Równania różniczkowe fizyki matematycznej

Jan Dereziński

Katedra Metod Matematycznych Fizyki
Uniwersytet Warszawski
Hoża 74, 00-682, Warszawa
e-mail jan.derezinski@fuw.edu.pl

22 września 2006

Metody Matematyczne Fizyki, skrypt II

rok 2006, wersja poprawiona

Spis treści

1 Równania różniczkowe w dziedzinie zespolonej

1.1 Punkty regularne

W tym rozdziale rozważamy równania różniczkowe pierwszego rzędu w $\mathbb{C}^n$ i drugiego rzędu w $\mathbb{C}$. W $\mathbb{C}^n$ będziemy posługiwać się normą wektorów

$$\|v\| = \left(\sum_{j=0}^{n} |v_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \ v \in \mathbb{C}^n.$$

Jeśli A jest odwzorowaniem liniowym na $\mathbb{C}^n$, to norma A jest zdefiniowana jako

$$\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Będziemy rozważać równanie różniczkowe

$$\partial_z v(z) = A(z)v(z). \tag{1.1}$$

gdzie $v(z) \in \mathbb{C}^n$.

Definicja 1.1 *Jeśli w (1.1) funkcja $A(z)$ jest analityczna w z_0, to mówimy, że z_0 jest punktem regularnym tego równania.*

Twierdzenie 1.2 *Niech Ω będzie spójnym jednospójnym zbiorem otwartym w $\mathbb{C}$. Niech*

$$\Omega \ni z \mapsto A(z) = \begin{bmatrix} a_{11}(z) & \dots & a_{1n}(z) \\ & \dots & \\ a_{n1}(z) & \dots & a_{nn}(z) \end{bmatrix}$$

będzie funkcją holomorficzną o wartościach w macierzach $n \times n$ i $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$. Wtedy istnieje jedna i tylko jedna funkcja holomorficzna $\Omega \ni z \mapsto v(z) = \begin{bmatrix} v_1(z) \\ \dots \\ v_n(z) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ będąca rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z} = A(z)v(z), \\ v(z_0) = w. \end{cases} \tag{1.2}$$

Dowód. Ograniczmy się najpierw do koła $K(z_0, r)$ takiego, że $\overline{K(z_0, r)} \subset \Omega$. Można również założyć, że $z_0 = 0$.

Niech

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k$$

Wtedy szereg

$$v(z) := \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k,$$

gdzie

$$\begin{cases} v_0 = w, \\ v_{m+1} := \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} A_{m-k} v_k. \end{cases}$$

jest jedynym szeregiem formalnie spełniającym równanie (1.2).

Pokażmy, że szereg ten jest zbieżny w kole $K(0,r)$. Wiemy z nierówności Cauchy'ego, że

$$\|A_k\| \leq Cr^{-k}.$$

Jeśli położymy

$$\begin{cases} p_0 = \|w\| \\ p_{m+1} := \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} Cr^{-m+k}p_k, \end{cases}$$

to możemy dowieść indukcyjnie, że

$$\|v_m\| \leq p_m. \tag{1.3}$$

W rzeczy samej, mamy

$$\|v_0\| = p_0.$$

Załóżmy, że

$$\|v_k\| \leq p_k,\ \ k = 0, \ldots, m.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \|v_{m+1}\| &\leq \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} \|A_{m-k}v_k\| \\ &\leq \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} \|A_{m-k}\|\|v_k\| \\ &\leq \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} Cr^{k-m}p_k = p_{m+1}. \end{aligned}$$

To kończy dowód (1.3).

Jeśli odejmiemy wzory

$$\begin{aligned} r(m+1)p_{m+1} &= \sum_{k=0}^{m} Cr^{-m+k+1}p_k, \\ mp_m &= \sum_{k=0}^{m-1} Cr^{-m+k+1}p_k, \end{aligned}$$

to dostaniemy

$$r(m+1)p_{m+1} = (Cr+m)p_m.$$

Wynika stąd natychmiast że

$$\lim_{m\to\infty} \frac{p_{m+1}}{p_m} = r^{-1}.$$

Czyli na mocy kryterium d'Alemberta, szereg

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$$

jest zbieżny w kole $K(0,r)$. Zatem również szereg

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k$$

jest zbieżny w kole $K(0,r)$.

Powyższe rozumowanie możemy przeprowadzić dla dowolnego koła zawartego w Ω. W ten sposób, ponieważ Ω jest spójny, możemy przedłużyć funkcję $v(z)$ na cały obszar Ω. Jego jednospójność gwarantuje, że nie dostaniemy funkcji wieloznacznej. $\Box$

Przykład 1.3

$$(\partial_z - 1)v(z) = 0, \quad v(0) = 1.$$

Podstawiamy

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n.$$

Dostajemy wzór rekurencyjny;

$$nv_n = v_{n-1}.$$

Czyli

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Oczywiście, $v(z) = \mathrm{e}^z$.

Przykład 1.4 *Niech* $\mu \in \mathbb{C}$, $z \neq -1$

$$\left(\partial_z - \mu(z+1)^{-1}\right) v(z), \quad v(0) = 1.$$

Podstawiamy

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n.$$

Dostajemy wzór rekurencyjny;

$$nv_n = (\mu - n + 1)v_{n-1}.$$

Czyli

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu \ldots (\mu - n + 1)z^n}{n!}, \ |z| < 1.$$

Oczywiście, $v(z) = (1+z)^\mu$.

Rozważmy teraz równanie skalarne drugiego rzędu

$$\left(\partial_z^2 + c(z)\partial_z + d(z)\right) u(z) = 0. \tag{1.4}$$

Definicja 1.5 *Mówimy, że punkt* z_0 *jest regularnym punktem równania (1.4), jeśli* $c(z)$ *i* $d(z)$ *są analityczne w* z_0.

Stwierdzenie 1.6 *Niech* $c(z)$, $d(z)$ *będą holomorficzne w spójnym jednospójnym zbiorze otwartym* Ω. *Wtedy zagadnienie*

$$\begin{cases} \left(\partial_z^2 + c(z)\partial_z + d(z)\right) u(z) = 0 \\ u(z_0) = w_0, \ \partial_z u(z_0) = w_1, \end{cases} \tag{1.5}$$

ma jedno i tylko jedno rozwiązanie w Ω.

Dowód. Zdefiniujmy

$$v(z) := \begin{bmatrix} u(z) \\ u'(z) \end{bmatrix}, \quad w := \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix}$$

oraz

$$A(z) := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -d(z) & -c(z). \end{bmatrix}$$

Wtedy (1.5) możemy przepisać w postaci

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z} = A(z)v(z), \\ v(z_0) = w. \end{cases}$$

i zastosować twierdzenie 1.2. □

Podajmy jeszcze wzór rekurencyjny na współczynniki rozwinięcia

$$u(z) := \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k.$$

dla rozwiązania równania

$$\big(b(z)\partial_z^2 + c(z)\partial_z + d(z)\big)\, u(z) = 0,$$

gdzie $b(0) \neq 0$. Mamy:

$$\begin{cases} u_0 = w_0, \quad u_1 = w_1, \\ \sum_{k=0}^{m} k(k-1)u_k b_{m-k} + \sum_{k=0}^{m-1} k c_{m-k-1} u_k + \sum_{k=0}^{m-2} d_{m-k-2} u_k = 0. \end{cases}$$

1.2 Punkt regularny w nieskończoności

Definicja 1.7 *Załóżmy, że $A(z)$ jest zdefiniowane dla $|z| > R$. Mówimy, że ∞ jest punktem regularnym równania (1.1), gdy po zamianie zmiennych $w = z^{-1}$ dostajemy punkt regularny w 0.*

Oczywiście, $\partial_z = -w^2\partial_w$. Dlatego po zamianie zmiennych (1.1) zmienia się w równanie

$$\partial_w v(w^{-1}) = -w^{-2}A(w^{-1})v(w^{-1}).$$

Dlatego ∞ jest punktem regularnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica

$$\lim_{z\to\infty} z^2 A(z).$$

Twierdzenie 1.8 *Niech ∞ będzie regularnym punktem równania (1.6). Wtedy dla zadanego $w \in \mathbb{C}^n$, istnieje dokładnie jedno analityczne w nieskończoności rozwiązanie zagadnienia*

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z} = A(z)v(z), \\ \lim_{z\to\infty} v(z) = w. \end{cases} \tag{1.6}$$

Rozważmy teraz równania drugiego rzędu postaci (1.4).

Definicja 1.9 *Załóżmy, że $c(z)$, $d(z)$ są zdefiniowane dla $|z| > R$. Mówimy, że ∞ jest punktem regularnym równania (1.4), gdy po zamianie zmiennych $w = z^{-1}$ dostajemy punkt regularny w 0.*

Zamiana zmiennych prowadzi do równania

$$\Big(\partial_w^2 + (2w^{-1} - w^{-2}c(w^{-1}))\partial_w + w^{-4}d(w^{-1})\Big)u(w^{-1}) = 0.$$

Zatem ∞ jest punktem regularnym, gdy istnieją granice

$$\lim_{z\to\infty}(2z - z^2c(z)), \qquad \lim_{z\to\infty} z^4d(z).$$

Twierdzenie 1.10 *Niech ∞ będzie regularnym punktem równania. Wtedy dla zadanych w_0, w_1 istnieje dokładnie jedno analityczne w nieskończoności rozwiązanie zagadnienia*

$$\begin{cases} \left(\partial_z^2 + c(z)\partial_z + d(z)\right) u(z) = 0 \\ \lim_{z\to\infty} u(z) = w_0, \ \lim_{z\to\infty}(u(z) - w_0)z = w_1. \end{cases} \tag{1.7}$$

1.3 Regularne punkty osobliwe.

Rozważmy teraz równanie różniczkowe (1.2) dla którego prawa strona ma osobliwości.

Definicja 1.11 *Mówimy, że równanie*

$$\frac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z} = \tilde{A}(z)v(z) \tag{1.8}$$

ma w z_0 regularny punkt osobliwy, *gdy $\tilde{A}(z)$ ma w z_0 biegun co najwyżej pierwszego rzędu.*

Można wtedy zapisać (1.2) w postaci

$$(z - z_0)\partial_z v(z) = A(z)v(z),$$

gdzie $A(z)$ jest holomorficzne w otoczeniu z_0. Wartości własne macierzy $A(z_0)$ nazywamy indeksami punktu osobliwego z_0. Opiszmy teraz metodę znajdowania rozwiązań wokół regularnego punktu osobliwego. Dla uproszczenia przyjmiemy, że tym punktem jest 0.

Twierdzenie 1.12 (Metoda Frobeniusa dla układów równań) *Niech Ω będzie spójnym jednospójnym zbiorem otwartym w $\mathbb{C}$ zawierającym 0. Niech*

$$\Omega \ni z \mapsto A(z) = \begin{bmatrix} a_{11}(z) & \dots & a_{1n}(z) \\ & \dots & \\ a_{n1}(z) & \dots & a_{nn}(z) \end{bmatrix}$$

będzie funkcją holomorficzną o wartościach w macierzach $n \times n$. Niech $w \in \mathbb{C}^n$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ spełniają

$$\begin{aligned} &(A(0) - \lambda)w = 0, \\ &\lambda + m \textit{ nie jest wartością własną } A(0) \textit{ dla } m = 1, 2, \dots. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Wtedy istnieje jedna i tylko jedna funkcja $\tilde{v}(z)$ holomorficzna na Ω taka, że $v(z) := z^\lambda \tilde{v}(z)$ jest rozwiązaniem równania

$$\begin{cases} z\frac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z} = A(z)v(z), \\ \lim\limits_{z\to 0} z^{-\lambda}v(z) = w. \end{cases} \tag{1.10}$$

Dowód. Ograniczmy się najpierw do koła $K(0,r)$ takiego, że $\overline{K(0,r)} \subset \Omega$.

Niech

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k$$

Wtedy szereg

$$v(z) := z^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k,$$

gdzie

$$\begin{cases} v_0 = w \\ v_m := (\lambda + m - A_0)^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} A_{m-k} v_k. \end{cases}$$

jest jedynym szeregiem formalnie spełniającym równanie (1.10).

Pokażemy, że szereg ten jest zbieżny w kole $K(0,r)$. Wiemy z nierówności Cauchy'ego, że

$$\|A_k\| \le Cr^{-k}.$$

Jeśli położymy

$$\begin{cases} p_0 = \|w\| \\ p_m := \left\|(\lambda + m - A_0)^{-1}\right\| \sum_{k=0}^{m-1} Cr^{-m+k} p_k, \end{cases}$$

to możemy dowieść indukcyjnie, że

$$\|v_m\| \le p_m.$$

Jeśli odejmiemy wzory

$$\begin{aligned} r\left\|(\lambda + m + 1 - A_0)^{-1}\right\|^{-1} p_{m+1} &= \textstyle\sum_{k=0}^{m} Cr^{-m+k} p_k, \\ \left\|(\lambda + m - A_0)^{-1}\right\|^{-1} p_m &= \textstyle\sum_{k=0}^{m-1} Cr^{-m+k} p_k, \end{aligned}$$

to dostaniemy

$$r\left\|(\lambda + m + 1 - A_0)^{-1}\right\|^{-1} p_{m+1} = \left(C + \left\|(\lambda + m - A_0)^{-1}\right\|^{-1}\right) p_m.$$

łatwo się przekonać, że

$$\lim_{m\to\infty} m\left\|(\lambda + m - A_0)^{-1}\right\| = 1.$$

Wynika stąd natychmiast że

$$\lim_{m\to\infty} \frac{p_{m+1}}{p_m} = r^{-1}.$$

Czyli na mocy kryterium d'Alemberta, szereg definiujący $v(z)$ jest zbieżny w kole $K(0,r)$.

Stosując Twierdzenie 1.2 możemy przedłużyć $\tilde{v}(z)$ na cały obszar Ω. $\square$

Przykład 1.13 *Niech*

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & & \dots & & \\ 1 & \lambda & \dots & & \\ & & \dots & & \\ & & \dots & \lambda & \\ & & \dots & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Rozważmy równanie $z\partial_z v(z) = Av(z)$*. Wtedy dostajemy równania*

$$\begin{aligned} z\partial_z v_1 &= \lambda v_1, \\ v_1 + z\partial_z v_2 &= \lambda v_2, \\ &\dots \\ v_{n-1} + z\partial_z v_n &= \lambda v_n. \end{aligned}$$

Bazę rozwiązań tego układu stanowią

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ z^\lambda \\ z^\lambda \log z \\ \dots \\ z^\lambda (\log z)^{m-1} \end{bmatrix}, \qquad m = 1, \dots, n.$$

Przykład 1.14 *Następujące równanie ma regularny punkt osobliwy w* 0*:*

$$\partial_z v(z) = (az^{-1} + b)v(z).$$

Jego rozwiązaniem jest $v(z) = z^a \mathrm{e}^{bz}$

Rozważymy teraz równania drugiego rzędu.

Definicja 1.15 *Mówimy, że równanie*

$$\left(\partial_z^2 + \tilde{b}(z)\partial_z + \tilde{c}(z)\right) u(z) = 0$$

ma w z_0 regularny punkt osobliwy, *gdy* $\tilde{b}(z)$ *ma w* z_0 *biegun co najwyżej pierwszego rzędu a* $\tilde{c}(z)$ *ma w* z_0 *biegun co najwyżej drugiego rzędu*

Dla uproszczenia załóżmy, że $z_0 = 0$. Możemy wtedy zapisać powyższe równanie w formie:

$$\left(z^2\partial_z^2 + b(z)z\partial_z + c(z)\right) u(z) = 0.$$

Stwierdzenie 1.16 (Metoda Frobeniusa dla równań drugiego rzędu) *Niech $b(z)$, $c(z)$ będą holomorficzne w jednospójnym obszarze Ω zawierającym 0. Niech $\lambda \in \mathbb{C}$ spełnia*

$$\lambda(\lambda-1)+\lambda b(0)+c(0)=0,$$
$$(\lambda+m)(\lambda+m-1)+(\lambda+m)b(0)+c(0)\neq 0,\quad m=1,2,\dots.$$

Wtedy istnieje jedna i tylko jedna funkcja $\tilde{u}(z)$ holomorficzna w Ω, taka, że $u(z):=z^{\lambda}\tilde{u}(z)$ jest rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{cases} \left(z^2\partial_z^2+b(z)z\partial_z+c(z)\right)u(z)=0, \\ \lim\limits_{z\to 0} z^{-\lambda}u(z)=1, \end{cases} \tag{1.11}$$

Dowód. Zdefiniujmy

$$v(z):=\begin{bmatrix} u(z) \\ zu'(z) \end{bmatrix},\quad w:=\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

oraz

$$A(z):=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c(z) & 1-b(z) \end{bmatrix}.$$

Mamy wtedy

$$A(z)v(z)=\begin{bmatrix} zu'(z) \\ -c(z)u(z)-b(z)zu'(z)+zu'(z) \end{bmatrix},$$

$$z\partial_z\begin{bmatrix} u(z) \\ zu'(z) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} zu'(z) \\ z^2u''(z)+zu'(z) \end{bmatrix},$$

$$z^{-\lambda}v(z)=\begin{bmatrix} \tilde{u}(z) \\ z\tilde{u}'(z)+\lambda\tilde{u}(z) \end{bmatrix}.$$

Zatem (1.11) możemy przepisać w postaci

$$\begin{cases} z\frac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z}=A(z)v(z), \\ \lim\limits_{z\to 0} z^{-\lambda}v(z)=w. \end{cases}$$

i zastosować twierdzenie 1.12. □

Podajmy jeszcze wzór rekurencyjny na współczynniki rozwinięcia

$$u(z):=\sum_{k=0}^{\infty}u_k z^{\lambda+k}$$

dla równania

$$\left(a(z)z^2\partial_z^2+b(z)z\partial_z+c(z)\right)u(z)=0,$$

gdzie $a(0) \neq 0$. Mamy:

$$\begin{cases} u_0 &= 1, \\ u_m &= -\left((\lambda+m)(\lambda+m-1)a_0 + (\lambda+m)b_0 + c_0\right)^{-1} \\ & \quad \times \sum_{k=0}^{m-1} \left((\lambda+k)(\lambda+k-1)a_{m-k} + (\lambda+k)b_{m-k} + c_{m-k}\right)u_k. \end{cases}$$

Czyli, jeśli szukamy rozwiązań równania postaci

$$\left(a(z)z^2\partial_z^2 + b(z)z\partial_z + c(z)\right)u(z) = 0,$$

gdzie $a(0) \neq 0$, to najpierw powinniśmy znaleźć pierwiastki λ_1, λ_2 tak zwanego równania wskaźnikowego:

$$\lambda(\lambda-1)a(0) + \lambda b(0) + c(0) = 0.$$

Jeśli $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$, to możemy znaleźć dwa liniowo niezależne rozwiązania zachowujące się w zerze jak z^{λ_1} i z^{λ_2}. Jeśli $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z}$, to w ogólności możemy wyżej opisaną metodą znaleźć tylko rozwiązanie o zachowaniu z^{λ_1}, gdzie $\lambda_1 - \lambda_2 \geq 0$.

1.4 Regularny punkt osobliwy w nieskończoności

Definicja 1.17 *Załóżmy, że $\tilde{A}(z)$ jest zdefiniowane dla $|z| > R$. Mówimy, że ∞ jest regularnym punktem osobliwym równania (1.8), gdy po zamianie zmiennych $w = z^{-1}$ dostajemy regularny punkt osobliwy w 0.*

Latwo zauważyć, że równanie (1.8) ma regularny punkt osobliwy w ∞, gdy istnieje granica

$$\lim_{z\to\infty} z\tilde{A}(z).$$

Wtedy możemy przepisać równanie (1.8) w postaci

$$z\partial_z v(z) = A(z)v(z),$$

gdzie $A(z)$ jest analityczne w ∞. Wartości własne $-A(\infty)$ nazywamy indeksami punktu ∞.

Twierdzenie 1.18 *Niech Ω będzie spójnym jednospójnym zbiorem otwartym w $\overline{\mathbb{C}}$ zawierającym ∞. Niech*

$$\Omega \ni z \mapsto A(z) = \begin{bmatrix} a_{11}(z) & \dots & a_{1n}(z) \\ & \dots & \\ a_{n1}(z) & \dots & a_{nn}(z) \end{bmatrix}$$

będzie funkcją holomorficzną o wartościach w macierzach $n \times n$. Niech $w \in \mathbb{C}^n$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ spełniają

$$\begin{aligned} &(A(\infty) + \lambda)w = 0, \\ &\lambda + m \text{ nie jest wartością własną } A(\infty) \text{ dla } m = 1, 2, \dots. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Wtedy istnieje jedna i tylko jedna funkcja $\tilde{v}(z)$ holomorficzna na Ω taka, że $v(z) := z^{-\lambda}\tilde{v}(z)$ jest rozwiązaniem równania

$$\begin{cases} z\frac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z} = A(z)v(z), \\ \lim_{z\to\infty} z^\lambda v(z) = w. \end{cases} \tag{1.13}$$

Przykład 1.19 *Każde równanie pierwszego rzędu, które w $\overline{\mathbb{C}}$ ma wyłącznie punkty regularne prócz regularnych punktów osobliwych w z_1, z_2 i ∞ jest postaci*

$$\partial_z v(z) = \Big(a_1(z-z_1)^{-1} + a_2(z-z_2)^{-1}\Big)v(z) \tag{1.14}$$

Ma ono indeksy

$$z_1: \quad a_1, \qquad z_2: \quad a_2, \qquad \infty: \quad -a_1-a_2,$$

i rozwiązanie $(z-z_1)^{a_1}(z-z_2)^{a_2}$.

Stwierdzenie 1.20 *Niech $b(z)$, $c(z)$ będą holomorficzne w jednospójnym spójnym zbiorze otwartym $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ zawierającym ∞. Niech $\lambda \in \mathbb{C}$ spełnia*

$$\lambda(\lambda+1) - \lambda b(\infty) + c(\infty) = 0,$$
$$(\lambda+m)(\lambda+m+1) - (\lambda+m)b(\infty) + c(\infty) \neq 0, \quad m = 1,2,\dots.$$

Wtedy istnieje jedna i tylko jedna funkcja $\tilde{u}(z)$ holomorficzna w Ω, taka, że $u(z) := z^{-\lambda}\tilde{u}(z)$ jest rozwiązaniem równania

$$\begin{cases} \big(z^2\partial_z^2 + b(z)z\partial_z + c(z)\big)\,u(z) = 0, \\ \lim\limits_{z\to\infty} z^{\lambda}u(z) = 1. \end{cases} \tag{1.15}$$

Przykład 1.21 *Każde równanie drugiego rzędu, które w $\overline{\mathbb{C}}$ ma wyłącznie punkty regularne prócz regularnych punktów osobliwych w 0 i ∞ jest postaci*

$$(z^2\partial_z^2 + bz\partial_c + c)u(z) = 0. \tag{1.16}$$

Bywa ono nazywane **równaniem jednorodnym Eulera**. *Jego równania wskaźnikowe mają postać*

$$0: \quad \lambda(\lambda-1) + b\lambda + c = 0,$$
$$\infty: \quad \lambda(\lambda+1) - b\lambda + c = 0.$$

Jeśli $\rho, \tilde{\rho}$ są indeksami równania w 0, to $-\rho, -\tilde{\rho}$ są indeksami w ∞. Rozwiązania są równe z^{ρ}, $z^{\tilde{\rho}}$ jeśli $\rho \neq \tilde{\rho}$ i z^{ρ}, $z^{\rho}\log z$ gdy $\rho = \tilde{\rho}$. Można równanie (1.16) zapisać w postaci

$$(z^2\partial_z + (1-\rho-\tilde{\rho})z\partial_z + \rho\tilde{\rho})u(z) = 0.$$

Przykład 1.22 *Każde równanie drugiego rzędu, które w $\overline{\mathbb{C}}$ ma wyłącznie punkty regularne prócz regularnych punktów osobliwych w z_1 i z_2 jest postaci*

$$\Big(\partial_z^2 + \Big(g_1(z-z_1)^{-1} + g_2(z-z_2)^{-1}\Big)\partial_z + h(z-z_1)^{-2}(z-z_2)^{-2}\Big)u(z) = 0, \tag{1.17}$$

gdzie $g_1 + g_2 = 2$. Mamy równania wskaźnikowe

$$z_1: \quad \lambda(\lambda-1) + g_1\lambda + h(z_1-z_2)^{-2} = 0,$$
$$z_2: \quad \lambda(\lambda-1) + g_2\lambda + h(z_1-z_2)^{-2} = 0.$$

Jeśli ρ, $\tilde\rho$ są indeksami w z_1, to $-\rho$, $-\tilde\rho$ są indeksami w z_2. Rozwiązania mają postać $(z-z_1)^\rho(z-z_2)^{-\rho}$, $(z-z_1)^{\tilde\rho}(z-z_2)^{-\tilde\rho}$, jeśli $\rho\neq\tilde\rho$ i $(z-z_1)^\rho(z-z_2)^{-\rho}$, $(z-z_1)^\rho(z-z_2)^{-\rho}\log(z-z_1)(z-z_2)^{-1}$, jeśli $\rho=\tilde\rho$.

Rownanie (1.17) można przepisać w postaci

$$\begin{aligned}&\Big(\partial_z^2+\Big((1-\rho-\tilde\rho)(z-z_1)^{-1}+(1+\rho+\tilde\rho)(z-z_2)^{-1}\Big)\partial_z\\&+\rho\tilde\rho(z_1-z_2)^2(z-z_1)^{-2}(z-z_2)^{-2}\Big)u(z)=0.\end{aligned}$$

Przykład 1.23 *Każde równanie drugiego rzędu, które w $\overline{\mathbb{C}}$ ma wyłącznie punkty regularne prócz regularnych punktów osobliwych w z_1, z_2 i ∞ jest postaci*

$$\begin{aligned}&\Big(\partial_z^2+\Big(g_1(z-z_1)^{-1}+g_2(z-z_2)^{-1}\Big)\partial_z\\&+h_1(z-z_1)^{-2}+h_2(z-z_2)^{-2}+h(z-z_1)^{-1}(z-z_2)^{-1}\Big)u(z)=0.\end{aligned}\tag{1.18}$$

Jest to szczególna postać **równania Riemanna** *(albo* **równania Riemanna-Papperitza***) Mamy równania wskaźnikowe*

$$\begin{aligned}z_1:&\quad\lambda(\lambda-1)+g_1\lambda+h_1=0,\\z_2:&\quad\lambda(\lambda-1)+g_2\lambda+h_2=0,\\\infty:&\quad\lambda(\lambda+1)-(g_1+g_2)\lambda+h_1+h_2+h=0.\end{aligned}$$

Jeśli ρ_1, $\tilde\rho_1$ są indeksami w z_1, ρ_2, $\tilde\rho_2$ są indeksami w z_2 i ρ_3, $\tilde\rho_3$ są indeksami w ∞, to

$$\rho_1+\tilde\rho_1+\rho_2+\tilde\rho_2+\rho_3+\tilde\rho_3=1.\tag{1.19}$$

Równanie (1.18) można zapisać w postaci

$$\begin{aligned}&\Big(\partial_z^2+\Big((1-\rho_1-\tilde\rho_1)(z-z_1)^{-1}+(1-\rho_2-\tilde\rho_2)(z-z_2)^{-1}\Big)\partial_z\\&+\rho_1\tilde\rho_1(z_1-z_2)(z-z_1)^{-2}(z-z_2)^{-1}+\rho_2\tilde\rho_2(z_2-z_1)(z-z_2)^{-2}(z-z_1)^{-1}\\&+\rho_3\tilde\rho_3(z-z_1)^{-1}(z-z_2)^{-1}\Big)u(z)=0.\end{aligned}\tag{1.20}$$

Oznaczmy operator różniczkowy występujący w (1.20) przez

$$\mathcal{P}\begin{bmatrix}z_1, & z_2, & \infty\\ \rho_1, & \rho_2, & \rho_3\\ \tilde\rho_1, & \tilde\rho_2, & \tilde\rho_3\end{bmatrix}.$$

Wtedy przez podstawienie $u(z_1(1-t)+z_2t)=t^{\rho_1}(1-t)^{\rho_2}$ równanie (1.20) przechodzi w

$$\mathcal{P}\begin{bmatrix}0, & 1, & \infty\\ 0, & 0, & \rho_3-\rho_1-\rho_2\\ \tilde\rho_1-\rho_1, & \tilde\rho_2-\rho_2, & \tilde\rho_3-\rho_1-\rho_2\end{bmatrix}w(t)=0.\tag{1.21}$$

Równanie (1.21) można parametryzować trzema dowolnymi liczbami a, b, c:

$$\mathcal{P}\begin{bmatrix} 0, & 1, & \infty \\ 0, & 0, & a \\ 1-c, & c-a-b, & b \end{bmatrix} w(t) = 0. \tag{1.22}$$

Jeśli pomnożymy (1.22) prez $t(1-t)$, to dostajemy równanie hipergeometryczne (Patrz rozdział 5).

1.5 Wrońskian

Niech $u_1(z)$, $u_2(z)$ będzie parą rozwiązań równania

$$(\partial_z^2 + b(z)\partial_z + c(z))u(z) = 0.$$

Wrońskian tej pary jest zdefiniowany jako

$$W(u_1, u_2)(z) = W(z) := u_1(z)u_2'(z) - u_1'(z)u_2(z).$$

Spełnia on równanie

$$(\partial_z + b(z))W(z) = 0.$$

Jeśli

$$\tilde{u}_1(z) = a_{11}u_1(z) + a_{12}u_2(z), \qquad \tilde{u}_2(z) = a_{21}u_1(z) + a_{22}u_2(z)$$

jest drugą parą rozwiązań, to mamy

$$W(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})W(u_1, u_2).$$

2 Szeregi hipergeometryczne

Przypomnijmy, że dla $a \in \mathbb{C}$ wprowadziliśmy oznaczenie

$$(a)_n := a(a+1)\cdots(a+n-1).$$

Niech $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$, $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, \ldots\}$ definiujemy (uogólniony) szereg hipergeometryczny typu ${}_kF_m$

$${}_kF_m(a_1, \ldots, a_k; c_1, \ldots, c_m; z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_1)_j \cdots (a_k)_j z^j}{(c_1)_j \cdots (c_m)_j j!}. \tag{2.23}$$

Zauważmy, że

(1) jeśli $m + 1 > k$, to szereg (2.23) zbieżny dla $z \in \mathbb{C}$;

(2) jeśli $m + 1 = k$, to szereg (2.23) zbieżny dla $|z| < 1$;

(3) jeśli $m + 1 < k$, to szereg (2.23) rozbieżny (ale mimo to czasem można nadać sens funkcji ${}_kF_m$).

Wynika to z kryterium d'Alemberta: jeśli f_j jest j-tym współczynnikiem szeregu (2.23), to

$$\frac{f_{j+1}}{f_j} = \frac{(a_1+j)\cdots(a_k+j)}{(c_1+j)\cdots(c_m+j)}.$$

Można również używać

$$\begin{aligned} {}_k\Phi_m(a_1,\dots,a_k;c_1,\dots,c_m;z) &:= \frac{{}_kF_m(a_1,\dots,a_k;c_1,\dots,c_m;z)}{\Gamma(c_1)\cdots\Gamma(c_m)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_1)_j\cdots(a_k)_j z^j}{\Gamma(c_1+j)\cdots\Gamma(c_m+j)j!}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

wtedy nie musimy ograniczać wartości $c_1,\dots,c_m \in \mathbb{C}$. (Wtedy, jeśli któreś $c_i \in \{0,-1,-2\dots\}$, to funkcja Φ jest równa zero).

W praktyce, najczęściej spotykamy następujące funkcje hipergeometryczne:

2.1 Funkcja hipergeometryczna albo ${}_2F_1$

$$F(a,b;c;z) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n} z^n.$$

Szereg jest zbieżny dla $|z|<1$, przedłuża się do funkcji wieloznacznej na nakryciu $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$.

Funkcja jest rozwiązaniem analitycznym i równym w zerze 1 równania hipergeometrycznego

$$\big(z(1-z)\partial_z^2 + (c-(a+b+1)z)\partial_z - ab\big)\,u(z) = 0.$$

2.2 Funkcja konfluentna albo ${}_1F_1$

$$F(a;c;z) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!(c)_n} z^n.$$

Szereg jest zbieżny dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$. Funkcja rozwiązaniem analitycznym i równym 1 w zerze równania konfluentnego

$$(z\partial_z^2 + (c-z)\partial_z - a)u(z) = 0,$$

2.3 Funkcja ${}_0F_1$

$$F(-;c;z) = F(c;z) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(c)_n} z^n.$$

Jest rozwiązaniem analitycznym i równym w zerze 1 równania (spokrewnionego z równaniem Bessela):

$$(z\partial_z^2 + c\partial_z - 1)u(z) = 0.$$

2.4 Funkcja ${}_2F_0$

Dla tej funkcji szereg hipergeometryczny jest rozbieżny. Jest to wieloznaczna funkcja na nakryciu $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ i dlatego nie można jej zdefiować szeregiem. Niemniej szereg hipergeometryczny daje jej rozwinięcie asymptotyczne:

$$F(a,b;-;z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{n!} z^n$$

Jest ono rozwiązaniem następującego równania (spokrewnionego z równaniem konfluentnym):

$$\left(z^2\partial_z^2 + (-1 + (a+b+1)z)\partial_z + ab\right) u(z) = 0.$$

2.5 Funkcja potęgowa czyli ${}_1F_0$

$$F(a;-;z) = (1-z)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} z^n$$

Szereg jest zbieżny dla $|z| < 1$, przedłuża się do funkcji wieloznacznej na nakryciu $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ Rozwiązanie równania

$$((z-1)\partial_z - a)u(z) = 0.$$

2.6 Funkcja wykładnicza czyli ${}_0F_0$

$$F(-;-;z) = \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

Rozwiązanie równania

$$(\partial_z - 1)u(z) = 0.$$

3 Równanie konfluentne

3.1 Funkcja konfluentna

Równaniem konfluentnym nazywamy równanie

$$(z\partial_z^2 + (c-z)\partial_z - a)u(z) = 0.$$

Ma ono w 0 regularny punkt osobliwy z indeksami 0, $1-c$.

Używając $z^{-\gamma}\partial_z z^{\gamma} = \partial_z + \frac{\gamma}{z}$ dostajemy tożsamość

$$\begin{aligned} & z^{-\gamma}(z\partial_z^2 + (c-z)\partial_z - a)z^{\gamma} \\ = \; & z\partial_z^2 + (2\gamma + c - z)\partial_z - \gamma - a + (-\gamma + \gamma^2 + c\gamma)z^{-1}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

W szczególności,

$$\begin{aligned} & z^{c-1}(z\partial_z^2 + (c-z)\partial_z - a)z^{1-c} \\ = \; & z\partial_z^2 + (2 - c - z)\partial_z - 1 + c - a, \end{aligned} \tag{3.26}$$

co jest równaniem konfluentnym z parametrami $1+a-c$, $2-c$.

Równanie na współczynniki szeregu będącego rozwiązaniem:

$$f_n(n+\lambda)(n+\lambda-1+c) = (n+\lambda-1+a)f_{n-1}.$$

Rozwiązanie analityczne i równe 1 w zerze nazywa się funkcją konfluentną

$$F(a;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!(c)_n} z^n.$$

Z tożsamości (3.26) wynika, że rozwiązanie zachowujące się w zerze jak z^{1-c} można zapisać jako

$$z^{1-c}F(a-c+1;2-c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-c+1)_n}{n!(2-c)_n} z^{1-c+n}.$$

3.2 Pierwsza tożsamość Kummera

Korzystając z $\mathrm{e}^{-z}\partial_z \mathrm{e}^z = \partial_z + 1$ dostajemy

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{-z}(z\partial_z^2 + (c-z)\partial_z - a)\mathrm{e}^z \\ = \quad & z\partial_z^2 + (c+z)\partial_z + c - a. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Podstawiamy $z = -w$ i mnożymy przez -1, dostając

$$w\partial_w^2 + (c-w)\partial_w - c + a.$$

Jest to równanie konfluentne z parametrami $c-a$, c. Zatem $\mathrm{e}^z F(c-a;c;-z)$ jest rozwiązaniem równania konfluentnego analitycznym i równym 1 w zerze. Dostajemy zatem tożsamość

$$F(a;c;z) = \mathrm{e}^z F(c-a;c;-z). \tag{3.28}$$

3.3 Reprezentacje całkowe rozwiązań równania konfluentnego

Jeśli $[0,1] \ni t \mapsto \gamma(t) \in \Omega$ jest krzywą i f jest funkcją na Ω, to wprowadzamy oznaczenie

$$f\Big|_\gamma := f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)).$$

Twierdzenie 3.1 *Niech krzywa γ spełnia*

$$\mathrm{e}^{zs}s^a(1-s)^{c-a}\Big|_\gamma = 0. \tag{3.29}$$

Wtedy

$$\int_\gamma \mathrm{e}^{zs}s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}\mathrm{d}s \tag{3.30}$$

jest rozwiązaniem równania konfluentnego.

Dowód.

$$
\begin{aligned}
& (z\partial_z^2 + (c-z)\partial_z - a)\mathrm{e}^{zs}s^{a-1}(1-s)^{c-a-1} \\
= \; & z\mathrm{e}^{zs}s^{a+1}(1-s)^{c-a-1} + (c-z)\mathrm{e}^{zs}s^{a}(1-s)^{c-a-1} - a\mathrm{e}^{zs}s^{a-1}(1-s)^{c-a-1} \\
= \; & -z\mathrm{e}^{zs}s^{a}(1-s)^{c-a} - a\mathrm{e}^{zs}s^{a-1}(1-s)^{c-a} + (c-a)\mathrm{e}^{zs}s^{a}(1-s)^{c-a-1} \\
= \; & -\partial_s \mathrm{e}^{zs}s^{a}(1-s)^{c-a}.
\end{aligned}
$$

□

Dlatego dla Re$a > 0$, Re$(c-a) > 0$ mamy

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{zs}s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}\mathrm{d}s = \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}F(a;c;z). \tag{3.31}$$

Mamy bowiem wtedy spełnione założenia (funkcja w (3.29) ma na końcach przedziału wartości zerowe) i dostajemy rozwiązanie analityczne w otoczeniu zera. Sprawdzamy, że w zerze ma ono wartość

$$\int_0^1 s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}\mathrm{d}s = \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}.$$

Zauważmy, że jeśli $n = -a \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, to $F(-n;c;z)$ jest wielomianem stopnia n. Są to tzw. wielomiany Laguerre'a. Można je zapisać przez całkę w której krzywą γ jest krzywa okrążająca punkt 0:

$$
\begin{aligned}
L_n^{\alpha}(z) \; &:= \; \frac{(1+\alpha)_n}{n!}F(-n;1+\alpha;z) \\
&= \; \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{[0^+]} \mathrm{e}^{-tz}t^{-n-1}(1-t)^{\alpha+n}\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

3.4 Punkt w ∞ i równanie ${}_2F_0$

Stosując (3.25) z $\gamma = -a$ dostajemy

$$
\begin{aligned}
& z^{a+1}(z\partial_z^2 + (c-z)\partial_z - a)z^{-a} \\
= \; & z^2\partial_z^2 + z(-2a + c - z)\partial_z + a(1 + a - c). \qquad (3.32) \\
= \; & z^2\partial_z^2 + z(1 - a - b - z)\partial_z + ab, \qquad (3.33)
\end{aligned}
$$

gdzie podstawiliśmy $b := 1 + a - c$. Podstawiając $w = -z^{-1}$ (przy odwrotnym przekształceniu $z = -w^{-1}$), korzystając z tego, że $\partial_z = w^2\partial_w$, dostajemy, że (3.33) jest równe

$$w^2\partial_w^2 + (-1 + (1 + a + b)w)\partial_w + ab.$$

Dostaliśmy w ten sposób równanie typu ${}_2F_0$. Zauważmy, że 0 jest nieregularnym punktem osobliwym dla tego równania. Dlatego też, ∞ jest nieregularnym punktem osobliwym równania konfluentnego.

Jeśli

$$(w^2\partial_w^2 + (-1 + (1 + a + b)w)\partial_w + ab)g(w) = 0,$$

to

$$(z\partial_z^2 + (c-z)\partial_z - a)z^{-a}g(-z^{-1}) = 0. \tag{3.34}$$

I na odwrót, jeśli

$$(z\partial_z^2 + (c-z)\partial_z - a)f(z) = 0,$$

to

$$(w^2\partial_w^2 + (-1 + (1+a+b)w)\partial_w + ab)w^{-a}f(-w^{-1}) = 0.$$

3.5 Funkcja ${}_2F_0$

Równanie (3.34) próbujemy rozwiązać szeregiem

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n w^n.$$

Dostajemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big(n(n-1)g_n w^n - n g_n w^{n-1} + (1+a+b)n g_n w^n + ab g_n w^n\big) = 0$$

Zatem

$$(n-1+a)(n-1+b)g_{n-1} = n g_n.$$

Daje to współczynniki

$$g_n = \frac{(a)_n (b)_n}{n!} g_0$$

i prowadzi do rozbieżnego szeregu.

Twierdzenie 3.2 *Niech krzywa γ spełnia*

$$\mathrm{e}^{-t}t^a(1-wt)^{1-b}\Big|_\gamma = 0 \tag{3.35}$$

Wtedy

$$\int_\gamma \mathrm{e}^{-t}t^{a-1}(1-wt)^{-b}\mathrm{d}t$$

jest rozwiązaniem równania (3.34).

Dowód. Z Twierdzenia 3.1

$$\int_\gamma \mathrm{e}^{zs}s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}\mathrm{d}s$$

jest rozwiązaniem równania konfluentnego. Więc

$$w^{-a}\int_\gamma \mathrm{e}^{-sw^{-1}}s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}\mathrm{d}s,$$

dla $b = 1 + a - c$ jest rozwiązaniem równania (3.34). Następnie podstawimy $t = \frac{s}{w}$. □

Dla $w \in \mathbb{C}\backslash[0,\infty[$, Re$a > 0$ definiujemy

$$F(a,b;-;w) := \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{a-1}(1-wt)^{-b}\mathrm{d}t. \tag{3.36}$$

(Na inne wartości a definujemy przez przedłużenie analityczne). Mamy następujące rozwinięcie asymptotyczne:

$$F(a,b;-;w) \sim \sum_{n=0}^\infty \frac{(a)_n(b)_n}{n!}w^n,$$

to znaczy, dla każdego n, dla $|\mathrm{arg}w| \geq \epsilon > 0$,

$$\lim_{w\to 0} w^{-n}\left(F(a,b;-;w) - \sum_{j=0}^n \frac{(a)_j(b)_j}{j!}w^j\right) = 0.$$

Aby się o tym przekonać, korzystamy ze wzoru

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(0)z^j}{j!} + z^n\int_0^1 \frac{f^{(n)}(sz)n(1-s)^{n-1}}{n!}\mathrm{d}s,$$

z którego wynika

$$(1-z)^{-b} = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(b)_jz^j}{j!} + \frac{(b)_nz^n}{n!}\int_0^1 n(1-s)^{n-1}(1-zs)^{-b-n}\mathrm{d}s.$$

Dlatego też

$$\begin{aligned}
& F(a,b;-;w) \\
= \ & \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{a-1}(1-wt)^{-b}\mathrm{d}t \\
= \ & \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{a-1}\frac{(b)_jw^jt^j}{j!}\mathrm{d}t \\
& + \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{a-1}\frac{(b)_nw^nt^n}{n!}\int_0^1(1-wts)^{-b-n}n(1-s)^{n-1}\mathrm{d}s \\
= \ & \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(b)_j\Gamma(a+j)w^j}{\Gamma(a)j!} \\
& + \frac{w^n(b)_n}{\Gamma(a)n!}\int_0^1 n(1-s)^{n-1}\mathrm{d}s\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{a-1+n}(1-wts)^{-b-n}\mathrm{d}t \\
= \ & \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(b)_j(a)_jw^j}{j!} \\
& + \frac{w^n(b)_n(a)_n}{n!}\int_0^1 n(1-s)^{n-1}\mathrm{d}sF(a+n,b+n;-;ws).
\end{aligned}$$

3.6 Rozwiązania równania konfluentnego mające określone zachowanie w ∞

Rozważmy funkcję analityczną określoną na górnej półpłaszczyźnie

$$s \mapsto e^{zs} s^{a-1}(1-s)^{c-a-1},$$

gdzie potęgi są rozumiane w sensie wartości głównych. Załóżmy, że $\mathrm{Re}a > 0$, $\mathrm{Re}(c-a) > 0$. Pamiętamy, że

$$F(z) = \int_0^1 \mathrm{e}^{zs} s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}\mathrm{d}s = \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} F(a;c;z)$$

jest jednym z rozwiązań równania konfluentnego. Jeśli $\mathrm{Im}z > 0$, to możemy jeszcze napisać następujące rozwiązania:

$$\begin{aligned} F_0(z) &= \int_0^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\infty} \mathrm{e}^{zs} s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}\mathrm{d}s, \\ F_1(z) &= \int_1^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\infty} \mathrm{e}^{zs} s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

gdzie $\phi \in]\frac{\pi}{2} - \mathrm{arg}z, \frac{3\pi}{2} - \mathrm{arg}z[$ gwarantuje, że e^{zs} wzdłuż półprostej po której całkujemy dąży szybko do zera (co zapewnia spełnienie odpowiedniego warunku). Zauważmy, że

$$F(z) + F_1(z) - F_0(z) = 0. \tag{3.37}$$

Podstawiając $s = -z^{-1}t$, gdzie $t \in [0, \infty[$, dostajemy dla $\mathrm{Re}a > 0$

$$\begin{aligned} F_0(z) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}(-z^{-1})^{a-1}(1+z^{-1}t)^{c-a-1}(-z^{-1})\mathrm{d}t \\ &= (-z)^{-a}\Gamma(a)F(a, a+1-c; -, -z^{-1}). \end{aligned}$$

Podstawiając $s = 1 - z^{-1}t$ gdzie $t \in [0, \infty[$ możemy napisać dla $\mathrm{Re}(c-a) > 0$

$$\begin{aligned} F_1(z) &= -\mathrm{e}^z \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}(1-z^{-1}t)^{a-1} z^{-c+a} t^{c-a-1}\mathrm{d}t \\ &= -\mathrm{e}^z z^{-c+a}\Gamma(c-a)F(c-a, 1-a; -, z^{-1}). \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę (3.37), dostajemy

$$\frac{F(a;c;z)}{\Gamma(c)} = (-z)^{-a}\frac{F(a, a+1-c; -; -z^{-1})}{\Gamma(c-a)} + z^{-c+a}\frac{\mathrm{e}^z F(c-a, 1-a; -; z^{-1})}{\Gamma(a)}$$

3.7 Atom wodoru

Przekształcamy równanie konfluentne:

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{-z/2}\left(z\partial_z^2 + (c-z)\partial_z - a\right)\mathrm{e}^{z/2} \\ = \; & z\partial_z^2 + c\partial_z + \frac{c}{2} - a - \frac{z}{4}; \end{aligned} \tag{3.38}$$

Następnie

$$
\begin{aligned}
& z^{-(1-c)/2}\left(z\partial_z^2 + c\partial_z + \frac{c}{2} - a - \frac{z}{4}\right) z^{(1-c)/2} && (3.39)\\
= \quad & z\partial_z^2 + \partial_z - \frac{z}{4} + \frac{c}{2} - a - \frac{(1-c)^2}{4z}. && (3.40)
\end{aligned}
$$

Dzielimy (3.39) przez z i podstawiamy $z = 2w$. Dostajemy

$$
\partial_w^2 + \frac{1}{w}\partial_w - 1 + (c-2a)\frac{1}{w} - \left(\frac{1-c}{2}\right)^2 \frac{1}{w^2}, \tag{3.41}
$$

Mnożymy (3.41) przez w^2 i dostajemy

$$
w^2\partial_w^2 + w\partial_w - w^2 + (c-2a)w - \left(\frac{1-c}{2}\right)^2. \tag{3.42}
$$

czyli równanie na część radialną funkcji falowej dla potencjału coulombowskiego w 2 wymiarach (które łatwo przekształcić na równanie na część radialną dla potencjału coulombowskiego dla większego wymiaru).

Czyli jeśli funkcja f spełnia równanie konfluentne, to $\mathrm{e}^w w^{(1-c)/2} f(2w)$ spełnia równanie (3.42).

4 Równanie ${}_0F_1$ i równanie Bessela

4.1 Zmodyfikowane równanie Bessela

Naszym punktem wyjścia jest równanie (3.41). Załóżmy, że $c = 2a$ i $m := (1-c)/2$. Wtedy dostajemy zmodyfikowane równanie Bessela

$$
\partial_w^2 + \frac{1}{w}\partial_w - 1 - \frac{m^2}{w^2}, \tag{4.43}
$$

Czyli jeśli f jest rozwiązaniem następującego szczególnego przypadku równania konfluentnego

$$
\left(z\partial_z^2 + (2m+1-z)\partial_z - (m+\frac{1}{2})\right) f(z) = 0,
$$

to $w^m \mathrm{e}^{-w} f(2w)$, jak również $w^m \mathrm{e}^{w} f(-2w)$, są rozwiązaniami zmodyfikowanego równania Bessela (4.43).

W szczególności, jedyne rozwiązanie (4.43) zachowujące się w zerze jak $\frac{w^m}{2^m\Gamma(m+1)}$ nosi nazwę *zmodyfikowanej funkcji Bessela*:

$$
\begin{aligned}
I(w) &:= \frac{1}{\Gamma(m+1)}\left(\frac{w}{2}\right)^m \mathrm{e}^{-w} F(m+\frac{1}{2}; 2m+1; 2w) \\
&:= \frac{1}{\Gamma(m+1)}\left(\frac{w}{2}\right)^m \mathrm{e}^{w} F(m+\frac{1}{2}; 2m+1; -2w). && (4.44)
\end{aligned}
$$

4.2 Równanie Bessela

Częściej od zmodyfikowaneo równania Bessela używane jest równanie zwane po prostu *równaniem Bessela*, otrzymane z (4.43) przez podstawienie $w = \mathrm{i}z$:

$$\partial_z^2 + \frac{1}{z}\partial_z + 1 - \frac{m^2}{z^2}. \tag{4.45}$$

Rozwiązanie (4.45) zachowujące się w zerze jak $\frac{w^m}{2^m\Gamma(m+1)}$ nazywamy *funkcją Bessela*:

$$\begin{aligned} J(z) &:= \frac{1}{\Gamma(m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} F(m+\frac{1}{2}; 2m+1; 2\mathrm{i}z) \\ &:= \frac{1}{\Gamma(m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^m \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} F(m+\frac{1}{2}; 2m+1; -2\mathrm{i}z) \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}m} I(\mathrm{i}z). \end{aligned} \tag{4.46}$$

4.3 Równanie Helmholtza w wymiarze 2

Równanie Helmholtza ma postać

$$(\Delta + \kappa)F = 0.$$

Rozwiążmy równanie Helmholza w wymiarze $d = 2$ w układzie biegunowym przez separację zmiennych. Jeśli zapiszemy $F = f(r)g(\phi)$, to na część kątową dostajemy równanie $\partial_\phi g(\phi) = Cg(\phi)$. Rozwiązuje je $g(\phi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$, gdzie $m^2 = -C$. Na część radialną dostajemy równanie

$$\left(\frac{1}{r}\partial_r r \partial_r - \frac{m^2}{r^2} + \kappa\right) f(r) = 0.$$

Czyli jeśli $\kappa > 0$, to rozwiązania są postaci

$$F(r,\phi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} g(\sqrt{\kappa}r),$$

gdzie g jest rozwiązaniem równania Bessela a jeśli $\kappa < 0$, to rozwiązania są postaci

$$F(r,\phi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} g(\sqrt{-\kappa}r),$$

gdzie g jest rozwiązaniem zmodyfikowanego równania Bessela.

Jeśli $\kappa = 0$, to dostajemy równanie Laplace'a. Równanie na część radialną jest postaci

$$\left(\frac{1}{r}\partial_r r \partial_r - \frac{m^2}{r^2}\right) f(r) = 0$$

i ma rozwiązania r^m i r^{-m}. Czyli rozwiązanie jest kombinacją liniową $r^m\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$ i $r^{-m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$. We współrzędnych kartezjańskich odpowiada to kombinacjom liniowym $(x + \mathrm{i}y)^m$ i $(x - \mathrm{i}y)^m$.

4.4 Równanie Helmholtza w dowolnym wymiarze

W dowolnym wymiarze równanie na część radialną ma postać

$$\left(r^{-d+1}\partial_r r^{d-1}\partial_r - \frac{l(l+d-2)}{r^2} + \kappa\right) f(r) = 0$$

Zauważając, że

$$\begin{aligned} & r^{\frac{d-2}{2}}\left(r^{d-1}\partial_r r^{d-1}\partial_r - \frac{l(l+d-2)}{r^2} + \kappa\right) r^{-\frac{d-2}{2}} \\ = \; & r^{-1}\partial_r r\partial_r - \left(l + \frac{d-2}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

widzimy, że i tym razem dostajemy równanie Bessela.

4.5 Równanie ${}_0F_1$ – równoważność z równaniem Bessela

Zamiast równania i funkcji Bessela wygodniej jest używać równania ${}_0F_1$:

$$(w\partial_w^2 + \tilde{c}\partial_w - 1)f(w) = 0. \tag{4.47}$$

Równanie to jest w pełni równoważne równaniu Bessela.

Aby je uzyskać wygodnie jest wystartować z równania (3.39) dla $c = 2a$:

$$z\partial_z^2 + c\partial_z - \frac{z}{4}. \tag{4.48}$$

Podstawiamy w nim $w = \frac{z^2}{16}$, czyli $z = 4w^{\frac{1}{2}}$. Używając $\partial_z = \frac{w^{\frac{1}{2}}}{2}\partial_w$, dostajemy

$$w^{\frac{3}{2}}\partial_w^2 + \frac{w^{\frac{1}{2}}}{2}\partial_w + \frac{c}{2}w^{\frac{1}{2}}\partial_w - w^{\frac{1}{2}}. \tag{4.49}$$

Dzielimy przez $w^{\frac{1}{2}}$ i dostajemy (4.47) dla $\tilde{c} = \frac{1+c}{2}$.

4.6 Funkcja ${}_0F_1$

Równanie

$$(z\partial_z^2 + c\partial_z - 1)f(z) = 0. \tag{4.50}$$

ma regularny punkt osobliwy w 0 z indeksami $0, 1-c$ i nieregularny punkt osobliwy w ∞. Posiada ono symetrię

$$z^{c-1}(\partial_z^2 + c\partial_z - 1)z^{1-c} = \partial_z^2 + (2-c)\partial_z - 1. \tag{4.51}$$

Rozwiązaniem analitycznym w zerze i równym w nim 1 jest funkcja

$$F(c;z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(c)_n n!}.$$

Stosując symetrię (4.51) widzimy, że rozwiązaniem zachowującym się w zerze jak z^{1-c} jest $z^{1-c}F(2-c;z)$.

Wygodnie jest używać zamiast funkcji $F(c;z)$ funkcji

$$\Phi(c;z) := \frac{F(c;z)}{\Gamma(c)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(c+j)j!}.$$

Oto wyrażenia przedstawiające funkcję Bessela i zmodyfikowaną funkcję Bessela poprzez funkcję ${}_0\Phi_1$:

$$\begin{aligned} I_m(w) &= \left(\frac{w}{2}\right)^m \Phi(1+m; w^2/4); \\ J_m(w) &= \left(\frac{w}{2}\right)^m \Phi(1+m; -w^2/4); \end{aligned}$$

Funkcję ${}_0F_1$ możemy przedstawić poprzez funkcję konfluentną dostając drugą tożsamość Kummera:

$$\begin{aligned} F(c;z) &= \mathrm{e}^{-2\sqrt{z}} F\left(\frac{2c-1}{2}; 2c-1; 4\sqrt{z}\right) \\ &= \mathrm{e}^{2\sqrt{z}} F\left(\frac{2c-1}{2}; 2c-1; -4\sqrt{z}\right). \end{aligned}$$

Żeby się o tym przekonać, sprawdzamy, że prawa strona spełnia równanie (4.50), że w zerze jest analityczna i równa 1.

4.7 Reprezentacje całkowe

Twierdzenie 4.1 *Niech krzywa γ spełnia*

$$\mathrm{e}^t \mathrm{e}^{z/t} t^{-c}\Big|_\gamma = 0.$$

Wtedy

$$\int_\gamma \mathrm{e}^{t+z/t} t^{-c} \mathrm{d}t$$

jest rozwiązaniem równania (4.50).

Dowód. Sprawdzamy, że

$$(z\partial_z^2 + c\partial_z - 1)\mathrm{e}^{t+z/t}t^{-c} = \partial_t \mathrm{e}^{t+z/t}t^{-c}.$$

□

Stąd dostajemy reprezentację całkową

$$\Phi(c;z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{]-\infty,0^+,\infty[} \mathrm{e}^{t+z/t} t^{-c} \mathrm{d}t. \tag{4.52}$$

Aby ją uzyskać wystarczy sprawdzić, że całka (4.52) spełnia założenia twierdzenia 4.1 i w zerze jest analityczna i równa

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{]-\infty,0^+,\infty[}\mathrm{e}^t t^{-c}\mathrm{d}t=\frac{1}{\Gamma(c)}.$$

Następująca reprezentacja wynika natychmiast z Twierdzenia 3.1 o reprezentacjach całkowych rozwiązań równania konfluentnego:

Twierdzenie 4.2 *Niech krzywa γ spełnia*

$$(t^2-1)^{c-\frac12}\mathrm{e}^{2t\sqrt{z}}\Big|_\gamma=0.$$

Wtedy

$$\int_\gamma(t^2-1)^{c-\frac32}\mathrm{e}^{2\sqrt{z}t}\mathrm{d}t$$

jest rozwiązaniem równania (4.50).

Z tego twierdzenia dostajemy

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{c-\frac32}\mathrm{e}^{2t\sqrt{z}}\mathrm{d}t=F(c;z)\frac{\Gamma(c-\frac12)\sqrt{\pi}}{\Gamma(c)}.\tag{4.53}$$

Sprawdzamy bowiem, że całka w (4.53) spełnia założenia Twierdzenia 4.2, w zerze jest analityczna i równa

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{c-\frac32}\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(c-\frac12)\sqrt{\pi}}{\Gamma(c)}.$$

4.8 Funkcja ${}_0F_1$ dla całkowitych parametrów

Dla $k\in\mathbb{Z}$ mamy tożsamość:

$$\Phi(1+k;z)=z^{-k}\Phi(1-k;z).$$

Wynika to z rachunku

$$z^{-k}\Phi(2-c;z)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{z^{n-k}}{(-k+n)!n!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!(k+m)!}=\Phi(1+k;z).$$

Mamy też funkcję tworzącą

$$\mathrm{e}^{t+z/t}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}t^n\Phi(n+1,z)$$

oraz reprezentację całkową

$$\Phi(n+1;z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{[0^+]}\mathrm{e}^{t+z/t}t^{-n-1}\mathrm{d}t.\tag{4.54}$$

Zauważmy, że (4.54) wynika z Twierdzenia 4.1.

5 Równanie hipergeometryczne

Równanie hipergeometryczne ma postać

$$\big(z(1-z)\partial_z^2 + (c-(a+b+1)z)\partial_z - ab\big)\, f(z) = 0. \tag{5.55}$$

Ma ono punkty następujące regularne punkty osobliwe:
0, indeksy: $0,\ 1-c$;
1, indeksy: $0,\ c-a-b$;
∞, indeksy: $a,\ b$.

Rozwiązaniem analitycznym w zerze i równym w nim 1 jest *funkcja hipergeometryczna*

$$F(a,b;c;z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j(b)_j}{(c)_j}\frac{z^j}{j!},$$

Funkcja $F(a,b;c;z)$ jest zdefiniowana dla $c \neq 0,-1,-2,\ldots$. Czasem wygodniej jest rozważać funkcję

$$\Phi(a,b;c;z) := \frac{F(a,b,c,z)}{\Gamma(c)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j(b)_j}{\Gamma(c+j)}\frac{z^j}{j!}$$

zdefiniowaną dla wszystkich a,b,c.

5.1 Rozwiązanie zachowujące się jak z^{1-c} w zerze

Równanie hipergeometryczne ma symetrię

$$\begin{aligned} & z^{c-1}\big(z(1-z)\partial_z^2 + (c-(a+b+1)z)\partial_z - ab\big)\, z^{1-c} \\ = \; & \big(z(1-z)\partial_z^2 + (2-c-(a+b+-2c+3)z)\partial_z - (b-c+1)(a-c+1)\big) \end{aligned}$$

Dlatego rozwiązaniem równania (5.55) zachowującym się jak z^{1-c} w zerze jest

$$z^{1-c}F(b+1-c,a+1-c;2-c;z) \tag{5.56}$$

5.2 Rozwiązania mające określone zachowania w 1

Podstawienie, które zamienia 0 i 1 to $w=1-z$:

$$\begin{aligned} & z(1-z)\partial_z^2 + (c-(a+b+1)z)\partial_z - ab \\ = \; & w(1-w)\partial_w^2 + (c-a-b+1-(a+b+1)w)\partial_w - ab. \end{aligned}$$

Dlatego, rozwiązaniem analitycznym w 1 i przyjmującym tam wartość 1 jest

$$F(a,b;a+b+1-c;1-z).$$

5.3 Rozwiązania mające określone zachowania w ∞

Punkt w nieskończoności jest regularnym punktem osobliwym z indeksami a, b. Podstawienie zamieniające 0 i ∞ to $w = z^{-1}$.

$$\begin{aligned} & (-z)^{1+a}\left(z(1-z)\partial_z^2 + (c-(a+b+1)z)\partial_z - ab\right)(-z)^{-a} && (5.57)\\ = & \left(w(1-w)\partial_w^2 + (a-b+1-(2a-c+2)w)\partial_w - a(a-c+1)\right). && (5.58)\end{aligned}$$

Stąd dostajemy rozwiązanie zachowujące się w nieskończoności jak z^{-a}

$$z^{-a}F(a, a-c+1; a-b+1; z^{-1}),$$

Drugie rozwiązanie dostajemy zamieniając a i b:

$$z^{-b}F(b-c+1, b; b-a+1; z^{-1}).$$

5.4 Tożsamości

Następujące podstawienie nie zmienia 0, a zamienia 1 i ∞: $z \mapsto w = \frac{z}{z-1}$. Prowadzi ono do

$$\begin{aligned} & -(1-z)^{1+a}\left(z(1-z)\partial_z^2 + (c-(a+b+1)z)\partial_z - ab\right)(1-z)^{-a}\\ = & \left(z(1-z)\partial_z^2 + (c-(c+1)z)\partial_z - a(c-b)\right), && (5.59)\end{aligned}$$

Podobnie z zamianą a i b. Stąd dostajemy tożsamości

$$\begin{aligned} & F(a, b; c; z)\\ & = (1-z)^{c-a-b}F(c-a, c-b; c; z)\\ & = (1-z)^{-a}F\left(a, c-b; c; \tfrac{z}{z-1}\right)\\ & = (1-z)^{-b}F\left(c-a, b; c; \tfrac{z}{z-1}\right). \end{aligned}$$

5.5 Reprezentacje całkowe

Twierdzenie 5.1 *Niech krzywa γ spełnia*

$$t^{a-c+1}(1-t)^{c-b}(t-z)^{-a-1}\Big|_\gamma = 0.$$

Wtedy

$$\int_\gamma t^{a-c}(1-t)^{c-b-1}(t-z)^{-a}\mathrm{d}t \tag{5.60}$$

jest rozwiązaniem równania hipergeometrycznego.

Dowód. Sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} & \left(z(1-z)\partial_z^2 + (c-(a+b+1)z)\partial_z - ab\right)t^{a-c}(1-t)^{c-b-1}(t-z)^{-a}\mathrm{d}t\\ & = -a\partial_t t^{a-c+1}(1-t)^{c-b}(t-z)^{-a-1}. \end{aligned}$$

□

Wynika stąd następująca reprezentacja całkowa funkcji hipergeometrycznej:

$$\begin{aligned}&\int_1^\infty t^{a-c}(t-1)^{c-b-1}(t-z)^{-a}\mathrm{d}t\\&=\Gamma(b)\Gamma(c-b)\Phi(a,b;c;z), \qquad \mathrm{Re}(c-b)>0,\ \mathrm{Re}b>0.\end{aligned} \tag{5.61}$$

Aby ją dostać, zauważmy, że (5.61) spełnia założenia Twierdzenia 5.1, w zerze jest analityczne i przyjmuje wartość

$$\int_1^\infty t^{a-c}(t-1)^{c-b-1}(t-z)^{-a}\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}.$$

6 Równanie Bessela

Ten rozdział zawiera omówienie równania Bessela alternatywne w stosunku do Rozdz. 4. Pochodzi ono ze starszej wersji skryptu do MMF (rok 1999).

6.1 Równanie Bessela i pokrewne równania

Równanie Bessela ma postać

$$(z^2\partial_z^2 + z\partial_z + z^2 - m^2)v(z) = 0.$$

W zastosowaniach często spotyka się d-wymiarowe równanie Bessela:

$$(z^2\partial_z^2 + (d-1)z\partial_z + z^2 - l(l+d-2))u(z) = 0.$$

Podstawiając

$$u(z) = z^{1-\frac{d}{2}}v(z)$$

sprowadzamy je do równania Bessela:

$$(z^2\partial_z^2 + z\partial_z + z^2 - (l+\tfrac{d}{2}-1)^2)v(z) = 0.$$

Podstawienie do równania Bessela

$$v(z) = z^m\tilde{v}(z)$$

prowadzi do równania

$$(z\partial_z^2 + (1+2m)\partial_z + z)\tilde{v}(z) = 0. \tag{6.62}$$

Podstawienie

$$v(z) = (\tfrac{z}{2})^m u(-\tfrac{z^2}{4}), \qquad c = 1+m, \quad t = -\tfrac{z^2}{4}$$

prowadzi do równania typu hipergeometrycznego

$$(t\partial_t^2 + c\partial_t - 1)u(t) = 0.$$

Podstawienie $\sqrt{z}v(z) = w(z)$ prowadzi do równania Schrödingera postaci

$$\Big(\partial_z^2 + (\tfrac{1}{4} - m^2)\tfrac{1}{z^2} + 1\Big)w(z) = 0. \tag{6.63}$$

Bardziej ogólnie: podstawienie $\sqrt{t}v(t^\delta) = w(t)$ prowadzi do równania Schrödingera postaci

$$\Big(\partial_t^2 + (\delta t^{\delta-1})^2 + (\tfrac{1}{4} - m^2\delta^2)\tfrac{1}{t^2} + 1\Big)w(t) = 0. \tag{6.64}$$

Z tego wynika, że jeśli $v_{\frac{1}{\rho+1}}$ jest rozwiązaniem równania Bessela z parametrem $\frac{1}{\rho+1}$, to

$$u(t) = \sqrt{t}v_{\frac{1}{\rho+1}}\left(\frac{2}{\rho+2}t^{1+\frac{\rho}{2}}\right)$$

jest rozwiązaniem równania

$$(\partial_t^2 + t^\rho)u = 0.$$

6.2 Reprezentacje całkowe rozwiązań równania Bessela

Rozwiązań równania Bessela można szukać w postaci następujących całek.

Twierdzenie 6.1 Przedstawienia typu Bessela–Schläfli *Niech γ będzie konturem (na powierzchni Riemanna funkcji $t \mapsto t^{-m}$. Załóżmy,że*

$$\left(\frac{z}{2}(t + t^{-1}) + m\right)\exp\left(\frac{z}{2}(t - t^{-1})\right)\frac{1}{t^m}\Bigg|_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} = 0, \tag{6.65}$$

Wtedy dla dowolnej stałej C

$$C\int_\gamma \exp\left(\frac{z}{2}(t - t^{-1})\right)\frac{\mathrm{d}t}{t^{m+1}} \tag{6.66}$$

jest rozwiązaniem równania Bessela.

Dowód. Najpierw stosujemy różniczkowanie całki po parametrze z:

$$\begin{aligned}&(z^2\partial_z^2 + z\partial_z + z^2 - m^2)\int_\gamma \exp\left(\tfrac{z}{2}(t - t^{-1})\right)\tfrac{\mathrm{d}t}{t^{m+1}}\\ &= \int_\gamma \Big(\left(\tfrac{z}{2}\right)^2\left(t - t^{-1}\right)^2 + \tfrac{z}{2}\left(t - t^{-1}\right) + z^2 - m^2\Big)\exp\left(\tfrac{z}{2}(t - t^{-1})\right)\tfrac{\mathrm{d}t}{t^{m+1}}.\end{aligned} \tag{6.67}$$

Z drugiej strony, ponieważ całka z pochodnej jest różnicą wartości funkcji na końcach konturu, dostajemy

$$\begin{aligned}0 &= \left(\tfrac{z}{2}(t + t^{-1}) + m\right)\exp\left(\tfrac{z}{2}(t - t^{-1})\right)\tfrac{1}{t^m}\Big|_{\gamma(0)}^{\gamma(1)}\\ &= \int_\gamma \partial_t\left(\left(\tfrac{z}{2}(t + t^{-1}) + m\right)\exp\left(\tfrac{z}{2}(t - t^{-1})\right)\tfrac{1}{t^m}\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_\gamma \Big(\left(\tfrac{z}{2}\right)^2\left(t + t^{-1}\right)^2 + \tfrac{z}{2}\left(t - t^{-1}\right) - m^2\Big)\exp\left(\tfrac{z}{2}(t - t^{-1})\right)\tfrac{\mathrm{d}t}{t^{m+1}}.\end{aligned} \tag{6.68}$$

łatwo widać, że (6.67) jest równe (6.68). □

Istnieje też druga nierównoważna klasa reprezentacji całkowych.

Twierdzenie 6.2 Przedstawienia typu Poissona *Niech*

$$(1-t^2)^{m+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}zt}\Big|_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} = 0.$$

Wtedy

$$v(z) = z^m \int_\gamma (1-t^2)^{m-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}zt}\mathrm{d}t$$

jest rozwiązaniem równania Bessela.

Dowód.

$$\begin{aligned}
&(z^2\partial_z^2 + z\partial_z + z^2 - m^2)v(z)\\
&= m(m-1)v(z) + 2m\mathrm{i}z^{m+1}\textstyle\int_\gamma (1-t^2)^{m-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}zt}t\mathrm{d}t - z^{m+2}\int_\gamma (1-t^2)^{m-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}zt}t^2\mathrm{d}t\\
&+mv(z) + \mathrm{i}z^{m+1}\textstyle\int_\gamma (1-t^2)^{m-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}zt}t\mathrm{d}t + (z^2-m^2)v(z)\\
&= 2\mathrm{i}(m+\tfrac{1}{2})z^{m+1}\textstyle\int_\gamma (1-t^2)^{m-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}zt}t\mathrm{d}t + z^{m+2}\int_\gamma (1-t^2)^{m+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}zt}\mathrm{d}t\\
&= -z^{m+1}\mathrm{i}\textstyle\int_\gamma \left(\partial_t (1-t^2)^{m+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}zt}\right)\mathrm{d}t = 0
\end{aligned}$$

6.3 Funkcja Bessela

Równanie Bessela ma w 0 regularny punkt osobliwy z równaniem wskaźnikowym

$$\lambda(\lambda-1) + \lambda - m^2 = 0.$$

Indeksy równania Bessela w 0 są równe $\lambda_\pm = \pm m$.

Metoda opisana w Stwierdzeniu 1.16 pozwala na znalezienie rozwiązań równania Bessela postaci

$$v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^{k+m},$$

przynajmniej wtedy, gdy $\lambda_+ - \lambda_- = m - (-m) = 2m \neq -1, -2, \dots$.

Mamy następujące równanie rekurencyjne na współczynniki

$$v_k\left((m+k)(m+k-1) + (m+k) - m^2\right) + v_{k-2} = 0.$$

Czyli

$$v_k = -\frac{v_{k-2}}{k(2m+k)}.$$

Jśli $m \neq -1, -2, \dots$, to mamy następujące rozwiązanie rekurencji:

$$v_{2n+1} = 0, \quad v_{2n} = \tfrac{(-1)^n v_0}{2^{2n}n!(m+1)\dots(m+n)}.$$

(Jeśli dodatkowo $m \neq -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots$, to jest to jedyne rozwiązanie). Tradycyjnie zakładamy, że $v_0 := \frac{1}{2^m\Gamma(m+1)}$ i dostajemy

$$v_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+m}n!\Gamma(m+n+1)}.$$

Zauważmy, że w ten sposób zdefiniowane v_k jest dobrze określone dla każdego m. Prowadzi to do następującej definicji.

Definicja 6.3 *Funkcją Bessela* $J_m(z)$ *nazywamy*

$$J_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+m}}{n!\Gamma(m+n+1)}.$$

Funkcja Bessela J_m jest rozwiązaniem równania Bessela z parametrem $\pm m$. Zauważmy, że $\frac{1}{\Gamma(m+1)} \neq 0$ dla $m \neq -1, -2, \ldots$ Dla $2m \neq -1, -2, \ldots$ funkcja J_m jest jedynym rozwiązaniem równania Bessela spełniającym

$$J_m(z) \sim \left(\frac{z}{2}\right)^m \frac{1}{\Gamma(m+1)}, \ z \sim 0,$$

co może być traktowane jako definicja funkcji Bessela. (Przez $f(z) \sim g(z)$, $z \sim 0$ rozumiemy, że $\frac{f(z)}{g(z)}$ jest analityczne w zerze i równe w zerze 1

Jeśli $m \notin \mathbb{Z}$, to funkcje $J_{-m}(z)$ i $J_m(z)$ są liniowo niezależne i rozpinają przestrzeń rozwiązań równania Bessela.

Dla dowolnego m mamy następującą reprezentację całkową funkcji Bessela.

Twierdzenie 6.4 *Jeśli* $\mathrm{Re} z > 0$*, to*

$$\begin{aligned} J_m(z) &= \tfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{]-\infty,0^+,-\infty[} \exp\left(\tfrac{z}{2}(t - t^{-1})\right) \tfrac{\mathrm{d}t}{t^{m+1}} \\ &= \tfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left(\tfrac{z}{2}\right)^m \int_{]-\infty,0^+,-\infty[} \exp\left(s - \tfrac{z^2}{4s}\right) \tfrac{\mathrm{d}s}{s^{m+1}}. \end{aligned} \tag{6.69}$$

Dowód. Ponieważ

$$\lim_{\mathrm{Re}t \to -\infty} \left(\frac{z}{2}(t + t^{-1}) + m\right) \exp\left(\frac{z}{2}(t - t^{-1})\right) \frac{1}{t^m} = 0,$$

zatem spełniony jest warunek (6.65) dla konturu $]-\infty, 0^+, -\infty[$ i

$$v(z) = C \int_{]-\infty,0^+,-\infty[} \exp\left(\frac{z}{2}(t - t^{-1})\right) \frac{\mathrm{d}t}{t^{m+1}}$$

jest rozwiązaniem równania Bessela.

Przez podstawienie $s = \frac{zt}{2}$ dostajemy

$$v(z) = C \left(\frac{z}{2}\right)^m \int_{]-\infty,0^+,-\infty[} \exp\left(s - \frac{z^2}{4s}\right) \frac{\mathrm{d}s}{s^{m+1}}.$$

Zatem

$$\lim_{z \to 0} v(z) \left(\frac{z}{2}\right)^{-m} = C \int_{]-\infty,0^+,-\infty[} \mathrm{e}^s \frac{\mathrm{d}s}{s^{m+1}} = C \frac{2\pi \mathrm{i}}{\Gamma(m+1)}.$$

Czyli jeśli $C = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}$ i $m \neq -1, -2, \ldots$, to

$$v(z) = J_m(z).$$

Na $m = -1, -2, \ldots$ rozszerzamy tę równość przez ciągłość. □

Jeśli $0 < \arg z < \pi$, to odpowiednim konturem w (6.69) jest $]\mathrm{i}\infty, 0^+, \mathrm{i}\infty[$.

Poprzez wybór odpowiedniego konturu i jego parametryzacji w Twierdzeniu 6.1 dostajemy reprezentację Schläfli

$$J_m(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \phi - m\phi) \mathrm{d}\phi - \frac{1}{\pi} \sin(m\pi) \int_0^\infty \mathrm{e}^{-z(\mathrm{sh}\beta + m\beta)} \mathrm{d}\beta, \qquad \mathrm{Re} z > 0.$$

Mamy też reprezentację całkową Poissona

$$J_m(z) = \frac{(\frac{z}{2})^m}{\sqrt{\pi}\Gamma(m+\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{m-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}zt} \mathrm{d}t, \qquad m > -\frac{1}{2}.$$

A oto konturwe reprezentacje typu Poissona (pochodzące od Hankela):

$$J_m(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}\sqrt{\pi}} \Gamma(\frac{1}{2} - m)(\frac{z}{2})^m \int_{[1,-1^-,1^+]} (t-1)^{m-\frac{1}{2}} (t+1)^{m-\frac{1}{2}},$$

$$J_{-m}(z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi m} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}\sqrt{\pi}} \Gamma(\frac{1}{2} - m)(\frac{z}{2})^m \int_{[\mathrm{i}\infty,-1^+,1^+,\mathrm{i}\infty]} (t-1)^{m-\frac{1}{2}} (t+1)^{m-\frac{1}{2}},$$

Funkcja Bessela i funkcje hipergeometryczne ${}_0F_1$ i ${}_1F_1$ są ze sobą blisko związane:

$$\begin{aligned} J_m(z) &= \frac{1}{\Gamma(m+1)} (\frac{z}{2})^m {}_0F_1(-; 1+m; -\frac{z^2}{4}) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m+1)} (\frac{z}{2})^m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} {}_1F_1(m + \frac{1}{2}; 2m+1; 2\mathrm{i}z). \end{aligned}$$

6.4 Funkcje Bessela dla całkowitych parametrów m

Dla $m \in \mathbb{Z}$ funkcje Bessela są liniowo zależne, o czym mówi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.5

$$J_m(z) = (-1)^m J_{-m}(z), \ m \in \mathbb{Z}.$$

Dowód. Wystarczy założyć, że $m = 0, 1, \ldots$ Mamy wtedy

$$\begin{aligned} J_m(z) &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+m}}{n!(n+m)!} \\ &= (-1)^m \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^{n+m} \left(\frac{z}{2}\right)^{2(n+m)-m}}{(n+m)!(n+m-m)!} \\ &= (-1)^m \sum_{n=m}^\infty \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n-m}}{n!(n-m)!} \\ &= (-1)^m \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n-m}}{n!\Gamma(n-m+1)} = J_{-m}(z). \end{aligned}$$

□

Jeśli $m \in \mathbb{Z}$, to funkcja podcałkowa w (6.66) jest jednoznaczna i ma punkt osobliwy w 0. Wtedy każdy kontur zamknięty okrążający 0 (na przykład przeciwnie do ruchu wskazówek) spełnia warunek (6.65). Okazuje się, że przy odpowiednim wyborze stałej C prowadzi on do funkcji $J_m(z)$.

Twierdzenie 6.6 *Niech $m \in \mathbb{Z}$. Wtedy*

$$\begin{aligned} J_m(z) &= \tfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{[0+]} \exp\left(\tfrac{z}{2}(t-t^{-1})\right) \tfrac{\mathrm{d}t}{t^{m+1}} \\ &= \tfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left(\tfrac{z}{2}\right)^m \int_{[0+]} \exp\left(s - \tfrac{z^2}{4s}\right) \tfrac{\mathrm{d}s}{s^{m+1}}. \end{aligned}$$

Dowód. Twierdzenie to wynika z Twierdzenia 6.4 przez deformację konturu. Można je również wykazać niezależnie jak następuje. Wiemy, że

$$v(z) = C \int_{[0+]} \exp\left(\frac{z}{2}(t-t^{-1})\right) \frac{\mathrm{d}t}{t^{m+1}}$$

jest rozwiązaniem równania Bessela. Przez podstawienie $s = \frac{zt}{2}$ dostajemy

$$v(z) = C \left(\frac{z}{2}\right)^m \int_{[0+]} \exp\left(s - \frac{z^2}{4s}\right) \frac{\mathrm{d}s}{s^{m+1}}.$$

Zatem

$$\lim_{z \to 0} v(z) \left(\frac{z}{2}\right)^{-m} = C \int_{[0+]} \mathrm{e}^s \frac{\mathrm{d}s}{s^{m+1}} = C \frac{2\pi \mathrm{i}}{m!}.$$

Czyli jeśli $C = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}$ i $m = 0, 1, 2, \ldots$, to

$$v(z) = J_m(z).$$

Jeśli podstawimy $w = -\frac{1}{t}$ to mamy $t - t^{-1} = w - w^{-1}$, $\frac{\mathrm{d}t}{t} = -\frac{\mathrm{d}w}{w}$ i kontur $[0^+]$ przechodzi w $[0^-]$. Zatem

$$\begin{aligned} \int_{[0+]} \exp\left(\tfrac{z}{2}(t-t^{-1})\right) \tfrac{\mathrm{d}t}{t^{m+1}} &= (-1)^{-m+1} \int_{[0-]} \exp\left(\tfrac{z}{2}(w-w^{-1})\right) \tfrac{\mathrm{d}w}{w^{-m+1}} \\ &= (-1)^{-m} \int_{[0+]} \exp\left(\tfrac{z}{2}(w-w^{-1})\right) \tfrac{\mathrm{d}w}{w^{-m+1}} \end{aligned} \tag{6.70}$$

Jeśli $m = 0, -1, -2, \ldots$ to wiemy już, że prawa strona (6.70) jest równa $(-1)^{-m} J_{-m}(z)$. Biorąc pod uwagę twierdzenie 6.5 widzimy, że (6.70) jest równe $J_m(z)$. Zatem nasza reprezentacja całkowa jest słuszna również dla $m = -1, -2, \ldots$. □

Wniosek 6.7 *Funkcje Bessela dla całkowitych parametrów mają następującą funkcję generującą:*

$$\exp\left(\frac{z}{2}(t-t^{-1})\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_m(z).$$

Dowód. Funkcja

$$t \mapsto \exp\left(\frac{z}{2}(t - t^{-1})\right)$$

jest holomorficzna w pierścieniu $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ i rozwija się w szereg Laurenta. □

Biorąc w Twierdzeniu 6.1 jako kontur okręg o promieniu 1 dostajemy wzór Bessela

$$J_m(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(z\sin\phi - m\phi)\mathrm{d}\phi, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

6.5 Funkcje Hankela

Funkcje Bessela mają proste zachowanie blisko zera. Poniżej zdefiniujemy parę rozwiązań równania Bessela, zwaną funkcjami Hankela, które mają, jak się później okaże, proste zachowanie w nieskończoności. Przy okazji dostaniemy funkcje, które rozpinają przestrzeń rozwiązań równania Bessela również dla $m \in \mathbb{Z}$.

Definicja 6.8 *Funkcje Hankela (dla* $\mathrm{Re} z > 0$*) są zdefiniowane jako*

$$H_m^{(1)}(z) = -\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_{]-\infty,(0+1\cdot 0)^-[} \exp\left(\frac{z}{2}(t - t^{-1})\right)\frac{\mathrm{d}t}{t^{m+1}},$$

$$H_m^{(2)}(z) = \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_{]-\infty,(0+1\cdot 0)^+[} \exp\left(\frac{z}{2}(t - t^{-1})\right)\frac{\mathrm{d}t}{t^{m+1}}$$

Przez $]-\infty,(0+1\cdot 0)^-[$ *rozumiemy kontur zaczynający się w* $-\infty$*, okrążający* 0 *zgodnie z ruchem wskazówek i dochodzący do zera z kierunku dodatniego. Podobnie, przez* $]-\infty,(0+1\cdot 0)^+[$ *rozumiemy kontur zaczynający się w* $-\infty$*, okrążający* 0 *przeciwnie do ruchu wskazówek i dochodzący do zera z kierunku dodatniego.*

Zauważmy, że

$$\lim_{t\to 0+1\cdot 0}\left(\frac{z}{2}(t + t^{-1}) + m\right)\exp\left(\frac{z}{2}(t - t^{-1})\right)\frac{1}{t^m} = 0,$$

gdzie przez $t \to 0+1\cdot 0$ oznaczamy zbieganie do zera poprzez dodatnie wartości t (czasem oznacza się to przez $t \to 0^+$). Zatem kontury $]-\infty,(0+1\cdot 0)^+[$ i $]-\infty,(0+1\cdot 0)^-[$ spełniają warunek (6.65). Zatem funkcje Hankela są rozwiązaniami równania Bessela.

Jeśli $0 < \arg z < \pi$, to dobrym konturem w definicji funkcji $H_m^{(1)}$ jest $[\mathrm{i}\infty, 0]$. Jeśli $-\pi < \arg < 0$, to dla $H_m^{(2)}$ można użyć konturu $[-\mathrm{i}\infty, 0]$.

Twierdzenie 6.9 *Mamy następujące tożsamości:*

$$\begin{aligned}
H_{-m}^{(1)}(z) &= \mathrm{e}^{m\pi\mathrm{i}} H_m^{(1)}(z),\\
H_{-m}^{(2)}(z) &= \mathrm{e}^{-m\pi\mathrm{i}} H_m^{(2)}(z),\\
J_m(z) &= \tfrac{1}{2}\left(H_m^{(1)}(z) + H_m^{(2)}(z)\right),\\
J_{-m}(z) &= \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{m\pi\mathrm{i}} H_m^{(1)}(z) + \mathrm{e}^{-m\pi\mathrm{i}} H_m^{(2)}(z)\right),\\
H_m^{(1)}(z) &= \tfrac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-m\pi\mathrm{i}} J_m(z) - \mathrm{i}J_{-m}(z)}{\sin m\pi},\\
H_m^{(2)}(z) &= \tfrac{-\mathrm{i}\mathrm{e}^{m\pi\mathrm{i}} J_m(z) + \mathrm{i}J_{-m}(z)}{\sin m\pi}.
\end{aligned}$$

Dowód. Aby pokazać pierwszą i drugą tożsamość stosujemy podstawienie $t=-\frac{1}{s}$. Rozważmy na przykład drugi wzór. Klasa krzywych $]-\infty,(0+1\cdot 0)^+]$ może być reprezentowana przez łamaną $]-\infty,-1]\cup\{-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi},\phi\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\}\cup[1,0]$. Po zastosowaniu zamiany zmiennych $w=-\frac{1}{t}$ łamana ta przechodzi w siebie ze zmianą orientacji. Dalej: $t-t^{-1}=w-w^{-1}$, $t^{-1}\mathrm{d}t=-w^{-1}\mathrm{d}w$, $t^{-1}=(-1)^{-m}w^{-m}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi m}w^m$. (Pamiętajmy, że zamiana zmiennych zachowuje dolną półpłaszczyznę, w której znajduje się krzywa).

łatwo przekonamy się, że deformując

$$]-\infty,(0+1\cdot 0)^+[\ \cup\ ](0+1\cdot 0)^+,-\infty[$$

dostaniemy $]-\infty,0^+,-\infty[$. To implikuje trzecią tożsamość.

Tożsamości czwarta, piąta i szósta wynikają natychmiast z pierwszych trzech. □

Twierdzenie 6.10 *Po obejściu punktu* 0 *dostajemy*

$$J_m(\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}2\pi}z)=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}m2\pi}J_m(z),$$

$$H_m^{(1)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m2\pi}H_m^{(2)}(z),$$

$$H_m^{(2)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}m2\pi}H_m^{(1)}(z).$$

Drugi wzór wynika z pierwszego:

$$H_m^{(1)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)=\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-m\mathrm{i}\pi}J_m(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)-\mathrm{i}J_{-m}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z)}{\sin m\pi}=\frac{\mathrm{i}J_m(z)-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\pi}J_{-m}(z)}{\sin m\pi}=-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\pi}H_m^{(2)}(z).$$

Można go też dowieść przez zamianę zmiennych $w=-t$ w reprezentacji całkowej. □

Twierdzenie 6.11 *Mamy następujące wzory asymptotyczne słuszne dla* $-\pi+\delta<\arg z<2\pi-\delta$, $\delta>0$*:*

$$\lim_{z\to\infty}\frac{H_m^{(1)}(z)}{\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac12}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}m\pi}{2}-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}}=1,$$

$$\lim_{z\to\infty}\frac{H_m^{(2)}(z)}{\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac12}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}m\pi}{2}+\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}}=1.$$

Dowód. Mamy

$$H_m^{(1)}(z)=-\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{]-\infty,(0+1\cdot 0)^-[}\mathrm{e}^{\phi(t)}\frac{\mathrm{d}t}{t^{m+1}},$$

gdzie

$$\phi(t)=\tfrac{z}{2}(t-t^{-1}),$$

$$\phi'(t)=\tfrac{z}{2}(1+t^{-2}),$$

$$\phi''(t)=-zt^{-3}.$$

Punkty stacjonarne $\phi(t)$ są dla $t_\pm = \pm\mathrm{i}$. Mamy

$$\phi(\pm\mathrm{i}) = \pm z\mathrm{i}, \quad \phi''(\pm\mathrm{i}) = \mp z\mathrm{i}.$$

Możemy wybrać kontur dla $H^{(1)}$ tak, żeby przechodził przez $t_+ = \mathrm{i}$, i prócz $t = t_+$ mieć $\mathrm{Re}\phi(t) - \phi(t_+) = \mathrm{Re}\frac{z}{2}\frac{(t-i)^2}{t} < 0$. Dostajemy wtedy

$$\begin{aligned} H_m^{(1)}(z) &\sim -\tfrac{1}{\pi\mathrm{i}}\tfrac{\mathrm{e}^{\phi(i)}}{i^{m+1}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\phi''(i)(t-i)^2}\mathrm{d}t \\ &= -\tfrac{1}{\pi\mathrm{i}}\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{\mathrm{e}^{i\pi(m+1)/2}}\sqrt{\tfrac{2\pi}{\mathrm{i}z}} = \left(\tfrac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}m\pi}{2}-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}. \end{aligned}$$

(Jeśli $0 < \arg z < \pi$, to jako ten kontur można wziąć $[0,\infty[$; jeśli $-\pi < \arg z < 0$, to $[0,-\mathrm{i}]\cup\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}, : \phi\in[-\frac{\pi}{2},-\frac{5\pi}{2}]\}\cup[-\mathrm{i},-\mathrm{i}\infty[$, jeśli $\pi < \arg z < 2\pi$, to $[0,-\mathrm{i}]\cup\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}, : \phi\in[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]\}\cup[-\mathrm{i},-\mathrm{i}\infty[$. □

Wybór odpowiednich konturów prowadzi do reprezentacji

$$\begin{aligned} H_m^{(1)}(z) &= -\tfrac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}m\pi}{2}}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\mathfrak{h}t-mt}\mathrm{d}t, \qquad 0 < \arg z < \pi, \\ H_m^{(2)}(z) &= \tfrac{2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}m\pi}{2}}}{\pi}\Big(\int_0^\infty\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\mathfrak{h}t}\mathfrak{h}(mt-\mathrm{i}m\pi)\mathrm{d}t - \mathrm{i}\int_0^\pi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\cos t}\cos mt\mathrm{d}t\Big), \qquad 0 < \arg z < \pi, \\ H_m^{(1)}(z) &= -\tfrac{2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}m\pi}{2}}}{\pi}\Big(\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\mathfrak{h}t}\mathfrak{h}(mt+\mathrm{i}m\pi)\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^\pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\cos t}\cos mt\mathrm{d}t\Big), \qquad -\pi < \arg z < 0, \\ H_m^{(2)}(z) &= \tfrac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}m\pi}{2}}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\mathfrak{h}t-mt}\mathrm{d}t, \qquad -\pi < \arg z < 0 \end{aligned}$$

Oto reprezentacje konturowe typu Poissona:

$$H_m^{(1)}(z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-m)}{\pi\mathrm{i}\sqrt{\pi}}(\frac{z}{2})^m\int_{]\mathrm{i}\infty,1^+,\mathrm{i}\infty[}\mathrm{e}^{\mathrm{i}zt}(t-1)^{m-\frac{1}{2}}(t+1)^{m-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t,$$

$$H_m^{(2)}(z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-m)}{\pi\mathrm{i}\sqrt{\pi}}(\frac{z}{2})^m\int_{]\mathrm{i}\infty,-1^-,\mathrm{i}\infty[}\mathrm{e}^{\mathrm{i}zt}(t-1)^{m-\frac{1}{2}}(t+1)^{m-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t,$$

Mamy też reprezentacje typu Poissona prawdziwe jeśli $m \geq -\frac{1}{2}$.

$$H_m^{(1)}(z) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(m+\frac{1}{2})}(\frac{z}{2})^m\int_{]1,\mathrm{i}\infty[}\mathrm{e}^{\mathrm{i}zt}(1-t^2)^{m-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t,$$

$$H_m^{(2)}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(m+\frac{1}{2})}(\frac{z}{2})^m\int_{]-1,\mathrm{i}\infty[}\mathrm{e}^{\mathrm{i}zt}(1-t^2)^{m-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t,$$

Przez wybór odpowiedniego konturu dostaniemy

$$\begin{aligned} H_m^{(1)}(z) &= \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}z^m\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z-\pi\frac{m}{2}-\frac{\pi}{4})}}{\Gamma(m+\frac{1}{2})}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-zt}t^{m-\frac{1}{2}}(1+\tfrac{\mathrm{i}t}{2})^{m-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t, \\ H_m^{(2)}(z) &= \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}z^m\tfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z-\pi\frac{m}{2}-\frac{\pi}{4})}}{\Gamma(m+\frac{1}{2})}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-zt}t^{m-\frac{1}{2}}(1-\tfrac{\mathrm{i}t}{2})^{m-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

6.6 Dodatkowe reprezentacje całkowe

Przyjmujemy konwencję, że

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u} = 1, \tag{6.71}$$

co ustala gałąź funkcji $u \mapsto \sqrt{1+u^2}$ na $\mathbb{C}\backslash[-\mathrm{i},\mathrm{i}]$.

Rozważmy odwzorowanie

$$\mathbb{C}\backslash\{0\} \ni t \mapsto u(t) = \frac{1}{2}(t - t^{-1}). \tag{6.72}$$

Podzielmy $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ na 3 sektory:

$$\begin{aligned}
\Omega_+ &:= \{t \in \mathbb{C} \ : \ |t| > 1\},\\
\Omega_0 &:= \{t \in \mathbb{C} \ : \ |t| = 1\},\\
\Omega_- &:= \{t \in \mathbb{C} \ : \ |t| < 1\}.
\end{aligned}$$

Obrazem Ω_+ i Ω_- względem funkcji (6.72) jest $\mathbb{C}\backslash[-\mathrm{i},\mathrm{i}]$. Obrazem Ω_0 jest $[-\mathrm{i},\mathrm{i}]$. Mamy w szczególności $u(-1) = u(1) = 0$, $u(-\mathrm{i}) = -\mathrm{i}$ i $u(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$.

Funkcja odwrotna

$$u \mapsto t(u)$$

jest wieloznaczna. Wyróżnimy w niej dwie jednoznaczne gałęzie

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}\backslash[-\mathrm{i},\mathrm{i}] \ni u \mapsto t_+(u) = u + \sqrt{1+u^2} \in \Omega_+,\\
\mathbb{C}\backslash[-\mathrm{i},\mathrm{i}] \ni u \mapsto t_-(u) = u - \sqrt{1+u^2} \in \Omega_-,
\end{aligned}$$

(pamiętajmy o konwencji (6.71)).

Poniżej omówimy reprezentacje całkowe które otrzymujemy z reprezentacji typu Bessela-Schläfli po zastosowaniu zamiany zmiennych $t \mapsto u(t)$.

Twierdzenie 6.12 *Jeśli* $\mathrm{Re} z > 0$, *to*

$$J_m(z) \quad = \tfrac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{[-\infty,-\mathrm{i}^+,\mathrm{i}^+,-\infty]} \tfrac{\mathrm{e}^{zu}\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}(u+\sqrt{1+u^2})^m}$$

Dowód. Stosujemy zamianę zmiennych

$$t \mapsto u(t)$$

omówioną w dowodzie następnego twierdzenia(Tw. 6.6). Wtedy kontur

$$]-\infty,-\mathrm{i}] \cup \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \ : \ \phi \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\} \cup [i,\infty[,$$

będący przykładem konturu typu $]-\infty,0^+,-\infty[$ przechodzi w kontur

$$]-\infty,-\mathrm{i}^+,\mathrm{i}^+,-\infty[.$$

Zauważmy przy tym, że osobliwość funkcji podcałkowej w $\pm\mathrm{i}$ jest całkowalna. $\square$

Twierdzenie 6.13 *Niech $m \in \mathbb{Z}$. Wtedy*

$$\begin{aligned} J_m(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{[-\mathrm{i},\mathrm{i}^+,-\mathrm{i}^+]} \frac{\mathrm{e}^{zu}\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}(u+\sqrt{1+u^2})^m} \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{[-\mathrm{i},\mathrm{i}^+,-\mathrm{i}^+]} \frac{\mathrm{e}^{zu}\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}(u-\sqrt{1+u^2})^m}. \end{aligned}$$

Dowód. Dla dowolnego $r > 0$ mamy

$$J_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(0,r)} \exp\left(\frac{z}{2}(t - t^{-1})\right) \frac{\mathrm{d}t}{t^{m+1}}$$

Jeśli $r > 1$, to $\partial K(0,r) \subset \Omega_+$. Zamiana zmiennych $t \mapsto u(t)$ prowadzi od konturu $\partial K(0,r)$ do konturu typu $[-\mathrm{i}, \mathrm{i}^+, -\mathrm{i}^+]$. Poza tym, dla $t \in \Omega_+$ mamy

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{u + \sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Stąd prawdziwa jest pierwsza reprezentacja całkowa.

Jeśli $1 > r > 0$, to $\partial K(0,r) \subset \Omega_-$. Zamiana zmiennych $t \mapsto u(t)$ prowadzi od konturu $\partial K(0,r)$ do konturu typu $[-\mathrm{i}, \mathrm{i}^-, -\mathrm{i}^-]$. Poza tym, dla $t \in \Omega_-$ mamy

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{u - \sqrt{1+u^2}}{-\sqrt{1+u^2}}.$$

Zamiana konturu $[-\mathrm{i}, \mathrm{i}^-, -\mathrm{i}^-]$ na $[-\mathrm{i}, \mathrm{i}^+, -\mathrm{i}^+]$ wprowadza dodatkowy znak minus. Stąd prawdziwa jest druga reprezentacja całkowa. $\Box$

Podajmy jeszcze dodatkowe reprezentacje funkcji Hankela.

Twierdzenie 6.14

$$\begin{aligned} H_m^{(1)} &= \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_{[-\infty,\mathrm{i}^+,-\infty]} \frac{\mathrm{e}^{zu}\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}(u+\sqrt{1+u^2})^m} \\ &= \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_{[-\infty,\mathrm{i}^-,-\infty]} \frac{\mathrm{e}^{zu}\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}(u+\sqrt{1+u^2})^m} \\ &= \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_{[-\infty,\mathrm{i}]} \frac{\mathrm{e}^{zu}\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}(u+\sqrt{1+u^2})^m} + \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_{[-\infty,\mathrm{i}]} \frac{\mathrm{e}^{zu}\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}(u-\sqrt{1+u^2})^m}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_m^{(2)} &= -\frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_{[-\infty,-\mathrm{i}^+,-\infty]} \frac{\mathrm{e}^{zu}\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}(u+\sqrt{1+u^2})^m} \\ &= -\frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_{[-\infty,-\mathrm{i}^-,-\infty]} \frac{\mathrm{e}^{zu}\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}(u+\sqrt{1+u^2})^m} \\ &= -\frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_{[-\infty,-\mathrm{i}]} \frac{\mathrm{e}^{zu}\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}(u+\sqrt{1+u^2})^m} - \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_{[-\infty,-\mathrm{i}]} \frac{\mathrm{e}^{zu}\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}(u-\sqrt{1+u^2})^m} \end{aligned}$$

Dowód. Reprezentacje te dostajemy przez zastosowanie zamiany zmiennych

$$t \mapsto u(t).$$

Zauważmy przy tym, że nie ma znaczenia, czy punkty rozgałęzienia $\pm i$ omijamy zgodnie czy przeciwnie do ruchu wskazówek. Możemy nawet przeciągnąc kontur przez $\pm\mathrm{i}$, ponieważ funkcja podcałkowa jest w tych punktach całkowalna. Musimy jednak zawsze wejść na drugą gałąź funkcji $\sqrt{1+u^2}$. Na tej drugiej gałęzi $\sqrt{1+u^2}$ zmienia znak na przeciwny, stąd dostajemy trzeci wzór na $H_m^{(1)}(z)$ i $H_m^{(2)}(z)$.

Poniżej podamy alternatywny dowód pierwszych dwóch tożsamości z Twierdzenia 6.9, tzn.

$$H_{-m}^{(1)}(z) = \mathrm{e}^{m\pi\mathrm{i}} H_m^{(1)}(z),$$
$$H_{-m}^{(2)}(z) = \mathrm{e}^{-m\pi\mathrm{i}} H_m^{(2)}(z).$$

Dowód. Pokażmy pierwszą tożsamość. Korzystamy z reprezentacji całkowej z Twierdzenia 6.14.

$$\begin{aligned} H_{-m}^{(1)}(z) &= \tfrac{1}{\pi\mathrm{i}} \int_{[-\infty,\mathrm{i}^+,-\infty]} \tfrac{\mathrm{e}^{zu}(u+\sqrt{1+u^2})^m \mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} \\ &= \tfrac{1}{\pi\mathrm{i}} \int_{[-\infty,\mathrm{i}^+,-\infty]} \left(\tfrac{-1}{u-\sqrt{1+u^2}}\right)^m \tfrac{\mathrm{e}^{zu}\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}. \end{aligned} \tag{6.73}$$

Zauważmy, że w danym wypadku $(-1)^m = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi m}$. Funkcję $-\sqrt{1+u^2}$ można traktować jako przedłużenie analityczne $\sqrt{1+u^2}$, można też odwrócić kontur $]-\infty, i^+, -\infty[$ startując z drugiej gałęzi funkcji $\sqrt{1+u^2}$, dostając kontur $]-\infty, \mathrm{i}^-, -\infty[$ i dodatkowy znak minus. Zatem (6.73) jest równe

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi m}}{\pi\mathrm{i}} \int_{[-\infty,\mathrm{i}^-,-\infty]} \frac{\mathrm{e}^{zu}\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}(u+\sqrt{1+u^2})^m} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi} H_m^{(1)}(z).$$

To kończy dowód pierwszej tożsamości. Dowód drugiej tożsamości jest analogiczny. □

Oto alternatywny obliczenie asymptotyki funkcji Bessela, tzn.

$$\lim_{z\to\infty} \frac{H_m^{(1)}(z)}{\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} \mathrm{e}^{-\frac{im\pi}{2}-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}} = 1, \ |\mathrm{arg} z| < \frac{\pi}{2} - \delta,$$

$$\lim_{z\to\infty} \frac{H_m^{(2)}(z)}{\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}m\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}} = 1 \ |\mathrm{arg} z| < \frac{\pi}{2} - \delta.$$

Dowód. Naszkicujmy dowód pierwszego wzoru. Podstawiamy

$$u = i - \frac{w^2}{2}$$

do reprezentacji całkowej z Twierdzenia 6.14. Wtedy kontur $]-\infty, \mathrm{i}^+, -\infty[$ można żozgiąćótrzymując kontur $]-\infty, \infty[$. Dlatego prowadzi do

$$H_m^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi\mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\infty} f(w) \mathrm{e}^{z(\mathrm{i}-\frac{w^2}{2})} \mathrm{d}w,$$

gdzie

$$f(w) := \frac{1}{\sqrt{-\mathrm{i}+\frac{w^2}{4}} \left(\mathrm{i} - \frac{w^2}{2} + w\sqrt{-\mathrm{i}+\frac{w^2}{4}}\right)^m}.$$

i gałąź pierwiastka jest ustalona warunkiem $\lim_{w\to\infty}\frac{\sqrt{-\mathrm{i}+\frac{w^2}{4}}}{w}=\frac{1}{2}$. Mamy

$$f(0)=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{i}}\mathrm{i}^m}=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}-\frac{\mathrm{i}m\pi}{2}}.$$

Wartość $H_m^{(1)}(z)$ przybliżamy przez

$$\frac{1}{\pi\mathrm{i}}f(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{zw^2}{2}2}\mathrm{d}w=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}-\frac{\mathrm{i}m\pi}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\left(\frac{2\pi}{z}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}m\pi}{2}-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}.$$

□

6.7 Funkcja Neumanna

Funkcję Neumanna definiujemy jako

$$\begin{aligned}Y_m(z)&=\tfrac{1}{2\mathrm{i}}(H_m^{(1)}(z)-H_m^{(2)}(z))\\&=\tfrac{\cos\pi m J_m(z)-J_{-m}(z)}{\sin\pi m}.\end{aligned}$$

Mamy wtedy

$$H_m^{(1)}(z)=J_m(z)+\mathrm{i}Y_m(z),\qquad H_m^{(2)}(z)=J_m(z)-\mathrm{i}Y_m(z).$$

Twierdzenie 6.15 *Dla $m\in\mathbb{Z}$ mamy*

$$\begin{aligned}Y_m(z)&=\tfrac{2}{\pi}(\log(\tfrac{z}{2})+\gamma)J_m(z)\\&-\tfrac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m-1}\tfrac{(m-k-1)!}{k!}(\tfrac{z}{2})^{2k-m}-\tfrac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^k}{k!(m+k)!}(\tfrac{z}{2})^{m+2k}(h(k)+h(m+k)),\end{aligned}$$

gdzie $h(k):=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{k}$.

Dowód. Połóżmy

$$\phi(z):=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\Gamma(z)}=-\frac{1}{\Gamma(z)}\partial_z\log\Gamma(z).$$

Wtedy

$$\phi(-n)=(-1)^n n!,\quad n=0,1,2,\dots,$$

$$\phi(n+1)=\tfrac{\gamma-h(n)}{n!},\quad n=0,1,2,\dots$$

Poza tym

$$\partial_m J_m(z)=\log(\tfrac{z}{2})J_m(z)+\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^k\phi(m+k+1)}{k!}(\tfrac{z}{2})^{m+2k}.$$

Zatem dla $n=0,1,2,\dots$

$$\begin{aligned}\partial_m J_m(z)\Big|_{m=n}&=(\log\tfrac{z}{2}+\gamma)J_n(z)-\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^k h(n+k)}{(n+k)!k!}(\tfrac{z}{2})^{n+2k},\\\partial_m J_m(z)\Big|_{m=-n}&=(\log\tfrac{z}{2}+\gamma)J_{-n}(z)-(-1)^n\textstyle\sum_{k=0}^{n-1}\tfrac{(n-k-1)!}{k!}(\tfrac{z}{2})^{2k-n}\\&-\textstyle\sum_{k=n}^{\infty}\tfrac{(-1)^k h(-n+k)}{(-n+k)!k!}(\tfrac{z}{2})^{-n+2k}.\end{aligned}$$

Ostatnią sumę można zamienić na

$$-(-1)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k h(k)}{k!(k+n)!} (\frac{z}{2})^{n+2k}.$$

Stosując regułę de l'Hospitala dostajemy

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= \frac{\partial_m\big(\cos \pi m J_m(z) - J_{-m}(z)\big)}{\partial_m \sin \pi m}\Big|_{m=n} \\ &= \frac{\cos \pi m \partial_m J_m(z) + \partial_{(-m)} J_{-m}(z)}{\pi \cos \pi m}\Big|_{m=n} = \frac{1}{\pi}\Big(\partial_m J_m(z)\Big|_{m=n} + (-1)^m \partial_m J_m(z)\Big|_{m=-n}\Big). \end{aligned}$$

□

6.8 Zmodyfikowane równanie Bessela

Otrzymujemy je przez podstawienie $\tilde{z} = \mathrm{i}z$ w równaniu Bessela:

$$(z^2\partial_z^2 + z\partial_z - z^2 - m^2)u(z).$$

Jeśli $v(z)$ jest rozwiązaniem równania Bessela, to $v(\mathrm{i}z)$ jest rozwiązaniem zmodyfikowanego równania Bessela. W szczególności wprowadza się zmodyfikowaną funkcję Bessela

$$\begin{aligned} I_m(z) &= \mathrm{i}^{-m} J_m(\mathrm{i}z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(n+m+1)} (\tfrac{z}{2})^{2n+m} \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{]-\infty,0^+,-\infty[} \exp(\tfrac{z}{2}(t+t^{-1}))t^{-m-1}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\Gamma(m+1)} (\tfrac{z}{2})^m F(m+1; \tfrac{z^2}{4}) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m+1)} (\tfrac{z}{2})^m \mathrm{e}^{-z} F(m+\tfrac{1}{2}; 2m+1; 2z). \end{aligned}$$

Wprowadza się również funkcję Basseta

$$\begin{aligned} K_m(z) = K_{-m}(z) &= \frac{\pi}{2\sin m\pi}(I_{-m}(z) - I_m(z)) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \exp(-\tfrac{z}{2}(t+t^{-1}))t^{-m-1}\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{i}^{m+1}\tfrac{\pi}{2} H_m^{(1)}(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}^{-m-1}\tfrac{\pi}{2} H_m^{(2)}(-\mathrm{i}z). \end{aligned}$$

Mamy przy tym

$$H_m^{(1)}(z) = -\tfrac{2\mathrm{i}}{\pi} K_m(-\mathrm{i}z),$$

$$H_m^{(2)}(z) = \tfrac{2\mathrm{i}}{\pi} K_m(\mathrm{i}z).$$

Dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ mamy

$$I_n(z) = I_{-n}(z),$$

$$\begin{aligned} K_n(z) &= (-1)^{n+1}(\log \tfrac{z}{2} + \gamma) I_n(z) \\ &+ \tfrac{1}{2}\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m (\tfrac{z}{2})^{2m-n} \tfrac{(n-m-1)!}{m!} + \tfrac{(-1)^n}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{h(k)+h(n+k)}{k!(n+k)!} (\tfrac{z}{2})^{2m+n}. \end{aligned}$$

6.9 Relacje rekurencyjne

Funkcje Bessela o parametrach różniących się całkowitymi liczbami powiązane są związkami rekurencyjnymi.

Twierdzenie 6.16 *Mamy tożsamości*

$$2\partial_z J_m(z) = J_{m-1}(z) - J_{m+1}(z),$$

$$2mJ_m(z) = zJ_{m-1}(z) + zJ_{m+1}(z).$$

Analogiczne tożsamości są prawdziwe dla $H_m^{(1)}(z)$, $H_m^{(2)}(z)$ *i* $Y_m(z)$.

Dowód. Obie tożsamości wynikają z reprezentacji całkowych dla funkcji Bessela i Hankela. Zakładamy, że γ jest odpowiednim konturem.

Aby dowieść pierwszej tożsamości stosujemy różniczkowanie całki po parametrze:

$$\begin{aligned} &2\partial_z \int_\gamma \exp\left(\tfrac{z}{2}(t - t^{-1})\right) \tfrac{\mathrm{d}t}{t^{m+1}} \\ &= \int_\gamma \exp\left(\tfrac{z}{2}(t - t^{-1})\right) \tfrac{\mathrm{d}t}{t^m} - \int_\gamma \exp\left(\tfrac{z}{2}(t - t^{-1})\right) \tfrac{\mathrm{d}t}{t^{m-2}}. \end{aligned}$$

Aby dowieść drugiej tożsamości korzystamy z tego, że dla używanych przez nas konturów funkcja

$$t \mapsto \exp\left(\frac{z}{2}(t - t^{-1})\right) \frac{1}{t^m}$$

ma te same wartości na końcach γ i dlatego

$$\begin{aligned} 0 &= 2\int_\gamma \partial_t \left(\exp\left(\tfrac{z}{2}(t - t^{-1})\right) \tfrac{1}{t^m}\right) \mathrm{d}t \\ &= -2m \int_\gamma \exp\left(\tfrac{z}{2}(t - t^{-1})\right) \tfrac{\mathrm{d}t}{t^{m+1}} + z\int_\gamma \exp\left(\tfrac{z}{2}(t - t^{-1})\right) \tfrac{\mathrm{d}t}{t^m} + z\int_\gamma \exp\left(\tfrac{z}{2}(t - t^{-1})\right) \tfrac{\mathrm{d}t}{t^{m+2}}. \end{aligned}$$

□

Często wygodniejsze są następujące postaci związków rekurencyjnych:

Wniosek 6.17

$$\frac{1}{z}\partial_z\left(z^m J_m(z)\right) = z^{m-1}J_{m-1}(z), \ \textit{czyli} \ \left(\partial_z + \frac{m}{z}\right) J_m(z) = J_{m-1}(z),$$

$$-\frac{1}{z}\partial_z\left(z^{-m} J_m(z)\right) = z^{-m-1}J_{m+1}(z), \ \textit{czyli} \ \left(-\partial_z + \frac{m}{z}\right) J_m(z) = J_{m+1}(z).$$

Poza tym

$$\left(\frac{1}{z}\partial_z\right)^n z^m J_m(z) = z^{m-n} J_{m-n}(z),$$

$$\left(-\frac{1}{z}\partial_z\right)^n z^{-m} J_m(z) = z^{-m-n} J_{m+n}(z).$$

6.10 Funkcje Bessela połówkowe

Korzystając z (6.62) lub (6.63) sprawdzamy, że jeśli $m = -\frac{1}{2}$, to podstawienie $v(z) = \sqrt{z}\tilde{v}(z)$ prowadzi do równania o stałych współczynnikach na $\tilde{v}$:

$$(\partial_z^2 + 1)\tilde{v} = 0,$$

które ma rozwiązania $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}$. Dlatego przestrzeń rozwiązań równania Bessela dla $m = \frac{1}{2}$ jest rozpięta przez funkcje $z^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$, $z^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}$. Jedynym rozwiązaniem zachowującym się w zerze jak $\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma(1+\frac{1}{2})}$ jest

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma(1+\frac{1}{2})} \frac{\sin z}{z} = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sin z.$$

Mamy poza tym

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \cos z = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos z.$$

$$\begin{aligned} H_{\frac{1}{2}}^{(1,2)}(z) &= \left(\tfrac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\pm i(z-\frac{\pi}{2})}, \\ H_{-\frac{1}{2}}^{(1,2)}(z) &= \left(\tfrac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}z} \end{aligned}$$

Zatem korzystając z Wniosku 6.17 widzimy, że funkcje Bessela z parametrem m będącym połową liczby nieparzystej dają się wyrazić przez funkcje elementarne, na przykład

$$H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} p_n \left(\frac{1}{\mathrm{i}z}\right),$$

gdzie p_n jest pewnym wielomianem.

6.11 Wrońskiany rozwiązań równania Bessela

Wronskian dwóch rozwiązań równania Bessela spełnia równanie

$$\left(\partial_z + \frac{1}{z}\right) W(z) = 0.$$

Zatem $W(z)$ jest proporcjonalny do $\frac{1}{z}$. Korzystając z

$$J_{\pm m}(z) \sim \tfrac{1}{\Gamma(\pm m+1)}\left(\tfrac{z}{2}\right)^{\pm m}, \qquad J'_{\pm m}(z) \sim \tfrac{1}{\Gamma(\pm m)}\left(\tfrac{z}{2}\right)^{\pm m-1},$$

możemy policzyć Wrońskian $J_m(z)$, $J_{-m}(z)$:

$$\begin{aligned} W(J_m, J_{-m}) &= -\tfrac{2}{\pi z} \sin \pi m, \\ W(H_m^{(1)}, H_m^{(2)}) &= -\tfrac{4\mathrm{i}}{\pi z}, \\ W(J_m, Y_m) &= \tfrac{2}{\pi z}. \end{aligned}$$

6.12 Równanie Helmholtza w 2 wymiarach

Laplasjan

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$$

we współrzędnych biegunowych

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi$$

jest równy

$$\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\phi^2.$$

Równanie Helmholtza

$$(\Delta + 1)f = 0$$

można rozwiązać w postaci fali płaskiej biegnącej pod kątem ψ, która w układzie kartezjańskim jest równa

$$f_\psi(x,y) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\cos\psi + y\sin\psi)}$$

a w układzie biegunowym jest równa

$$f_\psi(r,\phi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}r\cos(\phi-\psi)}.$$

Wprowadźmy generator obrotów

$$L := x\partial_x - y\partial_x,$$

równy w układzie biegunowym

$$L = \partial_\phi.$$

L komutuje z Δ, dlatego można jednocześnie szukać rozwiązania

$$(\Delta + 1)f = 0, \qquad Lf = \mathrm{i}mf.$$

Jest to spełnione przez falę kolistą, która w układzie biegunowym jest równa

$$f_m(r,\phi) = J_m(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}.$$

Twierdzenie 6.18 *Falę płaską można rozłożyć na koliste:*

$$f_\psi(r,\phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(r,\phi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m(\psi-\frac{\pi}{2})}. \tag{6.74}$$

Falę kolistą można rozłożyć na fale płaskie:

$$f_m(r,\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_\psi(r,\phi)(-\mathrm{i})^m \mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\psi-\frac{\pi}{2})}\mathrm{d}\psi. \tag{6.75}$$

Dowód. (6.74) jest przeformułowaniem wzoru na funkcję tworzącą:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}r\sin\phi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} J_m(r),$$

a (6.75) jest przeformułowaniem wzoru Bessela

$$J_m(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}r\sin\psi - \mathrm{i}m\psi}\mathrm{d}\psi.$$

□

6.13 Wzór składania Grafa

Poniższy wzór można zinterpretować następująco: fale kolistą w jednym układzie biegunowym można rozóżyćna fale koliste w drugim przesuniętym układzie biegunowym.

Twierdzenie 6.19 *Załóżmy, że R, r, ρ oraz Φ, ϕ, ψ są powiązane relacjami*

$$R = \sqrt{(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} + \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi})(r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} + \rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi})}, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi} = \sqrt{\frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} + \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}}{r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} + \rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi}}}.$$

Wtedy

$$J_m(R)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\Phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{m-n}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\phi} J_n(\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\psi}.$$

Jeśli $m \in \mathbb{Z}$, to nie ma żadnych ograniczeń na parametry występujące w tym wzorze. Jeśli m jest niecałkowite a wszystkie zmienne rzeczywiste, to trzeba założyć, że $\rho < r$ (lub, równoważnie, $|\Phi - \phi| < \frac{\pi}{2}$). Można też wtedy zastąpić funkcje Bessela w $J_m(R)$ i $J_{m-n}(r)$ przez $H_m^{(i)}$ albo Y_m

Dowód. Kładąc $\tilde{\psi} = \psi - \phi$, $\tilde{\Phi} = \Phi - \phi$ można problem sprowadzić do przypadku $\phi = 0$.

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{m-n}(r)J_n(\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\psi}\\
&= \tfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_\gamma \exp\left(\frac{r}{2}(t-t^{-1})\right)t^{-m-1}J_n(\rho)(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi})^n\\
&= \tfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\textstyle\int_\gamma \exp\Big(\frac{r}{2}(t-t^{-1})) + \frac{\rho}{2}(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} - (t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi})^{-1})\Big)t^{-m-1}\mathrm{d}t\\
&= \tfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\textstyle\int_\gamma \exp\left(\frac{R}{2}(s-s^{-1})\right)s^{-m-1}\mathrm{d}s\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\Phi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\Phi}J_m(R),
\end{aligned}$$

gdzie w ostatnim kroku podstawiliśmy $s = t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}$, skorzystaliśmy z $r + \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}$ i obróciliśmy kontur. □

Podstawiając

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\phi, & y &= r\sin\phi,\\
x_2 &= \rho\cos\psi, & y_2 &= \rho\sin\psi,\\
x &= R\cos\Phi, & y &= R\sin\Phi,
\end{aligned}$$

mamy

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x + y)$$

i wzór składania możemy przepisać jako

$$J_m(\sqrt{x^2+y^2})\Big(\tfrac{x+\mathrm{i}y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)^m = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_{m-n}(\sqrt{x_1^2+y_1^2})\Big(\tfrac{x_1+\mathrm{i}y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\Big)^{m-n} J_n(\sqrt{x_2^2+y_2^2})\Big(\tfrac{x_2+\mathrm{i}y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\Big)^n.$$

Zdefiniujmy operator w $L^2(\mathbb{Z})$ zadany macierzą

$$U_{m,n}(x,y) := J_{m-n}(\sqrt{x^2+y^2})\Big(\tfrac{x+\mathrm{i}y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)^{m-n}$$

Wtedy $U(x,y)^{-1} = U(-x,-y)$, $U(x,y)$ jest macierzą unitarną, czyli

$$\overline{U_{n,m}(x,y)} = U_{m,n}(-x,-y),$$

oraz $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto U(x,y)$ jest reprezentacją, czyli

$$U_{k,n}(x_2+x_1, y_2+y_1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_{k,m}(x_2,y_2)U_{m,n}(x_1,y_1).$$

Rozszerzymy teraz tę reprezentację do afinicznej grupy ortogonalnej w $\mathbb{R}^2$. Grupę tę możemy parametryzować przez $\mathbb{R}^2 \times S^1$. Działanie w niej definiujemy jako

$$(x_2,y_2,\theta_2)(x_1,y_1,\theta_1) = (x_2\cos\theta_1 + y_2\sin\theta_1 + x_1, -x_2\sin\theta_1 + y_2\sin\theta_1 + y_1, \theta_2+\theta_1).$$

Reprezentację definiujemy następująco:

$$\mathbb{R}^2 \times S^1 \ni (x,y,\theta) \mapsto U(x,y,\theta),$$

$$U_{m,n,\theta}(x,y) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} J_{m-n}(\sqrt{x^2+y^2})\Big(\tfrac{x+\mathrm{i}y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)^{m-n}.$$

Wtedy $U(x,y,\theta)$ jest macierzą unitarną i jest to reprezentacja, czyli

$$U_{k,n}\Big((x_2,y_2,\theta_2)(x_1,y_1,\theta_1)\Big) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_{k,m}(x_2,y_2,\theta_2)U_{m,n}(x_1,y_1,\theta_1).$$

6.14 Równanie Airy'ego

Równanie Airy'ego ma postać

$$(\partial_z^2 - z)u(z) = 0.$$

Twierdzenie 6.20 *Jeśli $u(z)$ jest rozwiązaniem równania Airy'ego, to $u(\mathrm{e}^{\pm\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}z)$ jest też jego rozwiązaniem.*

Twierdzenie 6.21 *Niech krzywa γ spełnia*

$$\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{3}t^3+\mathrm{i}tz}\Big|_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} = 0.$$

Wtedy

$$C\int_\gamma \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{3}t^3+\mathrm{i}tz}\mathrm{d}t$$

jest rozwiązaniem równania Airy'ego.

Dowód.

$$(\partial_z^2 - z)\int_\gamma \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{3}t^3+\mathrm{i}tz}\mathrm{d}t$$
$$= \int_\gamma(-t^2-z)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{3}t^3+\mathrm{i}tz}\mathrm{d}t = \int_\gamma \mathrm{i}\partial_t \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{3}t^3+\mathrm{i}tz}\mathrm{d}t = 0.$$

□

Podstawienie $t = \mathrm{i}s$ daje analogiczne twierdzenie z funkcją $\mathrm{e}^{\frac{1}{3}t^3-tz}$.
Funkcja Airy'ego jest zdefiniowana wzorem

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ai}(z) \quad &:= \tfrac{1}{2\pi}\int_{]-\infty,\infty[}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{3}t^3+\mathrm{i}tz}\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{]-\mathrm{i}\infty,\mathrm{i}\infty[}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t^3+tz}\mathrm{d}t \\
&= \tfrac{1}{\pi}\int_{]-\infty,\infty[}\cos(-\tfrac{1}{3}t^3+tz)\mathrm{d}t \\
&= \tfrac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{s^3}{3}-sz\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}}\mathrm{d}s - \tfrac{\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{3}}}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{s^3}{3}-sz\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{3}}}\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Punkt 0 jest regularnym punktem równania. Szukając rozwiązania w postaci $u(z) = \sum_{m=0}^\infty u_m z^m$ dostajemy równanie rekurencyjne

$$n(n-1)u_n = u_{n-3}.$$

Zatem ogólne rozwiązanie jest kombinacją liniową funkcji

$$\mathrm{Ai}_{(0)}(z) := \sum_{m=0}^\infty \prod_{j=1}^m \frac{1}{3j(3j-1)}z^{3m},$$

$$\mathrm{Ai}_{(1)}(z) := \sum_{m=0}^\infty \prod_{j=1}^m \frac{1}{3j(3j+1)}z^{3m+1},$$

gdzie

$$\mathrm{Ai}_{(0)}(0) = 1, \quad \mathrm{Ai}_{(0)}{}'(0) = 0;$$

$$\mathrm{Ai}_{(1)}(0) = 0, \quad \mathrm{Ai}_{(1)}{}'(0) = 1.$$

Twierdzenie 6.22

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{3^{-\frac{2}{3}}}{\Gamma(\frac{2}{3})}\mathrm{Ai}_{(0)}(z) + \frac{3^{-\frac{1}{3}}}{\Gamma(\frac{1}{3})}\mathrm{Ai}_{(1)}(z).$$

Dowód.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ai}(0) &= \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{s^3}{3}}\mathrm{d}s = \frac{3^{-\frac{2}{3}}}{\Gamma(\frac{2}{3})},\\
\mathrm{Ai}'(0) &= -\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{s^3}{3}}s\mathrm{d}s = \frac{3^{-\frac{1}{3}}}{\Gamma(\frac{1}{3})}.
\end{aligned}
$$

□

Związki z funkcjami Bessela:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ai}_{(0)}(z) &= I_{-\frac{1}{3}}(\tfrac{2}{3}z^{\frac{3}{2}})z^{\frac{1}{2}}(\tfrac{2}{3})^{\frac{1}{3}}\Gamma(\tfrac{2}{3})\\
&= J_{-\frac{1}{3}}(\tfrac{2}{3}(-z)^{\frac{3}{2}})(-z)^{\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{3})^{\frac{1}{3}}\Gamma(\tfrac{2}{3}),\\
\mathrm{Ai}_{(1)}(z) &= I_{\frac{1}{3}}(\tfrac{2}{3}z^{\frac{3}{2}})z^{\frac{1}{2}}(\tfrac{2}{3})^{-\frac{1}{3}}\Gamma(\tfrac{4}{3})\\
&= -J_{\frac{1}{3}}(\tfrac{2}{3}(-z)^{\frac{3}{2}})(-z)^{\frac{1}{2}}3^{-\frac{1}{3}}\Gamma(\tfrac{4}{3}),\\
\mathrm{Ai}(z) &= \pi^{-1}(\tfrac{z}{3})^{\frac{1}{3}}K_{\frac{1}{3}}(\tfrac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}) = \tfrac{1}{3}z^{\frac{1}{2}}\Big(I_{-\frac{1}{3}}(\tfrac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}) - I_{\frac{1}{3}}(\tfrac{2}{3}z^{\frac{3}{2}})\Big)\\
&\qquad = \tfrac{1}{3}(-z)^{\frac{1}{2}}\Big(J_{-\frac{1}{3}}(\tfrac{2}{3}(-z)^{\frac{3}{2}}) + J_{\frac{1}{3}}(\tfrac{2}{3}(-z)^{\frac{3}{2}})\Big)
\end{aligned}
$$