

# Funkcje analityczne. Funkcja Gamma.

Jan Dereziński

Katedra Metod Matematycznych Fizyki  
Uniwersytet Warszawski  
Hoża 74, 00-682, Warszawa  
e-mail jan.derezinski@fuw.edu.pl

22 września 2006

Metody Matematyczne Fizyki, skrypt I  
rok 2006, wersja poprawiona

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Funkcje analityczne</b>	<b>2</b>
1.1	Definicja funkcji analitycznych . . . . .	2
1.2	Krzywe . . . . .	5
1.3	Całki wzdłuż krzywych . . . . .	5
1.4	Twierdzenie Cauchy'ego i jego konsekwencje . . . . .	6
1.5	Związki dyspersyjne . . . . .	7
1.6	Szeregi potęgowe . . . . .	8
1.7	Funkcja wykładnicza . . . . .	11
1.8	Funkcja logarytm i funkcja potęgowa . . . . .	12
1.9	Punkty osobliwe funkcji analitycznych . . . . .	13
1.10	Funkcje analityczne a punkt w nieskończoności . . . . .	17
1.11	Funkcje analityczne z $\overline{\mathbb{C}}$ w $\overline{\mathbb{C}}$ . . . . .	19
1.12	Jednoznaczność przedłużania funkcji analitycznych . . . . .	19
1.13	Przedłużanie funkcji analitycznych wzdłuż drogi . . . . .	20
1.14	* Powierzchnie Riemanna i funkcje analityczne wieloznaczne . . . . .	22
1.15	* Homotopia krzywych . . . . .	23
1.16	* Składanie krzywych i grupa homotopii . . . . .	24
1.17	* Nakrycie uniwersalne . . . . .	25
1.18	* Nakrycie wyznaczone przez podgrupę grupy homotopii . . . . .	25
1.19	* Funkcja pierwotna . . . . .	25
1.20	* Funkcja logarytm i potęgowa . . . . .	26
1.21	* Funkcja $z^\alpha(z-1)^\beta$ . . . . .	26

1.22	Notacja do oznaczania krzywych . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Funkcja Gamma Eulera</b>	<b>29</b>
2.1	Funkcja Gamma jako uogólnienie silni i II całka Eulera . . . . .	29
2.2	I całka Eulera i dalsze tożsamości . . . . .	30
2.3	Funkcja Gamma i całki w dziedzinie zespolonej . . . . .	33
2.4	Iloczyny nieskończone . . . . .	34
2.5	Funkcje trygonometryczne jako iloczyny nieskończone . . . . .	35
2.6	Funkcja Gamma a iloczyny nieskończone . . . . .	36
2.7	Pewne całki z parametrem . . . . .	38
2.8	Pochodna logarytmiczna funkcji Gamma . . . . .	39
2.9	Szeregi asymptotyczne . . . . .	40
2.10	Pierwszy wzór Bineta . . . . .	41
2.11	Wzór Plana i drugi wzór Bineta . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Zastosowania</b>	<b>44</b>
3.1	Jednorodne dystrybucje i ich transformaty Fouriera . . . . .	44
3.2	Całki wielowymiarowe . . . . .	45
3.3	Macierze . . . . .	46
3.4	Wielowymiarowe całki Gaussa i Fresnela . . . . .	47
3.5	Metoda Laplace'a (punktu siodłowego) . . . . .	47
3.6	Asymptotyka funkcji Gamma w nieskończoności metodą punktu siodłowego. . . . .	48
3.7	Asymptotyka funkcji Beta w nieskończoności metodą punktu siodłowego . . . . .	50
3.8	Wielowymiarowa wersja metody Laplace'a (bez przedłużenia analitycznego) . . . . .	51
3.9	Metoda fazy stacjonarnej . . . . .	51
3.10	Równanie dyfuzji i Schrödingera . . . . .	52
3.11	Transformacja Legendre'a . . . . .	53
3.12	Dyspersyjne równanie Schrödingera z parametrem $\hbar$ . . . . .	54
3.13	Granica semiklasyczna dyspersyjnej ewolucji . . . . .	54
3.14	Równanie Kleina-Gordona/falowe . . . . .	55

Gwiazdką \* oznaczone są podrozdziały o nieco bardziej zaawansowanej treści, które mogą być pominięte przy lekturze.

## 1 Funkcje analityczne

### 1.1 Definicja funkcji analitycznych

Utożsamiamy  $\mathbb{R}^2$  z  $\mathbb{C}$  odwzorowaniem  $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto z := x + iy \in \mathbb{C}$ . Wprowadzamy następujące operatory działające na  $\mathbb{C}$

$$\partial_z := \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \quad \partial_{\bar{z}} := \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y).$$

i jednoformy:

$$dz = dx + idy, \quad d\bar{z} = dx - idy.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\partial_z z &= 1, \quad \partial_z \bar{z} = 0, \\ \partial_{\bar{z}} z &= 0, \quad \partial_{\bar{z}} \bar{z} = 1, \\ df &= \partial_z f dz + \partial_{\bar{z}} f d\bar{z}.\end{aligned}$$

**Twierdzenie 1.1 (Definicja funkcji holomorficznej).** Niech  $\Omega \subset \mathbb{C}$  będzie otwartym podzbiorem i  $\Omega \ni z \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$  funkcją. Wtedy następujące warunki są równoważne:

1) **(Różniczkowalność w sensie zespolonym)** Dla każdego  $z_0 \in \Omega$  istnieje

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (1.1)$$

Granice tę nazywamy pochodną w sensie zespolonym funkcji  $f$  w  $z_0$ . Jest ona oznaczana przez  $\partial_z f(z_0)$ . Stosujemy też oznaczenia  $f'(z_0)$  i  $\frac{df(z_0)}{dz}$ .

2) **(Warunki Cauchy'ego–Riemanna)** Funkcja  $f$  jest jednokrotnie różniczkowalna w sensie rzeczywistym i spełnione są następujące wzory:

$$\begin{aligned}\partial_x u &= \partial_y v, \\ \partial_x v &= -\partial_y u,\end{aligned}$$

gdzie  $u = \operatorname{Re} f$ ,  $v = \operatorname{Im} f$ .

3) Funkcja  $f$  jest jednokrotnie różniczkowalna w sensie rzeczywistym i zachodzi

$$\partial_{\bar{z}} f = 0.$$

4) **(Analityczność)** Dla każdego  $z_0 \in \Omega$  istnieje  $r > 0$  takie, że na  $K(z_0, r)$

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

**Definicja 1.2** Funkcję  $f$  spełniającą jeden, a zatem i wszystkie, powyższe warunki nazywamy funkcją holomorficzną na  $\Omega$  lub, co traktujemy jako synonim, funkcją analityczną na  $\Omega$ .

**Dowód Twierdzenia 1.1.** Udowodnijmy  $1) \Rightarrow 2)$ . We wzorze

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h},$$

gdzie  $h = h_x + ih_y$ , możemy położyć  $h_y = 0$  i zbiegać z  $h_x \rightarrow 0$ , wtedy dostajemy

$$f'(z_0) = \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h_x) - f(z_0)}{h_x} = \partial_x u(z_0) + i \partial_x v(z_0) \quad (1.2)$$

lub możemy trzymać  $h_x = 0$ , wtedy

$$f'(z_0) = \lim_{h_y \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + ih_y) - f(z_0)}{ih_y} = -i \partial_y u(z_0) + \partial_y v(z_0) \quad (1.3)$$

Przez porównanie (1.2) i (1.3) dostajemy wzory Cauchy'ego–Riemanna.

Równoważność 2) i 3) jest oczywista.

Udowodnijmy teraz 2)  $\Rightarrow$  1). Różniczkowalność w sensie rzeczywistym oznacza, że

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + R(z_0, h)$$

gdzie  $f'(z_0)$  oznacza macierz Jacobiego pochodnej

$$\begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{bmatrix},$$

$h$  jest wektorem

$$\begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix}$$

a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|R(z_0, h)|}{|h|} = 0.$$

Można to zapisać jako

$$\begin{aligned} f(z_0 + h) - f(z_0) &= \partial_x f(z_0)h_x + \partial_y f(z_0)h_y + R(z_0, h) \\ &= \partial_z f(z_0)(h_x + ih_y) + \partial_{\bar{z}} f(z_0)(h_x - ih_y) + R(z_0, h) \end{aligned}$$

Z tego wyniku istnienie granicy (1.1) i to, że jest równa  $\partial_z f(z_0)$ .

Dowód równoważności warunku 4) zostawiamy na później.  $\square$

**Stwierdzenie 1.3** *Jeśli  $f, g$  są holomorfczne w  $\Omega$ , to również  $f + g$  i  $fg$ . Jeśli w dodatku  $f \neq 0$  na  $\Omega$ , to  $\frac{1}{f}$  jest holomorfczna na  $\Omega$ . Jeśli  $f$  jest holomorfczne na  $\Omega$  a  $g$  na  $f(\Omega)$ , to  $g \circ f$  jest holomorfczne na  $\Omega$ . Jeśli  $f$  jest bijekcją z  $\Omega$  na  $f(\Omega)$  i  $f^{-1}$  jest funkcją odwrotną do  $f$ , to  $f^{-1}$  jest holomorfczne na  $f(\Omega)$ . Zachodzą wzory*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(f + g) &= \frac{d}{dz}f + \frac{d}{dz}g, \\ \frac{d}{dz}(fg) &= \left(\frac{d}{dz}f\right)g + f\frac{d}{dz}g, \\ \frac{d}{dz}\frac{1}{f} &= -\frac{1}{f^2}\frac{d}{dz}f, \\ \frac{d}{dz}g \circ f(z) &= \frac{d}{dw}g(w)\frac{d}{dz}f(z), \text{ gdzie } f(z) = w, \\ \frac{d}{dw}f^{-1}(w) &= \frac{1}{\frac{d}{dz}f(z)}, \text{ gdzie } f(z) = w. \end{aligned}$$

**Wniosek 1.4** *Funkcja wymierna, czyli funkcja postaci*

$$\frac{P(z)}{Q(z)},$$

gdzie  $P, Q$  są wielomianami, jest holomorfczna poza zerami  $Q(z)$ .

## 1.2 Krzywe

Krzywą sparametryzowaną nazywamy odwzorowanie ciągle

$$]0, 1[ \ni \tau \mapsto \gamma(\tau) \in \mathbb{C}. \quad (1.4)$$

Na ogół będziemy milcząco zakładali, że  $\gamma$  jest kawałkami gładka.

W zbiorze krzywych wprowadzamy relację:  $\gamma_1 \sim \gamma_2$ , gdy istnieje kawałkami gładka rosnąca bijekcja  $]0, 1[ \ni \tau \mapsto \kappa(\tau) \in ]0, 1[$  taka, że  $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \kappa$ . Jest to relacja równoważności. Klasę abstrakcji względem tej relacji nazywamy krzywą zorientowaną (niesparametryzowaną).

W zbiorze krzywych wprowadzamy też relację:  $\gamma_1 \sim \gamma_2$ , gdy istnieje kawałkami gładka rosnąca lub malejąca bijekcja  $]0, 1[ \ni \tau \mapsto \kappa(\tau) \in ]0, 1[$  taka, że  $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \kappa$ . Jest to również relacja równoważności. Klasę abstrakcji względem tej relacji nazywamy krzywą niezorientowaną (niesparametryzowaną).

W definicji (1.4) można również zamienić  $]0, 1[$  na  $[0, 1]$ ,  $]0, 1]$ ,  $[0, 1[$  bądź  $S^1$  (okrąg). W ostatnim wypadku mamy do czynienia z krzywą zamkniętą.

Założmy, że brzeg zbioru otwartego składa się z krzywych zamkniętych. Wtedy każda z tych krzywych ma naturalną orientację: posuwamy się wzdłuż niej w dodatnim kierunku, jeśli zbiór mamy z lewej strony.

## 1.3 Całki wzdłuż krzywych

Niech krzywa  $\gamma$  będzie sparametryzowana przez  $[0, 1] \ni \tau \mapsto \gamma(\tau) \in \Omega$ . Zakładamy, że parametryzacja jest kawałkami  $C^1$ . Założmy też, że na  $\gamma([0, 1])$  określona jest funkcja  $f$  (niekoniecznie holomorficzna). Zdefiniujemy całkę z funkcji  $f$  po krzywej  $\gamma$  wzorem

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_0^1 f(\gamma(\tau)) \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (1.5)$$

Definicja ta nie zależy od parametryzacji zachowującej orientację. Przy zmianie orientacji zmienia się znak całki,

Wprowadzamy również oznaczenie na niezorientowaną całkę wzdłuż krzywej  $\gamma$ :

$$\int_{\gamma} f(z) |dz| := \int_0^1 f(\gamma(\tau)) \left| \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} \right| d\tau.$$

Definicja ta nie zależy od parametryzacji, również zmieniającej orientację.

Zauważmy, że

$$\left| \int_{\gamma} f(z) g(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \sup_{z \in \gamma[0,1]} |g(z)|.$$

**Przykład.** Niech  $\gamma$  będzie okręgiem  $[0, 2\pi] \ni \phi \mapsto e^{i\phi} a + b \in \mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^n dz &= \int_0^{2\pi} i(ae^{i\phi} + b)^n ae^{i\phi} d\phi \\ &= \sum_{j=0}^n \int_0^{2\pi} a^m b^{n-m} i \frac{n!}{m!(n-m)!} e^{i(m+1)\phi} d\phi = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} z^n |dz| &= \int_0^{2\pi} (ae^{i\phi} + b)^n a d\phi \\
&= b^n a 2\pi; \\
\int_{\gamma} \bar{z} dz &= \int_0^{2\pi} (\bar{a}e^{-i\phi} + \bar{b}) a e^{i\phi} i d\phi \\
&= i2\pi |a|^2.
\end{aligned}$$

#### 1.4 Twierdzenie Cauchy'ego i jego konsekwencje

**Twierdzenie 1.5 (Twierdzenie Cauchy'ego).** Niech  $f$  będzie holomorficzną na otwartym i ograniczonym zbiorze  $\Omega$  i ciągłą na  $\bar{\Omega}$ . Wtedy

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = 0. \quad (1.6)$$

**Dowód.** Korzystamy z twierdzenia Stokesa:

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = \int_{\Omega} df \wedge dz = \int_{\Omega} \partial_{\bar{z}} f d\bar{z} \wedge dz = 0.$$

□

**Wniosek 1.6 (Wzór Cauchy'ego)** Przy tych samych założeniach, co powyżej, jeśli  $z_0 \in \Omega$ , to

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (1.7)$$

**Dowód.** Funkcja  $\frac{f(z)}{z - z_0}$  jest holomorficzną w  $\Omega \setminus K(z_0, r)$ . Zatem

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial(\Omega \setminus K(z_0, r))} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\
&= \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz
\end{aligned}$$

Ale przez podstawienie  $z = z_0 + re^{i\phi}$  dostajemy, że

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

□

**Wniosek 1.7** Każda funkcja holomorficzną jest różniczkowalna nieskończenie wiele razy w sensie zespolonym. Zachodzi wzór

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \quad (1.8)$$

**Wniosek 1.8 (Nierówność Cauchy'ego)** Jeśli  $f$  jest holomorficzną w  $K(z_0, r)$  i ciągła na  $\overline{K(z_0, r)}$ , to

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{z \in K(z_0, r)} |f(z)| \quad (1.9)$$

**Wniosek 1.9 (Twierdzenie Liouville'a)** Każda funkcja holomorficzną na  $\mathbb{C}$  i ograniczona jest stała.

**Dowód.** Dla dowolnego  $z_0 \in \mathbb{C}$  i  $r > 0$  z nierówności Cauchy'ego wynika oszacowanie

$$|f'(z_0)| \leq \frac{\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|}{r}.$$

Zatem  $f' = 0$ .  $\square$

**Wniosek 1.10 (Twierdzenie Gaussa)** Każdy wielomian różny od stałej ma na  $\mathbb{C}$  miejsce zerowe.

**Dowód.** Załóżmy, że wielomian  $P(z)$  stopnia  $n \geq 1$  nie ma pierwiastka. Niech

$$f(z) := (P(z))^{-1}.$$

Wtedy  $f$  jest holomorficzną na  $\mathbb{C}$ . Poza tym, wiemy, że dla  $z > R$ ,  $|P(z)| \geq |z|^n$ . Zatem,  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$ . Funkcja ciągła zbieżna do zera w nieskończoności jest ograniczona. A więc z Twierdzenia Liouville'a wynika, że  $f$  jest stała.  $\square$

## 1.5 Związki dyspersyjne

Wartość główną całki z  $\frac{f(\xi)}{\xi - \omega}$  definiujemy jako

$$P \int \frac{f(\xi)}{\xi - \omega} d\xi := \lim_{\epsilon \searrow 0} \left( \int_{-\infty}^{\omega - \epsilon} + \int_{\omega + \epsilon}^{\infty} \right) \frac{f(\xi)}{\xi - \omega} d\xi.$$

**Twierdzenie 1.11 (Wzór Sochockiego)** Niech  $\frac{f}{1+|\xi|} \in L^1$  i  $|f(\xi) - f(\omega)| \leq c|\xi - \omega|^\delta$ , niech  $f$  będzie ciągła w  $\omega$  i w pewnym otoczeniu  $\omega$ ,  $|f(\xi) - f(\omega)| \leq c|\xi - \omega|^\delta$ ,  $\delta > 0$ . Wtedy

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{f(\xi)}{\xi - \omega \pm i\epsilon} = \mp i\pi f(\omega) + P \int \frac{f(\xi)}{\xi - \omega} d\xi.$$

**Twierdzenie 1.12 (Związki dyspersyjne)** Niech  $f$  będzie ciągła na  $\{\text{Im}z \geq 0\}$  i analityczna w  $\{\text{Im}z > 0\}$ . Zakładamy, że na  $\mathbb{R}$  jest różniczkowalna,  $\frac{f}{1+|\omega|} \in L^1$  i  $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} f(\omega) = 0$ . Niech  $f = f_R + if_I$  będzie rozkładem na część rzeczywistą i urojoną. Wtedy dla  $\omega \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_R(\omega) &= \frac{1}{\pi} P \int \frac{f_I(\xi)}{\xi - \omega} d\xi, \\ f_I(\omega) &= -\frac{1}{\pi} P \int \frac{f_R(\xi)}{\xi - \omega} d\xi. \end{aligned}$$

**Dowód.**

$$f(\omega + i\epsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\xi)}{\xi - i\epsilon - \omega} d\xi$$

Następnie korzystamy z tego, że  $f(\omega + i\epsilon) \rightarrow f(\omega)$  i ze wzoru Sochockiego:

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int \frac{f(\xi)}{\xi - \omega - i\epsilon} d\xi = i\pi f(\omega) + P \int \frac{f(\xi)}{\xi - \omega} d\xi.$$

□

Fizyczne zastosowania Twierdzenia 1.12 są oparte na następującym schemacie. Załóżmy, że  $g(t)$  jest “bodźcem” a  $h(t)$  “reakcją”. Zakładamy, że  $h(t)$  zależy od  $g(t)$  liniowo i przyczynowo. Oznacza to, że

$$h(t) = \int_0^\infty \epsilon(s)g(t-s)ds. \quad (1.10)$$

Po przejściu do transformat Fouriera dostajemy

$$\hat{h}(\omega) = \hat{\epsilon}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

(Stosujemy konwencję  $\hat{\epsilon}(\omega) = \int \epsilon(t)e^{it\omega} dt$ .) Załóżmy, że  $\epsilon \in L^1$ . Wtedy funkcja  $\hat{\epsilon}$  przedłuża się analitycznie na  $\{\text{Im}z \geq 0\}$  i zatem stosuje się do niej powyższe twierdzenie.

## 1.6 Szeregi potęgowe

Poniższe twierdzenie implikuje równoważność warunku 4) z twierdzenia 1.1 z pozostałymi warunkami.

**Twierdzenie 1.13** 1) Niech  $(a_0, a_1, \dots)$  będzie ciągiem i

$$\rho^{-1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}. \quad (1.11)$$

Wtedy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

jest funkcją holomorficzną w kole  $K(0, \rho)$ . Poza tym

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

2) Niech  $f(z)$  będzie holomorficzną w kole  $K(0, r)$ . Wtedy jeśli

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

to

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \leq r^{-1}$$

i w  $K(0, r)$  mamy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

**Dowód.** Udowodnijmy 1). Niech  $\rho_2 < \rho_1 < \rho$ . Wtedy dla  $n > N_0$ ,  $|a_n| < \rho_1^{-n}$ . Zatem dla  $N > N_0$

$$|\sum_{n=N}^{\infty} a_n z^n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \rho_1^n |z|^n = \rho_1^{-N} |z|^N (1 - \frac{|z|}{\rho_1})^{-1}.$$

Czyli

$$f_N(z) := \sum_{n=0}^N a_n z^n$$

spełnia dla  $N_0 \leq N_1 \leq N_2$  i  $z \in K(0, \rho_2)$

$$|f_{N_1} - f_{N_2}| \leq \rho_1^{-N_1} \rho_2^{N_1} (1 - \frac{\rho_2}{\rho_1})^{-1}.$$

Czyli  $f_N$  jest zbieżny jednostajnie w  $K(0, \rho_2)$ , a więc niemal jednostajnie w  $K(0, \rho)$  do funkcji  $f(z)$ . Podobnie pochodne  $f(z)$  są granicą niemal jednostajną pochodnych tego ciągu. Każdy z elementów tego ciągu spełnia warunki Cauchy'ego–Riemanna. Zatem i granica spełnia te warunki.

Udowodnijmy teraz 2). Z nierówności Cauchy'ego wynika, że jeśli  $r_1 \leq r$ , to istnieje  $C$  takie, że

$$|a_n| \leq C r_1^{-n}$$

Zatem szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

jest zbieżny w kole  $K(0, r_1)$ . Korzystając z jednostajnej zbieżności przy zamianie kolejności całkowania i sumowania dla  $r_2 < r_1$  dostajemy

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(0, r_2)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(0, r_2)} \frac{f(\xi)}{\xi} \frac{1}{1 - \frac{z}{\xi}} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{\partial K(0, r_2)} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \end{aligned}$$

□

W praktyce wystarczają prostsze kryteria:

1) **(Kryterium D'Alemberta)** Jeśli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

istnieje, to jest równe (1.11);

2) **(Kryterium Cauchy'ego)** Jeśli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$$

istnieje, to jest równe (1.11).

### Przykłady rozwinięć funkcji analitycznych

$$(1 - z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1;$$

$$(1 - z)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m+1) \dots (m+n-1)}{n!} z^n, \quad |z| < 1, \quad m = 1, 2, \dots;$$

$$(1 + z)^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} z^n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad m = 0, 1, \dots$$

**Twierdzenie 1.14 (Rozwinięcie w szereg Laurent'a)** Niech funkcja  $f$  będzie holomorficzną w pierścieniu

$$\{z : r < |z| < R\},$$

gdzie  $0 \leq r < R \leq \infty$ . Wtedy na tym pierścieniu

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n. \quad (1.12)$$

Współczynniki  $b_n$  można obliczyć ze wzoru

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(0, \rho)} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi.$$

gdzie  $r < \rho < R$ .

**Dowód.** Niech  $r < r_1 < |z| < R_1 < R$ . Wtedy

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(R_1, 0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(r_1, 0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(R_1, 0)} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} z^n d\xi + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(r_1, 0)} \frac{f(\xi)}{z^{n+1}} \xi^n d\xi \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n. \end{aligned}$$

□

**Przykład.** Funkcja

$$\frac{3 - 2z}{2 - 3z + z^2} = \frac{1}{1 - z} + \frac{1}{2 - z}$$

ma następujące rozwinięcia

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 + 2^{-n-1}) z^n, \quad |z| < 1;$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} z^n, \quad 1 < |z| < 2;$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} (1 + 2^n) z^{-n-1}, \quad 2 < |z|.$$

## 1.7 Funkcja wykładnicza

Funkcję wykładniczą można zdefiniować przez szereg

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Funkcja ta ma następujące własności:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2},$$

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z},$$

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z,$$

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}},$$

$$e^z = 1 \text{ wtedy i tylko wtedy gdy } z = i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Z funkcją  $e^z$  związane są funkcje trygonometryczne

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

i hiperboliczne

$$\operatorname{ch} z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Funkcje  $e^z$ ,  $\cos z$ ,  $\sin z$ ,  $\operatorname{ch} z$  i  $\operatorname{sh} z$  obcięte do  $\mathbb{R}$  mają wartości rzeczywiste. Możemy przy ich pomocy wyrazić  $e^z$  jak następuje:

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Funkcje  $\cos z$ ,  $\sin z$ ,  $\operatorname{ch} z$  i  $\operatorname{sh} z$  są w pewnym sensie przełужeniami analitycznymi jednej funkcji, na przykład  $\operatorname{ch} z$ :

$$\operatorname{sh} t = -i \operatorname{ch}(t - i\frac{\pi}{2}), \quad \sin t = \operatorname{ch}(it - i\frac{\pi}{2}).$$

Oto własności funkcji  $\operatorname{ch} z$ :

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch}(-z), \quad \operatorname{ch}(z + i\pi) = -\operatorname{ch} z,$$

$$i \partial_z \operatorname{ch} z = \operatorname{ch}(z + i\frac{\pi}{2}), \quad \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{ch}^2(z + i\frac{\pi}{2}) = 1.$$

## 1.8 Funkcja logarytm i funkcja potęgowa

Funkcja  $e^z$  przekształca bijectywnie pas  $\{z : -\pi < \text{Im} z < \pi\}$  na  $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$ . Funkcję odwrotną do  $e^z$  określoną na

$$\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0] \quad (1.13)$$

nazywamy gałęzią główną logarytmu i oznaczamy  $\log_{(0)} z$ . (Dziedzina (1.13) została wybrana dość arbitralnie). Ma własności:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \log_{(0)} z &= \frac{1}{z} \\ \log_{(0)} 1 &= 0. \end{aligned}$$

Dostajemy zatem wzór

$$\log_{(0)} z = \int_{\gamma} \frac{dw}{w}$$

gdzie  $\gamma$  jest dowolnym konturem wewnątrz (1.13) zaczynającym się w 1 i kończącym się w  $z$ .

Czasami przydatna jest funkcja argument (która nie jest holomorficzną)

$$\arg_{(0)} z := \text{Im} \log_{(0)} z.$$

Wychodząc ze wzoru

$$\frac{d}{dz} \log_{(0)}(1+z) = \frac{1}{1+z}$$

i całkując rozwinięcie dla  $\frac{1}{1+z}$  dostajemy

$$\log_{(0)}(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n, \quad |z| < 1.$$

Zauważmy, że dla zdefiniowanej powyżej funkcji logarytm nie dla wszystkich  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$  zachodzi wzór

$$\log_{(0)}(z_1 z_2) = \log_{(0)} z_1 + \log_{(0)} z_2. \quad (1.14)$$

(1.14) jest spełniony, jeśli  $|\arg z_1 + \arg z_2| < \pi$ .

Funkcja  $\log_{(0)} x$  obcięta do  $\mathbb{R}_+$  ma wartości w  $\mathbb{R}$ . Funkcję  $\log_{(0)} z$  możemy następująco wyrazić przez funkcje rzeczywiste:

$$\log_{(0)}(r(\cos \phi + i \sin \phi)) = \log r + i\phi, \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \phi \in ]-\pi, \pi[.$$

Jeśli  $\mu \in \mathbb{C}$ , to definiujemy gałąź główną funkcji potęgowej jako

$$\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0] \ni z \mapsto z_{(0)}^{\mu} := e^{\mu \log_{(0)} z}.$$

Zauważmy, że gdy  $\mu \in \mathbb{Z}$  to powyższa definicja sprowadza się do zwykłej potęgi (która zdefiniowana jest na całym  $\mathbb{C}$ , być może z wyjątkiem  $\{0\}$ ). Mamy tożsamości

$$\begin{aligned} 1_{(0)}^{\mu} &= 1, \\ \frac{d}{dz} z_{(0)}^{\mu} &= \mu z_{(0)}^{\mu-1}, \\ z_{(0)}^{\mu_1 + \mu_2} &= z_{(0)}^{\mu_1} z_{(0)}^{\mu_2}, \quad |\arg z_1 + \arg z_2| < \pi. \end{aligned}$$

Zdefiniujmy

$$\binom{\mu}{n} := \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{n!}.$$

Wtedy wychodząc ze wzoru Taylora dostajemy następujące rozwinięcie funkcji potęgowej:

$$(1+z)_{(0)}^{\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\mu}{n} z^n, \quad |z| < 1.$$

Funkcja  $z_{(0)}^{\mu}$  dla  $z \in \mathbb{R}_+$  i  $\mu \in \mathbb{R}$  ma wartości w  $\mathbb{R}_+$ . Funkcję  $z_{(0)}^{\mu}$  możemy następująco wyrazić przez funkcje rzeczywiste:

$$(r(\cos \phi + i \sin \phi))_{(0)}^{\alpha+i\beta} = r^{\alpha} e^{-\beta\phi} e^{i\alpha\phi+i\beta \log_{(0)} r}, \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \phi \in ]-\pi, \pi[.$$

Niech  $\theta \in \mathbb{R}$ . Funkcja  $e^z$  jest bijekcją również jeśli damy jej następującą dziedzinę i przeciwdziedzinę:

$$\{z : \theta - \pi < \operatorname{Im} z < \theta + \pi\} \ni z \mapsto e^z \in \mathbb{C} \setminus e^{i\theta} ]-\infty, 0].$$

Odwrotna do niej funkcja też będzie nazywana logarytmem. Będziemy ją oznaczać

$$\Omega_{\theta} := \mathbb{C} \setminus e^{i\theta} ]-\infty, 0] \ni z \mapsto \log_{(\theta)}(z).$$

Zauważmy, że jeśli  $\theta_1 < \theta_2 < \theta_1 + 2\pi$ , to na jednej ze spójnych składowych  $\Omega_{(\theta_1)} \cap \Omega_{(\theta_2)}$   $\log_{\theta_1}(z) = \log_{\theta_2}(z)$  na drugiej zaś,  $\log_{(\theta_1)} z + i2\pi = \log_{(\theta_2)} z$ .

Podobnie można zdefiniować

$$\Omega_{\theta} \ni z \mapsto z_{(\theta)}^{\mu} := e^{\mu \log_{(\theta)}(z)}.$$

Jeśli  $\theta_1 < \theta_2 < \theta_1 + 2\pi$ , to na jednej ze spójnych składowych  $\Omega_{\theta_1} \cap \Omega_{\theta_2}$  mamy  $z_{(\theta_1)}^{\mu} = z_{(\theta_2)}^{\mu}$  na drugiej zaś,  $z_{(\theta_1)}^{\mu} e^{i2\pi\mu} = z_{(\theta_2)}^{\mu}$

Jeśli  $\mu$  jest wymierne i równe nieskracalnemu ułamkowi  $\frac{p}{q}$ , to

$$z_{(\theta)}^{\mu} = z_{(\theta+q2\pi)}^{\mu}.$$

W przyszłości będziemy traktować  $\log_{(0)} z$  i  $z_{(0)}^{\mu}$  jako standardowe odmiany funkcji logarytm i funkcji potęgowej i będziemy pomijać indeks (0).

## 1.9 Punkty osobliwe funkcji analitycznych

Punkt  $z_0$  nazywamy izolowanym punktem osobliwym funkcji  $f$  jeśli istnieje  $r > 0$  taki, że  $f$  jest holomorfczna na  $K(z_0, r) \setminus \{z_0\}$  ale  $z_0$  nie należy do dziedziny funkcji  $f$ . Rozróżniamy następujące przypadki.

**Twierdzenie 1.15** (1) *Funkcja  $f$  ma w  $z_0$  osobliwość pozorną (usuwalną) gdy istnieje*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \neq \infty.$$

(2) Funkcja  $f$  ma w  $z_0$  biegun rzędu  $k = 1, 2, \dots$  gdy istnieje

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^k \neq 0, \infty.$$

(3) Jeśli izolowany punkt osobliwy  $z_0$  nie jest ani osobliwością pozorną ani biegunem, to mówimy, że funkcja  $f$  ma w  $z_0$  osobliwość istotną.

W wyżej opisanej sytuacji wiemy, że dla pewnego  $R > 0$  możemy rozwinąć funkcję  $f$  na  $K(z_0, R) \setminus \{z_0\}$  w szereg Laurenta:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Możemy wtedy rozpoznać typ osobliwości:

**Twierdzenie 1.16** (1) Funkcja  $f$  ma w  $z_0$  osobliwość pozorną (usuwalną)  $\Leftrightarrow a_n = 0$  dla  $n = -1, -2, \dots$

(2) Funkcja  $f$  ma w  $z_0$  biegun rzędu  $k = 1, 2, \dots \Leftrightarrow a_{-k} \neq 0$  i  $a_n = 0$  dla  $n = -k - 1, -k - 2, \dots$

(3) Funkcja  $f$  ma w  $z_0$  osobliwość istotną,  $\Leftrightarrow \inf\{n : a_n \neq 0\} = -\infty$ .

**Przykład.**

$$\frac{\sin z}{z}$$

ma w 0 osobliwość usuwalną.

$$(1 + z^2)^{-2}$$

ma w  $\pm i$  bieguny drugiego rzędu.

$$e^{1/z}$$

ma w 0 osobliwość istotną.

**Definicja 1.17** Niech  $\Omega \subset \mathbb{C}$  będzie otwarty. Funkcja  $f$  jest meromorficzna na  $\Omega$  gdy istnieją punkty  $z_1, z_2, \dots \in \Omega$  takie, że  $f$  jest holomorficzna na  $\Omega \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$  i punkty  $z_1, z_2, \dots$  są biegunami funkcji  $f$ .

**Przykład.** Funkcja

$$(\sin z)^{-1}$$

jest meromorficzna na  $\mathbb{C}$ .

**Definicja 1.18** Residuum funkcji  $f$  w punkcie  $z_0$  jest zdefiniowane jako

$$\operatorname{Res}f(z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, R_1)} f(z) dz,$$

gdzie  $0 < R_1 < R$ .

Zauważmy, że definicja ta nie zależy od wyboru  $R_1$ . Mamy

$$\frac{d}{dz} \frac{z^{n+1}}{n+1} = z^n, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}.$$

Dlatego

$$\int_{\partial K(z_0, R_1)} z^n dz = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}.$$

Poza tym

$$\int_{\partial K(z_0, R_1)} z^{-1} dz = 2\pi i.$$

Stąd wynika wzór

$$\operatorname{Res} f(z_0) = a_{-1}. \quad (1.15)$$

Jeśli  $f$  ma biegun rzędu najwyżej  $k$ , to residuum można obliczyć ze wzoru

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - z_0)^k f(z). \quad (1.16)$$

Jeśli funkcja  $f$  jest holomorphyzna na  $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ , to zachodzi wzór

$$\int_{\partial \Omega} f(z) dz = \sum_{j=1}^n 2\pi i \operatorname{Res} f(z_j). \quad (1.17)$$

**Przykład.** Jeśli

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2},$$

to

$$\operatorname{Res} f(i) = -\frac{i}{2a}$$

Zatem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(ia) = \frac{\pi}{a}.$$

**Lemat 1.19 (Lemat Jordana)** Niech  $a > 0$ . Dla  $R > 0$  oznaczamy

$$\gamma_R := [R, R + iR] \cup [R + iR, -R + iR] \cup [-R + iR, -R]$$

Wtedy

$$\sup_{R>0} \int_{\gamma_R} |e^{iaz}| |dz| < \infty.$$

**Dowód.** Mamy:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} |e^{iaz}| |dz| &= 2 \int_0^R e^{-ay} dy + e^{-aR} \int_{-R}^R dx \\ &= 2a^{-1}(1 - e^{-aR}) + 2Re^{-aR} \leq 2a^{-1} + 2ae^{-1}. \end{aligned}$$

□

Uwaga: podobne oszacowanie jest słuszne jeśli zastąpimy  $\gamma_R$  górnym półokręgiem o promieniu  $R$ .

**Przykład.** Niech

$$f(z) := \frac{ze^{iz}}{1+z^2}$$

Wtedy

$$\operatorname{Res}f(i) = \frac{e^{-1}}{2}.$$

Poza tym,

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \sup_{R>0} \int_{\gamma_R} |e^{iaz}| |dz| \sup_{z \in \gamma_R} \left| \frac{z}{1+z^2} \right| \leq C \sup_{z \in \gamma_R} \left| \frac{z}{1+z^2} \right|,$$

co dąży do zera gdy  $R \rightarrow \infty$ . Zatem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx = \operatorname{Im} \left( \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R,R]} f(z) dz \right) = \operatorname{Im} (2\pi i \operatorname{Res}f(i)) = \pi e^{-1}.$$

**Przykład.**

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ix\xi}}{x+i} dx = \begin{cases} 0 & \xi < 0, \\ -i\pi & \xi = 0, \\ -2i\pi e^{-\xi} & \xi > 0. \end{cases}$$

**Lemat 1.20** Niech funkcja holomorphyzna  $f$  ma w  $z_0$  biegun pierwszego rzędu. Zdefiniujmy krzywą

$$\gamma_r := \{z_0 + re^{i\phi} : \phi_0 < \phi < \phi_1\}.$$

Wtedy

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = (\phi_1 - \phi_0) i \operatorname{Res}f(z_0).$$

**Dowód.** Mamy

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + g(z),$$

gdzie  $g$  jest holomorphyzna w  $z_0$ . Oczywiście,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} g(z) dz = 0.$$

**Przykład.** Jeśli

$$f(z) := \frac{e^{iz}}{z},$$

to

$$\operatorname{Res}f(0) = 1$$

Dlatego

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_{-R}^R f(z) dz = \operatorname{Im}(\pi i \operatorname{Res}f(0)) = \pi.$$

## 1.10 Funkcje analityczne a punkt w nieskończoności

Przez  $\overline{\mathbb{C}}$  będziemy oznaczać sferę Riemanna, to znaczy  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

Niech  $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ . Mówimy, że  $f$  jest analityczna w  $\infty$ , gdy  $f(\frac{1}{z})$  jest analityczna w 0.

Punkt  $\infty$  nazywamy izolowanym punktem osobliwym funkcji  $f$ , gdy dla pewnego  $R$  funkcja  $f$  jest holomorphyzna na  $\mathbb{C} \setminus K(0, R)$  i  $\infty$  nie należy do dziedziny  $f$ . Rozróżniamy następujące przypadki:

1)  $f$  ma w  $\infty$  osobliwość pozorną, jeśli istnieje

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \neq \infty.$$

2)  $f$  ma w  $\infty$  biegun rzędu  $k = 1, 2, \dots$ , gdy istnieje

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)z^{-k} \neq 0, \infty.$$

3)  $f$  ma w  $\infty$  osobliwość istotną w przeciwnym razie.

W wyżej opisanej sytuacji wiemy, że dla pewnego  $R > 0$  możemy rozwinąć funkcję  $f$  na  $\mathbb{C} \setminus K(z_0, R)$  w szereg Laurenta:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Możemy wtedy rozpoznać typ osobliwości:

1) Funkcja  $f$  ma w  $\infty$  osobliwość pozorną (usuwalną) gdy  $a_n = 0$  dla  $n = 1, 2, \dots$

2) Funkcja  $f$  ma w  $\infty$  biegun rzędu  $k = 1, 2, \dots$  gdy  $a_k \neq 0$  i  $a_n = 0$  dla  $n = k + 1, k + 2, \dots$

3) Funkcja  $f$  ma w  $\infty$  osobliwość istotną, jeśli

$$\sup\{n : a_n \neq 0\} = \infty.$$

**Przykład.** Funkcja  $e^z$  ma w  $\infty$  istotny punkt osobliwy.

**Definicja 1.21** Jeśli  $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$  jest otwarty to mówimy, że funkcja  $f$  jest meromorphyzna na  $\Omega$  gdy istnieją punkty  $z_1, z_2, \dots \in \Omega$  takie, że  $f$  jest holomorphyzna na  $\Omega \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$  i ma w  $\{z_1, z_2, \dots\}$  osobliwości pozorne bądź bieguny.

**Przykład.** Punkt  $\infty$  nie jest izolowanym punktem osobliwym funkcji

$$(\sin z)^{-1}.$$

Zatem, funkcja ta nie jest meromorphyzna na  $\overline{\mathbb{C}}$ .

**Definicja 1.22** Residuum funkcji  $f$  w  $\infty$  jest równe

$$\text{Res}f(\infty) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial(\mathbb{C} \setminus K(0, R_1))} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(0, R_1)} f(z) dz$$

gdzie  $R_1 > R$ .

Zauważmy, że definicja ta nie zależy od wyboru  $R_1$ . Mamy wzór

$$\operatorname{Res}f(\infty) = -a_{-1}. \quad (1.18)$$

W praktyce możemy wyliczać residuum w nieskończoności ze wzoru

$$\operatorname{Res}f(\infty) = \operatorname{Res}g(0), \quad g(w) := -f\left(\frac{1}{w}\right) \frac{1}{w^2} \quad (1.19)$$

Jeśli funkcja  $f$  jest holomorphyzna na  $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ , gdzie  $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ , to zachodzi wzór

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = \sum_{j=1}^n 2\pi i \operatorname{Res}f(z_j). \quad (1.20)$$

**Przykład.** Niech  $f(z) := \frac{z^{99}}{1-z^{100}}$ . Wtedy

$$\operatorname{Res}f(\infty) = 1.$$

Dlatego,

$$\int_{\partial K(0,2)} f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res}f(\infty) = -2\pi i.$$

**Twierdzenie 1.23** *Każda funkcja meromorphyzna na  $\overline{\mathbb{C}}$  jest wymierna. Innymi słowy, każda funkcja analityczna z  $\overline{\mathbb{C}}$  w  $\overline{\mathbb{C}}$  jest wymierna.*

**Dowód.** Niech  $f$  będzie meromorphyzna na  $\overline{\mathbb{C}}$ . Ponieważ sfera Riemanna jest zwarta a punkty osobliwe  $f$  są izolowane, więc jest ich skończenie wiele. Niech  $\{z_1, \dots, z_m, \infty\}$  będą punktami osobliwymi funkcji  $f$ . Niech

$$\sum_{n=1}^{k_i} a_{n,i} (z - z_i)^{-n}$$

będą osobliwymi częściami rozwinięć w szereg Laurent'a wokół  $z_i$  oraz

$$\sum_{n=1}^{k_\infty} a_{n,\infty} z^n$$

niech będzie częścią rozwinięcia w szereg Laurent'a wokół  $\infty$  z dodatnimi potęgami. Wtedy

$$f(z) - \sum_{i=1}^m \sum_{n=1}^{k_i} a_{n,i} (z - z_i)^{-n} - \sum_{n=1}^{k_\infty} a_{n,\infty} z^n$$

jest funkcją analityczną na  $\overline{\mathbb{C}}$ . Zatem na mocy twierdzenia Liouville'a jest stała.  $\square$

## 1.11 Funkcje analityczne z $\overline{\mathbb{C}}$ w $\overline{\mathbb{C}}$

**Definicja 1.24** Niech  $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$  i  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ . Mówimy, że  $f$  jest analityczna w  $z_0 \in \Omega$ , gdy spełnione są następujące warunki:

- 1) gdy  $z_0 \neq \infty$ ,  $f(z_0) \neq \infty$ , to  $f$  jest analityczna w otoczeniu  $z_0$  w zwykłym sensie;
- 2) gdy  $z_0 \neq \infty$ ,  $f(z_0) = \infty$ , to  $\frac{1}{f(z)}$  jest analityczna w otoczeniu  $z_0$  w zwykłym sensie;
- 3) gdy  $z_0 = \infty$  i  $f(z_0) \neq \infty$ , to  $f(\frac{1}{z})$  jest analityczna w otoczeniu 0 w zwykłym sensie;
- 4) gdy  $z_0 = f(z_0) = \infty$ , to  $\frac{1}{f(\frac{1}{z})}$  jest analityczna w otoczeniu 0 w zwykłym sensie.

**Twierdzenie 1.25** Niech  $f$  będzie meromorficzna na  $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ . Rozszerzmy funkcję  $f$  na cały  $\Omega$  kładąc

$$f(z_j) := \lim_{z \rightarrow z_j} f(z),$$

w szczególności w biegunach funkcji  $f$  kładziemy  $f(z_j) := \infty$ . Wtedy funkcja

$$f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{C}},$$

jest analityczna w sensie definicji (1.24).

**Twierdzenie 1.26** (1) Każda funkcja holomorphyzna z  $\overline{\mathbb{C}}$  w  $\mathbb{C}$  jest stała.

(2) Każda bijekcja analityczna  $\overline{\mathbb{C}}$  w siebie jest homografią.

(3) Każda funkcja analityczna z  $\overline{\mathbb{C}}$  w  $\overline{\mathbb{C}}$  jest wymierna.

**Dowód.** (1) jest preformulowaniem twierdzenia Liouville'a. (3) jest preformulowaniem Twierdzenia (1.23). Aby dowieść (2) korzystamy z (3).  $\square$

## 1.12 Jednoznaczność przedłużania funkcji analitycznych

**Twierdzenie 1.27** Niech  $f, g$  będą holomorphyzne w otwartym spójnym obszarze  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Załóżmy, że istnieje ciąg  $\{z_n\} \subset \Omega$  taki, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n =: z_0 \in \Omega$  i  $z_n \neq z_0$  dla  $n = 1, 2, \dots$ . Niech

$$f(z_n) = g(z_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Wtedy  $f = g$  na całym  $\Omega$ .

**Dowód.** Niech

$$\Omega_1 := \{z \in \Omega : f^{(j)}(z) = g^{(j)}(z), j = 0, 1, \dots\}.$$

Zbiór  $\Omega_1$  jest domknięty w  $\Omega$  jako przecięcie domkniętych w  $\Omega$  zbiorów

$$\{z \in \Omega : f^{(j)}(z) = g^{(j)}(z)\}.$$

Jest on również otwarty, bo dla każdego  $\tilde{z}_0 \in \Omega_1$  istnieje  $r > 0$  takie, że na  $K(\tilde{z}_0, r)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\tilde{z}_0)}{n!} (z - \tilde{z}_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(\tilde{z}_0)}{n!} (z - \tilde{z}_0)^n = g(z).$$

Jest on wreszcie niepusty, bo  $z_0 \in \Omega_1$ . W rzeczy samej, istnieje  $r > 0$  takie, że na  $K(z_0, r)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

i

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n.$$

Niech  $c_j := a_j - b_j$  i  $m$  niech będzie najmniejszym indeksem takim, że  $c_m \neq 0$ . Wtedy

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - g(z_n)}{(z_n - z_0)^m} = c_m \neq 0$$

co jest sprzecznością.  $\square$

### 1.13 Przedłużanie funkcji analitycznych wzdłuż drogi

Niech  $\Omega \subset \mathbb{C}$  będzie otwartym spójnym zbiorem i  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  funkcją analityczną. Niech  $[0, 1] \ni \tau \mapsto \gamma(\tau) \in \mathbb{C}$  będzie krzywą taką, że  $\gamma(0) \in \Omega$ . Mówimy, że można przedłużyć  $f$  wzdłuż  $\gamma$ , gdy dla każdego  $\tau \in [0, 1]$  istnieją  $r_\tau > 0$  i funkcja analityczna  $f_\tau : K(\gamma(\tau), r_\tau) \rightarrow \mathbb{C}$  takie, że

(1)  $f_0 = f$  na  $K(\gamma(0), r_0) \cap \Omega$ ;

(2) Dla każdego  $\tau_0 \in [0, 1]$  istnieje  $\epsilon > 0$  taki, że dla każdego  $\sigma \in [0, 1] \cap [\tau_0 - \epsilon, \tau_0 + \epsilon]$  mamy  $\gamma(\tau_0) \in K(\gamma(\sigma), r_\sigma)$  oraz  $f_\tau = f_\sigma$  na  $K(\gamma(\tau_0), r_{\tau_0}) \cap K(\gamma(\sigma), r_\sigma)$ .

**Twierdzenie 1.28** *Niech  $\sigma \in [0, 1]$  i  $z_\sigma = \gamma(\sigma)$ . Wtedy  $f_\tau(z_\tau)$  zależy tylko od funkcji  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  i krzywej  $\gamma$  (a nie zależy od wyboru  $r_\tau, f_\tau$ ).*

**Definicja 1.29** *Liczbę*

$$f(z_\sigma)_{z_\sigma = \gamma(\sigma)} := f_\sigma(z_\sigma)$$

*nazywamy wartością w punkcie  $z_\sigma$  funkcji  $f$  przedłużonej wzdłuż krzywej  $\gamma$ .*

**Dowód.** Niech  $r_\tau, f_\tau$  i  $\tilde{r}_\tau, \tilde{f}_\tau$  są dwiema rodzinami spełniającymi warunki definicji przedłużenia funkcji. Załóżmy, że istnieje  $\tau \in [0, 1]$  taki, że  $f_\tau \neq \tilde{f}_\tau$  na  $K(\gamma(\tau), \min(r_\tau, \tilde{r}_\tau))$ . Niech

$$\tau_0 = \inf\{\tau \in [0, 1] : f_\tau \neq \tilde{f}_\tau \text{ na } K(\gamma(\tau), \min(r_\tau, \tilde{r}_\tau))\}.$$

Oczywiście,  $\tau_0 > 0$ . Niech  $\epsilon > 0$  spełnia warunek (2) definicji zarówno dla rodziny  $f$  jak i  $\tilde{f}$  bez tyldy. Niech  $\tau_- \in [\tau_0 - \epsilon, \tau_0]$ ,  $\tau_+ \in [\tau_0, \tau_0 + \epsilon]$ . Wtedy

$$f_{\tau_-} = f_{\tau_+} \text{ na } K(\gamma(\tau_-), r_{\tau_-}) \cap K(\gamma(\tau_+), r_{\tau_+});$$

$$\tilde{f}_{\tau_-} = \tilde{f}_{\tau_+} \text{ na } K(\gamma(\tau_-), \tilde{r}_{\tau_-}) \cap K(\gamma(\tau_+), \tilde{r}_{\tau_+});$$

$$f_{\tau_-} = \tilde{f}_{\tau_-} \text{ na } K(\gamma(\tau_-), \min(r_{\tau_-}, \tilde{r}_{\tau_-})).$$

Czyli  $f_{\tau_+} = \tilde{f}_{\tau_+}$  na

$$K(\gamma(\tau_-), \min(r_{\tau_-}, \tilde{r}_{\tau_-})) \cap K(\gamma(\tau_+), \min(r_{\tau_+}, \tilde{r}_{\tau_+})). \quad (1.21)$$

Zbiór (1.21) jest niepusty, bo  $\gamma(\tau_0)$  do niego należy, jest otwarty i wypukły jako przecięcie kół otwartych. Jest więc spójny. Zatem na mocy jednoznaczności przedłużania funkcji analitycznych  $f_{\tau_+} = \tilde{f}_{\tau_+}$  na  $K(\gamma(\tau_+), \min(r_{\tau_+}, \tilde{r}_{\tau_+}))$ , co przeczy definicji  $\tau_0$ .  $\square$

**Przykład.** Niech krzywa  $[0, 1] \ni \tau \mapsto \gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  będzie zamknięta (czyli  $w := \gamma(0) = \gamma(1)$ ) i okrąża punkt 0  $n \in \mathbb{Z}$  razy. Załóżmy też, że  $\gamma(0) \in \mathbb{C} \setminus e^{i\theta} ] - \infty, 0]$ . Wtedy można przedłużyć funkcje  $\log_{(\theta)} z$  i  $z_{(\theta)}^\mu$  wzdłuż krzywej  $\gamma$  i mamy

$$\log_{(\theta)}(w)_{w=\gamma(1)} = n2\pi i + \log_{(\theta)} w, \quad w_{(\theta)w=\gamma(1)}^\mu = e^{n\mu 2\pi i} w_{(\theta)}^\mu.$$

**Przykład.** W ramach analizy rzeczywistej definiuje się osobno funkcje odwrotne do trygonometrycznych i hiperbolicznych

$$\begin{aligned} \operatorname{arch} t &= \log(\sqrt{t^2 - 1} + t) \\ &= -\log(\sqrt{t^2 - 1} + t), \quad t \in [1, \infty[ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arsht} &= \log(\sqrt{t^2 + 1} + t) \\ &= -\log(-\sqrt{t^2 + 1} - t), \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arccos} t &= \frac{1}{i} \log(i\sqrt{t^2 - 1} + t) \\ &= -\frac{1}{i} \log(-i\sqrt{t^2 - 1} + t), \quad t \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Funkcje te mogą być traktowane jako przedłużenia analityczne jednej z nich, na przykład  $\operatorname{arch} t$ . Mamy bowiem

$$\begin{aligned} \operatorname{arch}(\pm is) &= \pm i \frac{\pi}{4} + \operatorname{arsh} s, \quad s \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{arch} t &= \pm i \operatorname{arccos} t, \quad t \in ]-1, 1[, \\ \operatorname{arch}(-t) &= \pm i\pi + \operatorname{arch} t, \quad t \in [1, \infty[, \end{aligned}$$

gdzie  $+$  lub  $-$  zależy od tego, czy przedłużamy górą czy dołem.

Zauważmy też, że okrążenie punktu  $\pm 1$  prowadzi do pomnożenia  $\operatorname{arch} t$  przez  $-1$ , zaś okrążenie  $[-1, 1]$  prowadzi do dodania  $2\pi i$  do  $\operatorname{arch} t$ .

**Przykład.**

$$\operatorname{arctg} t = \frac{1}{2i} (\log(1 + it) - \log(1 - it)).$$

**Przykład.** Rozważmy funkcję

$$f(z) = z^\alpha (z - 1)^\beta.$$

Możemy ją rozumieć jako iloczyn gałęzi głównych  $z^\alpha$  i  $(z - 1)^\beta$ , który jest dobrze określony na  $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 1]$ .

Załóżmy, że krzywa  $\gamma$  zaczyna się w dowolnym punkcie  $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 1]$ , obiega odcinek  $[0, 1]$  w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek i wraca do punktu wyjścia, np.  $\partial K(0, R)$ , gdzie  $R > 1$ . Wtedy wartość funkcji  $f(z)$  po przedłużeniu analitycznym wzdłuż  $\gamma$  wartość funkcji  $f(z)$  mnoży się przez czynnik  $e^{i2\pi(\alpha+\beta)}$ . W szczególności, jeśli

$$\alpha + \beta \in \mathbb{Z}, \quad (1.22)$$

to wracamy do tej samej wartości funkcji  $f$ . Wtedy możemy naszą funkcję zdefiniować na  $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$  jako jednoznaczny funkcję analityczną.

**Przykład.** Policzmy całkę

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}(1+x)} dx$$

Rozważmy

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z(z-1)}(1+z)}$$

rozumianą jako funkcję analityczną na  $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$  w sposób opisany powyżej. W  $\infty$  residuum jest równe 0. Zatem

$$\int_{[1, 0^-, 1^-]} f(z) dz = -e^{-i\frac{1}{2}\pi} I + e^{-i\frac{3}{2}\pi} I = -2\pi i \operatorname{Res} f(-1),$$

$$\operatorname{Res} f(-1) = \lim_{z \rightarrow -1} f(z)(z+1) = \frac{1}{\sqrt{z(z-1)}} \Big|_{z=-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Zatem

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

### 1.14 \* Powierzchnie Riemanna i funkcje analityczne wieloznaczne

Niech  $\Xi$  będzie przestrzenią topologiczną Hausdorffa i  $\phi$  odwzorowaniem z  $\Xi$  w  $\mathbb{C}$ . Mówimy, że  $(\Xi, \phi)$  jest powierzchnią Riemanna nad  $\mathbb{C}$ , gdy dla każdego  $v \in \Xi$  istnieje  $r > 0$  oraz ciągle odwzorowanie  $\psi_{v,r} : K(\phi(v), r) \rightarrow \Xi$  takie, że

$$\phi \circ \psi_{v,r}(z) = z, \quad z \in K(\phi(v), r)$$

i  $\psi_{v,r}(K(\phi(v), r))$  jest otwarty w  $\Xi$ .

Niech  $(\Xi, \phi)$  będzie powierzchnią Riemanna nad  $\mathbb{C}$ .

Ma miejsce następujący fakt: Dla każdego  $v \in \Xi$ , istnieje  $r_v \in ]0, \infty]$  takie, że odwzorowanie  $\psi_{v,r_v}$  o własnościach opisanych powyżej istnieje, zaś dla  $r > r_v$  takie  $\psi_{r,v}$  nie istnieje. Dostajemy w ten sposób funkcję  $\Xi \ni v \mapsto r_v \in ]0, \infty]$ . Będziemy pisać  $\psi_v := \psi_{v,r_v}$ .

Niech  $f : \Xi \rightarrow \mathbb{C}$ . Mówimy, że  $(\Xi, \phi, f)$  jest funkcją analityczną na  $\Xi$ , gdy dla każdego  $v$  to  $f \circ \psi_v : K(\phi(v), r_v) \rightarrow \mathbb{C}$  jest funkcją analityczną w zwykłym sensie.

Niech  $(\Xi, \phi, f)$  będzie funkcją analityczną na  $\Xi$ . Dla każdego  $v \in \Xi$ , niech  $r_{v,f}$  oznacza promień zbieżności funkcji  $f \circ \psi_{v,r}$  dla pewnego  $r > 0$ . Oczywiście,  $0 < r_v < r_{v,f}$ .

Mówimy, że  $(\Xi, \phi, f)$  jest maksymalną funkcją analityczną, gdy dla każdego  $v \in \Xi$ ,  $r_v = r_{v,f}$ .

Mówimy, że  $(\Xi, \phi, f)$  jest zredukowana, gdy z tego, że  $v_1, v_2 \in \Xi$ ,  $\phi(v_1) = \phi(v_2) = z_0$  i  $0 < r < \min(r_{v_1}, r_{v_2})$  wynika, że funkcje

$$\begin{aligned} K(z_0, r) \ni z &\mapsto f(\psi_{v_1, r}(z)), \\ K(z_0, r) \ni z &\mapsto f(\psi_{v_2, r}(z)), \end{aligned}$$

są różnymi funkcjami. Jeśli  $(\Xi, \phi, f)$  nie jest funkcją zredukowaną, zawsze można ją w jednoznaczny sposób zredukować. Wprowadzamy w  $\Xi$  relację:  $v_1 \sim v_2$  gdy  $\phi(v_1) = \phi(v_2)$  i dla  $r := \min(r_{v_1}, r_{v_2})$

$$f \circ \psi_{v_1, r} = f \circ \psi_{v_2, r}.$$

Wtedy  $\sim$  jest relacją równoważności. Definiujemy

$$\Xi_{\text{red}} := \Xi / \sim,$$

Niech  $\phi^{\text{red}} : \Xi \rightarrow \Xi_{\text{red}}$  będzie kanoniczną surjekcją. Definiujemy również

$$\phi_{\text{red}}([v]) := \phi(v), \quad f_{\text{red}}([v]) := f(v).$$

Wtedy  $(\Xi_{\text{red}}, \phi_{\text{red}})$  jest powierzchnią Riemanna nad  $\mathbb{C}$ ,  $(\Xi_{\text{red}}, \phi_{\text{red}}, f_{\text{red}})$  jest zredukowaną funkcją analityczną i spełnione są warunki

$$\phi = \phi_{\text{red}} \circ \phi^{\text{red}}, \quad f = f_{\text{red}} \circ \phi^{\text{red}}.$$

Niech  $(\Xi_1, \phi_1, f_1)$  i  $(\Xi, \phi, f)$  będą funkcjami analitycznymi. Mówimy, że  $(\Xi_1, \phi_1, f_1)$  jest przedłużeniem  $(\Xi_0, \phi_0, f_0)$ , gdy  $\Xi_0 \subset \Xi_1$  i  $\phi_1, f_1$  obcięte do  $\Xi_0$  pokrywają się z  $\phi_0, f_0$ .

Każdą zredukowaną funkcję analityczną można w sposób jednoznaczny przedłużyć do maksymalnej zredukowanej funkcji analitycznej.

### 1.15 \* Homotopia krzywych

Niech  $\Omega$  będzie otwartym podzbiorem  $\mathbb{C}$  i  $z_1, z_2 \in \Omega$ . Oznaczmy przez  $K(z_0, z_1, \Omega)$  zbiór krzywych zaczynających się w  $z_0$  i kończących się w  $z_1$ , tzn  $\gamma(0) = z_0$ ,  $\gamma(1) = z_1$ .

Niech  $\gamma_0, \gamma_1 \in K(z_0, z_1, \Omega)$ . Mówimy, że  $\gamma_0$  jest homotopijnie równoważna  $\gamma_1$  i piszemy  $\gamma_0 \sim \gamma_1$  wtedy i tylko wtedy gdy istnieje funkcja ciągła  $[0, 1] \times [0, 1] \ni (t, s) \mapsto H(t, s)$  taka, że  $H(t, 0) = \gamma_0(t)$  i  $H(t, 1) = \gamma_1(t)$ .

**Twierdzenie 1.30** Niech  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  będzie analityczna,  $\gamma_0, \gamma_1 \in K(z_0, z_1, \Omega)$  będą kawałkami gładkie i homotopijnie równoważne. Wtedy

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

**Twierdzenie 1.31** Homotopijna równoważność jest relacją równoważności.

**Dowód.** Kładąc  $H(t, s) = \gamma_0(t)$  dostajemy  $\gamma_0 \sim \gamma_0$ .

Kładąc  $H_{10}(t, s) := H_{01}(t, 1 - s)$  dostajemy  $\gamma_0 \sim \gamma_1 \Rightarrow \gamma_1 \sim \gamma_0$ .

Kładąc

$$H)_{2(t,s)} := \begin{cases} H_{01}(t, 2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}; \\ H_{12}(t, 2s - 1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

dostajemy  $\gamma_0 \sim \gamma_1, \gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \gamma_0 \sim \gamma_2$ .

Zbiór klas homotopii krzywych zaczynających się w  $z_0$  i kończących w  $z_1$  oznaczany jest przez

$$\Pi(z_0, z_1, \Omega) := K(z_0, z_1, \Omega) / \sim .$$

**Twierdzenie 1.32** Niech  $\Omega \subset \mathbb{C}$  będzie otwarty i spójny. Następujące warunki są równoważne:

- (1)  $\Pi(z_0, z_0, \Omega)$  jest jednoelementowy dla każdego  $z_0 \in \Omega$ .
- (2) Istnieje  $z_0 \in \Omega$  taki, że  $\Pi(z_0, z_0, \Omega)$  jest jednoelementowy.

Jeśli spełnione są warunki powyższego twierdzenia, mówimy, że zbiór  $\Omega$  jest jednospójny.

## 1.16 \* Składanie krzywych i grupa homotopii

Niech  $z_0, z_1 \in \Omega, \gamma \in K(z_0, z_1, \Omega)$ . Definiujemy  $\gamma^{-1} \in K(z_1, z_0, \Omega)$ .

$$\gamma^{-1}(t) := \gamma(1 - t).$$

Oczywiście, jeśli  $\gamma' \sim \gamma$ , to  $(\gamma')^{-1} \sim \gamma^{-1}$ .

Niech  $z_0, z_1, z_2 \in \Omega, \gamma_0 \in K(z_0, z_1, \Omega), \gamma_1 \in K(z_1, z_2, \Omega)$ . Definiujemy  $\gamma_0 \circ \gamma_1 \in K(z_0, z_2, \Omega)$ :

$$\gamma_0 \circ \gamma_1(t) := \begin{cases} \gamma_0(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ \gamma_1(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Oczywiście, jeśli  $\gamma_0 \sim \gamma'_0, \gamma_1 \sim \gamma'_1$ , to

$$\gamma_0 \circ \gamma_1 \sim \gamma'_0 \circ \gamma'_1.$$

Jeśli  $\gamma_2 \in K(z_2, z_3, \Omega)$

$$(\gamma_0 \circ \gamma_1) \circ \gamma_2 \sim \gamma_0 \circ (\gamma_1 \circ \gamma_2).$$

Jeśli przez  $z$  oznaczamy krzywą stałą równą  $z \in \Omega$ , to dla  $z_0, z_1 \in \Omega, \gamma \in K(z_0, z_1, \Omega)$ ,

$$z_0 \circ \gamma \sim \gamma \circ z_1 \sim \gamma.$$

W szczególności, dla każdego  $z_0 \in \Omega, \Pi(z_0, z_0, \Omega)$  jest grupą. Jeśli zbiór  $\Omega$  jest spójny, to grupa  $\Pi(z_0, z_0, \Omega)$  jest izomorficzna dla różnych  $z_0 \in \Omega$ . Nazywamy ją grupą homotopii zbioru  $\Omega$ . Oznaczamy ją przez  $\Pi(\Omega)$ .

### Przykłady

- (1)  $\Pi(\mathbb{C})$  jest grupą jednoelementową.
- (2)  $\Pi(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$  (liczba okrążeń wokół zera).

(3)  $\Pi(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}) = \mathbb{F}_2$  – grupa wolna o dwóch generatorach. Jako generatory można wybrać  $\tau_0$  – okrążenie 0,  $\tau_1$  – okrążenie 1. Grupa  $\mathbb{F}_2$  składa się z elementów następujących typów:

$$\begin{aligned} \tau_1^{n_p} \tau_0^{m_p} \cdots \tau_1^{n_0} \tau_0^{m_0}, & \quad \tau_0^{m_{p+1}} \tau_1^{n_p} \cdots \tau_1^{n_0} \tau_0^{m_0}, \\ \tau_1^{n_p} \tau_0^{m_p} \cdots \tau_0^{m_1} \tau_1^{n_0}, & \quad \tau_0^{m_{p+1}} \tau_1^{n_p} \cdots \tau_0^{m_1} \tau_1^{n_0}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

gdzie  $n_i, m_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

### 1.17 \* Nakrycie uniwersalne

Niech  $\Omega \subset \mathbb{C}$  będzie otwarte i spójne. Ustalmy  $z_0 \in \Omega$ . Nakryciem uniwersalnym  $\Omega$  z punktem bazowym  $[z_0]$  nazywamy  $(\text{Cov}(\Omega), \phi, [z_0])$ , gdzie

$$\text{Cov}(\Omega) := \bigcup_{z \in \Omega} \Pi(z_0, z, \Omega),$$

$\gamma : \text{Cov}(\Omega) \rightarrow \Omega$  jest zadane przez  $\phi([\gamma]) := \gamma(1)$ .  $\text{Cov}(\Omega)$  jest wyposażone w naturalną topologię. Oczywiście,  $(\text{Cov}(\Omega), \phi)$  jest spójną i jednospójną powierzchnią Riemanna nad  $\mathbb{C}$ .

### 1.18 \* Nakrycie wyznaczone przez podgrupę grupy homotopii

Niech  $G$  będzie podgrupą  $\Pi(z_0, z_0, \Omega)$ . W  $\Pi(z_0, z, \Omega)$  wprowadzamy relację: Dla  $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \Pi(z_0, z, \Omega)$  piszemy  $[\gamma_1] \underset{G}{\sim} [\gamma_2]$ , gdy  $[\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}] \in G$ . Jest to relacja równoważności. Będziemy oznaczali przez  $[\gamma]_G$  klasę abstrakcji  $\gamma$  względem tej relacji. Definiujemy

$$\Pi_G(z_0, z, \Omega) := \Pi(z_0, z, \Omega) / \underset{G}{\sim}.$$

Nakryciem  $\Omega$  związanym z grupą  $G$  nazywamy  $(\text{Cov}_G(\Omega), \phi_G, [z_0]_G)$ , gdzie

$$\text{Cov}_G(\Omega) := \bigcup_{z \in \Omega} \Pi_G(z_0, z, \Omega),$$

$$\phi_G([\gamma]_G) = \gamma(1).$$

Mamy oczywiście naturalne odwzorowanie

$$\phi^G : \text{Cov}(\Omega) \rightarrow \text{Cov}_G(\Omega), \quad \phi^G([\gamma]) = [\gamma]_G,$$

spełniające związek  $\phi_G \circ \phi^G = \phi$ . Oczywiście,  $(\text{Cov}_G(\Omega), \phi)$  jest spójną (leż niekoniecznie jednospójną) powierzchnią Riemanna nad  $\mathbb{C}$ .

### 1.19 \* Funkcja pierwotna

**Twierdzenie 1.33** Niech  $\Omega \subset \mathbb{C}$  będzie jednospójnym obszarem a  $\Omega \ni z \mapsto f(z)$  funkcją holomorficzną. Ustalmy  $z_0 \in \Omega$ . Zdefiniujemy

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(w) dw,$$

gdzie  $\gamma_z$  jest dowolną krzywą leżącą w  $\Omega$  łączącą  $z_0$  i  $z$ . Wtedy  $F(z)$  nie zależy od wyboru krzywej  $i$

$$F'(z) = f(z).$$

Jeśli  $\Omega$  jest spójny i otwarty, ale niekoniecznie jednocspójny, to powyższą konstrukcję należy zmodyfikować. Jeśli  $[\gamma] \in \Pi(z_0, z, \Omega) \subset \text{Cov}(\Omega)$ , to kładziemy

$$F([\gamma]) := \int_{\gamma} f(w)dw.$$

Dostajemy funkcję analityczną  $F : \text{Cov}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ , która spełnia

$$F'([\gamma]) = f(\phi([\gamma])), \quad F([z_0]) = 0.$$

## 1.20 \* Funkcja logarytm i potęgowa

Funkcję logarytm można zdefiniować jako funkcję pierwotną do funkcji  $\frac{1}{z}$  z punktem bazowym  $z_0 = 1$ . Dostajemy wtedy funkcję na nakryciu uniwersalnym

$$\text{Cov}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \ni v \mapsto \log v := \int_{\gamma} \frac{dw}{w}, \quad v = [\gamma].$$

Jest ona zredukowana i maksymalna.

Niech  $\mu \in \mathbb{C}$ . Funkcję  $z^\mu$  definiujemy najpierw na nakryciu uniwersalnym  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  jako

$$\text{Cov}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \ni v \mapsto e^{\mu \log v}. \quad (1.24)$$

Jeśli  $\mu \neq 0, 1, 2, \dots$ , jest to maksymalna funkcja analityczna. Jeśli  $\mu \notin \mathbb{Q}$ , to jest ona również zredukowana.

Jeśli  $\mu \in \mathbb{Q}$ , to (1.24) jest niezredukowana. Niech  $\mu = \frac{p}{q}$  dla nieskracalnego ułamka, gdzie  $q \in \{1, 2, \dots\}$ . Wtedy  $v^\mu = 1$ , jeśli  $v \in Z_q \subset \Pi(1, 1, \mathbb{C} \setminus \{0\}) \subset \text{Cov}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ . Po zredukowaniu dostajemy funkcję

$$\text{Cov}_{Z_q}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \ni v \mapsto e^{\mu \log v}. \quad (1.25)$$

## 1.21 \* Funkcja $z^\alpha(z-1)^\beta$ .

Funkcję  $z^\alpha(z-1)^\beta$  można najpierw zdefiniować na nakryciu uniwersalnym  $\text{Cov}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$ . Jest ona wtedy niezredukowana.

Opiszmy teraz jej zredukowane wersje w niektórych sytuacjach. Załóżmy najpierw, że mamy do czynienia z generyczną sytuacją, kiedy  $\alpha$  i  $\beta$  są niewymierne i niewspółmierne, tzn.  $\alpha n + \beta m \in \mathbb{Q}$  implikuje  $n = m = 0$ . Wtedy w grupie  $\mathbb{F}_2$  wprowadzamy podgrupę  $G$  zadaną przez

$$\sum_j n_j = \sum_j m_j = 0,$$

gdzie  $n_j, m_j$  są liczbami występującymi w (1.23). Wtedy  $z^\alpha(z-1)^\beta$  można przenieść na nakrycie  $\text{Cov}_G(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$ , i dostajemy wtedy zredukowaną maksymalną funkcję analityczną.

Inną sytuację mamy, gdy  $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ . Wprowadzamy wtedy podgrupę  $H$  zadaną przez

$$\sum_{j=0}^{\infty} n_j = \sum_{j=0}^{\infty} m_j$$

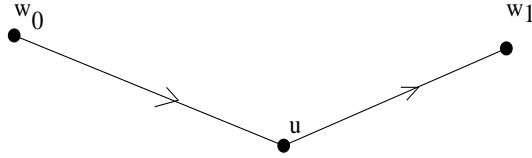
i funkcję  $z^\alpha(z-1)^\beta$  przenosimy na nakrycie  $\text{Cov}_H(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$ . Dostajemy wtedy zredukowaną maksymalną funkcję analityczną.

## 1.22 Notacja do oznaczania krzywych

Teraz opiszemy notację, którą będziemy stosować do oznaczania krzywych.

Czasami można stosować łamane postaci

$$[w_0, u, w_1] := [w_0, u] \cup [u, w_1].$$

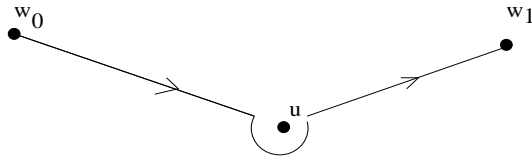


Osobliwość funkcji w  $u$  może prowadzić do kłopotów w postaci rozbieżności całki. Można również omijać punkt  $u$  małym łukiem o promieniu  $r$  i rozważać łamaną postaci:

$$[w_0, u + re^{i\phi_0}] \cup \{u + re^{i\phi} : \phi \in [\phi_0, \phi_1]\} \cup [u + re^{i\phi_1}, w_1]. \quad (1.26)$$

gdzie  $w_0 := u + Re^{i\phi_0}$ ,  $w_1 := u + R_1e^{i\phi_1}$ ,  $R_0 > r$ ,  $R_1 > r$ ,  $\phi_0 < \phi_1$  i  $|\phi_0 - \phi_1| < 2\pi$ . Oczywiście, całka po takiej konturze nie zależy od  $r$ , dla dostatecznie małego  $r$ . Zauważmy, że punkt rozgałęzienia  $u$  jest omijany łukiem w kierunku przeciwnym do ruch wskazówek. Krzywą powyższą będziemy oznaczali

$$[w_0, u^+, w_1].$$

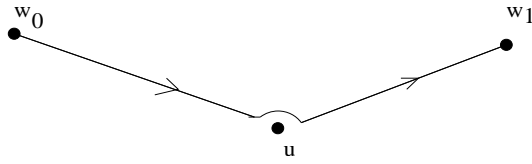


Podobnie, warto mieć oznaczenie na łamaną

$$[w_0, u + re^{i\phi_0}] \cup \{u + re^{i\phi} : \phi \in [\phi_1, \phi_0]\} \cup [u + re^{i\phi_1}, w_1]. \quad (1.27)$$

gdzie  $R_0 > r$ ,  $R_1 > r$ ,  $\phi_1 < \phi_0$ ,  $|\phi_0 - \phi_1| < 2\pi$ . Różni się ona od (1.26) tym, że punkt rozgałęzienia  $u$  obiegamy zgodnie z ruchem wskazówek. Krzywą (1.27) będziemy oznaczać przez

$$[w_0, u^-, w_1].$$



$[u^+]$  będzie oznaczało kontur obiegający punkt  $u$  po małym okręgu w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek.  $[u^-]$  będzie oznaczało kontur obiegający punkt  $u$  po małym okręgu w kierunku zgodnym do ruchu wskazówek.

$[u^+]$ ,

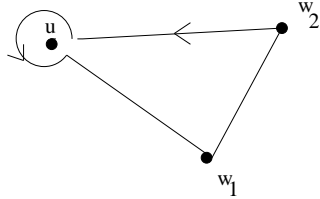


$[u^-]$ .

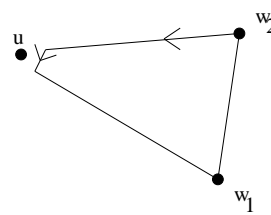


Pisząc  $\gamma = [u, w_1, \dots, w_n, u^+]$  będziemy mieli na myśli, że  $\gamma$  jest konturem zamkniętym i połączonym małym łukiem obiegającym  $u$  w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek. Podobnie, jeśli  $\gamma = [u, w_1, \dots, w_n, u^-]$ , to  $\gamma$  jest konturem zamkniętym połączonym małym łukiem obiegającym  $z$  w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek.

$[u, w_1, w_2, u^+]$ ,

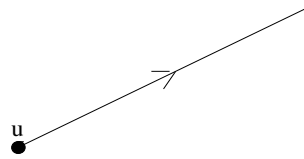


$[u, w_1, w_2, u^-]$ .



$[u, e^{i\alpha} \infty[$  będzie oznaczać półprostą  $\{u + e^{i\alpha}t : t > 0\}$  zaczynającą się w  $u$  i biegnącą do nieskończoności pod kątem  $\alpha$ .

$[u, e^{i\alpha} \infty[$ .

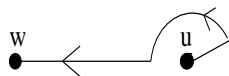


$[(u + e^{i\phi_0} \cdot 0)^+, w]$  oznaczać będzie łamaną

$$[u, u + re^{i\phi_0}] \cup \{u + re^{i\phi} : \phi \in [\phi_0, \phi_1]\} \cup [u + re^{i\phi_1}, w],$$

gdzie  $w = u + Re^{i\phi_1}$ ,  $r < R$ ,  $\phi_1 < \phi_0$ ,  $|\phi_1 - \phi_0| < 2\pi$  (łamana wychodzi z punktu  $u$  pod kątem  $\phi_0$ , obiega punkt  $u$  małym łukiem przeciwnie do ruchu wskazówek i biegnie do  $w$ ).

$[(u + e^{i\alpha}0)^+, w]$ .



## 2 Funkcja Gamma Eulera

### 2.1 Funkcja Gamma jako uogólnienie silni i II całka Eulera

Przy pomocy tzw. **II całki Eulera** definiujemy funkcję Gamma:

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &:= \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-\xi^2} \xi^{2z-1} d\xi, \quad \operatorname{Re} z > 0,\end{aligned}\tag{2.28}$$

Zakładamy, że w powyższym wzorze bierzemy gałąź główną funkcji  $t^{z-1}$ . Zdefiniujmy też tzw symbol Pochhammera

$$\begin{aligned}(a)_n &:= a(a+1)\dots(a+n-1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ (a)_n &:= \frac{1}{(a-n)\dots(a-1)}, \quad n = \dots, -2, -1.\end{aligned}$$

Oczywiście,  $(1)_n = n!$ .

**Twierdzenie 2.1** *Zachodzą następujące tożsamości:*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),\tag{2.29}$$

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots,\tag{2.30}$$

$$\Gamma(z+n) = (z)_n \Gamma(z), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

**Dowód.** (2.29) wynika z całkowania przez części. (2.30) wynika z (2.29) i  $\Gamma(1) = 1$ .  $\square$

Zdefiniujmy zbiór

$$\Omega_n := \{z : \operatorname{Re} z > -n\} \setminus \{0, -1, \dots, -n+1\}$$

i funkcję

$$\Omega_n \ni z \mapsto \Gamma_n(z) := \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\dots(z+n-1)}.$$

Wtedy jeśli  $n > m$ , to

$$\Gamma_n(z) = \Gamma_m(z), \quad z \in \Omega_m.$$

Wynika to z tożsamości

$$\Gamma(z+n) = \Gamma(z+m)(z+m)\dots(z+n-1),$$

będącej konsekwencją wzoru (2.29). Ostatecznie, na

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$$

definiujemy

$$\Gamma(z) := \Gamma_n(z), \quad z \in \Omega_n.$$

Tak zdefiniowana funkcja  $\Gamma$  jest to maksymalnym przedłużeniem analitycznym funkcji  $\Gamma(z)$  zdefiniowanej przy pomocy całki (2.28).

Oto inne wzory, które pozwalają maksymalnie przedłużyć funkcję Gamma:

**Twierdzenie 2.2 (Rozkład Pryma)**

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

**Twierdzenie 2.3 (Wzór Cauchy-Saalschütza)**

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \left( e^{-t} - \sum_{k=0}^n \frac{(-t)^k}{k!} \right) dt, \quad -1 - n < \operatorname{Re} z < -n. \quad (2.31)$$

**Dowód.** Niech  $\Gamma_n(z)$  będzie prawą stroną (2.31). Oczywiście

$$\Gamma_{-1}(z) = \Gamma(z), \quad 0 < \operatorname{Re} z.$$

Całkując przez części dostajemy

$$\begin{aligned} \Gamma_n(z) &= \frac{t^z}{z} \left( e^{-t} - \sum_{k=0}^n \frac{(-t)^k}{k!} \right) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{z} \int_0^{\infty} t^z \left( e^{-t} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-t)^k}{k!} \right) dt \\ &= \frac{1}{z} \Gamma_{n-1}(z+1). \end{aligned}$$

□

## 2.2 I całka Eulera i dalsze tożsamości

**Twierdzenie 2.4 (I całka Eulera)**

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} &= \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v-1} dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2u-1} \phi \sin^{2v-1} \phi d\phi, \quad \operatorname{Re} u > 0, \operatorname{Re} v > 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} \frac{\sin \pi u}{\sin \pi(u+v)} &= \frac{\Gamma(1-u-v)\Gamma(v)}{\Gamma(1-u)} = \int_0^{\infty} (t+1)^{u-1} t^{v-1} dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} \operatorname{ch}^{2u-1} \theta \operatorname{sh}^{2v-1} \theta, \quad \operatorname{Re} v > 0, \operatorname{Re}(1-u-v) > 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

**Dowód.** Stosując podstawienie  $t = \frac{1}{s} + 1$  z (2.32) dostajemy (2.33), z wyjątkiem pierwszej równości, wynikającej z tożsamości (2.36), którą dowiedziemy później. Udowodnijmy więc (2.32)

Mamy

$$\Gamma(u)\Gamma(v) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2 - \eta^2} \xi^{2u-1} \eta^{2v-1} d\xi d\eta. \quad (2.34)$$

Przechodzimy do współrzędnych biegunowych podstawiając

$$\xi = r \cos \phi, \quad \eta = r \sin \phi$$

i otrzymujemy, że (2.34) równa się

$$\begin{aligned} & 4 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2u+2v-1} dr \int_0^{\pi/2} \cos^{2u-1} \phi \sin^{2v-1} \phi d\phi. \\ & = \Gamma(u+v) \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v-1} dt, \end{aligned} \quad (2.35)$$

(W ostatnim kroku podstawiliśmy  $t = \cos^2 \phi$ ).  $\square$

Wzór (2.32) jest uzasadnieniem tego, że często wprowadza się tak zwaną funkcję Beta:

$$B(u, v) := \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}.$$

**Twierdzenie 2.5** *Zachodzą następujące tożsamości:*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad (2.36)$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad (2.37)$$

**Dowód.** Rozważmy funkcję holomorficzną  $\mathbb{C} \setminus [0, 1] \ni t \mapsto f(t) = t^{z-1}(t-1)^{-z}$  (Funkcje  $t^{z-1}$  i  $(t-1)^{-z}$  rozumiemy w sensie ich gałęzi głównych zdefiniowanych odpowiednio na  $\mathbb{C} \setminus [-\infty, 0[$  i  $\mathbb{C} \setminus [-\infty, 1[$ . Zatem funkcja  $f(t)$  zdefiniowana jest a priori na  $\mathbb{C} \setminus [-\infty, 1[$ , ale przedłuża się analitycznie do funkcji na  $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ .

Niech  $\gamma = [0, 1^-, 0^-]$  będzie konturem zwanym kością. Wtedy biorąc pod uwagę, że w nieskończoności residuum funkcji  $f$  jest równe  $-1$ , dostajemy

$$\begin{aligned} 2i\pi &= -2\pi i \operatorname{Res} f(\infty) = \int_\gamma f(t) dt \\ &= (e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}) \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{-z} dt = (2i \sin \pi z) B(z, 1-z) = (2i \sin \pi z) \Gamma(z) \Gamma(1-z). \end{aligned}$$

Stąd wynika (2.36).

Podstawiając w (2.36)  $z = 1/2$  dostajemy

$$\Gamma^2(1/2) = \pi.$$

Wiemy, że

$$\Gamma(z) > 0, \quad z > 0.$$

Stąd wynika (2.37).  $\square$

**Wniosek 2.6 (Całka Gaussa)** *Jeśli  $\operatorname{Re} a > 0$ , to*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (2.38)$$

**Dowód.** Wychodząc z (2.37) przez zamianę zmiennych dostajemy

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi} = \Gamma(1/2) &= \int_{]-\infty, \infty[} e^{-t^2} dt \\ &= \int_{]-\sqrt{a}\infty, \sqrt{a}\infty[} e^{-t^2} dt \\ &= \sqrt{a} \int_{]-\infty, \infty[} e^{-as^2} ds.\end{aligned}$$

□

**Wniosek 2.7 (Caka Fresnela)** *Mamy*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{\pm ix^2} dx = e^{\pm i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\pi}.$$

**Dowód.** Całkujemy po bokach trójkąta  $0, R, R + iR$ . Po pionowym boku mamy

$$\int_0^R e^{-R^2+y^2} dy = \int_0^1 e^{-R^2(1-t^2)} R dt \rightarrow 0,$$

po zastosowaniu Tw. Lebesgue'a. □

Zauważmy, że funkcja  $\Gamma(z)$  ma w  $z = 0, -1, \dots$  bieguny 1-go rzędu z residuami

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\Gamma(-n) &= \lim_{z \rightarrow -n} \Gamma(z)(z+n) \\ &= \frac{(z+n)\pi}{\Gamma(1-z)\sin\pi z} = \frac{(-1)^n}{n!}.\end{aligned}$$

**Twierdzenie 2.8** *Wzór Legendre'a o podwajaniu:*

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z),$$

**Dowód.**

$$\frac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(2z)} = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1} dt = 2 \int_0^{1/2} t^{z-1}(1-t)^{z-1} dt.$$

Podstawiamy  $s = 4t(1-t)$  i otrzymujemy

$$2^{1-2z} \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{-1/2} ds = 2^{1-2z} \frac{\Gamma(z)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})}.$$

□

Prawdziwe jest też następujące uogólnienie powyższego wzoru, zwane wzorem Gaussa o mnożeniu, które udowodnimy później:

$$\Gamma(nz) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} n^{nz-\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma(z + \frac{k}{n}) \quad (2.39)$$

### 2.3 Funkcja Gamma i całki w dziedzinie zespolonej

#### Twierdzenie 2.9 (Wzór Hankela)

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{[-\infty, 0^+, -\infty[} e^s s^{-z-1} ds. \quad (2.40)$$

**Dowód.**

$$\begin{aligned} \int_{[-\infty, 0^+, -\infty[} e^s s^{-z-1} ds &= e^{-i\pi(-z-1)} \int_{]-\infty, 0]} e^s (-s)^{-z-1} ds + e^{i\pi(-z-1)} \int_{[0, -\infty[} e^s (-s)^{-z-1} ds \\ &= (e^{-i\pi(-z-1)} - e^{i\pi(-z-1)}) \int_0^\infty e^{-t} t^{-z-1} dt \\ &= i2 \sin(-\pi z) \Gamma(-z) = \frac{2\pi i}{\Gamma(z+1)} \end{aligned}$$

□

#### Twierdzenie 2.10

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(u+v+1)}{\Gamma(u+1)\Gamma(v+1)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{]-\infty, 0^+, -\infty[} t^{-u-1} (1-t)^{-v-1} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{] \infty, 1^-, \infty[} t^{-u-1} (1-t)^{-v-1} dt, \quad u+v+1 > 0. \end{aligned}$$

**Dowód.** Zauważmy, że  $] -\infty, 0^+, -\infty[$  i  $] \infty, 1^-, \infty[$  dają tę samą całkę.

$$\begin{aligned} \int_{] \infty, 0^-, \infty[} t^{-u-1} (1-t)^{-v-1} dt &= (-e^{-i\pi(v+1)} + e^{i\pi(v+1)}) \int_1^\infty t^{-u-1} (t-1)^{-v-1} dt \\ &= -2i \sin \pi v \frac{\Gamma(-v)\Gamma(1+u+v)}{\Gamma(1+u)} = 2i\pi \frac{\Gamma(1+u+v)}{\Gamma(1+u)\Gamma(1+v)}. \end{aligned}$$

□

Jeśli  $u+v \in \mathbb{Z}$ , to pętla okrążająca 1 i 0 przeciwnie do ruchu wskazówek leży na powierzchni Riemanna funkcji  $t^{u-1}(t-1)^{v-1}$  i dostajemy wzór:

**Twierdzenie 2.11** Niech  $n \in \mathbb{Z}$ . Wtedy

$$\frac{\Gamma(u)}{\Gamma(n+1)\Gamma(u-n)} = \frac{(u-1)\dots(u-n)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{[0, 1^+, 0^+]} t^{u-1} (t-1)^{n-u} dt, \quad (2.41)$$

**Dowód.** Gdy zastosujemy homografię  $t = -s^{-1}$  to dostaniemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{[0, 1^+, 0^+]} t^{u-1} (t-1)^{n-u} dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_{[0^+]} s^{n+1} (1-s)^{n-u} ds \\ &= \frac{1}{n!} \left( \frac{d}{ds} \right)^n (1-s)^{n-u} \Big|_{s=0} = \frac{(u-1)\dots(u-n)}{n!}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

□

A oto całka używająca "podwójnej ósemki":

**Twierdzenie 2.12**

$$e^{i\pi(u+v)} \frac{1}{\Gamma(u+v)\Gamma(1-u)\Gamma(1-v)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[1,0^-,1^-,0^+,1^+]} t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt, \quad (2.43)$$

(W poniższym konturze mamy do czynienia z gałęziami głównymi w okolicy "1".)

**Dowód.**

$$\begin{aligned} & \int_{[1,0^-,1^-,0^+,1^+]} t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt \\ &= (-1 + e^{-i\pi(u-1)} - e^{-i2\pi(u-1)-i2\pi(v-1)} + e^{-i2\pi(v-1)}) \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt \\ &= -e^{i\pi(u+v)}(e^{i\pi u} - e^{-i\pi u})(e^{i\pi v} - e^{-i\pi v})B(u, v) \\ &= -e^{i\pi(u+v)}(2i \sin \pi v)(2i \sin \pi u) \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} \\ &= e^{i\pi(u+v)}(2\pi)^2 \frac{1}{\Gamma(u+v)\Gamma(1-u)\Gamma(1-v)} \end{aligned}$$

□

## 2.4 Iloczyny nieskończone

Przypomnijmy najpierw podstawowe fakty dotyczące szeregów.

Jeśli istnieje skończona granica  $I := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n b_j$ , to mówimy, że szereg  $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$  jest zbieżny warunkowo i piszemy  $I = \sum_{j=1}^{\infty} b_j$ .

Jeśli  $\sum_{j=1}^{\infty} |b_j| < \infty$ , to mówimy, że szereg  $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$  jest zbieżny bezwzględnie. Można pokazać, że zbieżność bezwzględna szeregu pociąga za sobą zbieżność warunkową, również po zmianie kolejności wyrazów w szeregu i jego wartość nie zależy od tej kolejności.

Jeśli istnieje skończona granica  $I := \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n (1 + a_j)$ , to mówimy, że iloczyn nieskończony  $\prod_{j=1}^{\infty} (1 + a_j)$  jest zbieżny warunkowo i piszemy  $I = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + a_j)$ .

Mówimy, że iloczyn nieskończony  $\prod_{j=1}^{\infty} (1 + a_j)$  jest zbieżny bezwzględnie wtedy i tylko wtedy, gdy jedynie skończona liczba wyrazów  $a_j$  jest równa  $-1$  i

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\log(1 + a_n)| < \infty, \quad (2.44)$$

(przy czym w szeregu (2.44) usunęliśmy wyrazy  $a_j = -1$ ),

(W powyższym wzorze przez  $|\log(1 + a)|$  rozumiemy wartość bezwzględną gałęzi głównej logarytmu rozszerzoną przez ciągłość do funkcji na  $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ , która jest jednoznaczna, mimo że sam  $\log(1 + a)$  jednoznaczny nie jest).

Oczywiście, logarytmując wyraz po wyrazie iloczyn bezwzględnie zbieżny dostajemy szereg bezwzględnie zbieżny. Dlatego zbieżność bezwzględna iloczynu nieskończonego pociąga za sobą zbieżność warunkową, również po zmianie kolejności wyrazów w iloczynie i jego wartość nie zależy od tej kolejności.

**Lemat 2.13** *Iloczyn nieskończony  $\prod_{j=1}^{\infty} (1+a_j)$  jest zbieżny bezwzględnie wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty, \quad (2.45)$$

**Dowód.** Niech spełnione będzie (2.45). Wtedy  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$  i dlatego skończona liczba wyrazów  $a_j$  jest równa  $-1$  i dla pozostałych istnieją  $0 < A_1, A_2$  takie, że

$$A_1 \leq |a_j + 1| \leq A_2. \quad (2.46)$$

$\mathbb{C} \setminus \{-1\} \ni t \mapsto \left| \frac{\log(1+t)}{t} \right|$  jest funkcją ciągłą i dodatnią. Zatem dla  $A_1 \leq |t+1| \leq A_2$  istnieją  $0 < C_1 \leq C_2$ , takie, że

$$C_1 \leq \left| \frac{\log(1+t)}{t} \right| \leq C_2.$$

Zatem

$$|\log(1+a_n)| \leq C_2 |a_n|.$$

Aby dowieść implikację przeciwną, wystarczy założyć, że wszystkie  $a_j$  są niezerowe. (2.44) pociąga za sobą  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(a_n + 1) = 0$ , a więc (2.46) jest spełnione dla pewnych  $0 < A_1, A_2$ . Dlatego też

$$|a_n| \leq C_1^{-1} |\log(1+a_n)|.$$

□

## 2.5 Funkcje trygonometryczne jako iloczyny nieskończone

**Twierdzenie 2.14** *Mamy następujące wzory:*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}, \quad (2.47)$$

$$\frac{1}{z} + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 - j^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n \frac{1}{z+j} = \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z}, \quad (2.48)$$

$$z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2}\right) = \frac{\sin \pi z}{\pi}. \quad (2.49)$$

**Uwaga** Iloczyn nieskończony występujący we wzorze (2.49) jest zbieżny bezwzględnie.

**Dowód.**

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$$

jest funkcją całkowitą. Jest ona okresowa z okresem 1 i dąży do zera dla  $|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty$ . Jest więc ograniczona. Na mocy tw. Liouville'a jest więc równa zero. To dowodzi (2.47).

Na mocy (2.47) pochodna

$$\frac{1}{z} + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 - j^2} - \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z}, \quad (2.50)$$

jest równa zero. (2.50) jest funkcją nieparzystą i stałą, więc jest równe zero. To dowodzi (2.48).  
Na mocy (2.48) mamy

$$\frac{d}{dz} \log \left( z \prod_{j=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{j^2} \right) \right) = \frac{d}{dz} \log \left( \frac{\sin \pi z}{\pi} \right)$$

Zatem

$$z \prod_{j=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{j^2} \right) = C \frac{\sin \pi z}{\pi}. \quad (2.51)$$

Porównując pochodne obu stron w (2.51) w zerze dostajemy  $C = 1$ . To dowodzi (2.49).  $\square$

## 2.6 Funkcja Gamma a iloczyny nieskończone

Zdefiniujmy stałą Eulera-Mascheroniego

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) = 1 + \sum_{j=2}^{\infty} \left( \frac{1}{j} + \log \left( 1 - \frac{1}{j} \right) \right) \sim 0,577 \dots$$

**Twierdzenie 2.15 (Wzór Gaussa)**

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)}$$

**(Wzór Weierstrassa)**

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z}{n} \right) \exp \left( -\frac{z}{n} \right).$$

**Uwaga** Iloczyn nieskończony występujący we wzorze Weierstrassa jest zbieżny bezwzględnie.

**Lemat 2.16** Dla  $0 \leq t \leq n$  mamy

$$0 \leq \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^n \leq e^{-t}, \quad 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^n = e^{-t}.$$

**Dowód.** Dla  $f_n(t) := e^t \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^n$  mamy  $f_n(n) = 0$ ,  $f_n(0) = 1$

$$f'_n(t) = -e^t \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^{n-1} \frac{t}{n} \leq 0.$$

Zatem  $0 \leq f_n(t) \leq 1$ .  $\square$

**Dowód Twierdzenia 2.15.** Mamy

$$\int_0^1 (1-\beta)^n \beta^{z-1} d\beta = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(z)}{\Gamma(z+n+1)} = \frac{n!}{z(z+1) \cdots (z+n)}.$$

Zatem

$$\int_0^n \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^n t^{z-1} dt = \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)}.$$

Ale dla  $0 \leq t \leq n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(t-n) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} = e^{-t} t^{z-1}.$$

Na mocy Lematu 2.16 możemy zastosować Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności majoryzowanej (z majorantą równą  $e^{-t} t^{z-1}$ ). Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

To dowodzi wzoru Gaussa dla  $\operatorname{Re} z > 0$ .

Aby pokazać wzór Weierstrassa zauważmy, że

$$\begin{aligned} & z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right). \\ &= z \lim_{n \rightarrow \infty} \exp z \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n\right) \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) \exp\left(-\frac{z}{k}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-z} z \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-z} z(z+1)\cdots(z+n)}{n!}. \end{aligned}$$

□

Wzory Gaussa lub Weierstrassa mogą być wykorzystane do udowodnienia rezultatów z poprzednich rozdziałów. Na przykład, stosując wzór Gaussa dostajemy

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{z+1}}{(z+1)\cdots(z+n+1)} = z \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{z+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(n+1)^z}{z(z+1)\cdots(z+n+1)} = z\Gamma(z).$$

Stosując zaś wzór Weierstrassa dostajemy łatwo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} &= \frac{-1}{z\Gamma(z)\Gamma(-z)} \\ &= z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\sin \pi z}{\pi}. \end{aligned}$$

**Dowód wzoru Gaussa o zwielokrotnianiu (2.39).** Niech

$$G(z) = \prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{m}\right).$$

Wtedy korzystając ze wzoru Gaussa dostajemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{G(z)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{k=0}^{nm+m-1} (mz+k)}{(n!)^m n^{mz + \frac{1}{2}(m-1)} m^{m(n+1)}}, \\ \Gamma(mz) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(mn)!(mn)^{mz}}{\prod_{k=0}^{mn} (mz+k)}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(mz)}{G(z)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(mn)! m^{mz - m(n+1)} n^{-\frac{1}{2}(m-1)} \prod_{k=mn+1}^{mn+m-1} (mz+k)}{(n!)^m} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(mn)! m^{mz - mn - 1} n^{\frac{1}{2}(m-1)}}{(n!)^m} = (2\pi)^{\frac{1}{2}(m-1)} m^{mz - \frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

gdzie użyliśmy najpierw

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=nm+1}^{nm+m-1} \frac{mz+k}{n} = m^{m-1},$$

a potem skorzystaliśmy ze wzory Stirlinga. □

## 2.7 Pewne całki z parametrem

**Stwierdzenie 2.17** Niech  $f(t)$  będzie holomorficzną dla  $0 \leq \arg t \leq \alpha$  i ciągłą na domknięciu tego zbioru. Załóżmy, że dla pewnego  $\epsilon > 0$

$$|f(z)| \leq C|z|^{-\epsilon}, \quad |f(z) - f(0)| \leq C|z|^\epsilon.$$

Wtedy dla  $0 \leq \arg z \leq \alpha$

$$\int_0^\infty (f(t) - f(zt)) \frac{dt}{t} = f(0) \log z.$$

**Dowód.**

$$\begin{aligned} \int_r^R (f(t) - f(zt)) \frac{dt}{t} &= \left( \int_{[r,R]} + \int_{[zR,zr]} \right) f(t) \frac{dt}{t} \\ &= \left( \int_{[r,zr]} + \int_{[zR,R]} \right) f(t) \frac{dt}{t} \\ &\rightarrow \int_{[r,zr]} f(0) \frac{dt}{t} = f(0) \log(z), \end{aligned}$$

gdzie na końcu  $r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ .  $\square$

Na marginesie wspomnijmy, że istnieje “wariant rzeczywisty” powyższego stwierdzenia:

**Stwierdzenie 2.18** Niech  $f(t)$  będzie funkcją mierzalną na  $[0, \infty[$  taką, że

$$\int_1^\infty |f(t)| \frac{dt}{t} < \infty, \quad \int_0^1 |f(t) - f(0)| \frac{dt}{t} < \infty.$$

Wtedy dla  $z \in [0, \infty[$

$$\int_0^\infty (f(t) - f(zt)) \frac{dt}{t} = f(0) \log z.$$

**Wniosek 2.19** Zachodzi wzór

$$\log z = \int_0^\infty (e^{-t} - e^{-zt}) \frac{dt}{t}.$$

**Stwierdzenie 2.20** Mamy następującą reprezentację całkową stałej Eulera-Mascheroniego:

$$\gamma = \int_0^\infty \left( \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{te^t} \right) dt.$$

**Dowód.** Mamy

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-nt}}{1 - e^{-t}} e^{-t} dt &= \sum_{j=1}^n \int_0^\infty e^{-jt} dt = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}, \\ \int_0^\infty (e^{-t} - e^{-(n+1)t}) \frac{dt}{t} &= \log(n+1), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left( \frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) e^{-t(n+1)} dt &= 0. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n+1) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left( \frac{1 - e^{-nt}}{1 - e^{-t}} e^{-t} - (1 - e^{-nt}) t^{-1} e^{-t} \right) dt \\ &= \int_0^\infty \left( \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{te^t} \right) dt. \end{aligned}$$

$\square$

**Stwierdzenie 2.21 (Wzór Pringsheima)**

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} &= \int_0^\infty \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{t} dt \\ &= \int_0^\infty \left( \frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{t} dt \end{aligned}$$

**Dowód.** Zauważmy najpierw, że

$$\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \sim \frac{1}{12}t.$$

Dlatego powyższa całka jest zbieżna.

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{t} dt \\ &= \int_0^\infty \left( \frac{e^{-\frac{1}{2}t}+1}{2(1-e^{-\frac{1}{2}t})} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{t} \right) \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \left( \frac{e^{-\frac{1}{2}t}+1}{2(1-e^{-\frac{1}{2}t})} - \frac{2e^{-\frac{1}{2}t}}{t} \right) \frac{dt}{t} + \int_0^\infty \left( -\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} + \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{t} \right) \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \left( \frac{e^{-t}+1}{2(1-e^{-t})} - \frac{e^{-t}}{t} \right) \frac{dt}{t} + \int_0^\infty \left( -\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} + \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{t} \right) \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \left( \frac{e^{-\frac{1}{2}t}-e^{-t}}{t} - \frac{1}{2}e^{-t} \right) \frac{dt}{t} = -\int_0^\infty \left( \frac{d}{dt} \frac{e^{-\frac{1}{2}t}-e^{-t}}{t} \right) dt - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}t}-e^{-t}}{t} dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

## 2.8 Pochodna logarytmiczna funkcji Gamma

Ze wzoru Weierstrassa wynika natychmiast, że

$$\begin{aligned} \log \Gamma(z) &= -\gamma z - \log z + \sum_{n=1}^\infty \left( \frac{z}{n} - \log\left(1 + \frac{z}{n}\right) \right), \\ \partial_z \log \Gamma(z) &= -\gamma + \sum_{n=0}^\infty \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z} \right), \\ \partial_z^2 \log \Gamma(z) &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+z)^2}. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Mamy też

$$\log \Gamma(1) = 0, \quad \log \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \log \pi, \quad \partial_z \log \Gamma(1) = -\gamma.$$

**Stwierdzenie 2.22**

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1+\epsilon) &= n! \left( 1 + \epsilon \left( -\gamma + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \right) \right) + O(\epsilon^2), \quad n = 1, 2, \dots, \\ \Gamma(-n+\epsilon) &= \frac{(-1)^n}{n!} \left( \epsilon^{-1} - \gamma + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \right) + O(\epsilon), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{2.53}$$

**Dowód.** Najpierw zauważamy, że

$$\partial_z \log \Gamma(n+1) = -\gamma + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ale  $\Gamma'(z) = \Gamma(z)\partial_z \log \Gamma(z)$  i  $\Gamma(n+1) = n!$ . To pokazuje pierwszy wzór.

Następnie

$$\partial_z \left( \log \Gamma(z) + \frac{1}{z+n} \right) \Big|_{z=-n} = -\gamma + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

Ale

$$\partial_z \Gamma(z)(z+n) = (z+n)\Gamma'(z) + \Gamma(z) = (z+n)\Gamma(z)\partial_z \left( \log \Gamma(z) + (z+n)^{-1} \right).$$

□

## 2.9 Szeregi asymptotyczne

Niech funkcja  $f$  będzie określona na zbiorze  $K(z_0, r) \cap \{\alpha_1 < \arg(z - z_0) < \alpha_2\}$ . Piszemy

$$f(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j,$$

gdy dla każdego  $n$  istnieje  $C_n$  takie, że

$$\left| f(z) - \sum_{j=0}^n a_j (z - z_0)^j \right| \leq C_n |z - z_0|^{n+1}.$$

Oczywiście, jeśli  $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$  dla  $z \in K(z_0, r)$ , to  $f(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$ .

**Przykład.** dla  $-\frac{\pi}{2} + \epsilon < \arg z < \frac{\pi}{2} - \epsilon$

$$e^{-\frac{1}{z}} \sim \sum_{j=0}^{\infty} 0z^j.$$

**Przykład.** dla  $-\frac{\pi}{4} + \epsilon < \arg z < \frac{\pi}{4} - \epsilon$  i  $-\frac{\pi}{4} + \epsilon < \arg -z < \frac{\pi}{4} - \epsilon$

$$e^{-\frac{1}{z^2}} \sim \sum_{j=0}^{\infty} 0z^j.$$

W szczególności, wszystkie pochodne funkcji  $\mathbb{R} \ni x \rightarrow e^{-\frac{1}{x^2}}$  w zerze są równe zero.

**Przykład – Funkcja błędu.**

$$\text{Erf}(z) := \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

Oczywiście,  $\lim_{z \rightarrow \infty} \text{Erf}(z) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ . Dla  $-\frac{\pi}{2} + \epsilon < \arg z < \frac{\pi}{2} - \epsilon$  łatwo pokazujemy metodą całkowania przez części, że

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \text{Erf}(z) = \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt \sim \frac{e^{-z^2}}{2z} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{(2z^2)^k} \right).$$

## 2.10 Pierwszy wzór Bineta

### Twierdzenie 2.23 (Pierwszy wzór Bineta)

$$\log \Gamma(z) = (z - \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + \int_0^\infty \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) e^{-zt} \frac{dt}{t}; \quad (2.54)$$

$$\partial_z \log \Gamma(z) = \log z + \int_0^\infty \left( \frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) e^{-zt} dt; \quad (2.55)$$

$$\partial_z^2 \log \Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{te^{-tz}}{1 - e^{-t}} dt. \quad (2.56)$$

**Uwaga** Zwróćmy uwagę na to, że powyższe całki są skończone. W szczególności funkcje podcałkowe są ciągłe w zerze:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) \frac{1}{t} = \frac{1}{12},$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{1 - e^{-t}} = 1.$$

**Dowód.** Najpierw dowodzimy (2.56). Korzystając z (2.52) dostajemy

$$\begin{aligned} \partial_z^2 \log \Gamma(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty e^{-t(z+n)} t dt \\ &= \int_0^\infty \frac{te^{-tz}}{1 - e^{-t}} dt. \end{aligned} \quad (2.57)$$

To dowodzi (2.56). Następnie przekształcamy (2.57) dostając

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \left( \frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) te^{-tz} dt + \int_0^\infty e^{-tz} dt \\ &= \int_0^\infty \left( \frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) te^{-tz} dt + \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \partial_z \log \Gamma(z) &= \partial_z \log \Gamma(1) + \int_1^z \partial_y^2 \log \Gamma(y) dy \\ &= -\gamma + \int_1^z \frac{1}{y} dy + \int_1^z \int_0^\infty \left( \frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) te^{-ty} dt dy \\ &= -\gamma + \log z - \int_0^\infty \left( \frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) e^{-ty} dt \Big|_{y=1}^{y=z} \\ &= \log z - \int_0^\infty \left( \frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) e^{-tz} dt, \end{aligned} \quad (2.58)$$

gdzie w ostatnim kroku wykorzystaliśmy wzór całkowy na stałą  $\gamma$ . To dowodzi (2.55). Następnie przekształcamy (2.58) dostając

$$\begin{aligned} &\log z - \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-tz} dt - \int_0^\infty \left( \frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) e^{-tz} dt \\ &= \log z - \frac{1}{2} \frac{1}{z} - \int_0^\infty \left( \frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) e^{-tz} dt. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}
\log \Gamma(z) &= \log \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^z \partial_y \log \Gamma(y) dy \\
&= \frac{1}{2} \log \pi + \int_{\frac{1}{2}}^z \log y dy - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^z \frac{1}{y} dy - \int_{\frac{1}{2}}^z \int_0^\infty \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) e^{-ty} dt dy \\
&= \frac{1}{2} \log \pi + z - \log z - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log z + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \int_0^\infty \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) e^{-tz} \frac{dt}{t} \Big|_{y=\frac{1}{2}}^{y=z} \\
&= (z - \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + \int_0^\infty \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) e^{-tz} \frac{dt}{t},
\end{aligned}$$

gdzie w ostatnim kroku wykorzystaliśmy wzór Pringsheima. To kończy dowód (2.54).  $\square$

**Wniosek 2.24** Niech  $\epsilon > 0$  i  $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \epsilon$ .

(1) Zachodzi **Wzór Stirlinga**

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow \infty} \left( \log \Gamma(z) - \left( (z - \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi \right) \right) &= 0, \\
\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z)}{z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \sqrt{2\pi}} &= 1.
\end{aligned}$$

(2) Niech

$$f(t) = \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}.$$

Wtedy  $f$  jest ograniczona wraz ze wszystkimi pochodnymi dla  $t \in [0, \infty[$  i

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n t^n, \quad |t| < 2\pi.$$

Mamy następujące rozwinięcie funkcji Gamma w szereg asymptotyczny:

$$\left| \log \Gamma(z) - \left( (z - \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi - \sum_{j=1}^n (j-1)! z^{-j} f_j \right) \right| \leq C |z|^{-n-1}.$$

## 2.11 Wzór Plany i drugi wzór Bineta

**Twierdzenie 2.25 (Wzór Plany)** Niech  $m \leq n$  będą całkowite,  $\phi(z)$  funkcja analityczna,  $|\phi(z)| \leq e^{(1-\epsilon)|\operatorname{Im}z|}$  dla  $\epsilon > 0$  i  $m \leq \operatorname{Re}z \leq n$ . Wtedy

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\phi(m) + \phi(m+1) + \dots + \phi(n-1) + \frac{1}{2}\phi(n) \\
&= \int_m^n \phi(z) dz - i \int_0^\infty \frac{\phi(n+iy) - \phi(n-iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy + i \int_0^\infty \frac{\phi(m+iy) - \phi(m-iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy
\end{aligned}$$

**Dowód.** Wprowadźmy kontury

$$\gamma_+ = [m^-, (m+1)^-, \dots, (n-1)^-, n^-, n + iR, m + iR, m],$$

$$\gamma_- = [m^+, (m+1)^+, \dots, (n-1)^+, n^+, n - iR, m - iR, m].$$

Korzystając z tego, że

$$\operatorname{Res} \frac{\phi(z)}{e^{\pm 2\pi iz} - 1} \Big|_{z=k} = \mp \frac{1}{2\pi i} \phi(k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

dostajemy

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_+} \frac{\phi(z)}{e^{-2\pi iz} - 1} dz \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} -i \int_0^\infty \frac{\phi(m+iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy + i \int_0^\infty \frac{\phi(n+iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy \\ &\quad + P \int_m^n \frac{\phi(x)}{e^{-2\pi ix} - 1} dx + \frac{1}{4} \phi(m) + \frac{1}{2} \sum_{j=m+1}^{n-1} \phi(j) + \frac{1}{4} \phi(n); \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_-} \frac{\phi(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} i \int_0^\infty \frac{\phi(m-iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy - i \int_0^\infty \frac{\phi(n-iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy \\ &\quad + P \int_m^n \frac{\phi(x)}{e^{2\pi ix} - 1} dx + \frac{1}{4} \phi(m) + \frac{1}{2} \sum_{j=m+1}^{n-1} \phi(j) + \frac{1}{4} \phi(n). \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$(2.61)$$

Następnie dodajemy (2.59) i (2.60), korzystając z tożsamości

$$(e^{2\pi ix} - 1)^{-1} + (e^{-2\pi ix} - 1)^{-1} = -1.$$

□

### Twierdzenie 2.26 (Drugi wzór Bineta)

$$\log \Gamma(z) = (z - \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + 2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \frac{t}{z}}{e^{2\pi t} - 1} dt, \quad (2.62)$$

$$\partial_z \log \Gamma(z) = \log z - \frac{1}{2z} - 2 \int_0^\infty \frac{t dt}{(z^2 + t^2)(e^{2\pi t} - 1)}, \quad (2.63)$$

$$\partial_z^2 \log \Gamma(z) = \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{z} + 4 \int_0^\infty \frac{z t dt}{(z^2 + t^2)^2 (e^{2\pi t} - 1)}. \quad (2.64)$$

**Dowód.** Aby pokazać (2.64) stosujemy Wzór Plany do  $\phi(z) = (z+t)^{-2}$ . Następnie całkujemy dwukrotnie i dostajemy

$$\log \Gamma(z) = A + Bz + (z - \frac{1}{2}) \log z + 2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \frac{t}{z}}{e^{2\pi t} - 1} dt.$$

Porównując z pierwszym wzorem Bineta dla  $z \sim 0$  dostajemy  $A = \frac{1}{2} \log 2\pi$ ,  $B = -1$ . □

### 3 Zastosowania

#### 3.1 Jednorodne dystrybucje i ich transformaty Fouriera

Dla  $\lambda \in \mathbb{C}$  możemy zdefiniować dystrybucje temperowane

$$(\pm ix + 0)^\lambda := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\pm ix + \epsilon)^\lambda.$$

Wzory

$$x_+^\lambda := x^\lambda \theta(x), \quad x_-^\lambda := (-x)^\lambda \theta(-x)$$

zadają dystrybucje tylko dla  $\operatorname{Re} \lambda > -1$ . Możemy je rozszerzyć na wszystkie  $\lambda \in \mathbb{C}$  prócz  $z = -1, -2, \dots$  kładąc

$$\begin{aligned} x_+^\lambda &:= \frac{1}{2i \sin \frac{\pi}{2} \lambda} \left( -e^{-i\frac{\pi}{2}\lambda} (ix + 0)^\lambda + e^{i\frac{\pi}{2}\lambda} (-ix + 0)^\lambda \right), \\ x_-^\lambda &:= \frac{1}{2i \sin \frac{\pi}{2} \lambda} \left( -e^{-i\frac{\pi}{2}\lambda} (-ix + 0)^\lambda + e^{i\frac{\pi}{2}\lambda} (ix + 0)^\lambda \right) \end{aligned}$$

Wygodnie jest rozważać  $\frac{x_\pm^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$ . Mamy wtedy

$$\frac{x_\pm^{-n}}{\Gamma(n+1)} = (\pm 1)^n \delta^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Spełniają one związki rekurencyjne:

$$\partial_z \frac{x_\pm^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} = \pm \frac{x_\pm^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}.$$

A oto transformaty Fouriera:

$$\begin{aligned} \int e^{-i\xi x} \frac{x_\pm^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} dx &= (\pm i\xi + 0)^{-\lambda-1}, \\ \int e^{-i\xi x} (\mp i\xi + 0)^\lambda d\xi &= 2\pi \frac{\xi_\pm^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda)}. \end{aligned}$$

Szczególnie symetryczne wzory na transformaty Fouriera dostaniemy wprowadzając

$$\begin{aligned} \eta^\lambda(x) &:= \Gamma\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right) 2^{-\frac{\lambda}{2}} |x|^\lambda = (2\pi)^{-1} \Gamma\left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right) 2^{-\frac{\lambda}{2}} \left( (ix + 0)^\lambda + (-ix + 0)^\lambda \right), \\ \nu^\lambda(x) &:= \Gamma\left(\frac{\lambda}{2} + 1\right) 2^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}} |x|^\lambda \operatorname{sgn} x = i(2\pi)^{-1} \Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right) 2^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}} \left( (ix + 0)^\lambda - (-ix + 0)^\lambda \right). \end{aligned}$$

Mamy następujące związki:

$$\begin{aligned} \partial_x \eta^\lambda &= \lambda \nu^{\lambda-1}, & \partial_x \nu^\lambda &= \eta^{\lambda-1}, \\ \widehat{\eta^\lambda} &= \sqrt{2\pi} \eta^{-\lambda-1}, & \widehat{\nu^\lambda} &= \sqrt{2\pi} \nu^{-\lambda-1}. \end{aligned}$$

### 3.2 Całki wielowymiarowe

W tym rozdziale rozważamy  $d$ -wymiarową przestrzeń euklidesową.

**Twierdzenie 3.1** *Pole sfery jednostkowej  $d - 1$ -wymiarowej wynosi*

$$S_{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}.$$

**Dowód.** Metoda I. Obliczamy 2 sposobami całkę gaussowską: we współrzędnych kartezjańskich

$$\int e^{-x_1^2 - \dots - x_d^2} dx_1 \dots dx_d = \pi^{\frac{d}{2}},$$

i we współrzędnych sferycznych

$$S_{d-1} \int_0^\infty e^{-r^2} r^{d-1} dr = \frac{1}{2} \Gamma(\frac{d}{2}).$$

Metoda II. We współrzędnych sferycznych pole sfery jest równe

$$S_{d-1} = \int_0^\pi \sin^{d-2} \phi_{d-1} d\phi_{d-1} \dots \int_0^\pi \sin \phi_2 d\phi_2 \int_0^{2\pi} d\phi_1$$

Następnie stosujemy

$$\int_0^\pi \sin^{k-1} \phi_k d\phi_k = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{k-1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})}, \quad k = 2, \dots, d-1; \quad \int_0^{2\pi} d\phi_1 = 2\pi.$$

□

**Twierdzenie 3.2** *Całki występujące w diagramach Feynmana W przestrzeni euklidesowej  $d$ -wymiarowej mamy*

$$\int (x^2 + m^2)^{-\alpha} d^d x = \pi^{\frac{d}{2}} m^{d-2\alpha} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)}, \quad (3.65)$$

$$\int (x^2 + 2xy + m^2)^{-\alpha} d^d x = \pi^{\frac{d}{2}} (m^2 - y^2)^{\frac{d}{2} - \alpha} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)}, \quad (3.66)$$

$$\int x_\mu (x^2 + 2xy + m^2)^{-\alpha} d^d x = -\pi^{\frac{d}{2}} y_\mu (m^2 - y^2)^{\frac{d}{2} - \alpha} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)}, \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \int x_\mu x_\nu (x^2 + 2xy + m^2)^{-\alpha} d^d x &= \pi^{\frac{d}{2}} y_\mu y_\nu (m^2 - y^2)^{\frac{d}{2} - \alpha} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)} \\ &\quad - \pi^{\frac{d}{2}} \delta_{\mu\nu} (m^2 - y^2)^{\frac{d-1}{2} - \alpha} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(\alpha)}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

**Dowód.** Stosujemy wzór na powierzchnię sfery i

$$\int_0^\infty (r^2 + m^2)^{-\alpha} r^{d-1} dr = 2^{-1} m^{d-2\alpha} \frac{\Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)}.$$

□

**Twierdzenie 3.3** *Zdefiniujmy*

$$\eta^\lambda(x) := \frac{1}{\Gamma(\frac{\lambda+d}{2})} 2^{-\frac{\lambda}{2}} |x|^\lambda.$$

Wtedy

$$\widehat{\eta^\lambda} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \eta^{-\lambda-d}.$$

**Dowód.** Stosujemy współrzędne sferyczne.

$$\begin{aligned} \int |x|^\lambda e^{-ix\xi} dx &= \\ \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\phi_{d-1} r^{\lambda+d-1} e^{-ir|\xi| \cos \phi_{d-1}} r^{\lambda+d-1} \sin^{d-2} \phi_{d-1} S_{d-2} \\ &= \Gamma(\lambda+d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( (i|\xi| \cos \phi_{d-1} + 0)^{-\lambda-d} + (-i|\xi| \cos \phi_{d-1} + 0)^{-\lambda-d} \right) \sin^{d-2} \phi_{d-1} d\phi_{d-1} S_{d-2} \\ &= \Gamma(\lambda+d) 2 \cos\left(\frac{\lambda+d}{2}\pi\right) |\xi|^{-\lambda-d} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\lambda-d} \phi_{d-1} \sin^{d-2} \phi_{d-1} d\phi_{d-1} S_{d-2}. \end{aligned}$$

Następnie stosujemy

$$\begin{aligned} S_{d-2} &= \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\lambda-d} \phi_{d-1} \sin^{d-2} \phi_{d-1} d\phi_{d-1} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{-\lambda-d+1}{2}) \Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})}, \\ \Gamma(\lambda+d) &= \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{\lambda+d-1} \Gamma\left(\frac{\lambda+d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\lambda+d+1}{2}\right) \\ \Gamma\left(\frac{\lambda+d+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-\lambda-d+1}{2}\right) \cos \frac{\lambda+d}{2} \pi &= \pi, \end{aligned}$$

i dostajemy

$$\int |x|^\lambda e^{-ix\xi} d^d x = |\xi|^{-\lambda-d} 2^{\lambda+d} \pi^d \frac{\Gamma(\frac{\lambda+d}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})}.$$

□

### 3.3 Macierze

Niech  $c = [c_{ij}]$  będzie macierzą. Wyznacza ona formę kwadratową zdefiniowaną dla  $x = [x_i] \in \mathbb{R}^d$  jako

$$xcx = \sum_{i,j=1}^d x_i c_{ij} x_j.$$

Każdą macierz przez zamianę współrzędnych  $y_j = \sum_{i=1}^d a_{ji} x_i$  można sprowadzić do postaci diagonalnej:

$$xcx = \sum_{i=1}^d \lambda_i (y_i)^2.$$

Liczba dodatnich i ujemnych  $\lambda_i$  nie zależy od wyboru przekształcenia i definiuje sygnaturę macierzy  $(d_+, d_-)$ . Oczywiście,  $d \geq d_+ + d_-$ . Indeks macierzy  $c$  definiujemy jako  $\text{ind} c := d_+ - d_-$ .

Mówimy, że macierz  $c$  jest niezdegenerowana, gdy dla każdego  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $x \neq 0$ , istnieje  $y \in \mathbb{R}^d$  taki, że

$$ycx = \sum_{i,j=1}^d y_i c_{ij} x_j \neq 0.$$

Równoważny warunek:  $d_+ + d_- = d$ .

Zakładamy, że w  $\mathbb{R}^d$  wprowadzony jest kanoniczny iloczyn skalarny  $x \cdot y := \sum_{j=1}^d x_j y_j$ . Macierz można sprowadzić do postaci diagonalnej odwzorowaniem ortogonalnym. Ciąg  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  z dokładnością do permutacji nie zależy od wyboru diagonalizującego odwzorowania ortogonalnego. Wyznacznik macierzy nie zmienia się po zastosowaniu transformacji ortogonalnej. Dlatego

$$\det[c_{ij}] = \prod_{i=1}^d \lambda_i.$$

Mówimy, że macierz  $c$  jest dodatnio określona, jeśli dla  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $x \neq 0$ ,

$$xcx > 0.$$

Równoważny warunek:  $d_+ = d$ .

### 3.4 Wielowymiarowe całki Gaussa i Fresnela

Niech macierz  $c$  będzie dodatnio określona. Wtedy

$$\int dx \exp(-xcx) = \pi^{\frac{d}{2}} (\det c)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.69)$$

Zamieniamy bowiem współrzędne odwzorowaniem ortogonalnym diagonalizując macierz  $c$ . Mamy wtedy  $dx = dx_1 \cdots dx_d = dy_1 \cdots dy_d = dy$  i (3.69) jest równe

$$\int dy \exp\left(-\sum_i \lambda_i (y_i)^2\right) = \prod_{i=1}^d \int e^{-\lambda_i (y_i)^2} dy_i = \prod_{i=1}^d \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}}.$$

Jeśli  $c$  jest macierzą niezdegenerowaną, to

$$\int_{|x| < R} dx_1 \cdots dx_d \exp(ixcx) = \pi^{d/2} e^{i\frac{\pi}{4} \text{ind} c} |\det c|^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.70)$$

### 3.5 Metoda Laplace'a (punktu siodłowego)

Dla dużych  $\lambda$  rozważamy całkę typu

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{\lambda \phi(x)} dx.$$

Zakładamy, że  $f, \phi$  rozszerzają się do funkcji analitycznych na otoczeniu  $[a, b]$  w  $\mathbb{C}$  i że znajdziemy drogę  $\gamma$ , która łączy  $a$  z  $b$  i przechodzi przez punkt  $\tilde{z}$ , w którym  $\phi'(\tilde{z}) = 0$ . Zakładamy też, że w  $\tilde{z}$  funkcja  $\operatorname{Re}\phi$  obcięta do  $\gamma$  ma maksimum. W otoczeniu  $\tilde{z}$  mamy

$$\phi(z) \approx \phi(\tilde{z}) + \frac{1}{2}\phi''(\tilde{z})(z - \tilde{z})^2. \quad (3.71)$$

Wprowadźmy współrzędne  $(t, s) \in \mathbb{R}^2$  tak, by

$$z = \tilde{z} + (t + is)e^{i\psi},$$

gdzie  $\phi''(\tilde{z})e^{2i\psi} < 0$ . Dla uproszczenia zakładamy, że  $|\psi| < \frac{\pi}{2}$ . Wtedy (3.71) można przepisać jako

$$\phi(z) \approx \phi(\tilde{z}) + \frac{1}{2}\phi''(\tilde{z})e^{2i\psi}(t^2 - s^2 + 2its).$$

Zatem poziomice  $\operatorname{Re}\phi$  wokół  $\tilde{z}$  przypominają poziomice wokół przełęczy (punktu siodłowego).

Największy wkład do całki po krzywej  $\gamma$  pochodzi z otoczenia punktu  $\tilde{z}$ , gdzie  $\gamma$  można zastąpić częścią prostej  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \tilde{z} + e^{i\psi}t$ . Dostajemy

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_{\gamma} f(z)e^{\lambda\phi(z)} dz \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{z})e^{\lambda\phi(\tilde{z}) + \frac{\lambda}{2}\phi''(\tilde{z})e^{2i\psi}t^2} e^{i\psi} dt \\ &= f(\tilde{z})e^{\lambda\phi(\tilde{z})} \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda\phi''(\tilde{z})e^{2i\psi}}} e^{i\psi} \\ &= f(\tilde{z})e^{\lambda\phi(\tilde{z})} \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda\phi''(\tilde{z})}}. \end{aligned}$$

### 3.6 Asymptotyka funkcji Gamma w nieskończoności metodą punktu siodłowego.

**Twierdzenie 3.4** Niech  $\epsilon > 0$ . Dla  $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \epsilon$  mamy

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z+1)}{\sqrt{2\pi} \frac{z^{z+1/2}}{e^z}} = 1. \quad (3.72)$$

**Dowód.** Mamy

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{\phi(t)} dt,$$

gdzie

$$\phi(t) = -t + z \log t.$$

Obliczamy:

$$\partial_t \phi(t) = -1 + \frac{z}{t}, \quad \partial_t^2 \phi(t) = -\frac{z}{t^2}.$$

Zatem  $\phi(t)$  ma jedno i tylko jeden punkt stacjonarny: dla  $t_0 = z$ . Mamy

$$\phi(t_0) = -z + z \log z, \quad \partial_t^2 \phi(t_0) = -\frac{1}{z}.$$

Można zmienić kontur całkowania tak, by przechodził przez  $z$ , na przykład całkować po półprostej  $]0, z\infty[$ :

$$\Gamma(z+1) = \int_{]0, z\infty[} e^{\phi(t)} dt.$$

Funkcję  $\phi(t)$  przybliżamy przez jej rozwinięcie w okolicy  $t_0$

$$\phi(t) \sim \phi(t_0) + \frac{1}{2} \phi''(t_0)(t-t_0)^2.$$

To prowadzi do przybliżenia dla funkcji Gamma:

$$\Gamma(z+1) \sim \int_{]0, z\infty[} e^{\phi(t_0) + \frac{1}{2} \phi''(t_0)(t-t_0)^2} dt,$$

Kontur, po którym całkujemy przedłużamy do całej prostej  $z] - \infty, \infty[$ . Dla dużych  $z$  w sektorze  $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \epsilon$  te modyfikacje nie wpłyną zbytnio na wartość całki. Oczekujemy więc, że  $\Gamma(z)$  zachowuje się asymptotycznie jak

$$e^{\phi(t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2} \phi''(t_0)(t-t_0)^2} dt = \frac{z^z}{e^z} \sqrt{2\pi z}.$$

Pokażmy teraz to w ścisły sposób. Niech  $\operatorname{Re} z > 0$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_{]0, \infty[} e^{-t^z} dt = \int_{]0, z\infty[} e^{-t^z} dt \\ &= e^{-z+z \log z} \int_{]0, z\infty[} e^{-z(\frac{t}{z}-1-\log \frac{t}{z})} dt \\ &= e^{-z} z^{z+1} \int_{-1}^{\infty} e^{-z(s-\log(1+s))} ds, \end{aligned}$$

gdzie dokonaliśmy zamiany zmiennych

$$s = \frac{t}{z} - 1.$$

Zauważmy, że funkcja

$$] - 1, \infty[ \ni s \mapsto s - \log(1+s)$$

maleje na  $] - 1, 0]$  od  $\infty$  do 0, w 0 zachowuje się jak  $\frac{s^2}{2}$  i na  $[0, \infty[$  rośnie do  $\infty$ . Zatem funkcja

$$\mathbb{R} \ni s \mapsto u(s) = \sqrt{2(s - \log(1+s))}$$

(w której bierzemy ujemny pierwiastek dla  $s < 0$  i dodatni pierwiastek dla  $s > 0$ ) jest gładka. Mamy

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(s)}{s} = 1, \quad \frac{du(s)}{ds} = \frac{s}{u(s)(1+s)},$$

oraz

$$f(u) := \frac{ds}{du}(u) = \frac{(1+s(u))u}{s(u)}, \quad f(0) = 1.$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{\infty} e^{-z(s-\log(1+s))} ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z}{2}u^2} f(u) du. \end{aligned}$$

Niech

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z}{2}u^2} du = \sqrt{\frac{2\pi}{z}}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \left| \frac{I}{I_0} - 1 \right| &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z}{2}u^2} |f(u)-1| du}{\sqrt{\frac{2\pi}{z}}} \\ &\leq C\sqrt{z} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z}{2}u^2} |u| du = C_1 \frac{1}{\sqrt{z}}. \end{aligned}$$

To kończy dowód (3.72)  $\square$

### 3.7 Asymptotyka funkcji Beta w nieskończoności metodą punktu siodłowego

Asymptotykę dla  $B(u, v)$  można dostać z asymptotyki funkcji  $\Gamma(z)$ . My jednak pokażemy ją bezpośrednio z metody punktu siodłowego.

**Twierdzenie 3.5** Niech  $\epsilon > 0$ . Dla  $|\arg u| < \frac{\pi}{2} - \epsilon$ ,  $|\arg v| < \frac{\pi}{2} - \epsilon$ , mamy

$$\lim_{u, v \rightarrow \infty} \frac{B(u+1, v+1)}{\sqrt{2\pi} \frac{u^{u+1/2} v^{v+1/2}}{(u+v)^{u+v+3/2}}} = 1. \quad (3.73)$$

**Dowód.** Mamy

$$B(u+1, v+1) = \int_0^1 e^{\psi(t)} dt,$$

gdzie

$$\psi(t) := u \log t + v \log(1-t).$$

Obliczamy:

$$\partial_t \psi(t) = \frac{u}{t} - \frac{v}{1-t}, \quad \partial_t^2 \psi(t) = -\frac{u}{t^2} - \frac{v}{(1-t)^2}.$$

Zatem  $\psi(t)$  ma jedyny punkt stacjonarny: dla  $t_0 = \frac{u}{u+v}$  i

$$\psi(t_0) = u \log \left( \frac{u}{u+v} \right) + v \log \left( \frac{v}{u+v} \right), \quad \partial_t^2 \psi(t_0) = -\frac{(u+v)^3}{uv}.$$

Jeśli  $\operatorname{Re} u > 0$  i  $\operatorname{Re} v > 0$ , to  $\operatorname{Re} \psi(t) \rightarrow -\infty$ , gdy  $t$  zbliża się do 0 bądź 1. Łatwo więc uzasadnić, że deformując kontur  $[0, 1]$  możemy dostać krzywą  $\gamma$  zaczynającą się w 0, kończącą się w 1 i przechodzącą przez  $t_0$  tak, że  $\operatorname{Re} \psi(t)$  osiąga wzdłuż tej krzywej maksimum w  $t_0$ . Mamy

$$B(u+1, v+1) = \int_{\gamma} e^{\psi(t)} dt.$$

Można oczekiwać, że przyczynek wokół  $t_0$  w tej całce będzie dominować. Zatem

$$B(u+1, v+1) \sim \int_{\gamma} e^{\psi(t_0) + \frac{1}{2}\psi''(t_0)(t-t_0)^2} dt.$$

Następnie zastępujemy krzywą  $\gamma$  przez prostą nachyloną pod odpowiednim kątem  $\alpha$ , czyli:

$$\begin{aligned} B(u+1, v+1) &\sim e^{\psi(t_0)} \int_{e^{\alpha] - \infty, \infty[} e^{\frac{1}{2}\partial_t^2 \psi(t_0)t^2} dt \\ &= \left(\frac{u}{u+v}\right)^u \left(\frac{v}{u+v}\right)^v \left(\frac{2\pi uv}{(u+v)^3}\right)^{1/2} = \sqrt{2\pi} \frac{u^{u+1/2} v^{v+1/2}}{(u+v)^{u+v+3/2}}. \end{aligned}$$

□

### 3.8 Wielowymiarowa wersja metody Laplace'a (bez przedłużenia analitycznego)

Dla dużych  $\lambda$  rozważamy całkę typu

$$I(\lambda) = \int_{\Theta} f(x) e^{\lambda\phi(x)} dx,$$

gdzie  $\Theta$  jest podzbiorem w  $\mathbb{R}^d$ . Zakładamy, że  $\phi$  posiada globalne maksimum w  $\Theta$  w punkcie  $\tilde{x}$  należącym do wnętrza  $\Theta$  i że jest różniczkowalne dwa razy w  $\tilde{x}$ . Mamy wtedy  $\nabla\phi(\tilde{x}) = 0$ . Zakładamy też, że Hessjan (druga pochodna)  $\phi$  w  $\tilde{x}$ , oznaczany przez  $\nabla^2\phi(\tilde{x})$ , jest ujemnie określony. Wtedy

$$\begin{aligned} I(\lambda) &\approx \int_{\mathbb{R}^d} f(\tilde{x}) \exp\left(\lambda\phi(\tilde{x}) + \frac{\lambda}{2} \sum_{i,j=1}^d \nabla_i \nabla_j \phi(\tilde{x})(x_i - \tilde{x}_i)(x_j - \tilde{x}_j)\right) dx \\ &= f(\tilde{x}) e^{\lambda\phi(\tilde{x})} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{d}{2}} (\det(-\nabla^2\phi(\tilde{x})))^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

### 3.9 Metoda fazy stacjonarnej

Zakładamy teraz, że  $f$  i  $\phi$  są dostatecznie gładkie. Dla dużych  $\lambda$ , rozważamy całkę typu

$$I(\lambda) = \int_{\Theta} f(x) e^{i\lambda\phi(x)} dx,$$

gdzie  $\Theta$  jest podzbiorem w  $\mathbb{R}^d$ . Zakładamy, że  $\phi$  posiada globalne maksimum w  $\Theta$  w punkcie  $\tilde{x}$  należącym do wnętrza  $\Theta$ . Mamy wtedy  $\nabla\phi(\tilde{x}) = 0$ . Zakładamy też, że Hessjan  $\phi$  w  $\tilde{x}$ , oznaczany przez  $\nabla^2\phi(\tilde{x})$ , jest niezdegenerowany. Wtedy

$$\begin{aligned} I(\lambda) &\approx \int_{\mathbb{R}^d} f(\tilde{x}) \exp\left(i\lambda\phi(\tilde{x}) + \frac{i\lambda}{2} \sum_{i,j=1}^d \nabla_i \nabla_j \phi(\tilde{x})(x_i - \tilde{x}_i)(x_j - \tilde{x}_j)\right) dx \\ &= f(\tilde{x}) e^{i\frac{\pi}{4} \text{ind} \nabla^2\phi(\tilde{x})} e^{i\lambda\phi(\tilde{x})} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{d}{2}} |\det \nabla^2\phi(\tilde{x})|^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

### 3.10 Równanie dyfuzji i Schrödingera

Swobodne równanie Schrödingera:

$$i \frac{d}{dt} \psi_t(x) = -\frac{1}{2m} \Delta \psi_t(x).$$

Równanie dyfuzji (ciepła):

$$\frac{d}{dt} f_t(x) = \kappa \Delta f_t(x).$$

Wprowadźmy operator pędu

$$p_i = -i \nabla_{x_i}.$$

Wtedy  $-\Delta = p^2$ . Można uogólnić równanie Schrödingera do dyspersyjnego równania Schrödingera, gdzie  $\omega$  jest dowolną funkcją pędu:

$$i \frac{d}{dt} \psi_t(x) = \omega(p) \psi_t(x).$$

Formalne rozwiązanie:

$$\psi_t = e^{it\omega(p)} \psi_0.$$

Transformacja Fouriera w konwencji “unitarnej”:

$$\hat{\psi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int \psi(x) e^{-ix\xi} dx,$$

$$\psi(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int \hat{\psi}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Transformacja Fouriera diagonalizuje pęd:

$$\widehat{p\psi}(\xi) = \xi \hat{\psi}(\xi).$$

Ogólniej

$$\widehat{\omega(p)\psi}(\xi) = \omega(\xi) \hat{\psi}(\xi).$$

Dlatego

$$i \frac{d}{dt} \hat{\psi}_t(\xi) = \omega(\xi) \hat{\psi}_t(\xi),$$

$$\hat{\psi}_t(\xi) = e^{-it\omega(\xi)} \hat{\psi}_0(\xi).$$

W reprezentacji położeniowej

$$\psi_t(x) = \int U_t(x-y) \psi_0(y) dy,$$

gdzie “propagator” jest równy

$$U_t(x) = (2\pi)^{-d} \int e^{-it\omega(\xi)+ix\xi} d\xi.$$

W przypadku dyfuzji dostajemy

$$f_t(x) = \int (4\pi\kappa t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}} f_0(y) dy.$$

Zauważmy, że

- (1)  $\int f_t(x)dx = \int f_0(x)dx$ ;
- (2)  $f_0 \geq 0$  implikuje  $f_t \geq 0$ ;
- (3)  $\int |f_t|^2(x)dx = \int |f_0|^2(x)dx$ .

Dla swobodnego równania Schrödingera z  $m = 1$  mamy

$$\psi_t(x) = \int (2\pi ti)^{-\frac{d}{2}} e^{\frac{i(x-y)^2}{2t}} \psi_0(y) dy.$$

Mamy  $\int |\psi_t|^2(x)dx = \int |\psi_0|^2(x)dx$ .

### 3.11 Transformacja Legendre'a

Niech  $\Omega$  będzie wypukłym zbiorem w  $\mathbb{R}^d$  a

$$\Omega \ni \xi \mapsto \omega(\xi) \in \mathbb{R} \tag{3.74}$$

niech będzie funkcją wypukłą klasy  $C^2$ . Scisłej rzecz biorąc, zakładamy, że dla różnych  $\xi_1, \xi_2 \in \Omega$ ,  $\xi_1 \neq \xi_2$ ,  $0 < \tau < 1$ ,

$$\tau\omega(\xi_1) + (1 - \tau)\omega(\xi_2) > \omega(\tau\xi_1 + (1 - \tau)\xi_2).$$

Wtedy

$$\Omega \ni \xi \mapsto v(\xi) := \nabla\omega(\xi) \in \mathbb{R}^d \tag{3.75}$$

jest funkcją różnowartościową. Niech  $\tilde{\Omega}$  będzie obrazem (3.75). Jest to zbiór wypukły. Można zdefiniować funkcję

$$\tilde{\Omega} \ni v \mapsto \xi(v) \in \Omega$$

odwrotną do (3.74). Transformację Legendre'a definiujemy jako

$$\tilde{\omega}(v) := v\xi(v) - \omega(\xi(v)).$$

**Twierdzenie 3.6** (1)  $\nabla\tilde{\omega}(v) = \xi(v)$ .

(2)  $\nabla^2\tilde{\omega}(v) = \nabla_v\xi(v) = \left(\nabla_\xi^2\omega(\xi(v))\right)^{-1}$ . Zatem  $\tilde{\omega}$  jest wypukła.

(3)  $\tilde{\omega}(\xi) = \omega(\xi)$ .

**Dowód.** (1)

$$\nabla_v\tilde{\omega}(v) = \xi(v) + v\nabla_v\xi(v) - \nabla_\xi\omega(\xi(v))\nabla_v\xi(v) = \xi(v).$$

(2)

$$\nabla_v^2\tilde{\omega}(v) = \nabla_v\xi(v) = \nabla_\xi v(\xi(v))^{-1} = \left(\nabla_\xi^2\omega(\xi(v))\right)^{-1}.$$

(3)

$$\tilde{\omega}(\xi) = \xi v(\xi) - v(\xi)\xi(v(\xi)) + \omega(\xi(v(\xi))) = \omega(v).$$

□

**Przykłady.**

(1)  $\Omega = \mathbb{R}^d$ ,  $\omega(\xi) = \frac{\xi^2}{2m}$ ,  $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}^d$ ,  $\tilde{\omega}(v) = \frac{mv^2}{2}$ .

(2)  $\Omega = \mathbb{R}^d$ ,  $\omega(\xi) = \sqrt{\xi^2 + m^2}$ ,  $\tilde{\Omega} = \{v \in \mathbb{R}^d : |v| < 1\}$ ,  $\tilde{\omega}(v) = -m\sqrt{1 - v^2}$ .

(3)  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $\omega(\xi) = e^\xi$ ,  $\tilde{\Omega} = ]0, \infty[$ ,  $\tilde{\omega}(v) = v \log v - v$ .

### 3.12 Dyspersyjne równanie Schrödingera z parametrem $\hbar$

Wprowadźmy mały parametr  $\hbar$ . Zmieńmy definicję pędu i energii:

$$p_i = -i\hbar\nabla_{x_i}, \quad E = i\hbar\partial_t.$$

Dyspersyjne równanie Schrödingera w postaci zawierającej  $\hbar$ :

$$i\hbar\frac{d}{dt}\psi_t(x) = \omega(p)\psi_t(x). \quad (3.76)$$

Ma ono rozwiązanie:

$$\psi_t = e^{\frac{it\omega(p)}{\hbar}}\psi_0.$$

Aby je rozwiązać wygodnie jest zastosować semiklasyczną wersję transformacji Fouriera:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\xi) &= (2\pi\hbar)^{-\frac{d}{2}} \int \psi(x)e^{-\frac{ix\xi}{\hbar}} dx, \\ \psi(x) &= (2\pi\hbar)^{-\frac{d}{2}} \int \hat{\psi}(\xi)e^{\frac{ix\xi}{\hbar}} d\xi. \end{aligned}$$

Ma ona własności

$$\begin{aligned} \int |\psi(x)|^2 dx &= \int |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi, \\ \widehat{\omega(p)\psi}(\xi) &= \omega(\xi)\hat{\psi}(\xi). \end{aligned}$$

Propagator wynosi

$$U_t(x) = (2\pi\hbar)^{-d} \int e^{\frac{-it\omega(\xi)+i(x-y)\xi}{\hbar}} d\xi.$$

### 3.13 Granica semiklasyczna dyspersyjnej ewolucji

Założmy, że  $\psi_t(x)$  ewoluje zgodnie z równaniem (3.76). Chcemy wyznaczyć propagację dla małych wartości  $\hbar$  w zależności od  $\hat{\psi}_0$

Niech  $v(\xi)$  i  $\tilde{\omega}(x)$  będą zdefiniowane jak w podrozdziale 3.11. Wtedy

$$\begin{aligned} \psi_t(x) &\approx \exp\left(i\frac{\pi}{4}\text{ind}\nabla_{\xi}v(\xi(x/t))\right) \\ &\times t^{-\frac{d}{2}}|\det|\nabla_{\xi}v(\xi(x/t))|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{it}{\hbar}\tilde{\omega}(x/t)\right)\hat{\psi}_0(\xi(x/t)). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Czyli paczka falowa o pędzie  $\xi$  podróżuje z prędkością  $v(\xi) = \nabla\omega(\xi)$  zwaną “prędkością grupową”. Zauważmy przy tym, że norma  $L^2$  prawej strony (3.77) nie zależy od czasu.

Aby otrzymać (3.77) zapisujemy  $\psi_t(x)$  w postaci

$$\psi_t(x) = (2\pi\hbar)^{-\frac{d}{2}} \int \exp\left(\frac{i\phi_t(x, \xi)}{\hbar}\right)\hat{\psi}_0(\xi)d\xi,$$

gdzie

$$\phi_t(x, \xi) = -t\omega(\xi) + x\xi.$$

Stosujemy metodę fazy stacjonarnej

$$\nabla_\xi \phi(x, \xi) = -t\nabla_\xi \omega(x) + x.$$

Zatem

$$\begin{aligned} x/t &= \nabla_\xi \omega(\xi) = v(\xi), \\ \phi(x, \xi(x/t)) &= x\xi(x/t) - t\omega(\xi(x/t)) = t\tilde{\omega}(x/t). \end{aligned}$$

Poza tym

$$\nabla_\xi^2 \phi(x, \xi) = -t\nabla^2 \omega(\xi) = -t\nabla_\xi v(\xi).$$

Metoda fazy stacjonarnej prowadzi do

$$\begin{aligned} \psi_t(x) &\approx (2\pi\hbar)^{-\frac{d}{2}} (2\pi\hbar)^{\frac{d}{2}} \exp\left(i\frac{\pi}{4} \text{ind} \nabla_\xi v(\xi(x/t))\right) \\ &\quad \times t^{-\frac{d}{2}} |\det |\nabla_\xi v(\xi(x/t))|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{it}{\hbar} \tilde{\omega}(x/t)\right) \hat{\psi}_0((\xi(x/t))), \end{aligned}$$

z którego wynika wzór (3.77).

### 3.14 Równanie Kleina-Gordona/falowe

Poniższe równanie dla  $m \neq 0$  nazywa się równaniem Kleina-Gordona a dla  $m = 0$  równaniem falowym:

$$\partial_t^2 \psi(t, x) = (\Delta - m^2) \psi(t, x). \quad (3.78)$$

**Twierdzenie 3.7** *Znając  $\psi(t, \cdot)$  i  $\partial_t \psi(t, \cdot)$  dla  $t = 0$  możemy otrzymać rozwiązanie równania (3.78) w dowolnej chwili ze wzoru*

$$\psi(t) = -\partial_t G(t) \psi(0) + G(t) \partial_t \psi(0),$$

gdzie funkcja Greena  $G(t)$  jest zadana przez

$$\begin{aligned} G(t) &= -\frac{i}{2} (-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} e^{it\sqrt{-\Delta + m^2}} \\ &\quad + \frac{i}{2} (-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-it\sqrt{-\Delta + m^2}}. \end{aligned}$$

**Dowód.** (3.78) można przepisać w formie

$$\left(i\partial_t - \sqrt{-\Delta + m^2}\right) \left(i\partial_t + \sqrt{-\Delta + m^2}\right) \psi = 0.$$

Dzielimy  $\psi$  na część o dodatniej i ujemnej częstotliwości:  $\psi = \psi_+ + \psi_-$ , gdzie

$$\left(i\partial_t \pm \sqrt{-\Delta + m^2}\right) \psi_\pm = 0.$$

Mamy

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{2} \left( 1 - i(-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} \partial_t \right) \psi \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( 1 + i(-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} \partial_t \right) \psi.\end{aligned}$$

Dlatego

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{2} \left( 1 \mp i(-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} \partial_t \right) \psi.$$

Stosując

$$\psi_{\pm}(t) = e^{\pm i\sqrt{-\Delta+m^2}t} \psi_{\pm}(0),$$

dostajemy

$$\begin{aligned}\psi(t) &= e^{i\sqrt{-\Delta+m^2}t} \psi_+(0) + e^{-i\sqrt{-\Delta+m^2}t} \psi_-(0) \\ &= \frac{1}{2} (e^{it\sqrt{-\Delta+m^2}} + e^{-it\sqrt{-\Delta+m^2}}) \psi(0) \\ &\quad + \frac{i}{2} \left( -(\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} e^{it\sqrt{-\Delta+m^2}} + (-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-it\sqrt{-\Delta+m^2}} \right) \partial_t \psi(0).\end{aligned}$$

□