$

Dowód. Funkcja $r\mapsto(r^2-2r\cos\theta+1)^{-\frac12}$ ma punkty rozgałęzienia tam gdzie zeruje się $r^2-2r\cos\theta+1$, czyli w $r=w\pm\mathrm{i}\sqrt{1-w^2}$. Zatem w kole $|r|<1$ jest analityczna i można ją rozwinąć w szereg względem r.

Funkcja (6.126) we współrzędnych sferycznych jest równa $(r^2-2r\cos\theta+1)^{-\frac12}$.

$$\begin{aligned}
0 &= \Delta(r^2-2rw+1)^{-\frac12}\\
&= \left(\partial_r^2+\frac{2}{r}\partial_r+\frac{1}{r^2}\left((1-w^2)\partial_w^2-2w\partial_w+\frac{1}{1-w^2}\partial_\phi^2\right)\right)\sum_{l=0}^{\infty}r^lP_l(w)\\
&= \sum_{l=0}^{\infty}r^{l-2}\left(l(l-1)+2l+(1-w^2)\partial_w^2-2w\partial_w\right)P_l(w).
\end{aligned}$$

Zatem $P_l(w)$ spełniają l-te równanie Legendre'a

$$\big((1-w^2)\partial_w^2 - 2w\partial_w + l(l+1)\big)\, P_l(w). \tag{6.129}$$

Ze wzoru (6.128) łatwo wynika, że $P_l(w)$ są wielomianami l-tego stopnia. Zatem $P_l(w)$ muszą być proporcjonalne do wielomianów Legendre'a.

Kładziemy $w=1$:

$$\begin{aligned}(r^2-2r+1)^{-\frac{1}{2}} &= (1-r)^{-1}\\ =\sum_{l=0}^{\infty} r^l &= \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(1).\end{aligned}$$

Zatem $P_l(w)$ są wielomianami Legendre'a. □

Ladunek elektrostatyczny 4π umieszczony w $(0,0,r)$ wywołuje punkcie oddalonym o R od centrum i pod kątem $\cos\theta = w$ potencjał

$$(R^2-2Rrw+r^2)^{-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} r^l R^{-l-1} P_l(w), & R>r;\\ \sum_{l=0}^{\infty} R^l r^{-l-1} P_l(w), & R<r.\end{cases}$$

6.11 Równanie Laplace'a w kuli

Mamy

$$-\Delta_{S^2} = \sum_{l=0}^{\infty} \big((l+\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4}\big)\mathbb{P}_l.$$

Zatem,

$$\sum_{l=0}^{\infty} l\mathbb{P}_l = \sqrt{-\Delta_{S^2}+\tfrac{1}{4}} - \tfrac{1}{2}.$$

Jeśli podstawimy $r=\mathrm{e}^{-t}$, rozkład na multipole prowadzi do

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}(\mathrm{e}^{-2t} - 2\mathrm{e}^{-t}\xi\cdot\eta + 1)^{-\frac{1}{2}} &= \big(2\cosh t - 2\xi\cdot\eta\big)^{-\frac{1}{2}}\\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(l+\frac{1}{2})t} P_l(\xi\cdot\eta) && (6.130)\\ &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(l+\frac{1}{2})t}}{2l+1}\mathbb{P}_l(\xi,\eta)\\ &= 2\pi \frac{\exp\big(-t\sqrt{-\Delta_{S^2}+\frac{1}{4}}\big)}{\sqrt{-\Delta_{S^2}+\frac{1}{4}}}(\xi,\eta). && (6.131)\end{aligned}$$

Zauważmy, że (6.131) jest anihilowany przez

$$\partial_t + \sqrt{-\Delta_{S^2}+\tfrac{1}{4}}.$$

Można do tego też dojść inaczej. Rozważmy laplasjan we współrzędnych r, w, ϕ. Podstawmy $r = \mathrm{e}^{-t}$. Mamy $\partial_r = -\mathrm{e}^t \partial_t$. Dlatego

$$\Delta = \mathrm{e}^{2t}(\partial_t^2 - \partial_t + \Delta_{S^2}) = \mathrm{e}^{2t}\big((\partial_t - \tfrac{1}{2})^2 + \Delta_{S^2} - \tfrac{1}{4}\big). \tag{6.132}$$

Stąd

$$\mathrm{e}^{-\frac{5t}{2}}\Delta \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} = \partial_t^2 + \Delta_{S^2} - \tfrac{1}{4} \tag{6.133}$$

$$= \Big(\partial_t - \sqrt{-\Delta_{S^2} + \tfrac{1}{4}}\Big)\Big(\partial_t + \sqrt{-\Delta_{S^2} + \tfrac{1}{4}}\Big) \tag{6.134}$$

Drugi czynnik w (6.134) pokrywa się z (6.132).

7 Harmoniki sferyczne w dowolnym wymiarze

7.1 Operator translacji

W $L^2(\mathbb{R})$ dla $t \in \mathbb{R}$ definiujemy rodzinę operatorów

$$(U_t)f(x) := f(x - t).$$

Zauważmy, że są one unitarne, spełniają $U_t U_s = U_{t+s}$, $U_t = 1$. Zdefinujmy generator translacji ∂_x. W mechanice kwantowej zwyczajowo zamiast niego używa się operatora pędu $p = \frac{1}{\mathrm{i}}\partial_x$,który jest hermitowski na $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Mamy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U_t f = -\partial_x U_t f.$$

Dlatego też piszemy

$$U_t = \mathrm{e}^{-t\partial_x}.$$

7.2 Operator obrotu w $L^2(\mathbb{R}^2)$

W $L^2(\mathbb{R}^2)$ dla $\psi \in \mathbb{R}$ definiujemy rodzinę operatorów

$$(R_\psi f)(x, y) := f(\cos\psi x + \sin\psi y, -\sin\psi x + \cos\psi y).$$

Zauważmy, że są one unitarne i spełniają $R_{\psi_1} R_{\psi_2} = R_{\psi_1+\psi_2}$, $R_0 = 1$.

Zdefiniujmy generator obrotów

$$L = x\partial_y - y\partial_x.$$

W mechanice kwantowej zwyczajowo zamiast niego używa się operatora momentu pędu $\frac{1}{\mathrm{i}}L$, który jest hermitowski. Pokażmy, że

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi} R_\psi f = -L R_\psi. \tag{7.135}$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$\tilde{x} := x\cos\psi + y\sin\psi, \qquad \tilde{y} := -x\sin\psi + y\cos\psi.$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi}R_\psi f(x,y) &= (-x\sin\psi + y\cos\psi)\partial_{\tilde{x}} f(\tilde{x},\tilde{y}) \\
&\quad +(-x\cos\psi - y\sin\psi)\partial_{\tilde{y}} f(\tilde{x},\tilde{y}), \\
LR_\psi f(x,y) &= x(\sin\psi\partial_{\tilde{x}} + \cos\psi\partial_{\tilde{y}}) f(\tilde{x},\tilde{y}) \\
&\quad -y(\cos\psi\partial_{\tilde{x}} - \sin\psi\partial_{\tilde{y}}) f(\tilde{x},\tilde{y}),
\end{aligned}
$$

co dowodzi (7.135). Dlatego też piszemy

$$R_\psi = \mathrm{e}^{-\psi L}.$$

7.3 Współrzędne biegunowe

Wprowadźmy w $\mathbb{R}^2$ współrzędne biegunowe

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi.$$

Zamiana współrzędnych kartezjańskich na biegunowe można interpretować jako odwzorowanie unitarne $U : L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2([0,\infty[\times[0,2\pi],\ r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi)$ zdefinowane przez

$$(Uf)(r,\phi) := f(r\cos\phi, r\sin\phi).$$

We współrzędnych biegunowych operator R_ψ działa jak

$$(U^{-1}R_\psi Uf)(r,\phi) = f(r,\phi-\psi).$$

Generator przybiera postać $(U^{-1}LU)f = \partial_\phi$.

7.4 Przestrzeń $L^2(\mathbb{R}^d)$

Rozważmy $L^2(\mathbb{R}^d)$. W tej przestrzeni działają operatory unitarne translacji $\mathrm{e}^{-t\partial_{x_i}}$, obrotu $\mathrm{e}^{-\psi L_{ij}}$ i skalowania $\mathrm{e}^{s(D+\frac{d}{2})}$, gdzie

$$
\begin{aligned}
L_{ij} &= x_i\partial_{x_j} - x_j\partial_{x_i}, \\
D: &= x_1\partial_{x_1} + \cdots + x_d\partial_{x_d}.
\end{aligned}
$$

7.5 Laplasjan

Definiujemy Laplasjan jak

$$\Delta = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2.$$

Latwo się przekonać, że Δ jest niezmienniczy ze względu na te transformacje translacje i obroty:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-t\partial_{x_i}}\Delta &= \Delta\mathrm{e}^{-t\partial_{x_i}}, \\
\mathrm{e}^{-\psi L_{ij}}\Delta &= \Delta\mathrm{e}^{-\psi L_{ij}}.
\end{aligned}
$$

7.6 Operator Laplace'a-Beltramiego na S^{d-1}

Zdefiniujmy

$$L^2 := \sum_{i<j} L_{ij}^2$$

Zauważmy, że dla każdego ij,

$$\mathrm{e}^{-\psi L_{ij}} L^2 = L^2 \mathrm{e}^{-\psi L_{ij}}.$$

Czyli operator L^2 jest niezmienniczy ze względu na obroty. Jest on też niezmienniczy ze względu na skalowanie i mnożenie przez r:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-s(D+\frac{d}{2})} L^2 &= L^2 \mathrm{e}^{-s(D+\frac{d}{2})}, \\ r L^2 &= L^2 r. \end{aligned}$$

Operator L^2 jest zbudowany z różniczkowań stycznych do $d-1$-wymiarowych sfer. Można go rozważać jako operator na funkcjach na sferze, na przykład sferze jednostkowej S^{d-1}. Tak rozumiany będzie się nazywał operatorem Laplace'a-Beltramiego dla S^{d-1} i bdzie oznaczany Δ_{S^2}.

7.7 Laplasjan i operator Laplace'a-Beltramiego we współrzędnych sferycznych

Załóżmy, że $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_{d-1})$ są współrzędnymi na sferze.

Dołączając $r := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$ do współrzędnych $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_{d-1})$ dostajemy współrzędne w $\mathbb{R}^d$. (Takie współrzędne można nazwać "uogólnionymi współrzędnymi sferycznymi").

Twierdzenie 7.1

$$\begin{aligned} D &= r\partial_r, && (7.136) \\ \Delta &= r^{-d+1}\partial_r r^{d-1}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^2} \\ &= \partial_r^2 + \frac{d-1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^2}. && (7.137) \end{aligned}$$

Poza tym, L_{ij} i Δ_{S^2} zależą tylko od współrzędnych Ω na sferze.

Dowód. Można zapisać

$$D = c_0(r, \Omega)\partial_r + \sum_{j=1}^{d-1} c_j(r, \Omega)\partial_{\omega_j}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} D\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2} &= \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}, \\ D\frac{x_j}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}} &= 0, \qquad j = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

Z drugiego wzoru wynika, że $D\omega_j = 0$, $j = 1, \dots, d-1$. Z pierwszego wynika, że $c_0(r, \Omega) = r$. To dowodzi (7.136).

Mamy

$$L_{ij}^2 = x_i^2 \partial_{x_j}^2 + x_j^2 \partial_{x_i}^2 - x_i x_j \partial_{x_i} \partial_{x_j} - x_i \partial_{x_i} - x_j \partial_{x_j}.$$

Dlatego

$$\begin{aligned}
\sum_{i<j} L_{ij}^2 &= \sum_{i \neq j} x_i^2 \partial_{x_j}^2 - \sum_{i \neq j} x_i x_j \partial_{x_i} \partial_{x_j} - (d-1) \sum_i x_i \partial_{x_i} \\
&= \sum_{i,j} x_i^2 \partial_{x_j}^2 - \sum_{i,j} x_i x_j \partial_{x_i} \partial_{x_j} - (d-1) \sum_i x_i \partial_{x_i} \\
&= \sum_{i,j} x_i^2 \partial_{x_j}^2 - \big(\sum_i x_i \partial_{x_i}\big)^2 - (d-2) \sum_i x_i \partial_{x_i} \\
&= r^2 \Delta - D^2 - (d-2) D.
\end{aligned}$$

To dowodzi (7.137).

Mamy $L_{ij} r = r L_{ij}$. To dowodzi, że w L_{ij} nie występuje pochodna po r.

Mamy również $L_{ij} D = D L_{ij}$. Korzystając z tego, że $D = r\partial_r$ widzimy, że w L_{ij} nie występuje zależność od r.

Ponieważ $\Delta_{S^{d-1}}$ wyraża się poprzez L_{ij}, widzimy, że $\Delta_{S^{d-1}}$ również nie zawiera ∂_r ani żadnej zależności od r. $\square$

7.8 Przestrzeń $L^2(S^{d-1})$

Niech

$$S^{d-1} := \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \ : \ x_1^2 + \dots + x_d^2 = 1\}$$

oznacza sferę jednostkową w $\mathbb{R}^d$. Przez $\mathrm{d}\Omega$ będziemy oznaczać miarę naturalną na sferze. Jest to miara, która jest niezmiennicza ze względu na obroty i cała sfera ma objętość $\frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$. Możemy wprowadzić przestrzeń Hilberta $L^2(S^{d-1})$ składającą się z funkcji mierzalnych na S^{d-1} takich, że

$$\int |f(\Omega)|^2 \mathrm{d}\Omega < \infty,$$

z iloczynem skalarnym

$$(f|g) = \int \overline{f(\Omega)} g(\Omega) \mathrm{d}\Omega.$$

Zamiana współrzędnych kartezjańskich na biegunowe można interpretować jako odwzorowanie unitarne $U : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2([0, \infty[\times S^{d-1}, \ r^{d-1} \mathrm{d}r \mathrm{d}\Omega)$ zdefinowane przez

$$(Uf)(r, \Omega) := f(x_1, \dots, x_d).$$

Operatory obrotu $U \mathrm{e}^{\psi L_{ij}} U^{-1}$ i operator $U \Delta_{S^{d-1}} U^{-1}$ działają tylko na współrzędne Ω. Można zatem zinterpretować je jako operatory działający wyłącznie na $L^2(S^{d-1})$. Tak zinterpretowane operatory będziemy oznaczali również $\mathrm{e}^{\psi L_{ij}}$ i $\tilde{\Delta}_{S^{d-1}}$ (co jest pewnym nadużyciem). Operatory

$e^{\psi \tilde{L}_{ij}}$ są unitarne na $L^2(S^{d-1}\mathrm{d}\Omega)$. Operator $\Delta_{S^{d-1}}$ jest samosprzężony na $L^2(S^{d-1}\mathrm{d}\Omega)$ i nazywamy go operatorem Laplace'a-Beltramiego na sferze. Naszym głównym zadaniem będzie teraz diagonalizacja $\Delta_{S^{d-1}}$.

7.9 Wielomiany wielu zmiennych

Wielomianem zależnym od zmiennych $x_1, \dots, x_d$ nazywamy skończoną kombinację liniową wyrażeń postaci

$$x_1^{k_1} \cdots x_d^{k_d}.$$

Czyli są to funkcje postaci

$$P(x_1, \cdots x_d) = \sum_{k_1,\dots,k_d} P_{k_1,\dots k_d} x_1^{k_1} \cdots x_d^{k_d}.$$

Stopień wielomianu P definiujemy jako

$$\mathrm{deg}P := \max\{k_1 + \cdots + k_d \ : \ P_{k_1,\dots,k_d} \neq 0\}.$$

7.10 Wielomiany jednorodne wielu zmiennych

Mówimy, że P jest wielomianem jednorodnym stopnia l, gdy

$$P(\lambda x_1, \cdots \lambda x_d) = \lambda^l P(x_1, \cdots x_d).$$

Innymi słowy, mamy wtedy

$$P(x_1, \cdots x_d) = \sum_{k_1+\cdots+k_d=l} P_{k_1,\dots,k_d} x_1^{k_1} \cdots x_d^{k_d}.$$

Równoważny warunek:

$$r\partial_r P = lP. \tag{7.138}$$

Niech Pol^l oznacza przestrzeń wielomianów jednorodnych stopnia l

Twierdzenie 7.2 *Wymiar przestrzeni wielomianów jednorodnych l-tego stopnia d zmiennych wynosi*

$$\dim \mathrm{Pol}^l = \begin{pmatrix} d+l-1 \\ d-1 \end{pmatrix} = \frac{(d+l-1)!}{(d-1)!l!}. \tag{7.139}$$

Dowód. Rozważmy $d+l-1$ białych kulek ustawionych w rząd. Zaczerniamy $d-1$ spośród nich. Dostajemy d rządków białych kulek. W j-tym rządku jest k_j kulek, w sumie $k_1 + \cdots + k_d = d + l - 1 - (d-1) = l$. Liczba możliwych takich konfiguracji wynosi tyle ile $d-1$ elementowych kombinacji w zbiorze $l+d-1$-elementowym, czyli (7.139). □

7.11 Wielomiany harmoniczne

Mówimy, że wielomian H jest wielomianem harmonicznym, jeśli

$$\Delta H = 0.$$

Niech Har^l oznacza przestrzeń wielomianów harmonicznych jednorodnych stopnia l. (Mamy w domyśle nieuwidoczniony drugi parametr – wymiar przestrzeni równy d).

Wielomiany harmoniczne jednorodne stopnia l bywają nazywane harmonikami bryłowymi stopnia l.

Twierdzenie 7.3 (1) $\dim \mathrm{Har}^l = \dim \mathrm{Pol}^l - \dim \mathrm{Pol}^{l-2} = \frac{(2l+d-2)(d+l-3)!}{(d-2)!l!}$.

(2) $\mathrm{Pol}^l = \mathrm{Har}^l \oplus r^2\mathrm{Pol}^{l-2}$.

(3) *Operator* Δ *jest injektywny na* $r^2\mathrm{Pol}^{l-2}$.

Dowód. Niech $P \in r^2\mathrm{Pol}^{l-2}$ i $\Delta P = 0$. Możemy napisać

$$P = r^{2k}P_{l-2k},$$

gdzie $P_{l-2k} \in \mathrm{Pol}^{l-2k}$ jest niepodzielny przez r^2 i $k \geq 1$.

$$\begin{aligned}\Delta r^{2k}P_{l-2k} &= (\Delta r^{2k})P_{l-2k} + 2(\nabla r^{2k})\nabla P_{l-2k} + r^{2k}\Delta P_{l-2k}\\ &= \big(2k(2k-2)+d\big)r^{2k-2}P_{l-2k} + 4kr^{2k-2}r\partial_r P_{l-2k} + r^{2k}\Delta P_{l-2k}\\ &= 2k(-2k-2+d+2l)r^{2k-2}P_{l-2k} + r^{2k}\Delta P_{l-2k}.\end{aligned}$$

Mamy $2k(-2k-2+d+2l) > 0$. Zatem P_{l-2k} jest podzielny przez r^2, co stanowi sprzeczność i dowodzi (3).

Mamy operator liniowy $\Delta_l : \mathrm{Pol}^l \to \mathrm{Pol}^{l-2}$. Ale $\mathrm{Ker}\Delta_l = \mathrm{Har}^l$. Zatem

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{Pol}^l &= \dim \mathrm{Ran}\Delta_l + \dim \mathrm{Ker}\Delta_l\\ &\leq \dim \mathrm{Pol}^{l-2} + \dim \mathrm{Har}^l.\end{aligned} \tag{7.140}$$

Oczywiście, $\dim r^2\mathrm{Pol}^{l-2} = \dim \mathrm{Pol}^{l-2}$. Poza tym, na mocy (3)

$$r^2\mathrm{Pol}^{l-2} \cap \mathrm{Har}^l = \{0\}. \tag{7.141}$$

Zatem

$$\dim \mathrm{Pol}^l \geq \dim \mathrm{Pol}^{l-2} + \dim \mathrm{Har}^l. \tag{7.142}$$

(7.140) i (7.142) implikują (1). Wreszcie, (7.141) i (1) pociąga za sobą (2). □

□

A oto przykłady harmonik bryłowych:

Wymiar $d = 2$. Harmoniki bryłowe stopnia $m \geq 1$ we współrzędnych kartezjańskich i biegunowych:

$$(x \pm \mathrm{i}y)^m = r^m \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}m\phi}.$$

$\dim \mathrm{Har}^0 = 1$, $\dim \mathrm{Har}^l = 2$, $l \geq 1$.

Wymiar $d = 3$. Harmoniki bryłowe stopnia $l \geq 1$ we współrzędnych kartezjańskich i sferycznych

$$(x\sin\psi - y\cos\psi \pm \mathrm{i}z)^l = r^l(\sin\theta\sin(\phi-\psi) \pm \mathrm{i}\cos\theta)^l$$

$\dim \mathrm{Har}^l = 2l + 1$.

7.12 Harmoniki sferyczne

Mówimy, że funkcja $Y : S^{d-1} \to \mathbb{C}$ jest harmoniką sferyczną stopnia l, jeśli istnieje harmonika bryłowa H stopnia l taka, że Y jest obcięciem H do sfery. Równoważny warunek:

$$(x_1^2 + \cdots x_d^2)^{\frac{l}{2}} Y\left(\frac{x_1, \dots x_d}{\sqrt{x_1^2 + \cdots x_d^2}}\right)$$

jest wielomianem harmonicznym

A oto przykłady harmonik sferycznych:

Wymiar $d = 2$ Rozważamy współrzędne biegunowe: Harmoniki sferyczne stopnia m:

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i} m\phi}.$$

Wymiar $d = 3$ Rozważamy współrzędne kartezjańskie i sferyczne: Harmoniki sferyczne stopnia l:

$$(\sin\theta \sin(\phi + \psi) \pm \mathrm{i} \cos\theta)^l.$$

Lemat 7.4 *Niech* $P \in \mathrm{Pol}^l$. *Wtedy istnieją* $H_{l-2k} \in \mathrm{Har}^{l-2k}$, $k = 0, \dots [l/2]$ *takie, że*

$$P\Big|_{S^{d-1}} = \sum_{k=0}^{[l/2]} H_{l-2k}\Big|_{S^{d-1}}. \tag{7.143}$$

Dowód. Stosujemy indukcję względem l.

Mamy

$$\mathrm{Pol}^0 = \mathrm{Har}^0, \quad \mathrm{Pol}^1 = \mathrm{Har}^1.$$

Dlatego, lemat jest oczywisty dla $l = 0, 1$.

Załóżmy, że lemat jest prawdziwy dla l zastąpionego przez $l - 2$. Z Tw. 7.3 wynika, że

$$P = r^2 P_{l-2} + Q_l, \quad P_{l-2} \in \mathrm{Pol}^{l-2}, \quad Q_l \in \mathrm{Har}^l. \tag{7.144}$$

Na mocy założenia indukcyjnego,

$$P_{l-2}\Big|_{S^{d-1}} = \sum_{k=1}^{[l/2]} Q_{l-2k}\Big|_{S^{d-1}}, \quad Q_{l-2k} \in \mathrm{Har}^{l-2k}. \tag{7.145}$$

Ale na S^{d-1} mamy $r^2 = 1$. (7.144) i (7.145) implikują więc (7.143). $\Box$

Twierdzenie 7.5 *Niech* Y_l *będzie harmoniką sferyczną stopnia* l. *Wtedy*

$$\Delta_{S^{d-1}} Y_l = -l(l + d - 2) Y_l.$$

Dowód.

$$\begin{aligned} 0 = \Delta r^l Y_l &= \left(r^{-d+1} \partial_r r^{d-1} \partial_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^{d-1}} \right) r^l Y_l \\ &= l(l+d-2) r^{l-2} Y_l + r^{l-2} \Delta_{S^{d-1}} Y_l. \end{aligned}$$

□

Harmoniki sferyczne stopnia l tworzą podprzestrzeń w $L^2(S^{d-1})$. Oznaczmy ją przez $\mathcal{H}_l$.

Twierdzenie 7.6 (1) *$\mathcal{H}_l$ jest przestrzenią wektorów własnych operatora $-\Delta_{S^{d-1}}$ na $L^2(S^{d-1})$ z wartością własną $l(l+d-2)$.*

(2) *$\mathcal{H}_l$ są wzajemnie ortogonalne dla różnych l.*

(3) *Kombinacje liniowe elementów $\mathcal{H}_l$ są gęste w $L^2(S^{d-1})$.*

(4) *Operatory obrotu $\mathrm{e}^{\psi L_{ij}}$ zachowują $\mathcal{H}_l$.*

Dowód. (2) wynika z (1) i z tego, że $\Delta_{S^{d-1}}$ jest operatorem samosprzężonym na $L^2(S^{d-1})$.

Lemat 7.4 pokazuje, że wielomiany harmoniczne obcięte do sfery pokrywają się ze wszystkimi wielomianami obciętymi do sfery. Następnie stosujemy Twierdzenie Stone'a-Weierstrassa, które mówi, że wielomiany są gęste przestrzeni funkcji ciągłych na zwartym podzbiorze S^{d-1} w normie supremum. Z kolei funkcje ciągłe są gęste w $L^2(S^{d-1})$. To pokazuje (3).

(4) wynika z tego, że $\mathrm{e}^{\psi L_{ij}} \Delta_{S^{d-1}} = \Delta_{S^{d-1}} \mathrm{e}^{\psi L_{ij}}$. □

(2) i (3) można razem wyrazić równością $L^2(S^{d-1}) = \overset{\infty}{\underset{l=0}{\oplus}} \mathcal{H}_l$.

7.13 Wielomiany Gegenbauera

Wielomiany Gegenbauera definiujemy przy pomocy następującej funkcji tworzącej:

$$(1 - 2wr + r^2)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n C_n^{\lambda}(w), \quad |r| < 1. \tag{7.146}$$

Stąd

$$C_n^{\lambda}(w) = \frac{1}{n!} \partial_r^n (r^2 - 2wr + 1)^{-\lambda} \Big|_{r=0}.$$

Mamy

$$(r^2 - 2r + 1)^{-\lambda} = (r-1)^{-2\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\lambda)_n}{n!} r^n.$$

Zatem,

$$C_n^{\lambda}(1) = (2\lambda)_n.$$

Podstawiwszy $R = \frac{1}{r}$, (7.146) możemy przepisać jako

$$(1 - 2wR + R^2)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} R^{-2\lambda - n} C_n^{\lambda}(w), \quad |R| > 1.$$

Stwierdzenie 7.7

$$\Big((1-w^2)\partial_w^2 - (1+2\lambda)w\partial_w + n(n+2\lambda)\Big)C_n^\lambda(w) = 0.$$

Dowód. Oczywiście,

$$\begin{aligned}
\Big(\partial_x^2 + \partial_y^2\Big)(x^2+y^2)^{-\lambda} &= (2\lambda)^2(x^2+y^2)^{-\lambda-1},\\
\frac{1}{y}\partial_y(x^2+y^2)^{-\lambda} &= -2\lambda(x^2+y^2)^{-\lambda-1}.
\end{aligned}$$

Dlatego,

$$\Big(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \frac{2\lambda}{y}\partial_y\Big)(x^2+y^2)^{-\lambda} = 0.$$

Stąd,

$$\Big(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \frac{2\lambda}{y}\partial_y\Big)\big((x-1)^2+y^2\big)^{-\lambda} = 0. \tag{7.147}$$

Wprowadźmy układ biegunowy

$$\begin{aligned}
x &= rw, & y &= r\sqrt{1-w^2},\\
r &= \sqrt{x^2+y^2}, & w &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

Mamy wtedy

$$\begin{aligned}
\partial_x &= w\partial_r + \frac{1-w^2}{r}\partial_w,\\
\partial_y &= \sqrt{1-w^2}\partial_r - \frac{w\sqrt{1-w^2}}{r}\partial_w.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_x^2 + \partial_y^2 &= \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Big((1-w^2)\partial_w^2 - w\partial_w\Big),\\
\frac{1}{y}\partial_y &= \frac{1}{r}\partial_r - \frac{w}{r^2}\partial_w.
\end{aligned}$$

(7.147) może być przepisane jako

$$\Big(\partial_r^2 + \frac{(1+2\lambda)}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\big((1-w^2)\partial_w^2 - (1+2\lambda)w\partial_w\big)\Big)(r^2-2wr+1)^{-\lambda} = 0. \tag{7.148}$$

□

Czyli wielomiany Gegenbauera spełniają to samo równanie co wielomiany ultrasferyczne z $\alpha = \lambda - \frac{1}{2}$. Zatem C_n^λ są proporcjonalne do $P_n^{\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}}$. Porównując wartość w 1 dostajemy

$$C_n^\lambda(w) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda+\frac{1}{2})_n}P_n^{\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}}(w).$$

Porównując funkcje tworzące możemy znaleźć związki między wielomianami Gegenbauera a Czebyszewa:

$$\begin{aligned} T_n(w) &= \frac{1}{2}\partial_\lambda C_n^\lambda(w)\Big|_{\lambda=0}, \\ U_n(w) &= C_n^1(w). \end{aligned}$$

7.14 Potencjał elektrostatyczny w wyższych wymiarach

Laplasjan w wymiarze d na funkcjach radialnych jest równy

$$\partial_r^2 + \frac{d-1}{r}\partial_r. \tag{7.149}$$

Zatem funkcja

$$r^{-2\lambda} = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{-\lambda}$$

dla $\lambda = \frac{d}{2} - 1$ jest harmoniczna na $\mathbb{R}^d$ poza zerem.

Podobnie funkcja

$$\big(x_1^2 + \cdots + x_{d-1}^2 + (x_d - 1)^2\big)^{-\lambda} \tag{7.150}$$

jest harmoniczna poza $(0, \dots, 0, 1)$. Wprowadzając $w := \frac{x_d}{r}$ możemy (7.150) zapisać jako

$$(1 + r^2 - 2wr)^{-\lambda}. \tag{7.151}$$

Dla funkcji zaleznych tylko od r, w, laplasjan jest równy

$$\partial_r^2 + \frac{d-1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\big((1-w^2)\partial_w^2 - (d-1)w\partial_w\big).$$

Zauważając, że ten operator anihiluje (7.151), dostajemy alternatywny dowód (7.148) (niestety, słuszny jedynie dla $\lambda = \frac{1}{2}, 1, \dots$).