

Funkcje analityczne. Funkcja Gamma.

Jan Dereziński

Katedra Metod Matematycznych Fizyki
Uniwersytet Warszawski
Hoża 74, 00-682, Warszawa
e-mail jan.derezinski@fuw.edu.pl

25 maja 2008

Metody Matematyczne Fizyki, skrypt I
rok 2008

Spis treści

1	Funkcje analityczne	2
1.1	Definicja funkcji analitycznych	2
1.2	Krzywe	5
1.3	Całki wzdłuż krzywych	5
1.4	Twierdzenie Cauchy'ego i jego konsekwencje	6
1.5	Związki dyspersyjne	7
1.6	Szeregi potęgowe	8
1.7	Funkcja wykładnicza	11
1.8	Funkcja logarytm i funkcja potęgowa	12
1.9	Punkty osobliwe funkcji analitycznych	13
1.10	Funkcje analityczne a punkt w nieskończoności	17
1.11	Funkcje analityczne z $\overline{\mathbb{C}}$ w $\overline{\mathbb{C}}$	19
1.12	Jednoznaczność przedłużania funkcji analitycznych	19
1.13	Przedłużanie funkcji analitycznych wzdłuż drogi	20
1.14	* Powierzchnie Riemanna i funkcje analityczne wieloznaczne	22
1.15	* Homotopia krzywych	23
1.16	* Składanie krzywych i grupa homotopii	24
1.17	* Nakrycie uniwersalne	25
1.18	* Nakrycie wyznaczone przez podgrupę grupy homotopii	25
1.19	* Funkcja pierwotna	25
1.20	* Funkcja logarytm i potęgowa	26
1.21	* Funkcja $z^\alpha(z-1)^\beta$	26

1.22	Notacja do oznaczania krzywych	27
2	Funkcja Gamma Eulera	29
2.1	Funkcja Gamma jako uogólnienie silni i II całka Eulera	29
2.2	I całka Eulera i dalsze tożsamości	30
2.3	Funkcja Gamma i całki w dziedzinie zespolonej	33
2.4	Iloczyny nieskończone	34
2.5	Funkcje trygonometryczne jako iloczyny nieskończone	35
2.6	Funkcja Gamma a iloczyny nieskończone	36
2.7	Pewne całki z parametrem	38
2.8	Pochodna logarytmiczna funkcji Gamma	39
2.9	Szeregi asymptotyczne	40
2.10	Pierwszy wzór Bineta	41
2.11	Wzór Plana i drugi wzór Bineta	42
3	Zastosowania	44
3.1	Jednorodne dystrybucje i ich transformaty Fouriera	44
3.2	Całki wielowymiarowe	45
3.3	Macierze	46
3.4	Wielowymiarowe całki Gaussa i Fresnela	47
3.5	Metoda Laplace'a (punktu siodłowego)	47
3.6	Asymptotyka funkcji Gamma w nieskończoności metodą punktu siodłowego.	48
3.7	Asymptotyka funkcji Beta w nieskończoności metodą punktu siodłowego	50
3.8	Wielowymiarowa wersja metody Laplace'a (bez przedłużenia analitycznego)	51
3.9	Metoda fazy stacjonarnej	51
3.10	Równanie dyfuzji i Schrödingera	52
3.11	Transformacja Legendre'a	53
3.12	Dyspersyjne równanie Schrödingera z parametrem \hbar	54
3.13	Granica semiklasyczna dyspersyjnej ewolucji	54
3.14	Równanie Kleina-Gordona/falowe	55

Gwiazdką * oznaczone są podrozdziały o nieco bardziej zaawansowanej treści, które mogą być pominięte przy lekturze.

1 Funkcje analityczne

1.1 Definicja funkcji analitycznych

Utożsamiamy \mathbb{R}^2 z \mathbb{C} odwzorowaniem $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto z := x + iy \in \mathbb{C}$. Wprowadzamy następujące operatory działające na \mathbb{C}

$$\partial_z := \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \quad \partial_{\bar{z}} := \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y).$$

i jednoformy:

$$dz = dx + idy, \quad d\bar{z} = dx - idy.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\partial_z z &= 1, \quad \partial_z \bar{z} = 0, \\ \partial_{\bar{z}} z &= 0, \quad \partial_{\bar{z}} \bar{z} = 1, \\ df &= \partial_z f dz + \partial_{\bar{z}} f d\bar{z}.\end{aligned}$$

Twierdzenie 1.1 (Definicja funkcji holomorficzej). Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie otwartym podzbiorem i $\Omega \ni z \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ funkcją. Wtedy następujące warunki są równoważne:

1) **(Różniczkowalność w sensie zespolonym)** Dla każdego $z_0 \in \Omega$ istnieje

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (1.1)$$

Granice tę nazywamy pochodną w sensie zespolonym funkcji f w z_0 . Jest ona oznaczana przez $\partial_z f(z_0)$. Stosujemy też oznaczenia $f'(z_0)$ i $\frac{df(z_0)}{dz}$.

2) **(Warunki Cauchy'ego–Riemanna)** Funkcja f jest jednokrotnie różniczkowalna w sensie rzeczywistym i spełnione są następujące wzory:

$$\begin{aligned}\partial_x u &= \partial_y v, \\ \partial_x v &= -\partial_y u,\end{aligned}$$

gdzie $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$.

3) Funkcja f jest jednokrotnie różniczkowalna w sensie rzeczywistym i zachodzi

$$\partial_{\bar{z}} f = 0.$$

4) **(Analityczność)** Dla każdego $z_0 \in \Omega$ istnieje $r > 0$ takie, że na $K(z_0, r)$

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Definicja 1.2 Funkcję f spełniającą jeden, a zatem i wszystkie, powyższe warunki nazywamy funkcją holomorficzną na Ω lub, co traktujemy jako synonim, funkcją analityczną na Ω .

Dowód Twierdzenia 1.1. Udowodnijmy 1) \Rightarrow 2). We wzorze

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h},$$

gdzie $h = h_x + ih_y$, możemy położyć $h_y = 0$ i zbiegać z $h_x \rightarrow 0$, wtedy dostajemy

$$f'(z_0) = \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h_x) - f(z_0)}{h_x} = \partial_x u(z_0) + i \partial_x v(z_0) \quad (1.2)$$

lub możemy trzymać $h_x = 0$, wtedy

$$f'(z_0) = \lim_{h_y \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + ih_y) - f(z_0)}{ih_y} = -i \partial_y u(z_0) + \partial_y v(z_0) \quad (1.3)$$

Przez porównanie (1.2) i (1.3) dostajemy wzory Cauchy'ego–Riemanna.

Równoważność 2) i 3) jest oczywista.

Udowodnijmy teraz 2) \Rightarrow 1). Różniczkowalność w sensie rzeczywistym oznacza, że

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + R(z_0, h)$$

gdzie $f'(z_0)$ oznacza macierz Jacobiego pochodnej

$$\begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{bmatrix},$$

h jest wektorem

$$\begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix}$$

a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|R(z_0, h)|}{|h|} = 0.$$

Można to zapisać jako

$$\begin{aligned} f(z_0 + h) - f(z_0) &= \partial_x f(z_0)h_x + \partial_y f(z_0)h_y + R(z_0, h) \\ &= \partial_z f(z_0)(h_x + ih_y) + \partial_{\bar{z}} f(z_0)(h_x - ih_y) + R(z_0, h) \end{aligned}$$

Z tego wynika istnienie granicy (1.1) i to, że jest równa $\partial_z f(z_0)$.

Dowód równoważności warunku 4) zostawiamy na później. \square

Stwierdzenie 1.3 *Jeśli f, g są holomorphyjne w Ω , to również $f + g$ i fg . Jeśli w dodatku $f \neq 0$ na Ω , to $\frac{1}{f}$ jest holomorphyjne na Ω . Jeśli f jest holomorphyjne na Ω a g na $f(\Omega)$, to $g \circ f$ jest holomorphyjne na Ω . Jeśli f jest bijekcją z Ω na $f(\Omega)$ i f^{-1} jest funkcją odwrotną do f , to f^{-1} jest holomorphyjne na $f(\Omega)$. Zachodzą wzory*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(f + g) &= \frac{d}{dz}f + \frac{d}{dz}g, \\ \frac{d}{dz}(fg) &= \left(\frac{d}{dz}f\right)g + f\frac{d}{dz}g, \\ \frac{d}{dz}\frac{1}{f} &= -\frac{1}{f^2}\frac{d}{dz}f, \\ \frac{d}{dz}g \circ f(z) &= \frac{d}{dw}g(w)\frac{d}{dz}f(z), \text{ gdzie } f(z) = w, \\ \frac{d}{dw}f^{-1}(w) &= \frac{1}{\frac{d}{dz}f(z)}, \text{ gdzie } f(z) = w. \end{aligned}$$

Wniosek 1.4 *Funkcja wymierna, czyli funkcja postaci*

$$\frac{P(z)}{Q(z)},$$

gdzie P, Q są wielomianami, jest holomorphyjna poza zerami $Q(z)$.

1.2 Krzywe

Krzywą sparametryzowaną nazywamy odwzorowanie ciągłe

$$]0, 1[\ni \tau \mapsto \gamma(\tau) \in \mathbb{C}. \quad (1.4)$$

Na ogół będziemy milcząco zakładali, że γ jest kawałkami gładka.

W zbiorze krzywych wprowadzamy relację: $\gamma_1 \sim \gamma_2$, gdy istnieje kawałkami gładka rosnąca bijekcja $]0, 1[\ni \tau \mapsto \kappa(\tau) \in]0, 1[$ taka, że $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \kappa$. Jest to relacja równoważności. Klasę abstrakcji względem tej relacji nazywamy krzywą zorientowaną (niesparametryzowaną).

W zbiorze krzywych wprowadzamy też relację: $\gamma_1 \sim \gamma_2$, gdy istnieje kawałkami gładka rosnąca lub malejąca bijekcja $]0, 1[\ni \tau \mapsto \kappa(\tau) \in]0, 1[$ taka, że $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \kappa$. Jest to również relacja równoważności. Klasę abstrakcji względem tej relacji nazywamy krzywą niezorientowaną (niesparametryzowaną).

W definicji (1.4) można również zamienić $]0, 1[$ na $[0, 1]$, $]0, 1]$, $[0, 1[$ bądź S^1 (okrąg). W ostatnim wypadku mamy do czynienia z krzywą zamkniętą.

Założmy, że brzeg zbioru otwartego składa się z krzywych zamkniętych. Wtedy każda z tych krzywych ma naturalną orientację: posuwamy się wzdłuż niej w dodatnim kierunku, jeśli zbiór mamy z lewej strony.

1.3 Całki wzdłuż krzywych

Niech krzywa γ będzie sparametryzowana przez $[0, 1] \ni \tau \mapsto \gamma(\tau) \in \Omega$. Zakładamy, że parametryzacja jest kawałkami C^1 . Założmy też, że na $\gamma([0, 1])$ określona jest funkcja f (niekoniecznie holomorficzna). Zdefiniujmy całkę z funkcji f po krzywej γ wzorem

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_0^1 f(\gamma(\tau)) \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (1.5)$$

Definicja ta nie zależy od parametryzacji zachowującej orientację. Przy zmianie orientacji zmienia się znak całki,

Wprowadzamy również oznaczenie na niezorientowaną całkę wzdłuż krzywej γ :

$$\int_{\gamma} f(z) |dz| := \int_0^1 f(\gamma(\tau)) \left| \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} \right| d\tau.$$

Definicja ta nie zależy od parametryzacji, również zmieniającej orientację.

Zauważmy, że

$$\left| \int_{\gamma} f(z) g(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \sup_{z \in \gamma[0, 1]} |g(z)|.$$

Przykład. Niech γ będzie okręgiem $[0, 2\pi] \ni \phi \mapsto e^{i\phi} a + b \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^n dz &= \int_0^{2\pi} i(ae^{i\phi} + b)^n ae^{i\phi} d\phi \\ &= \sum_{j=0}^n \int_0^{2\pi} a^m b^{n-m} i \frac{n!}{m!(n-m)!} e^{i(m+1)\phi} d\phi = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} z^n |dz| &= \int_0^{2\pi} (ae^{i\phi} + b)^n a d\phi \\
&= b^n a 2\pi; \\
\int_{\gamma} \bar{z} dz &= \int_0^{2\pi} (\bar{a}e^{-i\phi} + \bar{b}) a e^{i\phi} i d\phi \\
&= i2\pi |a|^2.
\end{aligned}$$

1.4 Twierdzenie Cauchy'ego i jego konsekwencje

Twierdzenie 1.5 (Twierdzenie Cauchy'ego). Niech f będzie holomorficzną na otwartym i ograniczonym zbiorze Ω i ciągłą na $\bar{\Omega}$. Wtedy

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = 0. \quad (1.6)$$

Dowód. Korzystamy z twierdzenia Stokesa:

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = \int_{\Omega} df \wedge dz = \int_{\Omega} \partial_{\bar{z}} f d\bar{z} \wedge dz = 0.$$

□

Wniosek 1.6 (Wzór Cauchy'ego) Przy tych samych założeniach, co powyżej, jeśli $z_0 \in \Omega$, to

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (1.7)$$

Dowód. Funkcja $\frac{f(z)}{z - z_0}$ jest holomorficzną w $\Omega \setminus K(z_0, r)$. Zatem

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial(\Omega \setminus K(z_0, r))} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\
&= \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz
\end{aligned}$$

Ale przez podstawienie $z = z_0 + re^{i\phi}$ dostajemy, że

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

□

Wniosek 1.7 Każda funkcja holomorficzną jest różniczkowalna nieskończenie wiele razy w sensie zespolonym. Zachodzi wzór

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \quad (1.8)$$

Wniosek 1.8 (Nierówność Cauchy'ego) *Jeśli f jest holomorficzną w $K(z_0, r)$ i ciągłą na $\overline{K}(z_0, r)$, to*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{z \in K(z_0, r)} |f(z)| \quad (1.9)$$

Wniosek 1.9 (Twierdzenie Liouville'a) *Każda funkcja holomorficzną na \mathbb{C} i ograniczona jest stała.*

Dowód. Dla dowolnego $z_0 \in \mathbb{C}$ i $r > 0$ z nierówności Cauchy'ego wynika oszacowanie

$$|f'(z_0)| \leq \frac{\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|}{r}.$$

Zatem $f' = 0$. \square

Wniosek 1.10 (Twierdzenie Gaussa) *Każdy wielomian różny od stałej ma na \mathbb{C} miejsce zerowe.*

Dowód. Załóżmy, że wielomian $P(z)$ stopnia $n \geq 1$ nie ma pierwiastka. Niech

$$f(z) := (P(z))^{-1}.$$

Wtedy f jest holomorficzną na \mathbb{C} . Poza tym, wiemy, że dla $z > R$, $|P(z)| \geq |z|^n$. Zatem, $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Funkcja ciągła zbieżna do zera w nieskończoności jest ograniczona. A więc z Twierdzenia Liouville'a wynika, że f jest stała. \square

1.5 Związki dyspersyjne

Wartość główną całki z $\frac{f(\xi)}{\xi - \omega}$ definiujemy jako

$$P \int \frac{f(\xi)}{\xi - \omega} d\xi := \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\omega - \epsilon} + \int_{\omega + \epsilon}^{\infty} \right) \frac{f(\xi)}{\xi - \omega} d\xi.$$

Twierdzenie 1.11 (Wzór Sochockiego) *Niech $\frac{f}{1+|\xi|} \in L^1$ i $|f(\xi) - f(\omega)| \leq c|\xi - \omega|^\delta$, niech f będzie ciągłą w ω i w pewnym otoczeniu ω , $|f(\xi) - f(\omega)| \leq c|\xi - \omega|^\delta$, $\delta > 0$. Wtedy*

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{f(\xi)}{\xi - \omega \pm i\epsilon} = \mp i\pi f(\omega) + P \int \frac{f(\xi)}{\xi - \omega} d\xi.$$

Twierdzenie 1.12 (Związki dyspersyjne) *Niech f będzie ciągłą na $\{\text{Im}z \geq 0\}$ i analityczną w $\{\text{Im}z > 0\}$. Zakładamy, że na \mathbb{R} jest różniczkowalna, $\frac{f}{1+|\omega|} \in L^1$ i $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} f(\omega) = 0$. Niech $f = f_R + if_I$ będzie rozkładem na część rzeczywistą i urojoną. Wtedy dla $\omega \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} f_R(\omega) &= \frac{1}{\pi} P \int \frac{f_I(\xi)}{\xi - \omega} d\xi, \\ f_I(\omega) &= -\frac{1}{\pi} P \int \frac{f_R(\xi)}{\xi - \omega} d\xi. \end{aligned}$$

Dowód.

$$f(\omega + i\epsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\xi)}{\xi - i\epsilon - \omega} d\xi$$

Następnie korzystamy z tego, że $f(\omega + i\epsilon) \rightarrow f(\omega)$ i ze wzoru Sochockiego:

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int \frac{f(\xi)}{\xi - \omega - i\epsilon} d\xi = i\pi f(\omega) + P \int \frac{f(\xi)}{\xi - \omega} d\xi.$$

□

Fizyczne zastosowania Twierdzenia 1.12 są oparte na następującym schemacie. Załóżmy, że $g(t)$ jest “bodźcem” a $h(t)$ “reakcją”. Zakładamy, że $h(t)$ zależy od $g(t)$ liniowo i przyczynowo. Oznacza to, że

$$h(t) = \int_0^\infty \epsilon(s)g(t-s)ds. \quad (1.10)$$

Po przejściu do transformat Fouriera dostajemy

$$\hat{h}(\omega) = \hat{\epsilon}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

(Stosujemy konwencję $\hat{\epsilon}(\omega) = \int \epsilon(t)e^{it\omega} dt$.) Załóżmy, że $\epsilon \in L^1$. Wtedy funkcja $\hat{\epsilon}$ przedłuża się analitycznie na $\{\text{Im}z \geq 0\}$ i zatem stosuje się do niej powyższe twierdzenie.

1.6 Szeregi potęgowe

Poniższe twierdzenie implikuje równoważność warunku 4) z twierdzenia 1.1 z pozostałymi warunkami.

Twierdzenie 1.13 1) Niech (a_0, a_1, \dots) będzie ciągiem i

$$\rho^{-1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}. \quad (1.11)$$

Wtedy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

jest funkcją holomorficzną w kole $K(0, \rho)$. Poza tym

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

2) Niech $f(z)$ będzie holomorficzną w kole $K(0, r)$. Wtedy jeśli

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

to

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \leq r^{-1}$$

i w $K(0, r)$ mamy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Dowód. Udowodnijmy 1). Niech $\rho_2 < \rho_1 < \rho$. Wtedy dla $n > N_0$, $|a_n| < \rho_1^{-n}$. Zatem dla $N > N_0$

$$|\sum_{n=N}^{\infty} a_n z^n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \rho_1^n |z|^n = \rho_1^{-N} |z|^N (1 - \frac{|z|}{\rho_1})^{-1}.$$

Czyli

$$f_N(z) := \sum_{n=0}^N a_n z^n$$

spełnia dla $N_0 \leq N_1 \leq N_2$ i $z \in K(0, \rho_2)$

$$|f_{N_1} - f_{N_2}| \leq \rho_1^{-N_1} \rho_2^{N_1} (1 - \frac{\rho_2}{\rho_1})^{-1}.$$

Czyli f_N jest zbieżny jednostajnie w $K(0, \rho_2)$, a więc niemal jednostajnie w $K(0, \rho)$ do funkcji $f(z)$. Podobnie pochodne $f(z)$ są granicą niemal jednostajną pochodnych tego ciągu. Każdy z elementów tego ciągu spełnia warunki Cauchy'ego–Riemanna. Zatem i granica spełnia te warunki.

Udowodnijmy teraz 2). Z nierówności Cauchy'ego wynika, że jeśli $r_1 \leq r$, to istnieje C takie, że

$$|a_n| \leq C r_1^{-n}$$

Zatem szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

jest zbieżny w kole $K(0, r_1)$. Korzystając z jednostajnej zbieżności przy zamianie kolejności całkowania i sumowania dla $r_2 < r_1$ dostajemy

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(0, r_2)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(0, r_2)} \frac{f(\xi)}{\xi} \frac{1}{1 - \frac{z}{\xi}} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{\partial K(0, r_2)} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \end{aligned}$$

□

W praktyce wystarczają prostsze kryteria:

1) (**Kryterium D'Alemberta**) Jeśli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

istnieje, to jest równe (1.11);

2) (**Kryterium Cauchy'ego**) Jeśli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$$

istnieje, to jest równe (1.11).

Przykłady rozwinięć funkcji analitycznych

$$(1 - z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1;$$

$$(1 - z)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m+1)\dots(m+n-1)}{n!} z^n, \quad |z| < 1, \quad m = 1, 2, \dots;$$

$$(1 + z)^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} z^n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Twierdzenie 1.14 (Rozwinięcie w szereg Laurent'a) Niech funkcja f będzie holomorficzną w pierścieniu

$$\{z : r < |z| < R\},$$

gdzie $0 \leq r < R \leq \infty$. Wtedy na tym pierścieniu

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n. \quad (1.12)$$

Współczynniki b_n można obliczyć ze wzoru

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(0, \rho)} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi.$$

gdzie $r < \rho < R$.

Dowód. Niech $r < r_1 < |z| < R_1 < R$. Wtedy

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(R_1, 0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(r_1, 0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(R_1, 0)} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} z^n d\xi + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(r_1, 0)} \frac{f(\xi)}{z^{n+1} \xi} d\xi \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n. \end{aligned}$$

□

Przykład. Funkcja

$$\frac{3 - 2z}{2 - 3z + z^2} = \frac{1}{1 - z} + \frac{1}{2 - z}$$

ma następujące rozwinięcia

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 + 2^{-n-1}) z^n, \quad |z| < 1;$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} z^n, \quad 1 < |z| < 2; \\
& - \sum_{n=0}^{\infty} (1 + 2^n) z^{-n-1}, \quad 2 < |z|.
\end{aligned}$$

1.7 Funkcja wykładnicza

Funkcję wykładniczą można zdefiniować przez szereg

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Funkcja ta ma następujące własności:

$$\begin{aligned}
e^{z_1} e^{z_2} &= e^{z_1+z_2}, \\
e^{-z} &= \frac{1}{e^z}, \\
\frac{d}{dz} e^z &= e^z, \\
\overline{e^z} &= e^{\bar{z}}, \\
e^z &= 1 \text{ wtedy i tylko wtedy gdy } z = i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Z funkcją e^z związane są funkcje trygonometryczne

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

i hiperboliczne

$$\operatorname{ch} z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Funkcje e^z , $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$ i $\operatorname{sh} z$ obcięte do \mathbb{R} mają wartości rzeczywiste. Możemy przy ich pomocy wyrazić e^z jak następuje:

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Funkcje $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$ i $\operatorname{sh} z$ są w pewnym sensie przełuzeniami analitycznymi jednej funkcji, na przykład $\operatorname{ch} z$:

$$\operatorname{sh} t = -i \operatorname{ch}(t - i\frac{\pi}{2}), \quad \sin t = \operatorname{ch}(it - i\frac{\pi}{2}).$$

Oto własności funkcji $\operatorname{ch} z$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} z &= \operatorname{ch}(-z), \quad \operatorname{ch}(z + i\pi) = -\operatorname{ch} z, \\
i\partial_z \operatorname{ch} z &= \operatorname{ch}(z + i\frac{\pi}{2}), \quad \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{ch}^2(z + i\frac{\pi}{2}) = 1.
\end{aligned}$$

1.8 Funkcja logarytm i funkcja potęgowa

Funkcja e^z przekształca bijektywnie pas $\{z : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ na $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. Funkcję odwrotną do e^z określamy na

$$\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \quad (1.13)$$

nazywamy gałęzią główną logarytmu i oznaczamy $\log_{(0)} z$. (Dziedzina (1.13) została wybrana dość arbitralnie). Ma własności:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \log_{(0)} z &= \frac{1}{z} \\ \log_{(0)} 1 &= 0. \end{aligned}$$

Dostajemy zatem wzór

$$\log_{(0)} z = \int_{\gamma} \frac{dw}{w}$$

gdzie γ jest dowolnym konturem wewnątrz (1.13) zaczynającym się w 1 i kończącym się w z .

Czasami przydatna jest funkcja argument (która nie jest holomorficzną)

$$\arg_{(0)} z := \operatorname{Im} \log_{(0)} z.$$

Wychodząc ze wzoru

$$\frac{d}{dz} \log_{(0)}(1+z) = \frac{1}{1+z}$$

i całkując rozwinięcie dla $\frac{1}{1+z}$ dostajemy

$$\log_{(0)}(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n, \quad |z| < 1.$$

Zauważmy, że dla zdefiniowanej powyżej funkcji logarytm nie dla wszystkich $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ zachodzi wzór

$$\log_{(0)}(z_1 z_2) = \log_{(0)} z_1 + \log_{(0)} z_2. \quad (1.14)$$

(1.14) jest spełniony, jeśli $|\arg z_1 + \arg z_2| < \pi$.

Funkcja $\log_{(0)} x$ obcięta do \mathbb{R}_+ ma wartości w \mathbb{R} . Funkcję $\log_{(0)} z$ możemy następująco wyrazić przez funkcje rzeczywiste:

$$\log_{(0)}(r(\cos \phi + i \sin \phi)) = \log r + i\phi, \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \phi \in]-\pi, \pi[.$$

Jeśli $\mu \in \mathbb{C}$, to definiujemy gałąź główną funkcji potęgowej jako

$$\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \ni z \mapsto z_{(0)}^{\mu} := e^{\mu \log_{(0)} z}.$$

Zauważmy, że gdy $\mu \in \mathbb{Z}$ to powyższa definicja sprowadza się do zwykłej potęgi (która zdefiniowana jest na całym \mathbb{C} , być może z wyjątkiem $\{0\}$). Mamy tożsamości

$$\begin{aligned} 1_{(0)}^{\mu} &= 1, \\ \frac{d}{dz} z_{(0)}^{\mu} &= \mu z_{(0)}^{\mu-1}, \\ z_{(0)}^{\mu_1 + \mu_2} &= z_{(0)}^{\mu_1} z_{(0)}^{\mu_2}, \quad |\arg z_1 + \arg z_2| < \pi. \end{aligned}$$

Zdefiniujemy

$$\binom{\mu}{n} := \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{n!}.$$

Wtedy wychodząc ze wzoru Taylora dostajemy następujące rozwinięcie funkcji potęgowej:

$$(1+z)_{(0)}^{\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\mu}{n} z^n, \quad |z| < 1.$$

Funkcja $z_{(0)}^{\mu}$ dla $z \in \mathbb{R}_+$ i $\mu \in \mathbb{R}$ ma wartości w \mathbb{R}_+ . Funkcję $z_{(0)}^{\mu}$ możemy następująco wyrazić przez funkcje rzeczywiste:

$$(r(\cos \phi + i \sin \phi))_{(0)}^{\alpha+i\beta} = r^{\alpha} e^{-\beta\phi} e^{i\alpha\phi+i\beta \log_{(0)} r}, \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \phi \in]-\pi, \pi[.$$

Niech $\theta \in \mathbb{R}$. Funkcja e^z jest bijekcją również jeśli damy jej następującą dziedzinę i przeciwdziedzinę:

$$\{z : \theta - \pi < \operatorname{Im} z < \theta + \pi\} \ni z \mapsto e^z \in \mathbb{C} \setminus [e^{i\theta} - \infty, 0].$$

Odwrotna do niej funkcja też będzie nazywana logarytmem. Będziemy ją oznaczać

$$\Omega_{\theta} := \mathbb{C} \setminus [e^{i\theta} - \infty, 0] \ni z \mapsto \log_{(\theta)}(z).$$

Zauważmy, że jeśli $\theta_1 < \theta_2 < \theta_1 + 2\pi$, to na jednej ze spójnych składowych $\Omega_{(\theta_1)} \cap \Omega_{(\theta_2)}$ $\log_{\theta_1}(z) = \log_{\theta_2}(z)$ na drugiej zaś, $\log_{(\theta_1)} z + i2\pi = \log_{(\theta_2)} z$.

Podobnie można zdefiniować

$$\Omega_{\theta} \ni z \mapsto z_{(\theta)}^{\mu} := e^{\mu \log_{(\theta)}(z)}.$$

Jeśli $\theta_1 < \theta_2 < \theta_1 + 2\pi$, to na jednej ze spójnych składowych $\Omega_{\theta_1} \cap \Omega_{\theta_2}$ mamy $z_{(\theta_1)}^{\mu} = z_{(\theta_2)}^{\mu}$ na drugiej zaś, $z_{(\theta_1)}^{\mu} e^{i2\pi\mu} = z_{(\theta_2)}^{\mu}$

Jeśli μ jest wymierne i równe nieskracalnemu ułamkowi $\frac{p}{q}$, to

$$z_{(\theta)}^{\mu} = z_{(\theta+q2\pi)}^{\mu}.$$

W przyszłości będziemy traktować $\log_{(0)} z$ i $z_{(0)}^{\mu}$ jako standardowe odmiany funkcji logarytm i funkcji potęgowej i będziemy pomijać indeks (0).

1.9 Punkty osobliwe funkcji analitycznych

Punkt z_0 nazywamy izolowanym punktem osobliwym funkcji f jeśli istnieje $r > 0$ taki, że f jest holomorficzną na $K(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ ale z_0 nie należy do dziedziny funkcji f . Rozróżniamy następujące przypadki.

Twierdzenie 1.15 (1) *Funkcja f ma w z_0 osobliwość pozorną (usuwalną) gdy istnieje*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \neq \infty.$$

(2) Funkcja f ma w z_0 biegun rzędu $k = 1, 2, \dots$ gdy istnieje

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^k \neq 0, \infty.$$

(3) Jeśli izolowany punkt osobliwy z_0 nie jest ani osobliwością pozorną ani biegunem, to mówimy, że funkcja f ma w z_0 osobliwość istotną.

W wyżej opisanej sytuacji wiemy, że dla pewnego $R > 0$ możemy rozwinąć funkcję f na $K(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ w szereg Laurenta:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Możemy wtedy rozpoznać typ osobliwości:

Twierdzenie 1.16 (1) Funkcja f ma w z_0 osobliwość pozorną (usuwalną) $\Leftrightarrow a_n = 0$ dla $n = -1, -2, \dots$

(2) Funkcja f ma w z_0 biegun rzędu $k = 1, 2, \dots \Leftrightarrow a_{-k} \neq 0$ i $a_n = 0$ dla $n = -k - 1, -k - 2, \dots$

(3) Funkcja f ma w z_0 osobliwość istotną, $\Leftrightarrow \inf\{n : a_n \neq 0\} = -\infty$.

Przykład.

$$\frac{\sin z}{z}$$

ma w 0 osobliwość usuwalną.

$$(1 + z^2)^{-2}$$

ma w $\pm i$ bieguny drugiego rzędu.

$$e^{1/z}$$

ma w 0 osobliwość istotną.

Definicja 1.17 Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie otwarty. Funkcja f jest meromorficzna na Ω gdy istnieją punkty $z_1, z_2, \dots \in \Omega$ takie, że f jest holomorficzna na $\Omega \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$ i punkty z_1, z_2, \dots są biegunami funkcji f .

Przykład. Funkcja

$$(\sin z)^{-1}$$

jest meromorficzna na \mathbb{C} .

Definicja 1.18 Residuum funkcji f w punkcie z_0 jest zdefiniowane jako

$$\operatorname{Res}f(z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, R_1)} f(z) dz,$$

gdzie $0 < R_1 < R$.

Zauważmy, że definicja ta nie zależy od wyboru R_1 . Mamy

$$\frac{d}{dz} \frac{z^{n+1}}{n+1} = z^n, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}.$$

Dlatego

$$\int_{\partial K(z_0, R_1)} z^n dz = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}.$$

Poza tym

$$\int_{\partial K(z_0, R_1)} z^{-1} dz = 2\pi i.$$

Stąd wynika wzór

$$\operatorname{Res} f(z_0) = a_{-1}. \quad (1.15)$$

Jeśli f ma biegun rzędu najwyżej k , to residuum można obliczyć ze wzoru

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - z_0)^k f(z). \quad (1.16)$$

Jeśli funkcja f jest holomorphyzna na $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$, to zachodzi wzór

$$\int_{\partial \Omega} f(z) dz = \sum_{j=1}^n 2\pi i \operatorname{Res} f(z_j). \quad (1.17)$$

Przykład. Jeśli

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2},$$

to

$$\operatorname{Res} f(i) = -\frac{i}{2a}$$

Zatem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(ia) = \frac{\pi}{a}.$$

Lemat 1.19 (Lemat Jordana) Niech $a > 0$. Dla $R > 0$ oznaczamy

$$\gamma_R := [R, R + iR] \cup [R + iR, -R + iR] \cup [-R + iR, -R]$$

Wtedy

$$\sup_{R > 0} \int_{\gamma_R} |e^{iaz}| |dz| < \infty.$$

Dowód. Mamy:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} |e^{iaz}| |dz| &= 2 \int_0^R e^{-ay} dy + e^{-aR} \int_{-R}^R dx \\ &= 2a^{-1}(1 - e^{-aR}) + 2Re^{-aR} \leq 2a^{-1} + 2ae^{-1}. \end{aligned}$$

□

Uwaga: podobne oszacowanie jest słuszne jeśli zastąpimy γ_R górnym półokręgiem o promieniu R .

Przykład. Niech

$$f(z) := \frac{ze^{iz}}{1+z^2}$$

Wtedy

$$\operatorname{Res} f(i) = \frac{e^{-1}}{2}.$$

Poza tym,

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \sup_{R>0} \int_{\gamma_R} |e^{iaz}| |dz| \sup_{z \in \gamma_R} \left| \frac{z}{1+z^2} \right| \leq C \sup_{z \in \gamma_R} \left| \frac{z}{1+z^2} \right|,$$

co dąży do zera gdy $R \rightarrow \infty$. Zatem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx = \operatorname{Im} \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R, R]} f(z) dz \right) = \operatorname{Im} (2\pi i \operatorname{Res} f(i)) = \pi e^{-1}.$$

Przykład.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ix\xi}}{x+i} dx = \begin{cases} 0 & \xi < 0, \\ -i\pi & \xi = 0, \\ -2i\pi e^{-\xi} & \xi > 0. \end{cases}$$

Lemat 1.20 Niech funkcja holomorphyzna f ma w z_0 biegun pierwszego rzędu. Zdefiniujemy krzywą

$$\gamma_r := \{z_0 + re^{i\phi} : \phi_0 < \phi < \phi_1\}.$$

Wtedy

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = (\phi_1 - \phi_0) i \operatorname{Res} f(z_0).$$

Dowód. Mamy

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + g(z),$$

gdzie g jest holomorphyzna w z_0 . Oczywiście,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} g(z) dz = 0.$$

Przykład. Jeśli

$$f(z) := \frac{e^{iz}}{z},$$

to

$$\operatorname{Res} f(0) = 1$$

Dlatego

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_{-R}^R f(z) dz = \operatorname{Im} (\pi i \operatorname{Res} f(0)) = \pi.$$

1.10 Funkcje analityczne a punkt w nieskończoności

Przez $\overline{\mathbb{C}}$ będziemy oznaczać sferę Riemanna, to znaczy $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Niech $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$. Mówimy, że f jest analityczna w ∞ , gdy $f(\frac{1}{z})$ jest analityczna w 0.

Punkt ∞ nazywamy izolowanym punktem osobliwym funkcji f , gdy dla pewnego R funkcja f jest holomorphyzna na $\mathbb{C} \setminus K(0, R)$ i ∞ nie należy do dziedziny f . Rozróżniamy następujące przypadki:

1) f ma w ∞ osobliwość pozorną, jeśli istnieje

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \neq \infty.$$

2) f ma w ∞ biegun rzędu $k = 1, 2, \dots$, gdy istnieje

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)z^{-k} \neq 0, \infty.$$

3) f ma w ∞ osobliwość istotną w przeciwnym razie.

W wyżej opisanej sytuacji wiemy, że dla pewnego $R > 0$ możemy rozwinąć funkcję f na $\mathbb{C} \setminus K(z_0, R)$ w szereg Laurenta:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Możemy wtedy rozpoznać typ osobliwości:

- 1) Funkcja f ma w ∞ osobliwość pozorną (usuwalną) gdy $a_n = 0$ dla $n = 1, 2, \dots$
- 2) Funkcja f ma w ∞ biegun rzędu $k = 1, 2, \dots$ gdy $a_k \neq 0$ i $a_n = 0$ dla $n = k + 1, k + 2, \dots$
- 3) Funkcja f ma w ∞ osobliwość istotną, jeśli

$$\sup\{n : a_n \neq 0\} = \infty.$$

Przykład. Funkcja e^z ma w ∞ istotny punkt osobliwy.

Definicja 1.21 Jeśli $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ jest otwarty to mówimy, że funkcja f jest meromorphyzna na Ω gdy istnieją punkty $z_1, z_2, \dots \in \Omega$ takie, że f jest holomorphyzna na $\Omega \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$ i ma w $\{z_1, z_2, \dots\}$ osobliwości pozorne bądź bieguny.

Przykład. Punkt ∞ nie jest izolowanym punktem osobliwym funkcji

$$(\sin z)^{-1}.$$

Zatem, funkcja ta nie jest meromorphyzna na $\overline{\mathbb{C}}$.

Definicja 1.22 Residuum funkcji f w ∞ jest równe

$$\operatorname{Res} f(\infty) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial(\mathbb{C} \setminus K(0, R_1))} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(0, R_1)} f(z) dz$$

gdzie $R_1 > R$.

Zauważmy, że definicja ta nie zależy od wyboru R_1 . Mamy wzór

$$\operatorname{Res}f(\infty) = -a_{-1}. \quad (1.18)$$

W praktyce możemy wyliczać residuum w nieskończoności ze wzoru

$$\operatorname{Res}f(\infty) = \operatorname{Res}g(0), \quad g(w) := -f\left(\frac{1}{w}\right) \frac{1}{w^2} \quad (1.19)$$

Jeśli funkcja f jest holomorphyzna na $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$, gdzie $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, to zachodzi wzór

$$\int_{\partial\Omega} f(z) = \sum_{j=1}^n 2\pi i \operatorname{Res}f(z_j). \quad (1.20)$$

Przykład. Niech $f(z) := \frac{z^{99}}{1-z^{100}}$. Wtedy

$$\operatorname{Res}f(\infty) = 1.$$

Dlatego,

$$\int_{\partial K(0,2)} f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res}f(\infty) = -2\pi i.$$

Twierdzenie 1.23 *Każda funkcja meromorphyzna na $\overline{\mathbb{C}}$ jest wymierna. Innymi słowy, każda funkcja analityczna z $\overline{\mathbb{C}}$ w $\overline{\mathbb{C}}$ jest wymierna.*

Dowód. Niech f będzie meromorphyzna na $\overline{\mathbb{C}}$. Ponieważ sfera Riemanna jest zwarta a punkty osobliwe f są izolowane, więc jest ich skończenie wiele. Niech $\{z_1, \dots, z_m, \infty\}$ będą punktami osobliwymi funkcji f . Niech

$$\sum_{n=1}^{k_i} a_{n,i} (z - z_i)^{-n}$$

będą osobliwymi częściami rozwinięć w szereg Laurent'a wokół z_i oraz

$$\sum_{n=1}^{k_\infty} a_{n,\infty} z^n$$

niech będzie częścią rozwinięcia w szereg Laurent'a wokół ∞ z dodatnimi potęgami. Wtedy

$$f(z) - \sum_{i=1}^m \sum_{n=1}^{k_i} a_{n,i} (z - z_i)^{-n} - \sum_{n=1}^{k_\infty} a_{n,\infty} z^n$$

jest funkcją analityczną na $\overline{\mathbb{C}}$. Zatem na mocy twierdzenia Liouville'a jest stała. \square

1.11 Funkcje analityczne z $\overline{\mathbb{C}}$ w $\overline{\mathbb{C}}$

Definicja 1.24 Niech $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ i $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Mówimy, że f jest analityczna w $z_0 \in \Omega$, gdy spełnione są następujące warunki:

- 1) gdy $z_0 \neq \infty$, $f(z_0) \neq \infty$, to f jest analityczna w otoczeniu z_0 w zwykłym sensie;
- 2) gdy $z_0 \neq \infty$, $f(z_0) = \infty$, to $\frac{1}{f(z)}$ jest analityczna w otoczeniu z_0 w zwykłym sensie;
- 3) gdy $z_0 = \infty$ i $f(z_0) \neq \infty$, to $f(\frac{1}{z})$ jest analityczna w otoczeniu 0 w zwykłym sensie;
- 4) gdy $z_0 = f(z_0) = \infty$, to $\frac{1}{f(\frac{1}{z})}$ jest analityczna w otoczeniu 0 w zwykłym sensie.

Twierdzenie 1.25 Niech f będzie meromorficzna na $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$. Rozszerzmy funkcję f na cały Ω kładąc

$$f(z_j) := \lim_{z \rightarrow z_j} f(z),$$

w szczególności w biegunach funkcji f kładziemy $f(z_j) := \infty$. Wtedy funkcja

$$f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{C}},$$

jest analityczna w sensie definicji (1.24).

- Twierdzenie 1.26** (1) Każda funkcja holomorficzna z $\overline{\mathbb{C}}$ w \mathbb{C} jest stała.
 (2) Każda bijekcja analityczna $\overline{\mathbb{C}}$ w siebie jest homografią.
 (3) Każda funkcja analityczna z $\overline{\mathbb{C}}$ w $\overline{\mathbb{C}}$ jest wymierna.

Dowód. (1) jest preformulowaniem twierdzenia Liouville'a. (3) jest preformulowaniem Twierdzenia (1.23). Aby dowieść (2) korzystamy z (3). \square

1.12 Jednoznaczność przedłużania funkcji analitycznych

Twierdzenie 1.27 Niech f, g będą holomorficzne w otwartym spójnym obszarze $\Omega \subset \mathbb{C}$. Załóżmy, że istnieje ciąg $\{z_n\} \subset \Omega$ taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n =: z_0 \in \Omega$ i $z_n \neq z_0$ dla $n = 1, 2, \dots$. Niech

$$f(z_n) = g(z_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Wtedy $f = g$ na całym Ω .

Dowód. Niech

$$\Omega_1 := \{z \in \Omega : f^{(j)}(z) = g^{(j)}(z), j = 0, 1, \dots\}.$$

Zbiór Ω_1 jest domknięty w Ω jako przecięcie domkniętych w Ω zbiorów

$$\{z \in \Omega : f^{(j)}(z) = g^{(j)}(z)\}.$$

Jest on również otwarty, bo dla każdego $\tilde{z}_0 \in \Omega_1$ istnieje $r > 0$ takie, że na $K(\tilde{z}_0, r)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\tilde{z}_0)}{n!} (z - \tilde{z}_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(\tilde{z}_0)}{n!} (z - \tilde{z}_0)^n = g(z).$$

Jest on wreszcie niepusty, bo $z_0 \in \Omega_1$. W rzeczy samej, istnieje $r > 0$ takie, że na $K(z_0, r)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

i

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n.$$

Niech $c_j := a_j - b_j$ i m niech będzie najmniejszym indeksem takim, że $c_m \neq 0$. Wtedy

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - g(z_n)}{(z_n - z_0)^m} = c_m \neq 0$$

co jest sprzecznością. \square

1.13 Przedłużanie funkcji analitycznych wzdłuż drogi

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie otwartym spójnym zbiorem i $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funkcją analityczną. Niech $[0, 1] \ni \tau \mapsto \gamma(\tau) \in \mathbb{C}$ będzie krzywą taką, że $\gamma(0) \in \Omega$. Mówimy, że można przedłużyć f wzdłuż γ , gdy dla każdego $\tau \in [0, 1]$ istnieją $r_\tau > 0$ i funkcja analityczna $f_\tau : K(\gamma(\tau), r_\tau) \rightarrow \mathbb{C}$ takie, że

(1) $f_0 = f$ na $K(\gamma(0), r_0) \cap \Omega$;

(2) Dla każdego $\tau_0 \in [0, 1]$ istnieje $\epsilon > 0$ taki, że dla każdego $\sigma \in [0, 1] \cap [\tau_0 - \epsilon, \tau_0 + \epsilon]$ mamy $\gamma(\tau_0) \in K(\gamma(\sigma), r_\sigma)$ oraz $f_\tau = f_\sigma$ na $K(\gamma(\tau_0), r_{\tau_0}) \cap K(\gamma(\sigma), r_\sigma)$.

Twierdzenie 1.28 *Niech $\sigma \in [0, 1]$ i $z_\sigma = \gamma(\sigma)$. Wtedy $f_\tau(z_\tau)$ zależy tylko od funkcji $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ i krzywej γ (a nie zależy od wyboru r_τ, f_τ).*

Definicja 1.29 *Liczbę*

$$f(z_\sigma)_{z_\sigma = \gamma(\sigma)} := f_\sigma(z_\sigma)$$

nazywamy wartością w punkcie z_σ funkcji f przedłużonej wzdłuż krzywej γ .

Dowód. Niech r_τ, f_τ i $\tilde{r}_\tau, \tilde{f}_\tau$ są dwiema rodzinami spełniającymi warunki definicji przedłużenia funkcji. Załóżmy, że istnieje $\tau \in [0, 1]$ taki, że $f_\tau \neq \tilde{f}_\tau$ na $K(\gamma(\tau), \min(r_\tau, \tilde{r}_\tau))$. Niech

$$\tau_0 = \inf\{\tau \in [0, 1] : f_\tau \neq \tilde{f}_\tau \text{ na } K(\gamma(\tau), \min(r_\tau, \tilde{r}_\tau))\}.$$

Oczywiście, $\tau_0 > 0$. Niech $\epsilon > 0$ spełnia warunek (2) definicji zarówno dla rodziny f jak i \tilde{f} . Niech $\tau_- \in [\tau_0 - \epsilon, \tau_0]$, $\tau_+ \in [\tau_0, \tau_0 + \epsilon]$. Wtedy

$$f_{\tau_-} = f_{\tau_+} \text{ na } K(\gamma(\tau_-), r_{\tau_-}) \cap K(\gamma(\tau_+), r_{\tau_+});$$

$$\tilde{f}_{\tau_-} = \tilde{f}_{\tau_+} \text{ na } K(\gamma(\tau_-), \tilde{r}_{\tau_-}) \cap K(\gamma(\tau_+), \tilde{r}_{\tau_+});$$

$$f_{\tau_-} = \tilde{f}_{\tau_-} \text{ na } K(\gamma(\tau_-), \min(r_{\tau_-}, \tilde{r}_{\tau_-})).$$

Czyli $f_{\tau_+} = \tilde{f}_{\tau_+}$ na

$$K(\gamma(\tau_-), \min(r_{\tau_-}, \tilde{r}_{\tau_-})) \cap K(\gamma(\tau_+), \min(r_{\tau_+}, \tilde{r}_{\tau_+})). \quad (1.21)$$

Zbiór (1.21) jest niepusty, bo $\gamma(\tau_0)$ do niego należy, jest otwarty i wypukły jako przecięcie kół otwartych. Jest więc spójny. Zatem na mocy jednoznaczności przedłużania funkcji analitycznych $f_{\tau_+} = \tilde{f}_{\tau_+}$ na $K(\gamma(\tau_+), \min(r_{\tau_+}, \tilde{r}_{\tau_+}))$, co przeczy definicji τ_0 . \square

Przykład. Niech krzywa $[0, 1] \ni \tau \mapsto \gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ będzie zamknięta (czyli $w := \gamma(0) = \gamma(1)$) i okrąży punkt 0 $n \in \mathbb{Z}$ razy. Załóżmy też, że $\gamma(0) \in \mathbb{C} \setminus e^{i\theta}[-\infty, 0]$. Wtedy można przedłużyć funkcje $\log_{(\theta)} z$ i $z_{(\theta)}^\mu$ wzdłuż krzywej γ i mamy

$$\log_{(\theta)}(w)_{w=\gamma(1)} = n2\pi i + \log_{(\theta)} w, \quad w_{(\theta)}^\mu_{w=\gamma(1)} = e^{n\mu 2\pi i} w_{(\theta)}^\mu.$$

Przykład. W ramach analizy rzeczywistej definiuje się osobno funkcje odwrotne do trygonometrycznych i hiperbolicznych

$$\begin{aligned} \operatorname{archt} &= \log(\sqrt{t^2 - 1} + t) \\ &= -\log(\sqrt{t^2 - 1} + t), \quad t \in [1, \infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arsht} &= \log(\sqrt{t^2 + 1} + t) \\ &= -\log(-\sqrt{t^2 + 1} - t), \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arccos} t &= \frac{1}{i} \log(i\sqrt{1 - t^2} + t) \\ &= -\frac{1}{i} \log(-i\sqrt{1 - t^2} + t), \quad t \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Funkcje te mogą być traktowane jako przedłużenia analityczne jednej z nich, na przykład archt . Mamy bowiem

$$\operatorname{arch}(\pm is) = \pm i\frac{\pi}{4} + \operatorname{arsh}s, \quad s \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{arch}t = \pm i \operatorname{arccos} t, \quad t \in]-1, 1[,$$

$$\operatorname{arch}(-t) = \pm i\pi + \operatorname{arch}t, \quad t \in [1, \infty[,$$

gdzie $+$ lub $-$ zależy od tego, czy przedłużamy górą czy dołem.

Zauważmy też, że okrążenie punktu ± 1 prowadzi do pomnożenia archt przez -1 , zaś okrążenie $[-1, 1]$ prowadzi do dodania $2\pi i$ do $\operatorname{arch}t$.

Przykład.

$$\operatorname{arctgt} = \frac{1}{2i} (\log(1 + it) - \log(1 - it)).$$

Przykład. Rozważmy funkcję

$$f(z) = z^\alpha (z - 1)^\beta.$$

Możemy ją rozumieć jako iloczyn gałęzi głównych z^α i $(z - 1)^\beta$, który jest dobrze określony na $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 1]$.

Załóżmy, że krzywa γ zaczyna się w dowolnym punkcie $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 1]$, obiega odcinek $[0, 1]$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek i wraca do punktu wyjścia, np. $\partial K(0, R)$, gdzie $R > 1$. Wtedy wartość funkcji $f(z)$ po przedłużeniu analitycznym wzdłuż γ wartość funkcji $f(z)$ mnoży się przez czynnik $e^{i2\pi(\alpha+\beta)}$. W szczególności, jeśli

$$\alpha + \beta \in \mathbb{Z}, \quad (1.22)$$

to wracamy do tej samej wartości funkcji f . Wtedy możemy naszą funkcję zdefiniować na $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ jako jednoznaczłą funkcję analityczną.

Przykład. Policzmy całkę

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}(1+x)} dx$$

Rozważmy

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z(z-1)}(1+z)}$$

rozumianą jako funkcję analityczną na $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ w sposób opisany powyżej. W ∞ residuum jest równe 0. Zatem

$$\int_{[1, 0^-, 1^-]} f(z) dz = -e^{-i\frac{1}{2}\pi} I + e^{-i\frac{3}{2}\pi} I = -2\pi i \operatorname{Res} f(-1),$$

$$\operatorname{Res} f(-1) = \lim_{z \rightarrow -1} f(z)(z+1) = \frac{1}{\sqrt{z(z-1)}} \Big|_{z=-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Zatem

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

1.14 * Powierzchnie Riemanna i funkcje analityczne wieloznaczne

Niech Ξ będzie przestrzenią topologiczną Hausdorffa i ϕ odwzorowaniem $z \in \Xi$ w \mathbb{C} . Mówimy, że (Ξ, ϕ) jest powierzchnią Riemanna nad \mathbb{C} , gdy dla każdego $v \in \Xi$ istnieje $r > 0$ oraz ciągle odwzorowanie $\psi_{v,r} : K(\phi(v), r) \rightarrow \Xi$ takie, że

$$\phi \circ \psi_{v,r}(z) = z, \quad z \in K(\phi(v), r)$$

i $\psi_{v,r}(K(\phi(v), r))$ jest otwarty w Ξ .

Niech (Ξ, ϕ) będzie powierzchnią Riemanna nad \mathbb{C} .

Ma miejsce następujący fakt: Dla każdego $v \in \Xi$, istnieje $r_v \in]0, \infty]$ takie, że odwzorowanie ψ_{v,r_v} o własnościach opisanych powyżej istnieje, zaś dla $r > r_v$ takie $\psi_{r,v}$ nie istnieje. Dostajemy w ten sposób funkcję $\Xi \ni v \mapsto r_v \in]0, \infty]$. Będziemy pisać $\psi_v := \psi_{v,r_v}$.

Niech $f : \Xi \rightarrow \mathbb{C}$. Mówimy, że (Ξ, ϕ, f) jest funkcją analityczną na Ξ , gdy dla każdego v to $f \circ \psi_v : K(\phi(v), r_v) \rightarrow \mathbb{C}$ jest funkcją analityczną w zwykłym sensie.

Niech (Ξ, ϕ, f) będzie funkcją analityczną na Ξ . Dla każdego $v \in \Xi$, niech $r_{v,f}$ oznacza promień zbieżności funkcji $f \circ \psi_{v,r}$ dla pewnego $r > 0$. Oczywiście, $0 < r_v < r_{v,f}$.

Mówimy, że (Ξ, ϕ, f) jest maksymalną funkcją analityczną, gdy dla każdego $v \in \Xi$, $r_v = r_{v,f}$.

Mówimy, że (Ξ, ϕ, f) jest zredukowana, gdy z tego, że $v_1, v_2 \in \Xi$, $\phi(v_1) = \phi(v_2) = z_0$ i $0 < r < \min(r_{v_1}, r_{v_2})$ wynika, że funkcje

$$\begin{aligned} K(z_0, r) \ni z &\mapsto f(\psi_{v_1, r}(z)), \\ K(z_0, r) \ni z &\mapsto f(\psi_{v_2, r}(z)), \end{aligned}$$

są różnymi funkcjami. Jeśli (Ξ, ϕ, f) nie jest funkcją zredukowaną, zawsze można ją w jednoznaczny sposób zredukować. Wprowadzamy w Ξ relację: $v_1 \sim v_2$ gdy $\phi(v_1) = \phi(v_2)$ i dla $r := \min(r_{v_1}, r_{v_2})$

$$f \circ \psi_{v_1, r} = f \circ \psi_{v_2, r}.$$

Wtedy \sim jest relacją równoważności. Definiujemy

$$\Xi_{\text{red}} := \Xi / \sim,$$

Niech $\phi^{\text{red}} : \Xi \rightarrow \Xi_{\text{red}}$ będzie kanoniczną surjekcją. Definiujemy również

$$\phi_{\text{red}}([v]) := \phi(v), \quad f_{\text{red}}([v]) := f(v).$$

Wtedy $(\Xi_{\text{red}}, \phi_{\text{red}})$ jest powierzchnią Riemanna nad \mathbb{C} , $(\Xi_{\text{red}}, \phi_{\text{red}}, f_{\text{red}})$ jest zredukowaną funkcją analityczną i spełnione są warunki

$$\phi = \phi_{\text{red}} \circ \phi^{\text{red}}, \quad f = f_{\text{red}} \circ \phi^{\text{red}}.$$

Niech (Ξ_1, ϕ_1, f_1) i (Ξ, ϕ, f) będą funkcjami analitycznymi. Mówimy, że (Ξ_1, ϕ_1, f_1) jest przedłużeniem (Ξ, ϕ, f) , gdy $\Xi_0 \subset \Xi_1$ i ϕ_1, f_1 obcięte do Ξ_0 pokrywają się z ϕ, f .

Każdą zredukowaną funkcję analityczną można w sposób jednoznaczny przedłużyć do maksymalnej zredukowanej funkcji analitycznej.

1.15 * Homotopia krzywych

Niech Ω będzie otwartym podzbiorem \mathbb{C} i $z_1, z_2 \in \Omega$. Oznaczmy przez $K(z_0, z_1, \Omega)$ zbiór krzywych zaczynających się w z_0 i kończących się w z_1 , tzn $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z_1$.

Niech $\gamma_0, \gamma_1 \in K(z_0, z_1, \Omega)$. Mówimy, że γ_0 jest homotopijnie równoważna γ_1 i piszemy $\gamma_0 \sim \gamma_1$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje funkcja ciągła $[0, 1] \times [0, 1] \ni (t, s) \mapsto H(t, s)$ taka, że $H(t, 0) = \gamma_0(t)$ i $H(t, 1) = \gamma_1(t)$.

Twierdzenie 1.30 *Niech $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ będzie analityczna, $\gamma_0, \gamma_1 \in K(z_0, z_1, \Omega)$ będą kawałkami gładkie i homotopijnie równoważne. Wtedy*

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Twierdzenie 1.31 *Homotopijna równoważność jest relacją równoważności.*

Dowód. Kładąc $H(t, s) = \gamma_0(t)$ dostajemy $\gamma_0 \sim \gamma_0$.

Kładąc $H_{10}(t, s) := H_{01}(t, 1 - s)$ dostajemy $\gamma_0 \sim \gamma_1 \Rightarrow \gamma_1 \sim \gamma_0$.

Kładąc

$$H_{2(t,s)} := \begin{cases} H_{01}(t, 2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}; \\ H_{12}(t, 2s - 1), & 0 \leq \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

dostajemy $\gamma_0 \sim \gamma_1, \gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \gamma_0 \sim \gamma_2$.

Zbiór klas homotopii krzywych zaczynających się w z_0 i kończących w z_1 oznaczany jest przez

$$\Pi(z_0, z_1, \Omega) := K(z_0, z_1, \Omega) / \sim.$$

Twierdzenie 1.32 *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie otwarty i spójny. Następujące warunki są równoważne:*

- (1) $\Pi(z_0, z_0, \Omega)$ jest jednoelementowy dla każdego $z_0 \in \Omega$.
- (2) Istnieje $z_0 \in \Omega$ taki, że $\Pi(z_0, z_0, \Omega)$ jest jednoelementowy.

Jeśli spełnione są warunki powyższego twierdzenia, mówimy, że zbiór Ω jest jednospójny.

1.16 * Składanie krzywych i grupa homotopii

Niech $z_0, z_1 \in \Omega, \gamma \in K(z_0, z_1, \Omega)$. Definiujemy $\gamma^{-1} \in K(z_1, z_0, \Omega)$.

$$\gamma^{-1}(t) := \gamma(1 - t).$$

Oczywiście, jeśli $\gamma' \sim \gamma$, to $(\gamma')^{-1} \sim \gamma^{-1}$.

Niech $z_0, z_1, z_2 \in \Omega, \gamma_0 \in K(z_0, z_1, \Omega), \gamma_1 \in K(z_1, z_2, \Omega)$. Definiujemy $\gamma_0 \circ \gamma_1 \in K(z_0, z_2, \Omega)$:

$$\gamma_0 \circ \gamma_1(t) := \begin{cases} \gamma_0(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ \gamma_1(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Oczywiście, jeśli $\gamma_0 \sim \gamma'_0, \gamma_1 \sim \gamma'_1$, to

$$\gamma_0 \circ \gamma_1 \sim \gamma'_0 \circ \gamma'_1.$$

Jeśli $\gamma_2 \in K(z_2, z_3, \Omega)$

$$(\gamma_0 \circ \gamma_1) \circ \gamma_2 \sim \gamma_0 \circ (\gamma_1 \circ \gamma_2).$$

Jeśli przez z oznaczamy krzywą stałą równą $z \in \Omega$, to dla $z_0, z_1 \in \Omega, \gamma \in K(z_0, z_1, \Omega)$,

$$z_0 \circ \gamma \sim \gamma \circ z_1 \sim \gamma.$$

W szczególności, dla każdego $z_0 \in \Omega, \Pi(z_0, z_0, \Omega)$ jest grupą. Jeśli zbiór Ω jest spójny, to grupa $\Pi(z_0, z_0, \Omega)$ jest izomorficzna dla różnych $z_0 \in \Omega$. Nazywamy ją grupą homotopii zbioru Ω . Oznaczamy ją przez $\Pi(\Omega)$.

Przykłady

- (1) $\Pi(\mathbb{C})$ jest grupą jednoelementową.
- (2) $\Pi(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$ (liczba okrążeń wokół zera).

- (3) $\Pi(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}) = \mathbb{F}_2$ – grupa wolna o dwóch generatorach. Jako generatory można wybrać τ_0 – okrążenie 0, τ_1 – okrążenie 1. Grupa \mathbb{F}_2 składa się z elementów następujących typów:

$$\begin{aligned} \tau_1^{n_p} \tau_0^{m_p} \cdots \tau_1^{n_0} \tau_0^{m_0}, & \quad \tau_0^{m_{p+1}} \tau_1^{n_p} \cdots \tau_1^{n_0} \tau_0^{m_0}, \\ \tau_1^{n_p} \tau_0^{m_p} \cdots \tau_0^{m_1} \tau_1^{n_0}, & \quad \tau_0^{m_{p+1}} \tau_1^{n_p} \cdots \tau_0^{m_1} \tau_1^{n_0}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

gdzie $n_i, m_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

1.17 * Nakrycie uniwersalne

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie otwarte i spójne. Ustalmy $z_0 \in \Omega$. Nakryciem uniwersalnym Ω z punktem bazowym $[z_0]$ nazywamy $(\text{Cov}(\Omega), \phi, [z_0])$, gdzie

$$\text{Cov}(\Omega) := \bigcup_{z \in \Omega} \Pi(z_0, z, \Omega),$$

$\gamma : \text{Cov}(\Omega) \rightarrow \Omega$ jest zadane przez $\phi([\gamma]) := \gamma(1)$. $\text{Cov}(\Omega)$ jest wyposażone w naturalną topologię. Oczywiście, $(\text{Cov}(\Omega), \phi)$ jest spójną i jednospójną powierzchnią Riemanna nad \mathbb{C} .

1.18 * Nakrycie wyznaczone przez podgrupę grupy homotopii

Niech G będzie podgrupą $\Pi(z_0, z_0, \Omega)$. W $\Pi(z_0, z, \Omega)$ wprowadzamy relację: Dla $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \Pi(z_0, z, \Omega)$ piszemy $[\gamma_1] \sim_G [\gamma_2]$, gdy $[\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}] \in G$. Jest to relacja równoważności. Będziemy oznaczali przez $[\gamma]_G$ klasę abstrakcji γ względem tej relacji. Definiujemy

$$\Pi_G(z_0, z, \Omega) := \Pi(z_0, z, \Omega) / \sim_G.$$

Nakryciem Ω związanym z grupą G nazywamy $(\text{Cov}_G(\Omega), \phi_G, [z_0]_G)$, gdzie

$$\text{Cov}_G(\Omega) := \bigcup_{z \in \Omega} \Pi_G(z_0, z, \Omega),$$

$$\phi_G([\gamma]_G) = \gamma(1).$$

Mamy oczywiście naturalne odwzorowanie

$$\phi^G : \text{Cov}(\Omega) \rightarrow \text{Cov}_G(\Omega), \quad \phi^G([\gamma]) = [\gamma]_G,$$

spełniające związek $\phi_G \circ \phi^G = \phi$. Oczywiście, $(\text{Cov}_G(\Omega), \phi)$ jest spójną (leż niekoniecznie jednospójną) powierzchnią Riemanna nad \mathbb{C} .

1.19 * Funkcja pierwotna

Twierdzenie 1.33 Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie jednospójnym obszarem a $\Omega \ni z \mapsto f(z)$ funkcją holomorficzną. Ustalmy $z_0 \in \Omega$. Zdefiniujemy

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(w) dw,$$

gdzie γ_z jest dowolną krzywą leżącą w Ω łączącą z_0 i z . Wtedy $F(z)$ nie zależy od wyboru krzywej i

$$F'(z) = f(z).$$

Jeśli Ω jest spójny i otwarty, ale niekoniecznie jednopójny, to powyższą konstrukcję należy zmodyfikować. Jeśli $[\gamma] \in \Pi(z_0, z, \Omega) \subset \text{Cov}(\Omega)$, to kładziemy

$$F([\gamma]) := \int_{\gamma} f(w)dw.$$

Dostajemy funkcję analityczną $F : \text{Cov}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$, która spełnia

$$F'([\gamma]) = f(\phi([\gamma])), \quad F([z_0]) = 0.$$

1.20 * Funkcja logarytm i potęgowa

Funkcję logarytm można zdefiniować jako funkcję pierwotną do funkcji $\frac{1}{z}$ z punktem bazowym $z_0 = 1$. Dostajemy wtedy funkcję na nakryciu uniwersalnym

$$\text{Cov}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \ni v \mapsto \log v := \int_{\gamma} \frac{dw}{w}, \quad v = [\gamma].$$

Jest ona zredukowana i maksymalna.

Niech $\mu \in \mathbb{C}$. Funkcję z^μ definiujemy najpierw na nakryciu uniwersalnym $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ jako

$$\text{Cov}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \ni v \mapsto e^{\mu \log v}. \quad (1.24)$$

Jeśli $\mu \neq 0, 1, 2, \dots$, jest to maksymalna funkcja analityczna. Jeśli $\mu \notin \mathbb{Q}$, to jest ona również zredukowana.

Jeśli $\mu \in \mathbb{Q}$, to (1.24) jest niezredukowana. Niech $\mu = \frac{p}{q}$ dla nieskracalnego ułamka, gdzie $q \in \{1, 2, \dots\}$. Wtedy $v^\mu = 1$, jeśli $v \in \mathbb{Z}_q \subset \Pi(1, 1, \mathbb{C} \setminus \{0\}) \subset \text{Cov}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Po zredukowaniu dostajemy funkcję

$$\text{Cov}_{\mathbb{Z}_q}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \ni v \mapsto e^{\mu \log v}. \quad (1.25)$$

1.21 * Funkcja $z^\alpha(z-1)^\beta$.

Funkcję $z^\alpha(z-1)^\beta$ można najpierw zdefiniować na nakryciu uniwersalnym $\text{Cov}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$. Jest ona wtedy niezredukowana.

Opiszmy teraz jej zredukowane wersje w niektórych sytuacjach. Załóżmy najpierw, że mamy do czynienia z generyczną sytuacją, kiedy α i β są niewymierne i niewspółmierne, tzn. $\alpha n + \beta m \in \mathbb{Q}$ implikuje $n = m = 0$. Wtedy w grupie \mathbb{F}_2 wprowadzamy podgrupę G zadaną przez

$$\sum_j n_j = \sum_j m_j = 0,$$

gdzie n_j, m_i są liczbami występującymi w (1.23). Wtedy $z^\alpha(z-1)^\beta$ można przenieść na nakrycie $\text{Cov}_G(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$, i dostajemy wtedy zredukowaną maksymalną funkcję analityczną.

Inną sytuację mamy, gdy $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Wprowadzamy wtedy podgrupę H zadaną przez

$$\sum_{j=0}^{\infty} n_j = \sum_{j=0}^{\infty} m_j$$

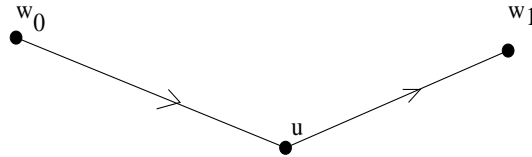
i funkcję $z^\alpha(z-1)^\beta$ przenosimy na nakrycie $\text{Cov}_H(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$. Dostajemy wtedy zredukowaną maksymalną funkcję analityczną.

1.22 Notacja do oznaczania krzywych

Teraz opiszemy notację, którą będziemy stosować do oznaczania krzywych.

Czasami można stosować łamane postaci

$$[w_0, u, w_1] := [w_0, u] \cup [u, w_1].$$

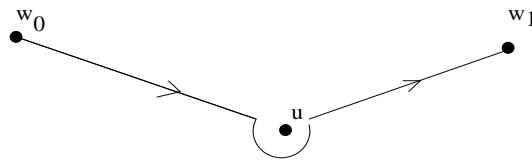


Osobliwość funkcji w u może prowadzić do kłopotów w postaci rozbieżności całki. Można również omijać punkt u małym łukiem o promieniu r i rozważać łamaną postaci:

$$[w_0, u + re^{i\phi_0}] \cup \{u + re^{i\phi} : \phi \in [\phi_0, \phi_1]\} \cup [u + re^{i\phi_1}, w_1]. \quad (1.26)$$

gdzie $w_0 := u + Re^{i\phi_0}$, $w_1 := u + R_1e^{i\phi_1}$, $R_0 > r$, $R_1 > r$, $\phi_0 < \phi_1$ i $|\phi_0 - \phi_1| < 2\pi$. Oczywiście, całka po takim konturze nie zależy od r , dla dostatecznie małego r . Zauważmy, że punkt rozgałęzienia u jest omijany łukiem w kierunku przeciwnym do ruch wskazówek. Krzywą powyższą będziemy oznaczali

$$[w_0, u^+, w_1].$$

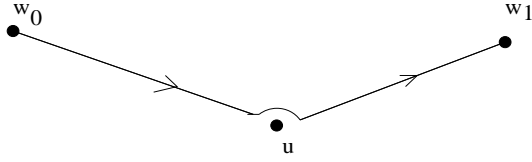


Podobnie, warto mieć oznaczenie na łamanej

$$[w_0, u + re^{i\phi_0}] \cup \{u + re^{i\phi} : \phi \in [\phi_1, \phi_0]\} \cup [u + re^{i\phi_1}, w_1]. \quad (1.27)$$

gdzie $R_0 > r$, $R_1 > r$, $\phi_1 < \phi_0$, $|\phi_0 - \phi_1| < 2\pi$. Różni się ona od (1.26) tym, że punkt rozgałęzienia u obiegamy zgodnie z ruchem wskazówek. Krzywą (1.27) będziemy oznaczać przez

$$[w_0, u^-, w_1].$$



$[u^+]$ będzie oznaczało kontur obiegający punkt u po małym okręgu w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek. $[u^-]$ będzie oznaczało kontur obiegający punkt u po małym okręgu w kierunku zgodnym do ruchu wskazówek.

$[u^+]$,

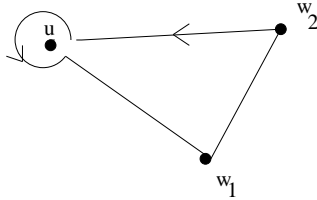


$[u^-]$.

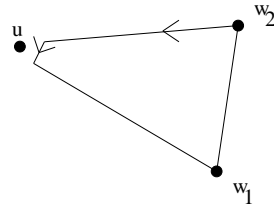


Pisząc $\gamma = [u, w_1, \dots, w_n, u^+]$ będziemy mieli na myśli, że γ jest konturem zamkniętym i połączonym małym łukiem obiegającym u w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek. Podobnie, jeśli $\gamma = [u, w_1, \dots, w_n, u^-]$, to γ jest konturem zamkniętym połączonym małym łukiem obiegającym z w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek.

$[u, w_1, w_2, u^+]$,

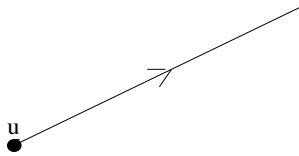


$[u, w_1, w_2, u^-]$.



$[u, e^{i\alpha} \infty[$ będzie oznaczać półprostą $\{u + e^{i\alpha}t : t > 0\}$ zaczynającą się w u i biegnącą do nieskończoności pod kątem α .

$[u, e^{i\alpha} \infty[$.

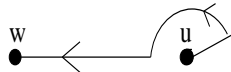


$[(u + e^{i\phi_0} \cdot 0)^+, w]$ oznaczać będzie łamaną

$$[u, u + re^{i\phi_0}] \cup \{u + re^{i\phi} : \phi \in [\phi_0, \phi_1]\} \cup [u + re^{i\phi_1}, w],$$

gdzie $w = u + Re^{i\phi_1}$, $r < R$, $\phi_1 < \phi_0$, $|\phi_1 - \phi_0| < 2\pi$ (łamana wychodzi z punktu u pod kątem ϕ_0 , obiega punkt u małym łukiem przeciwnie do ruchu wskazówek i biegnie do w).

$[(u + e^{i\alpha}0)^+, w]$.



2 Funkcja Gamma Eulera

2.1 Funkcja Gamma jako uogólnienie silni i II całka Eulera

Przy pomocy tzw. **II całki Eulera** definiujemy funkcję Gamma:

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &:= \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-\xi^2} \xi^{2z-1} d\xi, \quad \operatorname{Re} z > 0,\end{aligned}\tag{2.28}$$

Zakładamy, że w powyższym wzorze bierzemy gałąź główną funkcji t^{z-1} . Zdefiniujmy też tzw symbol Pochhammera

$$\begin{aligned}(a)_n &:= a(a+1)\dots(a+n-1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ (a)_n &:= \frac{1}{(a-n)\dots(a-1)}, \quad n = \dots, -2, -1.\end{aligned}$$

Oczywiście, $(1)_n = n!$.

Twierdzenie 2.1 *Zachodzą następujące tożsamości:*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),\tag{2.29}$$

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots,\tag{2.30}$$

$$\Gamma(z+n) = (z)_n \Gamma(z), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dowód. (2.29) wynika z całkowania przez części. (2.30) wynika z (2.29) i $\Gamma(1) = 1$. \square

Zdefiniujmy zbiór

$$\Omega_n := \{z : \operatorname{Re} z > -n\} \setminus \{0, -1, \dots, -n+1\}$$

i funkcję

$$\Omega_n \ni z \mapsto \Gamma_n(z) := \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\dots(z+n-1)}.$$

Wtedy jeśli $n > m$, to

$$\Gamma_n(z) = \Gamma_m(z), \quad z \in \Omega_m.$$

Wynika to z tożsamości

$$\Gamma(z+n) = \Gamma(z+m)(z+m)\dots(z+n-1),$$

będącej konsekwencją wzoru (2.29). Ostatecznie, na

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$$

definiujemy

$$\Gamma(z) := \Gamma_n(z), \quad z \in \Omega_n.$$

Tak zdefiniowana funkcja Γ jest to maksymalnym przedłużeniem analitycznym funkcji $\Gamma(z)$ zdefiniowanej przy pomocy całki (2.28).

Oto inne wzory, które pozwalają maksymalnie przedłużyć funkcję Gamma:

Twierdzenie 2.2 (Rozkład Pryma)

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

Twierdzenie 2.3 (Wzór Cauchy-Saalschütza)

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \left(e^{-t} - \sum_{k=0}^n \frac{(-t)^k}{k!} \right) dt, \quad -1 - n < \operatorname{Re} z < -n. \quad (2.31)$$

Dowód. Niech $\Gamma_n(z)$ będzie prawą stroną (2.31). Oczywiście

$$\Gamma_{-1}(z) = \Gamma(z), \quad 0 < \operatorname{Re} z.$$

Całkując przez części dostajemy

$$\begin{aligned} \Gamma_n(z) &= \frac{t^z}{z} \left(e^{-t} - \sum_{k=0}^n \frac{(-t)^k}{k!} \right) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{z} \int_0^{\infty} t^z \left(e^{-t} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-t)^k}{k!} \right) dt \\ &= \frac{1}{z} \Gamma_{n-1}(z+1). \end{aligned}$$

□

2.2 I całka Eulera i dalsze tożsamości

Twierdzenie 2.4 (I całka Eulera)

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} &= \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v-1} dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2u-1} \phi \sin^{2v-1} \phi d\phi, \quad \operatorname{Re} u > 0, \operatorname{Re} v > 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} \frac{\sin \pi u}{\sin \pi(u+v)} &= \frac{\Gamma(1-u-v)\Gamma(v)}{\Gamma(1-u)} = \int_0^{\infty} (t+1)^{u-1} t^{v-1} dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} \operatorname{ch}^{2u-1} \theta \operatorname{sh}^{2v-1} \theta, \quad \operatorname{Re} v > 0, \operatorname{Re}(1-u-v) > 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Dowód. Stosując podstawienie $t = \frac{1}{s} + 1$ z (2.32) dostajemy (2.33), z wyjątkiem pierwszej równości, wynikającej z tożsamości (2.36), którą dowiedzimy później. Udowodnijmy więc (2.32)

Mamy

$$\Gamma(u)\Gamma(v) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2 - \eta^2} \xi^{2u-1} \eta^{2v-1} d\xi d\eta. \quad (2.34)$$

Przechodzimy do współrzędnych biegunowych podstawiając

$$\xi = r \cos \phi, \quad \eta = r \sin \phi$$

i otrzymujemy, że (2.34) równa się

$$\begin{aligned} & 4 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2u+2v-1} dr \int_0^{\pi/2} \cos^{2u-1} \phi \sin^{2v-1} \phi d\phi. \\ & = \Gamma(u+v) \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v-1} dt, \end{aligned} \quad (2.35)$$

(W ostatnim kroku podstawiliśmy $t = \cos^2 \phi$). \square

Wzór (2.32) jest uzasadnieniem tego, że często wprowadza się tak zwaną funkcję Beta:

$$B(u, v) := \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}.$$

Twierdzenie 2.5 *Zachodzą następujące tożsamości:*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad (2.36)$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad (2.37)$$

Dowód. Rozważmy funkcję holomorficzną $\mathbb{C} \setminus [0, 1] \ni t \mapsto f(t) = t^{z-1}(t-1)^{-z}$ (Funkcje t^{z-1} i $(t-1)^{-z}$ rozumiemy w sensie ich gałęzi głównych zdefiniowanych odpowiednio na $\mathbb{C} \setminus [-\infty, 0[$ i $\mathbb{C} \setminus [-\infty, 1[$. Zatem funkcja $f(t)$ zdefiniowana jest a priori na $\mathbb{C} \setminus [-\infty, 1[$, ale przedłuża się analitycznie do funkcji na $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$.

Niech $\gamma = [0, 1^+, 0^+]$ będzie konturem zwanym kością. Wtedy biorąc pod uwagę, że w nieskończoności residuum funkcji f jest równe -1 , dostajemy

$$\begin{aligned} 2i\pi & = -2\pi i \operatorname{Res} f(\infty) = \int_\gamma f(t) dt \\ & = (e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}) \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{-z} dt = (2i \sin \pi z) B(z, 1-z) = (2i \sin \pi z) \Gamma(z) \Gamma(1-z). \end{aligned}$$

Stąd wynika (2.36).

Podstawiając w (2.36) $z = 1/2$ dostajemy

$$\Gamma^2(1/2) = \pi.$$

Wiemy, że

$$\Gamma(z) > 0, \quad z > 0.$$

Stąd wynika (2.37). \square

Wniosek 2.6 (Całka Gaussa) *Jeśli $\operatorname{Re} a > 0$, to*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (2.38)$$

Dowód. Wychodząc z (2.37) przez zamianę zmiennych dostajemy

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi} = \Gamma(1/2) &= \int_{]-\infty, \infty[} e^{-t^2} dt \\ &= \int_{]-\sqrt{a}\infty, \sqrt{a}\infty[} e^{-t^2} dt \\ &= \sqrt{a} \int_{]-\infty, \infty[} e^{-as^2} ds.\end{aligned}$$

□

Wniosek 2.7 (Caka Fresnela) *Mamy*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{\pm ix^2} dx = e^{\pm i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\pi}.$$

Dowód. Całkujemy po bokach trójkąta $0, R, R + iR$. Po pionowym boku mamy

$$\int_0^R e^{-R^2+y^2} dy = \int_0^1 e^{-R^2(1-t^2)} R dt \rightarrow 0,$$

po zastosowaniu Tw. Lebesgue'a. □

Zauważmy, że funkcja $\Gamma(z)$ ma w $z = 0, -1, \dots$ bieguny 1-go rzędu z residuami

$$\begin{aligned}\text{Res}\Gamma(-n) &= \lim_{z \rightarrow -n} \Gamma(z)(z+n) \\ &= \frac{(z+n)\pi}{\Gamma(1-z)\sin\pi z} = \frac{(-1)^n}{n!}.\end{aligned}$$

Twierdzenie 2.8 *Wzór Legendre'a o podwajaniu:*

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z),$$

Dowód.

$$\frac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(2z)} = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1} dt = 2 \int_0^{1/2} t^{z-1}(1-t)^{z-1} dt.$$

Podstawiamy $s = 4t(1-t)$ i otrzymujemy

$$2^{1-2z} \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{-1/2} ds = 2^{1-2z} \frac{\Gamma(z)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})}.$$

□

Prawdziwe jest też następujące uogólnienie powyższego wzoru, zwane wzorem Gaussa o mnożeniu, które udowodnimy później:

$$\Gamma(nz) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} n^{nz-\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma(z + \frac{k}{n}) \quad (2.39)$$

2.3 Funkcja Gamma i całki w dziedzinie zespolonej

Twierdzenie 2.9 (Wzór Hankela)

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{[-\infty, 0^+, -\infty[} e^s s^{-z-1} ds. \quad (2.40)$$

Dowód. Załóżmy tymczasowo, że $\operatorname{Re} z < 0$.

$$\begin{aligned} \int_{[-\infty, 0^+, -\infty[} e^s s^{-z-1} ds &= e^{-i\pi(-z-1)} \int_{]-\infty, 0]} e^s (-s)^{-z-1} ds + e^{i\pi(-z-1)} \int_{]0, -\infty[} e^s (-s)^{-z-1} ds \\ &= (e^{-i\pi(-z-1)} - e^{i\pi(-z-1)}) \int_0^\infty e^{-t} t^{-z-1} dt \\ &= i2 \sin(-\pi z) \Gamma(-z) = \frac{2\pi i}{\Gamma(z+1)} \end{aligned}$$

Następnie rozszerzamy tożsamość na wszystkie z przez przedłużenie analityczne. \square

Twierdzenie 2.10

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(u+v+1)}{\Gamma(u+1)\Gamma(v+1)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{]-\infty, 0^+, -\infty[} t^{-u-1} (1-t)^{-v-1} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{]0, 1^-, \infty[} t^{-u-1} (1-t)^{-v-1} dt, \quad u+v+1 > 0. \end{aligned}$$

Dowód. Zauważmy, że $] -\infty, 0^+, -\infty[$ i $]0, 1^-, \infty[$ dają tę samą całkę.

$$\begin{aligned} \int_{]0, 1^-, \infty[} t^{-u-1} (1-t)^{-v-1} dt &= (-e^{-i\pi(v+1)} + e^{i\pi(v+1)}) \int_1^\infty t^{-u-1} (t-1)^{-v-1} dt \\ &= -2i \sin \pi v \frac{\Gamma(-v)\Gamma(1+u+v)}{\Gamma(1+u)} = 2i\pi \frac{\Gamma(1+u+v)}{\Gamma(1+u)\Gamma(1+v)}. \end{aligned}$$

\square

Jeśli $u+v \in \mathbb{Z}$, to pętla okrążająca 1 i 0 przeciwnie do ruchu wskazówek leży na powierzchni Riemanna funkcji $t^{u-1}(t-1)^{v-1}$ i dostajemy wzór:

Twierdzenie 2.11 *Niech $n \in \mathbb{Z}$. Wtedy*

$$\frac{\Gamma(u)}{\Gamma(n+1)\Gamma(u-n)} = \frac{(u-1)\dots(u-n)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{]0, 1^+, 0^+]} t^{u-1} (t-1)^{n-u} dt, \quad (2.41)$$

Dowód. Gdy zastosujemy homografię $t = -s^{-1}$ to dostaniemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{]0, 1^+, 0^+]} t^{u-1} (t-1)^{n-u} dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_{]0^+, 1]} s^{n+1} (1-s)^{n-u} ds \\ &= \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{ds} \right)^n (1-s)^{n-u} \Big|_{s=0} = \frac{(u-1)\dots(u-n)}{n!}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

\square

Rozważmy teraz funkcję $(-t)^{u-1}(t-1)^{v-1}$. Jeśli obie potęgi rozumiemy w sensie ich gałęzi głównych, to dziedziną tej funkcji jest $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Jest to dziedzina składająca się z dwóch spójnych części na których mamy

$$(-t)^{u-1}(t-1)^{v-1} = \begin{cases} t^{u-1}(1-t)^{v-1} e^{-i\pi(u-1)} e^{i\pi(v-1)}, & \operatorname{Im} z > 0; \\ t^{u-1}(1-t)^{v-1} e^{i\pi(u-1)} e^{-i\pi(v-1)}, & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases} \quad (2.43)$$

Rozważmy teraz kontur "podwójna ósemka" $[0, 1^+, 0^-, 1^-, 0^+]$. Kontur ten rozpoczynamy na dolnym płacie powierzchni Riemanna funkcji $(-t)^{u-1}(t-1)^{v-1}$, na którym leży pierwszy odcinek $[0, 1]$ z tego konturu. Łatwo się przekonać, że $[0, 1^+, 0^-, 1^-, 0^+]$ jest krzywą zamkniętą na tej powierzchni Riemanna. Nawiasem mówiąc, trzeci odcinek w tym konturze znajduje się na górnym płacie opisanym w (2.43). Całkę z funkcji $(-t)^{u-1}(t-1)^{v-1}$ po podwójnej ósemce można wyrazić poprzez funkcję Gamma:

Twierdzenie 2.12

$$\frac{1}{\Gamma(u+v)\Gamma(1-u)\Gamma(1-v)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0,1^+,0^-,1^-,0^+]} (-t)^{u-1}(t-1)^{v-1} dt, \quad (2.44)$$

Dowód. Załóżmy, że $\operatorname{Re} u, \operatorname{Re} v > 0$.

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1^+,0^-,1^-,0^+]} (-t)^{u-1}(t-1)^{v-1} dt \\ &= (e^{i\pi(u-1)}e^{-i\pi(v-1)} - e^{i\pi(u-1)}e^{i\pi(v-1)} + e^{-i\pi(u-1)}e^{i\pi(v-1)} - e^{-i\pi(u-1)}e^{-i\pi(v-1)}) \\ & \quad \times \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt \\ &= -(e^{i\pi u} - e^{-i\pi u})(e^{i\pi v} - e^{-i\pi v})B(u, v) \\ &= -(2i \sin \pi v)(2i \sin \pi u) \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} \\ &= (2\pi)^2 \frac{1}{\Gamma(u+v)\Gamma(1-u)\Gamma(1-v)} \end{aligned}$$

Przez przedłużenie analityczne rozszerzamy tożsamość na wszystkie u, v . \square

2.4 Iloczyny nieskończone

Przypomnijmy najpierw podstawowe fakty dotyczące szeregów.

Jeśli istnieje skończona granica $I := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n b_j$, to mówimy, że szereg $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ jest zbieżny warunkowo i piszemy $I = \sum_{j=1}^{\infty} b_j$.

Jeśli $\sum_{j=1}^{\infty} |b_j| < \infty$, to mówimy, że szereg $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ jest zbieżny bezwzględnie. Można pokazać, że zbieżność bezwzględna szeregu pociąga za sobą zbieżność warunkową, również po zmianie kolejności wyrazów w szeregu i jego wartość nie zależy od tej kolejności.

Jeśli istnieje skończona granica $I := \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n (1 + a_j)$, to mówimy, że iloczyn nieskończony $\prod_{j=1}^{\infty} (1 + a_j)$ jest zbieżny warunkowo i piszemy $I = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + a_j)$.

Mówimy, że iloczyn nieskończony $\prod_{j=1}^{\infty} (1 + a_j)$ jest zbieżny bezwzględnie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty. \quad (2.45)$$

Lemat 2.13 *Iloczyn nieskończony $\prod_{j=1}^{\infty} (1 + a_j)$ jest zbieżny bezwzględnie wtedy i tylko wtedy gdy jedynie skończona liczba wyrazów a_j jest równa -1 i*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\log(1 + a_n)| < \infty, \quad (2.46)$$

przy czym w szeregu (2.46) usunęliśmy wyrazy $a_j = -1$. (W powyższym wzorze przez $|\log(1+a)|$ rozumiemy wartość bezwzględną gałęzi głównej logarytmu rozszerzoną przez ciągłość do funkcji na $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$, która jest jednoznaczna, mimo że sam $\log(1+a)$ jednoznaczny nie jest).

Dowód. Niech spełnione będzie (2.45). Wtedy $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$ i dlatego skończona liczba wyrazów a_j jest równa -1 . Poza tym poza skończoną liczbą indeksów

$$|a_j| \leq \frac{1}{2}. \quad (2.47)$$

$\mathbb{C} \setminus \{-1\} \ni t \mapsto \left| \frac{\log(1+t)}{t} \right|$ jest funkcją ciągłą i dodatnią. Zatem dla $|t| \leq \frac{1}{2}$ istnieją $0 < C_1 \leq C_2$, takie, że

$$C_1 \leq \left| \frac{\log(1+t)}{t} \right| \leq C_2.$$

Zatem

$$|\log(1+a_n)| \leq C_2 |a_n|.$$

Aby dowieść implikację przeciwną, wystarczy założyć, że wszystkie a_j są różne od 1 . (2.46) pociąga za sobą $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(a_n + 1) = 0$, a więc (2.47) jest spełnione poza skończoną liczbą indeksów i wtedy

$$|a_n| \leq C_1^{-1} |\log(1+a_n)|.$$

□

Oczywiście, logarytmując wyraz po wyrazie iloczyn bezwzględnie zbieżny dostajemy szereg bezwzględnie zbieżny. Dlatego zbieżność bezwzględna iloczynu nieskończonego pociąga za sobą zbieżność warunkową, również po zmianie kolejności wyrazów w iloczynie i jego wartość nie zależy od tej kolejności.

2.5 Funkcje trygonometryczne jako iloczyny nieskończone

Twierdzenie 2.14 *Mamy następujące wzory:*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}, \quad (2.48)$$

$$\frac{1}{z} + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 - j^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n \frac{1}{z+j} = \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z}, \quad (2.49)$$

$$z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2}\right) = \frac{\sin \pi z}{\pi}. \quad (2.50)$$

Uwaga Iloczyn nieskończony występujący we wzorze (2.50) jest zbieżny bezwzględnie.

Dowód.

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$$

jest funkcją całkowitą. Jest ona okresowa z okresem 1 i dąży do zera dla $|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty$. Jest więc ograniczona. Na mocy tw. Liouville'a jest więc równa zero. To dowodzi (2.48).

Na mocy (2.48) pochodna

$$\frac{1}{z} + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 - j^2} - \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z}, \quad (2.51)$$

jest równa zero. (2.51) jest funkcją nieparzystą i stałą, więc jest równe zero. To dowodzi (2.49).

Na mocy (2.49) mamy

$$\frac{d}{dz} \log \left(z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2} \right) \right) = \frac{d}{dz} \log \left(\frac{\sin \pi z}{\pi} \right)$$

Zatem

$$z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2} \right) = C \frac{\sin \pi z}{\pi}. \quad (2.52)$$

Porównując pochodne obu stron w (2.52) w zerze dostajemy $C = 1$. To dowodzi (2.50). \square

2.6 Funkcja Gamma a iloczyn nieskończone

Zdefiniujemy stałą Eulera-Mascheroniego

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) = 1 + \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{1}{j} + \log \left(1 - \frac{1}{j} \right) \right) \sim 0,577 \dots$$

Twierdzenie 2.15 (Wzór Gaussa)

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)}$$

(Wzór Weierstrassa)

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right) \exp \left(-\frac{z}{n} \right).$$

Uwaga Iloczyn nieskończony występujący we wzorze Weierstrassa jest zbieżny bezwzględnie.

Lemat 2.16 Dla $0 \leq t \leq n$ mamy

$$0 \leq \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \leq e^{-t}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n = e^{-t}.$$

Dowód. Dla $f_n(t) := e^t \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n$ mamy $f_n(n) = 0$, $f_n(0) = 1$

$$f'_n(t) = -e^t \left(1 - \frac{t}{n} \right)^{n-1} \frac{t}{n} \leq 0.$$

Zatem $0 \leq f_n(t) \leq 1$. \square

Dowód Twierdzenia 2.15. Mamy

$$\int_0^1 (1-\beta)^n \beta^{z-1} d\beta = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(z)}{\Gamma(z+n+1)} = \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Zatem

$$\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{z-1} dt = \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Ale dla $0 \leq t \leq \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(n-t) (1-\frac{t}{n})^n t^{z-1} = e^{-t} t^{z-1}.$$

Na mocy Lematu 2.16 możemy zastosować Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności majoryzowanej (z majorantą równą $e^{-t} t^{\operatorname{Re} z - 1}$). Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{z-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

To dowodzi wzoru Gaussa dla $\operatorname{Re} z > 0$.

Aby pokazać wzór Weierstrassa zauważmy, że

$$\begin{aligned} & z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{n}) \exp(-\frac{z}{n}). \\ &= z \lim_{n \rightarrow \infty} \exp z(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n) \prod_{k=1}^n (1 + \frac{z}{k}) \exp(-\frac{z}{k}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-z} z \prod_{k=1}^n (1 + \frac{z}{k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-z} z(z+1)\cdots(z+n)}{n!}. \end{aligned}$$

□

Wzory Gaussa lub Weierstrassa mogą być wykorzystane do udowodnienia rezultatów z poprzednich rozdziałów. Na przykład, stosując wzór Gaussa dostajemy

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{z+1}}{(z+1)\cdots(z+n+1)} = z \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{z+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(n+1)^z}{z(z+1)\cdots(z+n+1)} = z\Gamma(z).$$

Stosując zaś wzór Weierstrassa dostajemy łatwo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} &= \frac{-1}{z\Gamma(z)\Gamma(-z)} \\ &= z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}) = \frac{\sin \pi z}{\pi}. \end{aligned}$$

Dowód wzoru Gaussa o zwielokrotnianiu (2.39). Niech

$$G(z) = \prod_{k=0}^{m-1} \Gamma(z + \frac{k}{m}).$$

Wtedy korzystając ze wzoru Gaussa dostajemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{G(z)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{n=0}^{nm+m-1} (mz+k)}{(n!)^m n^{mz+\frac{1}{2}(m-1)} m^{m(n+1)}}, \\ \Gamma(mz) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(mn)!(mn)^{mz}}{\prod_{k=0}^{mn} (mz+k)}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(mz)}{G(z)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(mn)! m^{mz - m(n+1)} n^{-\frac{1}{2}(m-1)}}{(n!)^m} \prod_{k=mn+1}^{mn+m-1} (mz + k) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(mn)! m^{mz - mn - 1} n^{\frac{1}{2}(m-1)}}{(n!)^m} = (2\pi)^{\frac{1}{2}(m-1)} m^{mz - \frac{1}{2}},\end{aligned}$$

gdzie użyliśmy najpierw

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=nm+1}^{nm+m-1} \frac{mz + k}{n} = m^{m-1},$$

a potem skorzystaliśmy ze wzory Stirlinga. \square

2.7 Pewne całki z parametrem

Stwierdzenie 2.17 *Niech $f(t)$ będzie holomorphyzna dla $0 \leq \arg t \leq \alpha$ i ciągła na domknięciu tego zbioru. Załóżmy, że dla pewnego $\epsilon > 0$*

$$|f(z)| \leq C|z|^{-\epsilon}, \quad |f(z) - f(0)| \leq C|z|^\epsilon.$$

Wtedy dla $0 \leq \arg z \leq \alpha$

$$\int_0^\infty (f(t) - f(z)) \frac{dt}{t} = f(0) \log z.$$

Dowód.

$$\begin{aligned}\int_r^R (f(t) - f(z)) \frac{dt}{t} &= \left(\int_{[r,R]} + \int_{[zR,zr]} \right) f(t) \frac{dt}{t} \\ &= \left(\int_{[r,zr]} + \int_{[zR,R]} \right) f(t) \frac{dt}{t} \\ &\rightarrow \int_{[r,zr]} f(0) \frac{dt}{t} = f(0) \log(z),\end{aligned}$$

gdzie na końcu $r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$. \square

Na marginesie wspomnijmy, że istnieje “wariant rzeczywisty” powyższego stwierdzenia:

Stwierdzenie 2.18 *Niech $f(t)$ będzie funkcją mierzalną na $[0, \infty[$ taką, że*

$$\int_1^\infty |f(t)| \frac{dt}{t} < \infty, \quad \int_0^1 |f(t) - f(0)| \frac{dt}{t} < \infty.$$

Wtedy dla $z \in [0, \infty[$

$$\int_0^\infty (f(t) - f(z)) \frac{dt}{t} = f(0) \log z.$$

Wniosek 2.19 *Zachodzi wzór*

$$\log z = \int_0^\infty (e^{-t} - e^{-zt}) \frac{dt}{t}.$$

Stwierdzenie 2.20 *Mamy następującą reprezentację całkową stałej Eulera-Mascheroniego:*

$$\gamma = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{te^t} \right) dt.$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1-e^{-nt}}{1-e^{-t}} e^{-t} dt &= \sum_{j=1}^n \int_0^\infty e^{-jt} dt = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}, \\ \int_0^\infty (e^{-t} - e^{-(n+1)t}) \frac{dt}{t} &= \log(n+1), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) e^{-t(n+1)} dt &= 0.\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}\gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n+1) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left(\frac{1-e^{-nt}}{1-e^{-t}} e^{-t} - (1-e^{-nt}) t^{-1} e^{-t} \right) dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{te^t} \right) dt.\end{aligned}$$

□

Stwierdzenie 2.21 (Wzór Pringsheima)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{t} dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{t} dt.\end{aligned}$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że

$$\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \sim \frac{1}{12}t.$$

Dlatego powyższa całka jest zbieżna.

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{t} dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\frac{1}{2}t}+1}{2(1-e^{-\frac{1}{2}t})} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{t} \right) \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\frac{1}{2}t}+1}{2(1-e^{-\frac{1}{2}t})} - \frac{2e^{-\frac{1}{2}t}}{t} \right) \frac{dt}{t} + \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} + \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{t} \right) \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}+1}{2(1-e^{-t})} - \frac{e^{-t}}{t} \right) \frac{dt}{t} + \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} + \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{t} \right) \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\frac{1}{2}t}-e^{-t}}{t} - \frac{1}{2}e^{-t} \right) \frac{dt}{t} = -\int_0^\infty \left(\frac{d}{dt} \frac{e^{-\frac{1}{2}t}-e^{-t}}{t} \right) dt - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}t}-e^{-t}}{t} dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

2.8 Pochodna logarytmiczna funkcji Gamma

Ze wzoru Weierstrassa wynika natychmiast, że

$$\begin{aligned}\log \Gamma(z) &= -\gamma z - \log z + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{z}{n} - \log\left(1 + \frac{z}{n}\right) \right), \\ \partial_z \log \Gamma(z) &= -\gamma + \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z} \right), \\ \partial_z^2 \log \Gamma(z) &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+z)^2}.\end{aligned}\tag{2.53}$$

Mamy też

$$\log \Gamma(1) = 0, \quad \log \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \log \pi, \quad \partial_z \log \Gamma(1) = -\gamma.$$

Stwierdzenie 2.22

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1+\epsilon) &= n! \left(1 + \epsilon(-\gamma + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j})\right) + O(\epsilon^2), \quad n = 1, 2, \dots, \\ \Gamma(-n+\epsilon) &= \frac{(-1)^n}{n!} \left(\epsilon^{-1} - \gamma + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}\right) + O(\epsilon), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{2.54}$$

Dowód. Najpierw zauważamy, że

$$\partial_z \log \Gamma(n+1) = -\gamma + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ale $\Gamma'(z) = \Gamma(z)\partial_z \log \Gamma(z)$ i $\Gamma(n+1) = n!$. To pokazuje pierwszy wzór.

Następnie

$$\partial_z \left(\log \Gamma(z) + \frac{1}{z+n}\right) \Big|_{z=-n} = -\gamma + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

Ale

$$\partial_z \Gamma(z)(z+n) = (z+n)\Gamma'(z) + \Gamma(z) = (z+n)\Gamma(z)\partial_z \left(\log \Gamma(z) + (z+n)^{-1}\right).$$

□

2.9 Szeregi asymptotyczne

Niech funkcja f będzie określona na zbiorze $K(z_0, r) \cap \{\alpha_1 < \arg(z - z_0) < \alpha_2\}$. Piszemy

$$f(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j,$$

gdy dla każdego n istnieje C_n takie, że

$$\left| f(z) - \sum_{j=0}^n a_j (z - z_0)^j \right| \leq C_n |z - z_0|^{n+1}.$$

Oczywiście, jeśli $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ dla $z \in K(z_0, r)$, to $f(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$.

Przykład. dla $-\frac{\pi}{2} + \epsilon < \arg z < \frac{\pi}{2} - \epsilon$

$$e^{-\frac{1}{z}} \sim \sum_{j=0}^{\infty} 0z^j.$$

Przykład. dla $-\frac{\pi}{4} + \epsilon < \arg z < \frac{\pi}{4} - \epsilon$ i $-\frac{\pi}{4} + \epsilon < \arg -z < \frac{\pi}{4} - \epsilon$

$$e^{-\frac{1}{z^2}} \sim \sum_{j=0}^{\infty} 0z^j.$$

W szczególności, wszystkie pochodne funkcji $\mathbb{R} \ni x \rightarrow e^{-\frac{1}{x^2}}$ w zerze są równe zero.

Przykład – Funkcja błędu.

$$\operatorname{Erf}(z) := \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

Oczywiście, $\lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{Erf}(z) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Dla $-\frac{\pi}{2} + \epsilon < \arg z < \frac{\pi}{2} - \epsilon$ łatwo pokazujemy metodą całkowania przez części, że

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \operatorname{Erf}(z) = \int_z^\infty e^{-t^2} dt \sim \frac{e^{-z^2}}{2z} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{(2z^2)^k} \right).$$

2.10 Pierwszy wzór Bineta

Twierdzenie 2.23 (Pierwszy wzór Bineta)

$$\log \Gamma(z) = (z - \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} \right) e^{-zt} \frac{dt}{t}; \quad (2.55)$$

$$\partial_z \log \Gamma(z) = \log z + \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) e^{-zt} dt; \quad (2.56)$$

$$\partial_z^2 \log \Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{te^{-tz}}{1-e^{-t}} dt. \quad (2.57)$$

Uwaga Zwróćmy uwagę na to, że powyższe całki są skończone. W szczególności funkcje podcałkowe są ciągle w zerze:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} \right) \frac{1}{t} = \frac{1}{12},$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{1-e^{-t}} = 1.$$

Dowód. Najpierw dowodzimy (2.57). Korzystając z (2.53) dostajemy

$$\begin{aligned} \partial_z^2 \log \Gamma(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty e^{-t(z+n)} t dt \\ &= \int_0^\infty \frac{te^{-tz}}{1-e^{-t}} dt. \end{aligned} \quad (2.58)$$

To dowodzi (2.57). Następnie przekształcamy (2.58) dostając

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) te^{-tz} dt + \int_0^\infty e^{-tz} dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) te^{-tz} dt + \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \partial_z \log \Gamma(z) &= \partial_z \log \Gamma(1) + \int_1^z \partial_y^2 \log \Gamma(y) dy \\ &= -\gamma + \int_1^z \frac{1}{y} dy + \int_1^z \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) te^{-ty} dt dy \\ &= -\gamma + \log z - \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) e^{-ty} dt \Big|_{y=1}^{y=z} \\ &= \log z - \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) e^{-tz} dt, \end{aligned} \quad (2.59)$$

gdzie w ostatnim kroku wykorzystaliśmy wzór całkowy na stałą γ . To dowodzi (2.56). Następnie przekształcamy (2.59) dostając

$$\begin{aligned} & \log z - \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-tz} dt - \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) e^{-tz} dt \\ &= \log z - \frac{1}{2} \frac{1}{z} - \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) e^{-tz} dt. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \log \Gamma(z) &= \log \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^z \partial_y \log \Gamma(y) dy \\ &= \frac{1}{2} \log \pi + \int_{\frac{1}{2}}^z \log y dy - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^z \frac{1}{y} dy - \int_{\frac{1}{2}}^z \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) e^{-ty} dt dy \\ &= \frac{1}{2} \log \pi + z - \log z - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log z + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) e^{-ty} \frac{dt}{t} \Big|_{y=\frac{1}{2}}^{y=z} \\ &= (z - \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) e^{-tz} \frac{dt}{t}, \end{aligned}$$

gdzie w ostatnim kroku wykorzystaliśmy wzór Pringsheima. To kończy dowód (2.55). \square

Wniosek 2.24 Niech $\epsilon > 0$ i $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \epsilon$.

(1) Zachodzi **Wzór Stirlinga**

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\log \Gamma(z) - \left((z - \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi \right) \right) = 0, \\ & \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z)}{z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \sqrt{2\pi}} = 1. \end{aligned}$$

(2) Niech

$$f(t) = \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}.$$

Wtedy f jest ograniczona wraz ze wszystkimi pochodnymi dla $t \in [0, \infty[$ i

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n t^n, \quad |t| < 2\pi.$$

Mamy następujące rozwinięcie funkcji Gamma w szereg asymptotyczny:

$$\left| \log \Gamma(z) - \left((z - \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi - \sum_{j=1}^n (j-1)! z^{-j} f_j \right) \right| \leq C|z|^{-n-1}.$$

2.11 Wzór Plany i drugi wzór Bineta

Twierdzenie 2.25 (Wzór Plany) Niech $m \leq n$ będą całkowite, $\phi(z)$ funkcja analityczna, $|\phi(z)| \leq e^{(1-\epsilon)|\operatorname{Im} z|}$ dla $\epsilon > 0$ i $m \leq \operatorname{Re} z \leq n$. Wtedy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \phi(m) + \phi(m+1) + \dots + \phi(n-1) + \frac{1}{2} \phi(n) \\ &= \int_m^n \phi(z) dz - i \int_0^\infty \frac{\phi(n+iy) - \phi(n-iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy + i \int_0^\infty \frac{\phi(m+iy) - \phi(m-iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy \end{aligned}$$

Dowód. Wprowadźmy kontury

$$\gamma_+ = [m^-, (m+1)^-, \dots, (n-1)^-, n^-, n + iR, m + iR, m],$$

$$\gamma_- = [m^+, (m+1)^+, \dots, (n-1)^+, n^+, n - iR, m - iR, m].$$

Korzystając z tego, że

$$\operatorname{Res} \frac{\phi(z)}{e^{\pm 2\pi iz} - 1} \Big|_{z=k} = \mp \frac{1}{2\pi i} \phi(k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

dostajemy

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_+} \frac{\phi(z)}{e^{-2\pi iz} - 1} dz \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} -i \int_0^\infty \frac{\phi(m+iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy + i \int_0^\infty \frac{\phi(n+iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy \\ &\quad + P \int_m^n \frac{\phi(x)}{e^{-2\pi ix} - 1} dx + \frac{1}{4} \phi(m) + \frac{1}{2} \sum_{j=m+1}^{n-1} \phi(j) + \frac{1}{4} \phi(n); \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_-} \frac{\phi(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} i \int_0^\infty \frac{\phi(m-iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy - i \int_0^\infty \frac{\phi(n-iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy \\ &\quad + P \int_m^n \frac{\phi(x)}{e^{2\pi ix} - 1} dx + \frac{1}{4} \phi(m) + \frac{1}{2} \sum_{j=m+1}^{n-1} \phi(j) + \frac{1}{4} \phi(n). \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$(2.62)$$

Następnie dodajemy (2.60) i (2.61), korzystając z tożsamości

$$(e^{2\pi ix} - 1)^{-1} + (e^{-2\pi ix} - 1)^{-1} = -1.$$

□

Twierdzenie 2.26 (Drugi wzór Bineta)

$$\log \Gamma(z) = (z - \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + 2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \frac{t}{z}}{e^{2\pi t} - 1} dt, \quad (2.63)$$

$$\partial_z \log \Gamma(z) = \log z - \frac{1}{2z} - 2 \int_0^\infty \frac{t dt}{(z^2 + t^2)(e^{2\pi t} - 1)}, \quad (2.64)$$

$$\partial_z^2 \log \Gamma(z) = \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{z} + 4 \int_0^\infty \frac{z t dt}{(z^2 + t^2)^2 (e^{2\pi t} - 1)}. \quad (2.65)$$

Dowód. Aby pokazać (2.65) stosujemy Wzór Plany do $\phi(z) = (z+t)^{-2}$. Następnie całkujemy dwukrotnie i dostajemy

$$\log \Gamma(z) = A + Bz + (z - \frac{1}{2}) \log z + 2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \frac{t}{z}}{e^{2\pi t} - 1} dt.$$

Porównując z pierwszym wzorem Bineta dla $z \sim 0$ dostajemy $A = \frac{1}{2} \log 2\pi$, $B = -1$. □

3 Zastosowania

3.1 Jednorodne dystrybucje i ich transformaty Fouriera

Dla $\lambda \in \mathbb{C}$ możemy zdefiniować dystrybucje temperowane

$$(\pm ix + 0)^\lambda := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\pm ix + \epsilon)^\lambda.$$

Wzory

$$x_+^\lambda := x^\lambda \theta(x), \quad x_-^\lambda := (-x)^\lambda \theta(-x)$$

zadają dystrybucje tylko dla $\operatorname{Re} \lambda > -1$. Możemy je rozszerzyć na wszystkie $\lambda \in \mathbb{C}$ prócz $z = -1, -2, \dots$ kładąc

$$\begin{aligned} x_+^\lambda &:= \frac{1}{2i \sin \frac{\pi}{2} \lambda} \left(-e^{-i\frac{\pi}{2}\lambda} (ix + 0)^\lambda + e^{i\frac{\pi}{2}\lambda} (-ix + 0)^\lambda \right), \\ x_-^\lambda &:= \frac{1}{2i \sin \frac{\pi}{2} \lambda} \left(-e^{-i\frac{\pi}{2}\lambda} (-ix + 0)^\lambda + e^{i\frac{\pi}{2}\lambda} (ix + 0)^\lambda \right) \end{aligned}$$

Wygodnie jest rozważać $\frac{x_\pm^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$. Mamy wtedy

$$\frac{x_\pm^{-n}}{\Gamma(n+1)} = (\pm 1)^n \delta^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Spełniają one związki rekurencyjne:

$$\partial_z \frac{x_\pm^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} = \pm \frac{x_\pm^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}.$$

A oto transformaty Fouriera:

$$\begin{aligned} \int e^{-i\xi x} \frac{x_\pm^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} dx &= (\pm i\xi + 0)^{-\lambda-1}, \\ \int e^{-i\xi x} (\mp i\xi + 0)^\lambda d\xi &= 2\pi \frac{\xi_\pm^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda)}. \end{aligned}$$

Szczególnie symetryczne wzory na transformaty Fouriera dostaniemy wprowadzając

$$\begin{aligned} \eta^\lambda(x) &:= \Gamma\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right) 2^{-\frac{\lambda}{2}} |x|^\lambda = (2\pi)^{-1} \Gamma\left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right) 2^{-\frac{\lambda}{2}} \left((ix + 0)^\lambda + (-ix + 0)^\lambda \right), \\ \nu^\lambda(x) &:= \Gamma\left(\frac{\lambda}{2} + 1\right) 2^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}} |x|^\lambda \operatorname{sgn} x = i(2\pi)^{-1} \Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right) 2^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}} \left((ix + 0)^\lambda - (-ix + 0)^\lambda \right). \end{aligned}$$

Mamy następujące związki:

$$\begin{aligned} \partial_x \eta^\lambda &= \lambda \nu^{\lambda-1}, & \partial_x \nu^\lambda &= \eta^{\lambda-1}, \\ \widehat{\eta}^\lambda &= \sqrt{2\pi} \eta^{-\lambda-1}, & \widehat{\nu}^\lambda &= \sqrt{2\pi} \nu^{-\lambda-1}. \end{aligned}$$

3.2 Całki wielowymiarowe

W tym rozdziale rozważamy d -wymiarową przestrzeń euklidesową.

Twierdzenie 3.1 *Pole sfery jednostkowej $d - 1$ -wymiarowej wynosi*

$$S_{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}.$$

Dowód. Metoda I. Obliczamy 2 sposobami całkę gaussowską: we współrzędnych kartezjańskich

$$\int e^{-x_1^2 - \dots - x_d^2} dx_1 \dots dx_d = \pi^{\frac{d}{2}},$$

i we współrzędnych sferycznych

$$S_{d-1} \int_0^\infty e^{-r^2} r^{d-1} dr = \frac{1}{2} \Gamma(\frac{d}{2}).$$

Metoda II. We współrzędnych sferycznych pole sfery jest równe

$$S_{d-1} = \int_0^\pi \sin^{d-2} \phi_{d-1} d\phi_{d-1} \dots \int_0^\pi \sin \phi_2 d\phi_2 \int_0^{2\pi} d\phi_1$$

Następnie stosujemy

$$\int_0^\pi \sin^{k-1} \phi_k d\phi_k = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{k-1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})}, \quad k = 2, \dots, d-1; \quad \int_0^{2\pi} d\phi_1 = 2\pi.$$

□

Twierdzenie 3.2 *Całki występujące w diagramach Feynmana W przestrzeni euklidesowej d -wymiarowej mamy*

$$\int (x^2 + m^2)^{-\alpha} d^d x = \pi^{\frac{d}{2}} m^{d-2\alpha} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)}, \quad (3.66)$$

$$\int (x^2 + 2xy + m^2)^{-\alpha} d^d x = \pi^{\frac{d}{2}} (m^2 - y^2)^{\frac{d}{2}-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)}, \quad (3.67)$$

$$\int x_\mu (x^2 + 2xy + m^2)^{-\alpha} d^d x = -\pi^{\frac{d}{2}} y_\mu (m^2 - y^2)^{\frac{d}{2}-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)}, \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \int x_\mu x_\nu (x^2 + 2xy + m^2)^{-\alpha} d^d x &= \pi^{\frac{d}{2}} y_\mu y_\nu (m^2 - y^2)^{\frac{d}{2}-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)} \\ &\quad - \pi^{\frac{d}{2}} \delta_{\mu\nu} (m^2 - y^2)^{\frac{d-1}{2}-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(\alpha)}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Dowód. Stosujemy wzór na powierzchnię sfery i

$$\int_0^\infty (r^2 + m^2)^{-\alpha} r^{d-1} dr = 2^{-1} m^{d-2\alpha} \frac{\Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)}.$$

□

Twierdzenie 3.3 Niech $-d < \lambda < 0$. Zdefiniujmy

$$\eta^\lambda(x) := \frac{1}{\Gamma(\frac{\lambda+d}{2})} 2^{-\frac{\lambda}{2}} |x|^\lambda.$$

Wtedy

$$\widehat{\eta^\lambda} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \eta^{-\lambda-d}.$$

Dowód. Stosujemy współrzędne sferyczne.

$$\begin{aligned} & \int |x|^\lambda e^{-ix\xi} dx = \\ & \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\phi_{d-1} r^{\lambda+d-1} e^{-ir|\xi| \cos \phi_{d-1}} r^{\lambda+d-1} \sin^{d-2} \phi_{d-1} S_{d-2} \\ & = \Gamma(\lambda+d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((i|\xi| \cos \phi_{d-1} + 0)^{-\lambda-d} + (-i|\xi| \cos \phi_{d-1} + 0)^{-\lambda-d} \right) \sin^{d-2} \phi_{d-1} d\phi_{d-1} S_{d-2} \\ & = \Gamma(\lambda+d) 2 \cos\left(\frac{\lambda+d}{2}\pi\right) |\xi|^{-\lambda-d} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\lambda-d} \phi_{d-1} \sin^{d-2} \phi_{d-1} d\phi_{d-1} S_{d-2}. \end{aligned}$$

Następnie stosujemy

$$\begin{aligned} S_{d-2} &= \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\lambda-d} \phi_{d-1} \sin^{d-2} \phi_{d-1} d\phi_{d-1} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(-\frac{\lambda-d+1}{2}) \Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})}, \\ \Gamma(\lambda+d) &= \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{\lambda+d-1} \Gamma\left(\frac{\lambda+d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\lambda+d+1}{2}\right) \\ \Gamma\left(\frac{\lambda+d+1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\lambda-d+1}{2}\right) \cos \frac{\lambda+d}{2}\pi &= \pi, \end{aligned}$$

i dostajemy

$$\int |x|^\lambda e^{-ix\xi} d^d x = |\xi|^{-\lambda-d} 2^{\lambda+d} \pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+d}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})}.$$

□

3.3 Macierze

Niech $c = [c_{ij}]$ będzie macierzą. Wyznacza ona formę kwadratową zdefiniowaną dla $x = [x_i] \in \mathbb{R}^d$ jako

$$xcx = \sum_{i,j=1}^d x_i c_{ij} x_j.$$

Każdą macierz przez zamianę współrzędnych $y_j = \sum_{i=1}^d a_{ji} x_i$ można sprowadzić do postaci diagonalnej:

$$xcx = \sum_{i=1}^d \lambda_i (y_i)^2.$$

Liczba dodatnich i ujemnych λ_i nie zależy od wyboru przekształcenia i definiuje sygnaturę macierzy (d_+, d_-) . Oczywiście, $d \geq d_+ + d_-$. Indeks macierzy c definiujemy jako $\text{ind} c := d_+ - d_-$.

Mówimy, że macierz c jest niezdegenerowana, gdy dla każdego $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$, istnieje $y \in \mathbb{R}^d$ taki, że

$$ycx = \sum_{i,j=1}^d y_i c_{ij} x_j \neq 0.$$

Równoważny warunek: $d_+ + d_- = d$.

Zakładamy, że w \mathbb{R}^d wprowadzony jest kanoniczny iloczyn skalarny $x \cdot y := \sum_{j=1}^d x_j y_j$. Macierz można sprowadzić do postaci diagonalnej odwzorowaniem ortogonalnym. Ciąg $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ z dokładnością do permutacji nie zależy od wyboru diagonalizującego odwzorowania ortogonalnego. Wyznacznik macierzy nie zmienia się po zastosowaniu transformacji ortogonalnej. Dlatego

$$\det[c_{ij}] = \prod_{i=1}^d \lambda_i.$$

Mówimy, że macierz c jest dodatnio określona, jeśli dla $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$,

$$xcx > 0.$$

Równoważny warunek: $d_+ = d$.

3.4 Wielowymiarowe całki Gaussa i Fresnela

Niech macierz c będzie dodatnio określona. Wtedy

$$\int dx \exp(-xcx) = \pi^{\frac{d}{2}} (\det c)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.70)$$

Zamieniamy bowiem współrzędne odwzorowaniem ortogonalnym diagonalizując macierz c . Mamy wtedy $dx = dx_1 \cdots dx_d = dy_1 \cdots dy_d = dy$ i (3.70) jest równe

$$\int dy \exp\left(-\sum_i \lambda_i (y_i)^2\right) = \prod_{i=1}^d \int e^{-\lambda_i (y_i)^2} dy_i = \prod_{i=1}^d \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}}.$$

Jeśli c jest macierzą niezdegenerowaną, to

$$\int_{|x|<R} dx_1 \cdots dx_d \exp(ixcx) = \pi^{d/2} e^{i\frac{\pi}{4} \text{inde}} |\det c|^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.71)$$

3.5 Metoda Laplace'a (punktu siodłowego)

Dla dużych λ rozważamy całkę typu

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{\lambda\phi(x)} dx.$$

Zakładamy, że f, ϕ rozszerzają się do funkcji analitycznych na otoczeniu $[a, b]$ w \mathbb{C} i że znajdziemy drogę γ , która łączy a z b i przechodzi przez punkt \tilde{z} , w którym $\phi'(\tilde{z}) = 0$. Zakładamy też, że w \tilde{z} funkcja $\operatorname{Re}\phi$ obcięta do γ ma maksimum. W otoczeniu \tilde{z} mamy

$$\phi(z) \approx \phi(\tilde{z}) + \frac{1}{2}\phi''(\tilde{z})(z - \tilde{z})^2. \quad (3.72)$$

Wprowadźmy współrzędne $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ tak, by

$$z = \tilde{z} + (t + is)e^{i\psi},$$

gdzie $\phi''(\tilde{z})e^{2i\psi} < 0$. Dla uproszczenia zakładamy, że $|\psi| < \frac{\pi}{2}$. Wtedy (3.72) można przepisać jako

$$\phi(z) \approx \phi(\tilde{z}) + \frac{1}{2}\phi''(\tilde{z})e^{2i\psi}(t^2 - s^2 + 2its).$$

Zatem poziomice $\operatorname{Re}\phi$ wokół \tilde{z} przypominają poziomice wokół przełęczy (punktu siodłowego).

Największy wkład do całka po krzywej γ pochodzi z otoczenia punktu \tilde{z} , gdzie γ można zastąpić częścią prostej $\mathbb{R} \ni t \mapsto \tilde{z} + e^{i\psi}t$. Dostajemy

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_{\gamma} f(z)e^{\lambda\phi(z)} dz \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{z})e^{\lambda\phi(\tilde{z}) + \frac{\lambda}{2}\phi''(\tilde{z})e^{i2\psi}t^2} e^{i\psi} dt \\ &= f(\tilde{z})e^{\lambda\phi(\tilde{z})} \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda\phi''(\tilde{z})e^{2i\psi}}} e^{i\psi} \\ &= f(\tilde{z})e^{\lambda\phi(\tilde{z})} \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda\phi''(\tilde{z})}}. \end{aligned}$$

3.6 Asymptotyka funkcji Gamma w nieskończoności metodą punktu siodłowego.

Twierdzenie 3.4 *Niech $\epsilon > 0$. Dla $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \epsilon$ mamy*

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z+1)}{\sqrt{2\pi} \frac{z^{z+1/2}}{e^z}} = 1. \quad (3.73)$$

Dowód. Mamy

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{\phi(t)} dt,$$

gdzie

$$\phi(t) = -t + z \log t.$$

Obliczamy:

$$\partial_t \phi(t) = -1 + \frac{z}{t}, \quad \partial_t^2 \phi(t) = -\frac{z}{t^2}.$$

Zatem $\phi(t)$ ma jedno i tylko jeden punkt stacjonarny: dla $t_0 = z$. Mamy

$$\phi(t_0) = -z + z \log z, \quad \partial_t^2 \phi(t_0) = -\frac{1}{z}.$$

Można zmienić kontur całkowania tak, by przechodził przez z , na przykład całkować po półprostej $]0, z\infty[$:

$$\Gamma(z+1) = \int_{]0, z\infty[} e^{\phi(t)} dt.$$

Funkcję $\phi(t)$ przybliżamy przez jej rozwinięcie w okolicy t_0

$$\phi(t) \sim \phi(t_0) + \frac{1}{2} \phi''(t_0)(t-t_0)^2.$$

To prowadzi do przybliżenia dla funkcji Gamma:

$$\Gamma(z+1) \sim \int_{]0, z\infty[} e^{\phi(t_0) + \frac{1}{2} \phi''(t_0)(t-t_0)^2} dt,$$

Kontur, po którym całkujemy przedłużamy do całej prostej $z] - \infty, \infty[$. Dla dużych z w sektorze $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \epsilon$ te modyfikacje nie wpłyną zbytnio na wartość całki. Oczekujemy więc, że $\Gamma(z)$ zachowuje się asymptotycznie jak

$$e^{\phi(t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2} \phi''(t_0)(t-t_0)^2} dt = \frac{z^z}{e^z} \sqrt{2\pi z}.$$

Pokażmy teraz to w ścisły sposób. Niech $\operatorname{Re} z > 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_{]0, \infty[} e^{-tz} dt = \int_{]0, z\infty[} e^{-tz} dt \\ &= e^{-z+z \log z} \int_{]0, z\infty[} e^{-z(\frac{t}{z}-1-\log \frac{t}{z})} dt \\ &= e^{-z} z^{z+1} \int_{-1}^{\infty} e^{-z(s-\log(1+s))} ds, \end{aligned}$$

gdzie dokonaliśmy zamiany zmiennych

$$s = \frac{t}{z} - 1.$$

Zauważmy, że funkcja

$$] - 1, \infty[\ni s \mapsto s - \log(1+s)$$

maleje na $] - 1, 0]$ od ∞ do 0, w 0 zachowuje się jak $\frac{s^2}{2}$ i na $[0, \infty[$ rośnie do ∞ . Zatem funkcja

$$\mathbb{R} \ni s \mapsto u(s) = \sqrt{2(s - \log(1+s))}$$

(w której bierzemy ujemny pierwiastek dla $s < 0$ i dodatni pierwiastek dla $s > 0$) jest gładka. Mamy

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(s)}{s} = 1, \quad \frac{du(s)}{ds} = \frac{s}{u(s)(1+s)},$$

oraz

$$f(u) := \frac{ds}{du}(u) = \frac{(1+s(u))u}{s(u)}, \quad f(0) = 1.$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{\infty} e^{-z(s-\log(1+s))} ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z}{2}u^2} f(u) du. \end{aligned}$$

Niech

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z}{2}u^2} du = \sqrt{\frac{2\pi}{z}}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \left| \frac{I}{I_0} - 1 \right| &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z}{2}u^2} |f(u)-1| du}{\sqrt{\frac{2\pi}{z}}} \\ &\leq C\sqrt{z} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z}{2}u^2} |u| du = C_1 \frac{1}{\sqrt{z}}. \end{aligned}$$

To kończy dowód (3.73) \square

3.7 Asymptotyka funkcji Beta w nieskończoności metodą punktu siodłowego

Asymptotykę dla $B(u, v)$ można dostać z asymptotyki funkcji $\Gamma(z)$. My jednak pokażemy ją bezpośrednio z metody punktu siodłowego.

Twierdzenie 3.5 *Niech $\epsilon > 0$. Dla $|\arg u| < \frac{\pi}{2} - \epsilon$, $|\arg v| < \frac{\pi}{2} - \epsilon$, mamy*

$$\lim_{u, v \rightarrow \infty} \frac{B(u+1, v+1)}{\sqrt{2\pi} \frac{u^{u+1/2} v^{v+1/2}}{(u+v)^{u+v+3/2}}} = 1. \quad (3.74)$$

Dowód. Mamy

$$B(u+1, v+1) = \int_0^1 e^{\psi(t)} dt,$$

gdzie

$$\psi(t) := u \log t + v \log(1-t).$$

Obliczamy:

$$\partial_t \psi(t) = \frac{u}{t} - \frac{v}{1-t}, \quad \partial_t^2 \psi(t) = -\frac{u}{t^2} - \frac{v}{(1-t)^2}.$$

Zatem $\psi(t)$ ma jedyny punkt stacjonarny: dla $t_0 = \frac{u}{u+v}$ i

$$\psi(t_0) = u \log \left(\frac{u}{u+v} \right) + v \log \left(\frac{v}{u+v} \right), \quad \partial_t^2 \psi(t_0) = -\frac{(u+v)^3}{uv}.$$

Jeśli $\operatorname{Re} u > 0$ i $\operatorname{Re} v > 0$, to $\operatorname{Re} \psi(t) \rightarrow -\infty$, gdy t zbliża się do 0 bądź 1. Łatwo więc uzasadnić, że deformując kontur $[0, 1]$ możemy dostać krzywą γ zaczynającą się w 0, kończącą się w 1 i przechodzącą przez t_0 tak, że $\operatorname{Re} \psi(t)$ osiąga wzdłuż tej krzywej maksimum w t_0 . Mamy

$$B(u+1, v+1) = \int_{\gamma} e^{\psi(t)} dt.$$

Można oczekiwać, że przyczynek wokół t_0 w tej całce będzie dominować. Zatem

$$B(u+1, v+1) \sim \int_{\gamma} e^{\psi(t_0) + \frac{1}{2}\psi''(t_0)(t-t_0)^2} dt.$$

Następnie zastępujemy krzywą γ przez prostą nachyloną pod odpowiednim kątem α , czyli:

$$\begin{aligned} B(u+1, v+1) &\sim e^{\psi(t_0)} \int_{e^{\alpha] - \infty, \infty[} e^{\frac{1}{2}\partial_t^2 \psi(t_0)t^2} dt \\ &= \left(\frac{u}{u+v}\right)^u \left(\frac{v}{u+v}\right)^v \left(\frac{2\pi uv}{(u+v)^3}\right)^{1/2} = \sqrt{2\pi} \frac{u^{u+1/2} v^{v+1/2}}{(u+v)^{u+v+3/2}}. \end{aligned}$$

□

3.8 Wielowymiarowa wersja metody Laplace'a (bez przedłużenia analitycznego)

Dla dużych λ rozważamy całkę typu

$$I(\lambda) = \int_{\Theta} f(x) e^{\lambda\phi(x)} dx,$$

gdzie Θ jest podzbiorem w \mathbb{R}^d . Zakładamy, że ϕ posiada globalne maksimum w Θ w punkcie \tilde{x} należącym do wnętrza Θ i że jest różniczkowalne dwa razy w \tilde{x} . Mamy wtedy $\nabla\phi(\tilde{x}) = 0$. Zakładamy też, że Hessjan (druga pochodna) ϕ w \tilde{x} , oznaczany przez $\nabla^2\phi(\tilde{x})$, jest ujemnie określony. Wtedy

$$\begin{aligned} I(\lambda) &\approx \int_{\mathbb{R}^d} f(\tilde{x}) \exp\left(\lambda\phi(\tilde{x}) + \frac{\lambda}{2} \sum_{i,j=1}^d \nabla_i \nabla_j \phi(\tilde{x})(x_i - \tilde{x}_i)(x_j - \tilde{x}_j)\right) dx \\ &= f(\tilde{x}) e^{\lambda\phi(\tilde{x})} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{d}{2}} (\det(-\nabla^2\phi(\tilde{x})))^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

3.9 Metoda fazy stacjonarnej

Zakładamy teraz, że f i ϕ są dostatecznie gładkie. Dla dużych λ , rozważamy całkę typu

$$I(\lambda) = \int_{\Theta} f(x) e^{i\lambda\phi(x)} dx,$$

gdzie Θ jest podzbiorem w \mathbb{R}^d . Zakładamy, że ϕ posiada globalne maksimum w Θ w punkcie \tilde{x} należącym do wnętrza Θ . Mamy wtedy $\nabla\phi(\tilde{x}) = 0$. Zakładamy też, że Hessjan ϕ w \tilde{x} , oznaczany przez $\nabla^2\phi(\tilde{x})$, jest niezdegenerowany. Wtedy

$$\begin{aligned} I(\lambda) &\approx \int_{\mathbb{R}^d} f(\tilde{x}) \exp\left(i\lambda\phi(\tilde{x}) + \frac{i\lambda}{2} \sum_{i,j=1}^d \nabla_i \nabla_j \phi(\tilde{x})(x_i - \tilde{x}_i)(x_j - \tilde{x}_j)\right) dx \\ &= f(\tilde{x}) e^{i\frac{\pi}{4} \text{ind} \nabla^2\phi(\tilde{x})} e^{i\lambda\phi(\tilde{x})} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{d}{2}} |\det \nabla^2\phi(\tilde{x})|^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

3.10 Równanie dyfuzji i Schrödingera

Swobodne równanie Schrödingera:

$$i\frac{d}{dt}\psi_t(x) = -\frac{1}{2m}\Delta\psi_t(x).$$

Równanie dyfuzji (ciepła):

$$\frac{d}{dt}f_t(x) = \kappa\Delta f_t(x).$$

Wprowadźmy operator pędu

$$p_i = -i\nabla_{x_i}.$$

Wtedy $-\Delta = p^2$. Można uogólnić równanie Schrödingera do dyspersyjnego równania Schrödingera, gdzie ω jest dowolną funkcją pędu:

$$i\frac{d}{dt}\psi_t(x) = \omega(p)\psi_t(x).$$

Formalne rozwiązanie:

$$\psi_t = e^{it\omega(p)}\psi_0.$$

Transformacja Fouriera w konwencji “unitarnej”:

$$\hat{\psi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int \psi(x)e^{-ix\xi} dx,$$

$$\psi(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int \hat{\psi}(\xi)e^{ix\xi} d\xi.$$

Transformacja Fouriera diagonalizuje pęd:

$$\widehat{p\psi}(\xi) = \xi\hat{\psi}(\xi).$$

Ogólniej

$$\widehat{\omega(p)\psi}(\xi) = \omega(\xi)\hat{\psi}(\xi).$$

Dlatego

$$i\frac{d}{dt}\hat{\psi}_t(\xi) = \omega(\xi)\hat{\psi}_t(\xi),$$

$$\hat{\psi}_t(\xi) = e^{-it\omega(\xi)}\hat{\psi}_0(\xi).$$

W reprezentacji położeniowej

$$\psi_t(x) = \int U_t(x-y)\psi_0(y)dy,$$

gdzie “propagator” jest równy

$$U_t(x) = (2\pi)^{-d} \int e^{-it\omega(\xi)+ix\xi} d\xi.$$

W przypadku dyfuzji dostajemy

$$f_t(x) = \int (4\pi\kappa t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}} f_0(y)dy.$$

Zauważmy, że

- (1) $\int f_t(x)dx = \int f_0(x)dx$;
- (2) $f_0 \geq 0$ implikuje $f_t \geq 0$;
- (3) $\int |f_t|^2(x)dx = \int |f_0|^2(x)dx$.

Dla swobodnego równania Schrödingera z $m = 1$ mamy

$$\psi_t(x) = \int (2\pi t i)^{-\frac{d}{2}} e^{\frac{i(x-y)^2}{2t}} \psi_0(y) dy.$$

Mamy $\int |\psi_t|^2(x)dx = \int |\psi_0|^2(x)dx$.

3.11 Transformacja Legendre'a

Niech Ω będzie otwartym zbiorem w \mathbb{R}^d a

$$\Omega \ni \xi \mapsto \omega(\xi) \in \mathbb{R} \quad (3.75)$$

niech będzie funkcją wypukłą klasy C^2 . Ścisłej rzecz biorąc, zakładamy, że dla różnych $\xi_1, \xi_2 \in \Omega$, $\xi_1 \neq \xi_2$, $0 < \tau < 1$,

$$\tau\omega(\xi_1) + (1 - \tau)\omega(\xi_2) > \omega(\tau\xi_1 + (1 - \tau)\xi_2).$$

Wtedy

$$\Omega \ni \xi \mapsto v(\xi) := \nabla\omega(\xi) \in \mathbb{R}^d \quad (3.76)$$

jest funkcją różnowartościową. Niech $\tilde{\Omega}$ będzie obrazem (3.76). Można zdefiniować funkcję

$$\tilde{\Omega} \ni v \mapsto \xi(v) \in \Omega$$

odwrotną do (3.75). Transformację Legendre'a definiujemy jako

$$\tilde{\omega}(v) := v\xi(v) - \omega(\xi(v)).$$

Twierdzenie 3.6 (1) $\nabla\tilde{\omega}(v) = \xi(v)$.

(2) $\nabla^2\tilde{\omega}(v) = \nabla_v\xi(v) = \left(\nabla_\xi^2\omega(\xi(v))\right)^{-1}$. *Zatem $\tilde{\omega}$ jest wypukła.*

(3) $\tilde{\omega}(\xi) = \omega(\xi)$.

Dowód. (1)

$$\nabla_v\tilde{\omega}(v) = \xi(v) + v\nabla_v\xi(v) - \nabla_\xi\omega(\xi(v))\nabla_v\xi(v) = \xi(v).$$

(2)

$$\nabla_v^2\tilde{\omega}(v) = \nabla_v\xi(v) = \nabla_\xi v(\xi(v))^{-1} = \left(\nabla_\xi^2\omega(\xi(v))\right)^{-1}.$$

(3)

$$\tilde{\omega}(\xi) = \xi v(\xi) - v(\xi)\xi(v(\xi)) + \omega(\xi(v(\xi))) = \omega(v).$$

□

Przykłady.

(1) $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\omega(\xi) = \frac{1}{2}(\xi - a)m^{-1}(\xi - a) + v$, $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}^d$, $\tilde{\omega}(v) = \frac{1}{2}\xi m\xi + a\xi - v$.

(2) $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\omega(\xi) = \sqrt{\xi^2 + m^2}$, $\tilde{\Omega} = \{v \in \mathbb{R}^d : |v| < 1\}$, $\tilde{\omega}(\xi) = -m\sqrt{1 - v^2}$.

(3) $\Omega = \mathbb{R}$, $\omega(\xi) = e^\xi$, $\tilde{\Omega} =]0, \infty[$, $\tilde{\omega}(v) = v \log v - v$.

3.12 Dyspersyjne równanie Schrödingera z parametrem \hbar

Wprowadźmy mały parametr \hbar . Zmieńmy definicję pędu i energii:

$$p_i = -i\hbar\nabla_{x_i}, \quad E = i\hbar\partial_t.$$

Dyspersyjne równanie Schrödingera w postaci zawierającej \hbar :

$$i\hbar\frac{d}{dt}\psi_t(x) = \omega(p)\psi_t(x). \quad (3.77)$$

Ma ono rozwiązanie:

$$\psi_t = e^{\frac{it\omega(p)}{\hbar}}\psi_0.$$

Aby je rozwiązać wygodnie jest zastosować semiklasyczną wersję transformacji Fouriera:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\xi) &= (2\pi\hbar)^{-\frac{d}{2}} \int \psi(x)e^{-\frac{ix\xi}{\hbar}} dx, \\ \psi(x) &= (2\pi\hbar)^{-\frac{d}{2}} \int \hat{\psi}(\xi)e^{\frac{ix\xi}{\hbar}} d\xi. \end{aligned}$$

Ma ona własności

$$\begin{aligned} \int |\psi(x)|^2 dx &= \int |\psi(\xi)|^2 d\xi, \\ \widehat{\omega(p)\psi}(\xi) &= \omega(\xi)\hat{\psi}(\xi). \end{aligned}$$

Propagator wynosi

$$U_t(x) = (2\pi\hbar)^{-d} \int e^{\frac{-it\omega(\xi)+i(x-y)\xi}{\hbar}} d\xi.$$

3.13 Granica semiklasyczna dyspersyjnej ewolucji

Założmy, że $\psi_t(x)$ ewoluuje zgodnie z równaniem (3.77). Chcemy wyznaczyć propagację dla małych wartości \hbar w zależności od $\hat{\psi}_0$

Niech $v(\xi)$ i $\tilde{\omega}(x)$ będą zdefiniowane jak w podrozdziale 3.11. Wtedy

$$\begin{aligned} \psi_t(x) &\approx \exp\left(i\frac{\pi}{4}\text{ind}\nabla_\xi v(\xi(x/t))\right) \\ &\times t^{-\frac{d}{2}} |\det|\nabla_\xi v(\xi(x/t))|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{it}{\hbar}\tilde{\omega}(x/t)\right) \hat{\psi}_0(\xi(x/t)). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Czyli paczka falowa o pędzie ξ podróżuje z prędkością $v(\xi) = \nabla\omega(\xi)$ zwaną “prędkością grupową”. Zauważmy przy tym, że norma L^2 prawej strony (3.78) nie zależy od czasu.

Aby otrzymać (3.78) zapisujemy $\psi_t(x)$ w postaci

$$\psi_t(x) = (2\pi\hbar)^{-\frac{d}{2}} \int \exp\left(\frac{i\phi_t(x, \xi)}{\hbar}\right) \hat{\psi}_0(\xi) d\xi,$$

gdzie

$$\phi_t(x, \xi) = -t\omega(\xi) + x\xi.$$

Stosujemy metodę fazy stacjonarnej

$$\nabla_\xi \phi(x, \xi) = -t\nabla_\xi \omega(x) + x.$$

Zatem

$$x/t = \nabla_\xi \omega(\xi) = v(\xi),$$

$$\phi(x, \xi(x/t)) = x\xi(x/t) - t\omega(\xi(x/t)) = t\tilde{\omega}(x/t).$$

Poza tym

$$\nabla_\xi^2 \phi(x, \xi) = -t\nabla^2 \omega(\xi) = -t\nabla_\xi v(\xi).$$

Metoda fazy stacjonarnej prowadzi do

$$\begin{aligned} \psi_t(x) &\approx (2\pi\hbar)^{-\frac{d}{2}} (2\pi\hbar)^{\frac{d}{2}} \exp\left(i\frac{\pi}{4} \text{ind} \nabla_\xi v(\xi(x/t))\right) \\ &\times t^{-\frac{d}{2}} |\det |\nabla_\xi v(\xi(x/t))|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{it}{\hbar} \tilde{\omega}(x/t)\right) \hat{\psi}_0(\xi(x/t)), \end{aligned}$$

z którego wynika wzór (3.78).

3.14 Równanie Kleina-Gordona/falowe

Poniższe równanie dla $m \neq 0$ nazywa się równaniem Kleina-Gordona a dla $m = 0$ równaniem falowym:

$$\partial_t^2 \psi(t, x) = (\Delta - m^2) \psi(t, x). \quad (3.79)$$

Twierdzenie 3.7 *Znając $\psi(t, \cdot)$ i $\partial_t \psi(t, \cdot)$ dla $t = 0$ możemy otrzymać rozwiązanie równania (3.79) w dowolnej chwili ze wzoru*

$$\psi(t) = -\partial_t G(t) \psi(0) + G(t) \partial_t \psi(0),$$

gdzie funkcja Greena $G(t)$ jest zadana przez

$$\begin{aligned} G(t) &= -\frac{i}{2} (-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} e^{it\sqrt{-\Delta + m^2}} \\ &\quad + \frac{i}{2} (-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-it\sqrt{-\Delta + m^2}}. \end{aligned}$$

Dowód. (3.79) można przepisać w formie

$$\left(i\partial_t - \sqrt{-\Delta + m^2}\right) \left(i\partial_t + \sqrt{-\Delta + m^2}\right) \psi = 0.$$

Dzielimy ψ na część o dodatniej i ujemnej częstotliwości: $\psi = \psi_+ + \psi_-$, gdzie

$$\left(i\partial_t \pm \sqrt{-\Delta + m^2}\right) \psi_\pm = 0.$$

Mamy

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{2} \left(1 - i(-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} \partial_t \right) \psi \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(1 + i(-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} \partial_t \right) \psi.\end{aligned}$$

Dlatego

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \mp i(-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} \partial_t \right) \psi.$$

Stosując

$$\psi_{\pm}(t) = e^{\pm i\sqrt{-\Delta+m^2}t} \psi_{\pm}(0),$$

dostajemy

$$\begin{aligned}\psi(t) &= e^{i\sqrt{-\Delta+m^2}t} \psi_+(0) + e^{-i\sqrt{-\Delta+m^2}t} \psi_-(0) \\ &= \frac{1}{2} (e^{it\sqrt{-\Delta+m^2}} + e^{-it\sqrt{-\Delta+m^2}}) \psi(0) \\ &\quad + \frac{i}{2} \left(-(\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} e^{it\sqrt{-\Delta+m^2}} + (-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-it\sqrt{-\Delta+m^2}} \right) \partial_t \psi(0).\end{aligned}$$

□