

Wielomiany ortogonalne

Jan Dereziński

Katedra Metod Matematycznych Fizyki
Uniwersytet Warszawski
Hoża 74, 00-682, Warszawa
e-mail jan.derezinski@fuw.edu.pl

25 maja 2008

Metody Matematyczne Fizyki A,
rok 2008

Spis treści

1	Przestrzenie Hilberta	3
1.1	Przestrzenie Hilberta	3
1.2	Bazy ortogonalne	3
1.3	Szeregi Fouriera	5
1.4	Falki Haara	6
1.5	Rzuty ortogonalne	7
1.6	Ortogonalizacja Grama-Schmidta	7
2	Operatory	7
2.1	Operatory ograniczone	7
2.2	Jądro całkowite	8
2.3	Operatory sprzężone	8
2.4	Widmo punktowe	8
2.5	Widmo	8
2.6	Widmo w skończonym wymiarze	9
2.7	Twierdzenie spektralne w skończonym wymiarze	9
2.8	Widmo ciągłe	10
2.9	Operatory nieograniczone	10
2.9.1	Hermitowskość nie wystarczy do samosprężoności	10

3	Operatory różniczkowe	11
3.1	Operator pędu na odcinku	11
3.2	Laplasjan na odcinku	13
3.3	Laplasjan na odcinku z warunkami brzegowymi Dirichleta	14
3.4	Laplasjan na odcinku z warunkami brzegowymi Neumanna	15
3.5	Laplasjan na odcinku z periodycznymi warunkami brzegowymi	16
3.6	Laplasjan na odcinku z antyperiodycznymi warunkami brzegowymi	16
3.7	Operatory różniczkowe drugiego rzędu w jednym wymiarze	16
3.8	Warunki brzegowe dla problemu Sturm-Liouville'a	17
4	Wielomiany ortogonalne	17
4.1	Wielomiany ortogonalne	17
4.2	Wzór Christoffela-Darboux	18
4.3	Wielomiany Czebyszewa 1-go rodzaju	19
4.4	Wielomiany Czebyszewa 2-go rodzaju	20
5	Klasyczne wielomiany ortogonalne	21
5.1	Wielomiany typu hipergeometrycznego	21
5.2	Uogólniony wzór Rodrigues'a	22
5.3	Klasyczne wielomiany ortogonalne jako wektory własne operatora Sturm-Liouville'a	23
5.4	Klasyczne wielomiany ortogonalne dla $\deg\sigma = 0$	24
5.5	Wielomiany Hermite'a	25
5.6	Klasyczne wielomiany ortogonalne dla $\deg\sigma = 1$	26
5.7	Wielomiany Laguerre'a	27
5.8	Klasyczne wielomiany ortogonalne dla $\deg\sigma = 2$, σ ma pierwiastek podwójny	28
5.9	Klasyczne wielomiany ortogonalne dla $\deg\sigma = 2$, σ ma dwa pierwiastki	29
5.10	Wielomiany Jacobiego	29
5.11	Wielomiany ultrasferyczne (Gegenbauera lub Jacobiego z $\alpha = \beta$)	31
5.12	Wielomiany Legendre'a	32
6	Harmoniki sferyczne	33
6.1	Operator translacji	33
6.2	Operator obrotu w $L^2(\mathbb{R}^2)$	33
6.3	Współrzędne biegunowe	34
6.4	Przestrzeń $L^2(\mathbb{R}^d)$	34
6.5	Laplasjan	34
6.6	Kwadrat momentu pędu	35
6.7	Laplasjan i operator laplace'a-Beltramiego we współrzędnych sferycznych	35
6.8	Przestrzeń $L^2(S^{d-1})$	36
6.9	Wielomiany wielu zmiennych	37
6.10	Wielomiany jednorodne wielu zmiennych	37
6.11	Wielomiany harmoniczne	37

6.12	Harmoniki sferyczne	38
6.13	Standardowa baza harmonik sferycznych w $L^2(S^2)$	39
6.14	Potencjał elektrostatyczny	41
6.15	Funkcje Legendre'a	42

1 Przestrzenie Hilberta

1.1 Przestrzenie Hilberta

Pamiętamy, że w przestrzeni wektorowej \mathcal{V} wyposażonej w iloczyn skalarny $v, w \mapsto (v|w)$ definiuje się normę $\|v\| := (v|v)^{\frac{1}{2}}$. Mówimy, że \mathcal{V} jest przestrzenią Hilberta, jeśli \mathcal{V} z metryką $d(v, w) := \|v - w\|$ jest zupełna.

Przykład. Rozważmy funkcję dodatnią mierzalną $[a, b] \ni x \mapsto \rho(x)$. (a może być równe $-\infty$ a b może być równe $+\infty$). Definiujemy przestrzeń $L^2([a, b], \rho)$ jako przestrzeń funkcji mierzalnych

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

takich, że

$$\int_a^b |f(x)|^2 \rho(x) dx < \infty.$$

Jest to przestrzeń Hilberta, jeśli wyposażymy ją w iloczyn skalarny

$$(f|g) := \int_a^b \overline{f(x)}g(x)\rho(x)dx, \quad f, g \in L^2([a, b], \rho).$$

Przykład. Niech $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ i $1 < \alpha < \frac{3}{2}$. Wtedy $\sup f_n \rightarrow \infty$ i $\|f\|_2 \rightarrow 0$.

1.2 Bazy ortogonalne

Niech \mathcal{V} będzie przestrzenią Hilberta. Jeśli $W \subset \mathcal{V}$, definiujemy dopełnienie ortogonalne zbioru W :

$$W^\perp := \{v \in \mathcal{V} : (w|v) = 0, \quad w \in W\}.$$

Zauważmy, że W^\perp jest zawsze domkniętą podprzestrzenią w \mathcal{V} .

Niech $\{f_1, f_2, \dots\} \subset L^2([a, b], \rho)$. Mówimy, że jest to układ ortogonalny, gdy

$$(f_n|f_m) = 0, \quad n \neq m.$$

Jeśli w dodatku $(f_n|f_n) = 1$, to mówimy, że jest to układ ortonormalny.

Mówimy, że $\{f_1, f_2, \dots\}$ jest bazą ortogonalną w \mathcal{V} , gdy jest to układ ortogonalny składający się z niezerowych wektorów i taki, że $\{f_1, f_2, \dots\}^\perp = \{0\}$.

Mówimy, że $\{f_1, f_2, \dots\}$ jest bazą ortonormalną w $L^2([a, b], \rho)$, gdy jest to układ ortonormalny i $\{f_1, f_2, \dots\}^\perp = \{0\}$.

Oczywiście, jeśli $\{f_1, f_2, \dots\}$ jest bazą ortogonalną, to można zrobić z niej bazę ortonormalną zastępując f_n przez $\frac{f_n}{\|f_n\|}$.

Twierdzenie 1.1 Niech (f_1, f_2, \dots) będzie bazą ortonormalną w przestrzeni Hilberta \mathcal{V} .

(1) Niech (c_1, c_2, \dots) będzie ciągiem zespolonym takim, że

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty. \quad (1.1)$$

Położmy

$$h_n := \sum_{j=1}^n c_j f_j. \quad (1.2)$$

Wtedy istnieje $h \in \mathcal{V}$ taki, że $\|h - h_n\| \rightarrow 0$.

(2) Niech $h \in \mathcal{V}$. Niech $c_j := (f_j|h)$. Wtedy (1.1) jest prawdziwe i jeśli zdefiniujemy h_n jak w (1.2), to $\|h - h_n\| \rightarrow 0$.

Dowód. (1) Dla $n \geq m$ mamy

$$\|h_n - h_m\|^2 = \sum_{j=m+1}^n |c_j|^2. \quad (1.3)$$

Z (1.1) widzimy, że (1.3) dąży do zera, gdy $n, m \rightarrow \infty$. Czyli ciąg h_n jest ciągiem Cauchy'ego. Wiemy, że przestrzeń \mathcal{V} jest zupełna. Więc h_n posiada granicę.

(2) Najpierw sprawdzamy, że

$$\sum_{j=1}^n |c_j|^2 \leq \|h\|^2.$$

Stąd

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 \leq \|h\|^2.$$

Zatem (1.1) jest spełnione. Na mocy (1) istnieje granica $\tilde{h} := \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$. Sprawdzamy, że $(h - \tilde{h}|f_j) = 0$, $j = 1, 2, \dots$. Zatem $h - \tilde{h} = 0$. \square

Będziemy pisać

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j f_j := h,$$

gdzie h jest zdefiniowany tak, jak w powyższym twierdzeniu.

Przykład 1. W $L^2([-\pi, \pi])$, $e_n = e^{in\phi}$, $n \in \mathbb{Z}$, jest bazą ortogonalną i $(e_n|e_n) = 2\pi$. Jeśli $f \in L^2([-\pi, \pi])$, dostajemy

$$\left\| f - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{|j| \leq n} \hat{f}_j e^{in\phi} \right\| \rightarrow 0,$$

gdzie

$$\hat{f}_n := \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) e^{-in\phi} d\phi$$

są współczynnikami Fouriera funkcji f .

Przykład 2. Inną pokrewną bazę ortogonalną w $L^2([-\pi, \pi])$ stanowią $f_n^+ := \cos n\phi$, $f_n^- := \sin n\phi$, $n = 1, 2, \dots$, $(f_n^\pm | f_n^\pm) = \pi$, $f_0 := 1$, $(f_0 | f_0) = 2\pi$.

Przykład 3. W $L^2([0, \pi])$ mamy bazę ortogonalną $c_n := \cos n\phi$, $n = 1, 2, \dots$, $(c_n | c_n) = \frac{\pi}{2}$, $c_0 = 1$, $(c_0 | c_0) = \pi$.

Przykład 4. W $L^2([0, \pi])$ mamy bazę ortogonalną $s_n := \sin n\phi$, $n = 1, 2, \dots$, $(s_n | s_n) = \frac{\pi}{2}$.

Przykład 4. Jedne funkcje lepiej jest rozwijać w szereg kosinusów a inne w szereg sinusów:

$$\begin{aligned} 1 &= c_0 \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{2m+1} s_{2m+1}, \\ \sin \phi &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m+1} \right) c_{2m} \\ &= s_1. \end{aligned}$$

1.3 Szeregi Fouriera

Przykład 1. $h(\phi) := (a - e^{i\phi})^{-1}$, $a > 1$. Wtedy

$$\hat{h}_n = \begin{cases} 2\pi a^{-n-1}, & n = 0, 1, \dots; \\ 0, & n = -1, -2, \dots \end{cases}$$

Przykład 2. $h(\phi) := (e^{i\phi} - a)^{-1}$, $a < 1$. Wtedy

$$\hat{h}_n = \begin{cases} 0, & n = 0, 1, 2, \dots; \\ 2\pi a^{-n-1}, & n = -1, -2, \dots \end{cases}$$

Przykład 3. $h(\phi) := \phi$. Wtedy

$$\hat{h}_n = \begin{cases} \frac{i2\pi(-1)^n}{n}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0. \end{cases}$$

Aby to otrzymać można zauważyć, że $h(\phi) = -i \log(1 + e^{i\phi}) + i \log(1 + e^{-i\phi})$.

Jeśli zsumujemy

$$h_{(n)}(\phi) := \sum_{|j| \leq n} \frac{\hat{h}_j e^{in\phi}}{2\pi},$$

To zaobserwujemy w otoczeniu $\phi = \pm\pi$ tzw. zjawisko Gibbsa: funkcja $h_{(n)}$ "przestrzeliwuje" wartość funkcji h . Mamy bowiem

$$h_{(n)}(-\pi + \epsilon) = -2 \sum_{j=1}^n \frac{\sin \epsilon j}{j}.$$

W otoczeniu nieciągłości funkcji h obserwujemy “zafalowanie” funkcji $h_{(n)}$, które w miarę wzrostu n zwęża się, ale nie zmniejsza swej wysokości zachowując swoją wysokość. To zafalowanie ma w granicy ściśle określony kształt (z dokładnością do zwięźania), mamy bowiem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{(n)} \left(-\pi + \frac{c}{n} \right) = -2 \int_0^c \frac{\sin x}{x} dx.$$

Jest to zjawisko występujące zawsze, kiedy mamy do czynienia z szeregiem Fouriera dla nieciągłej funkcji. Prowadzi ono do tego, że dla funkcji nieciągłej o skoku $a\pi$ w sumie częściowej szeregu Fouriera będzie skok $2ac$, gdzie $c = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx > \frac{\pi}{2}$ jest tzw. stałą Wilbrahama-Gibbsa.

1.4 Falki Haara

Rozważmy przestrzeń $L^2(\mathbb{R})$. Zdefiniujmy

$$\psi_{k,n}(x) := \begin{cases} 2^{k/2}, & 2^{-k}n \leq x < 2^{-k}n + 2^{-k-1}, \\ -2^{k/2}, & 2^{-k}n + 2^{-k-1} \leq x < 2^{-k}(n+1), \\ 0, & x \notin [2^{-k}n, 2^{-k}(n+1)]; \end{cases}$$

$$\phi_{k,n}(x) := \begin{cases} 2^{k/2}, & 2^{-k}n \leq x < 2^{-k}(n+1), \\ 0, & x \notin [2^{-k}n, 2^{-k}(n+1)]. \end{cases}$$

Wprowadźmy operatory unitarne translacji i skalowania

$$\begin{aligned} (U_t f)(x) &:= f(x-t), \\ (W_s f)(x) &:= s^{-\frac{1}{2}} f(s^{-1}x). \end{aligned}$$

Zauważmy, że możemy napisać

$$\begin{aligned} \psi_{k,n} &= W_{2^{-k}} U_n \psi_{00}, & \psi_{k,n}(x) &= 2^{k/2} \psi_{00}(2^k x - n), \\ \phi_{k,n} &= W_{2^{-k}} U_n \phi_{00}, & \phi_{k,n}(x) &= 2^{k/2} \phi_{00}(2^k x - n). \end{aligned}$$

Czasami nazywa się ψ_{00} “falką matką” a ϕ_{00} “falką ojcem”.

Twierdzenie 1.2 (1) *Niech $m \in \mathbb{Z}$. Wtedy*

$$(\text{Span}\{\psi_{k,n} : k \geq m, n \in \mathbb{Z}\})^{\text{cl}} = (\text{Span}\{\phi_{k,n} : k \geq m, n \in \mathbb{Z}\})^{\text{cl}}. \quad (1.4)$$

(2) *Nich (1.4) nazywa się \mathcal{V}_m . Wtedy \mathcal{V}_m stanowią zstępujący ciąg podprzestrzeni*

$$\dots \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_{-1} \subset \dots.$$

(3) *$\psi_{m,n}$, $n \in \mathbb{Z}$ stanowią bazę ortonormalną w $\mathcal{V}_m \ominus \mathcal{V}_{m+1}$ (w dopełnieniu ortogonalnym do \mathcal{V}_{m+1} wewnątrz \mathcal{V}_m).*

(4) *$\psi_{k,n}$ stanowią bazę ortonormalną $L^2(\mathbb{R})$.*

1.5 Rzuty ortogonalne

Mówimy, że operator P jest rzutem ortogonalnym, gdy $P^2 = P$ i $\text{Ker}P = \text{Ran}P^\perp$. Mówimy wtedy, że jest to rzut ortogonalny na $\text{Ran}P$.

Jeśli v jest niezerowym wektorem, to rzut ortogonalny na $\mathbb{C}v$ jest równy

$$P_v w = \frac{v(v|w)}{(v|v)}.$$

W literaturze fizycznej operator ten często jest zapisywany jako $\frac{|v\rangle\langle v|}{(v|v)}$.

Jeśli v_1, \dots, v_n jest bazą ortogonalną podprzestrzeni \mathcal{V}_0 , to rzut ortogonalny na \mathcal{V}_0 jest równy

$$P_{\mathcal{V}_0} = \sum_{j=1}^n \frac{|v_j\rangle\langle v_j|}{(v_j|v_j)}.$$

Przykład. W przestrzeni $L^2([-\pi, \pi])$ rzut ortogonalny P_n na podprzestrzeń rozpiętą przez $e^{ij\phi}$ z $|j| < n$ jest równy

$$P_n(\phi, \psi) = \frac{\sin \frac{(2n+1)(\phi-\psi)}{2}}{2\pi \sin \frac{\phi-\psi}{2}}.$$

Przykład. W przestrzeni $L^2([0, \pi])$ rzut na przestrzeń rozpiętą przez $\sin j\phi$, $j = 1, \dots, n$ ma jądro całkowe

$$P_n(\phi, \psi) = \frac{\sin \frac{(2n+1)(\phi+\psi)}{2}}{2\pi \sin \frac{\phi+\psi}{2}} - \frac{\sin \frac{(2n+1)(\phi-\psi)}{2}}{2\pi \sin \frac{\phi-\psi}{2}}.$$

1.6 Ortogonalizacja Grama-Schmidta

Niech (g_1, g_2, \dots) będzie ciągiem wektorów liniowo niezależnym. Niech \mathcal{V}_n będzie podprzestrzenią rozpiętą przez g_1, \dots, g_n . Wtedy \mathcal{V}_n jest przestrzenią wymiaru n i $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \dots$.

Definiujemy indukcyjnie

$$f_n := g_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f_j(f_j|g_n)}{\|f_j\|^2} = (1 - P_{n-1})g_n,$$

gdzie P_n jest rzutem ortogonalnym na \mathcal{V}_n . (f_1, f_2, \dots) jest układem ortogonalnym. (f_1, \dots, f_n) jest bazą ortogonalną \mathcal{V}_n .

2 Operatory

2.1 Operatory ograniczone

Niech A będzie operatorem liniowym z przestrzeni Hilberta \mathcal{V} w \mathcal{W} . Mówimy, że A jest operatorem ograniczonym, gdy

$$\sup\{\|Av\| : v \in \mathcal{V}, \|v\| \leq 1\} =: \|A\|$$

jest skończone. Zbiór operatorów ograniczonych z \mathcal{V} w \mathcal{W} oznaczamy przez $B(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Jeśli $\mathcal{V} = \mathcal{W}$, to piszemy $B(\mathcal{V})$.

2.2 Jądro całkowe

Rozważmy przestrzeń $L^2([a, b], \rho)$. Często można opisać operator A poprzez funkcję $[a, b] \times [a, b] \ni (x, y) \mapsto A(x, y)$:

$$Af(x) := \int_a^b A(x, y)f(y)\rho(y)dy.$$

Na przykład, jeśli v_1, \dots, v_n jest bazą ortonormalną podprzestrzeni \mathcal{V}_0 , to $P_{\mathcal{V}_0}$, czyli rzut ortogonalny na \mathcal{V} , ma jądro całkowe

$$P_{\mathcal{V}_0}(x, y) = \sum_{j=1}^n \overline{v_j(x)}v_j(y).$$

Można pokazać, że jeśli $\int_a^b |A(x, y)|^2 \rho(x)dx\rho(y)dy < \infty$, to A jest operatorem ograniczonym.

2.3 Operatory sprzężone

Niech $A \in B(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Wtedy wzór

$$(w|Av) = (A^*w|v), \quad v \in \mathcal{V}, \quad w \in \mathcal{W}$$

definiuje operator A^* (hermitowsko) sprzężony do A . Mamy $A^* \in B(\mathcal{W}, \mathcal{V})$. Jeśli A ma jądro całkowe $A(x, y)$, to A^* ma jądro całkowe $\bar{A}(y, x)$.

Mówimy, że A jest samosprzężony, gdy

$$A = A^*.$$

Mówimy, że A jest unitarny, gdy

$$AA^* = A^*A = 1.$$

A jest normalny, gdy

$$AA^* = A^*A.$$

2.4 Widmo punktowe

Niech A będzie operatorem liniowym na przestrzeni liniowej \mathcal{V} . Przypomnijmy, że mówimy, iż $\lambda \in \mathbb{C}$ jest wartością własną operatora A jeśli istnieje niezerowy wektor $v \in \mathcal{V}$ taki, że $Av = \lambda v$. Zbiór wartości własnych nazywamy spektrum (widmem) punktowym operatora A . Oznaczamy je przez $\text{sp}_p(A)$.

2.5 Widmo

Założmy dodatkowo, że \mathcal{V} jest przestrzenią Hilberta. Mówimy, że ograniczony operator B jest odwracalny, gdy B jest bijekcją i B^{-1} jest ograniczone.

Mówimy, że $\lambda \in \mathbb{C}$ należy do spektrum (widma) operatora A , gdy $\lambda - A$ jest odwracalne. Spektrum operatora A oznaczamy przez $\text{sp}(A)$.

Jeśli $z \in \mathbb{C}$ nie należy do $\text{sp}A$, to istnieje rezolwenta operatora A

$$(z - A)^{-1}.$$

Zachodzi następujące łatwe twierdzenie:

Twierdzenie 2.1 *Spektrum punktowe operatora A jest podzbiorem jego spektrum, czyli $\text{sp}_p(A) \subset \text{sp}(A)$.*

2.6 Widmo w skończonym wymiarze

Niech \mathcal{V} będzie skończenie wymiarowe. Wtedy istnieją wygodne kryteria na odwracalność operatorów liniowych:

Twierdzenie 2.2 *Niech B będzie operatorem na \mathcal{V} . Następujące warunki są równoważne:*

- (1) B jest odwracalny.
- (2) $\text{Ker} B$ jest różne od $\{0\}$.
- (3) $\det B \neq 0$

Dlatego też w skończonym wymiarze widmo można zdefiniować na kilka sposobów:

Twierdzenie 2.3 *Niech A będzie operatorem na \mathcal{V} i $\lambda \in \mathbb{C}$. Następujące warunki są równoważne:*

- (1) λ jest wartością własną operatora A .
- (2) $\lambda - A$ jest nieodwracalny.
- (3) $\det(\lambda - A) = 0$.

W nieskończonym wymiarze, warunek pierwszy implikuje warunek drugi, ale trzeci na ogół nie ma sensu.

2.7 Twierdzenie spektralne w skończonym wymiarze

Na algebrze poznaliśmy tzw. Twierdzenie Spektralne:

Twierdzenie 2.4 *Niech A będzie operatorem normalnym na skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta. Wtedy istnieje baza ortonormalna złożona z wektorów własnych operatora A .*

A jest samosprzężony wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne są rzeczywiste.

A jest unitarny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne mają moduł 1

Przykład. Niech e_j , $j = 1, \dots, n$, będzie bazą kanoniczną w \mathbb{C}^n . Zdefiniujmy operator U wzorem

$$Ue_j := e_{j+1}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad Ue_n = e_0.$$

Wtedy U jest operatorem unitarnym, wartościami własnymi są $e^{\frac{ik2\pi}{n}}$, odpowiadają im unormowane wektory własne

$$w_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n e^{\frac{ijk2\pi}{n}} e_j.$$

Przykład. Niech $v\sigma = \sum_{i=1}^3 v_i \sigma_i$, gdzie $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ i σ_i są macierzami Pauliego na \mathbb{C}^2 . Wtedy $v\sigma$ jest samosprzężony. Jest unitarny gdy $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$. Wartości własne wynoszą $\pm \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ a wektory własne

$$w_+ = \sqrt{1+v_1} e_1 + \frac{v_2+v_3}{\sqrt{1+v_1}} e_2, \quad w_- = \sqrt{1-v_1} e_1 + \frac{-v_2+v_3}{\sqrt{1-v_1}} e_2.$$

2.8 Widmo ciągłe

W nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta istnieje uogólnienie Twierdzenia Spektralnego, ale dużo trudniejsze. Poniżej omówimy pierwszą dodatkową trudność, która pojawia się w nieskończonym wymiarze.

Wektory własne odnoszące się do różnych wartości własnych są ortogonalne. Może jednak nie istnieć baza ortonormalna złożona z wektorów własnych. Wynika to z pojawienia się tzw. widma ciągłego.

Przykład. Na $L^2([0, 1])$ definiujemy $(Af)(x) = xf(x)$. Operator ten jest samosprężony ale nie ma wektorów własnych.

Przykład. Na $L^2(\mathbb{Z})$, niech e_j oznacza bazę kanoniczną. Definiujemy operator U wzorem $Ue_n := e_{n+1}$. Jest on unitarny, ale nie ma wektorów własnych.

2.9 Operatory nieograniczone

Jednym z kłopotliwych aspektów teorii operatorów w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach Hilberta jest to, że wiele ważnych dla fizyki operatorów jest nieograniczonych. Wiąże się to z dodatkowym kłopotem: takich operatorów w praktyce nie można zdefiniować na całej przestrzeni Hilberta, tylko na pewnej podprzestrzeni liniowej gęstej. Podprzestrzeń ta jest nazywana dziedziną danego operatora. Dziedzina operatora A będzie oznaczana przez $\text{Dom}A$.

Problemu tego nie ma dla skończenie wymiarowych przestrzeni, gdzie wszystkie operatory są ograniczone.

Przykład. Na $L^2(\mathbb{R})$ próbujemy zdefiniować operator $(Af)(x) = xf(x)$. Wektor $(x+i)^{-1}$ należy do $L^2(\mathbb{R})$ ale $x(x+i)^{-1}$ nie należy do $L^2(\mathbb{R})$. Dlatego, $(x+i)^{-1}$ nie należy do dziedziny operatora A .

Przykład. Na $L^2(\mathbb{R})$ próbujemy zdefiniować operator $pf(x) = \frac{1}{i}\partial_x f(x)$. Wektor $\theta(x)e^{-x}$ należy do $L^2(\mathbb{R})$ ale $\frac{1}{i}\partial_x \theta(x)e^{-x}$ nie należy do $L^2(\mathbb{R})$. ($\theta(x)$ oznacza funkcję Heaviside'a). Dlatego $\theta(x)e^{-1}$ nie należy do dziedziny operatora p .

Dla operatorów nieograniczonych spektrum i spektrum punktowe definiuje się podobnie jak dla operatorów ograniczonych.

2.9.1 Hermitowskość nie wystarczy do samosprężoności

Dla operatorów nieograniczonych istnieje kilka różnych uogólnień pojęcia samosprężoności (hermitowskości).

Rozważmy przestrzeń Hilberta \mathcal{V} . Niech A będzie operatorem z dziedziną $\text{Dom}A$. ($\text{Dom}A$ jest gęstą podprzestrzenią w \mathcal{V} , obraz A leży też w \mathcal{V}). Mówimy, że A jest hermitowski (albo symetryczny), gdy

$$(w|Av) = (Aw|v), \quad v, w \in \text{Dom}A.$$

Jest to warunek, który w praktyce dość łatwo jest sprawdzić. Niestety, z teoretycznego punktu widzenia, dużo ciekawsze jest pojęcie operatora samosprężonego i istotnie samosprężonego. Każdy operator samosprężony jest istotnie samosprężony, każdy operator istotnie samosprężony jest hermitowski, ale nie na odwrót. Nie będziemy w tym kursie omawiać pojęcia (istotnej) samosprężoności dla operatorów nieograniczonych.

Sama hermitowskość wystarcza jednak do udowodnienia następujących własności:

Twierdzenie 2.5 Niech A będzie operatorem hermitowskim z dziedziną $\text{Dom}A$.

- (1) Jeśli $v \in \text{Dom}A$ jest jego wektorem własnym z wartością własną λ , czyli $Av = \lambda v$, to $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (2) Jeśli $\lambda_1 \neq \lambda_2$ są wartościami własnymi z vectorami własnymi v_1 i v_2 , to v_1 jest ortogonalne do v_2 .

Dowód. Dowód jest identyczny jak w przypadku skończenie wymiarowym. By dowieść (1) liczymy

$$\lambda(v|v) = (v|Av) = (Av|v) = \bar{\lambda}(v|v).$$

Następnie dzielimy przez $(v|v) \neq 0$.

Dowód (2):

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(v_1|v_2) = (Av_1|v_2) - (v_1|Av_2) = (v_1|Av_2) - (v_1|Av_2) = 0.$$

□

3 Operatory różniczkowe

Szczególnie ważną klasą operatorów są operatory różniczkowe. Niestety, są one nieograniczone, a w dodatku trudność definiowania ich jako operatorów samosprężonych występuje w nich wyjątkowo wyraźnie. Wiąże się to z tzw. problemem warunków brzegowych. Omówmy najpierw ten problem na prostych przykładach.

3.1 Operator pędu na odcinku

Rozważmy operator $pf(x) = \frac{1}{i}\partial_x f(x)$ określony na dziedzinie $f \in C^\infty([-\pi, \pi])$ traktowanej jako podprzestrzeń przestrzeni Hilberta $L^2([-\pi, \pi])$. Chcemy znaleźć jego wektory własne, czyli rozwiążemy równanie

$$\frac{1}{i}\partial_x f = \lambda f, \quad f \in C^\infty([-\pi, \pi]). \quad (3.5)$$

Oczywiście, rozwiązaniem tego równania jest $f(x) = ce^{i\lambda x}$ dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{C}$. Oznacza to, że mamy bardzo dużo rozwiązań, co świadczy o tym, że to równanie (i operator p) nie jest zbyt pożyteczny w zastosowaniach.

Zmodyfikujmy ten problem przez zmniejszenie dziedziny. Ograniczmy się do $f \in C^\infty([-\pi, \pi])$ dla których spełnione są warunki brzegowe

$$f(\pi) = e^{i2\pi\kappa} f(-\pi).$$

Operator $\frac{1}{i}\partial_x$ z taką dziedziną będziemy oznaczać przez p_κ (3.5) ma wtedy rozwiązania $\lambda = n + \kappa$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$ i funkcje własne $e_n(x) = e^{i(\kappa+n)x}$. Funkcje własne tworzą bazę ortogonalną w $L^2([-\pi, \pi])$. Ma spektrum $\text{spp}_{p_\kappa} = \text{sp}_p = \{n + \kappa : n \in \mathbb{Z}\}$.

Operator p_κ jest hermitowski (a nawet istotnie samosprężony). Jest to użyteczny i ważny operator w zastosowaniach. Warunek hermitowskości łatwo sprawdzić całkując przez części:

$$\begin{aligned}(f|p_\kappa g) &= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} \frac{1}{i} \partial_x g(x) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{i} \overline{f(x)} \right) g(x) dx + \frac{1}{i} \left(\overline{f(\pi)} g(\pi) - \overline{f(-\pi)} g(-\pi) \right) = (p_\kappa f|g),\end{aligned}$$

gdzie wyrazy brzegowe znikają na mocy warunków brzegowych.

Policzmy rezolwentę operatora p_κ , czyli $R_\kappa(z) = (z - p_\kappa)^{-1}$. Niech $(z - p_\kappa)g = f$ czyli

$$(z - \frac{1}{i} \partial_x)g(x) = f(x). \quad (3.6)$$

Równanie jednorodne

$$(z - \frac{1}{i} \partial_x)g(x) = 0. \quad (3.7)$$

rozwiązanie $g(x) = e^{izx}$. Uzmienniamy stałą kładąc $g(x) = c(x)e^{izx}$. Dostajemy

$$ic'(x)e^{izx} = f(x)$$

Stąd

$$\begin{aligned}c(x) &= c(-\pi) - i \int_{-\pi}^x e^{izy} f(y) dy \\ &= c(\pi) + i \int_x^\pi e^{izy} f(y) dy.\end{aligned}$$

g należy do dziedziny p_κ , zatem warunek brzegowy $g(\pi) = e^{i2\pi\kappa}g(-\pi)$, o daje

$$c(\pi) = e^{i2\pi(\kappa-z)}c(-\pi).$$

Stąd

$$\begin{aligned}i \int_{-\pi}^{\pi} e^{-izy} f(y) dy &= c(-\pi) - c(\pi) \\ &= c(-\pi)(1 - e^{i2\pi(\kappa-z)}).\end{aligned}$$

Czyli

$$c(-\pi) = \frac{i}{1 - e^{i2\pi(\kappa-z)}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-izy} f(y) dy.$$

Zatem

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{i}{1 - e^{-i2\pi(\kappa-z)}} \int_{-\pi}^x e^{iz(x-y)} f(y) dy \\ &\quad + \frac{i}{1 - e^{i2\pi(\kappa-z)}} \int_x^\pi e^{iz(x-y)} f(y) dy.\end{aligned}$$

Jądno całkowe operatora $R_\kappa(z) = (z - p_\kappa)$ (zwane czasem funkcją Greena) jest zatem równe

$$R_\kappa(z)(x, y) = \frac{i}{1 - e^{-i2\pi(\kappa-z)}} e^{iz(x-y)} \theta(x-y) + \frac{i}{1 - e^{i2\pi(\kappa-z)}} e^{iz(x-y)} \theta(y-x).$$

Dla $z \in \mathbb{Z} + \kappa$, rezolwenta $R_\kappa(z)$ nie jest zdefiniowana, dla pozostałych z jest ograniczonym operatorem.

3.2 Laplasjan na odcinku

Rozważmy przestrzeń $L^2([0, \pi])$. Niech \mathcal{D}_{\min} będzie zbiorem funkcji $f \in C^\infty([0, \pi])$, które są równe zero w otoczeniu 0 i π . Jest to gęsta podprzestrzeń w $L^2([0, \pi])$.

Definiujemy operator na \mathcal{D}_{\min} wzorem

$$H_{\min}f := -\partial_x^2 f(x), \quad f \in \mathcal{D}_{\min}.$$

Zauważmy, że nie ma on wcale wektorów własnych. Spełnia on natomiast warunek hermitowskości, który dowodzimy całkując przez części:

$$\begin{aligned} (g|H_{\min}f) &= -\int_0^\pi \bar{g}(x) \partial_x^2 f(x) dx \\ &= -\int_0^\pi (\partial_x^2 \bar{g}(x)) f(x) dx = (H_{\min}g|f). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dziedzina operatora H_{\min} jest za mała, by był on ciekawy.

Zastąpmy teraz \mathcal{D}_{\min} przez \mathcal{D}_{\max} – wszystkie funkcje gładkie na $[0, \pi]$. Operator H_{\max} jest zdefiniowany tym samym wzorem co H_{\min} , tylko na większej dziedzinie.

$$H_{\max}f := -\partial_x^2 f(x), \quad f \in \mathcal{D}_{\max}.$$

Wtedy wszystkie liczby zespolone są wartościami własnymi, bo $f_\omega(x) = e^{i\omega x}$ spełnia

$$H_{\max}f_\omega = \omega^2 f_\omega. \quad (3.9)$$

Wektory własne odnoszące się do różnych wartości własnych nie są wzajemnie ortogonalne. Operator H_{\max} nie spełnia warunku hermitowskości, bo przy całkowaniu przez części pojawiają się wyrazy brzegowe:

$$\begin{aligned} (g|H_{\max}f) &= -\int_0^\pi \bar{g}(x) \partial_x^2 f(x) dx \\ &= \bar{g}(0) \partial_x f(0) - \bar{g}(\pi) \partial_x f(\pi) + \int_0^\pi (\partial_x \bar{g}(x)) \partial_x f(x) dx \\ &= \bar{g}(0) \partial_x f(0) - \bar{g}(\pi) \partial_x f(\pi) - (\partial_x \bar{g}(0)) f(0) + (\partial_x \bar{g}(\pi)) f(\pi) - \int_0^\pi (\partial_x^2 \bar{g}(x)) f(x) dx \\ &= \bar{g}(0) \partial_x f(0) - \bar{g}(\pi) \partial_x f(\pi) - (\partial_x \bar{g}(0)) f(0) + (\partial_x \bar{g}(\pi)) f(\pi) + (H_{\max}g|f). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Czyli dziedzina H_{\max} jest za duża, by był ciekawy.

3.3 Laplasjan na odcinku z warunkami brzegowymi Dirichleta

Niech H_D będzie równy $-\partial_x^2$ na funkcjach gładkich spełniających $f(0) = f(\pi) = 0$. Wtedy operator H_D definiuje operator samosprzężony zwany Laplasjanem z warunkami brzegowymi Dirichleta i z jego wektorów własnych można utworzyć bazę ortonormalną:

$$s_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin xn, \quad H_D s_n = n^2 s_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

Zatem

$$\text{sp} H_D = \text{sp}_p H_D = \{n^2 : n = 1, 2, \dots\}.$$

Można policzyć jego rezolwentę $R_D(\omega^2) = (\omega^2 - H_D)^{-1}$. Niech

$$(\partial_x^2 + \omega^2)g(x) = f(x), \quad g(0) = g(\pi) = 0.$$

Stosujemy metodę uzmienniania stałej: $c_+(\pi) = c_-(0) = 0$,

$$\begin{aligned} g(x) &= c_+(x) \sin \omega x + c_-(x) \sin \omega(x - \pi), \\ g'(x) &= c_+(x) \omega \cos \omega x + c_-(x) \omega \cos \omega(x - \pi). \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} c'_+(x) \sin \omega x + c'_-(x) \sin \omega(x - \pi) &= 0, \\ c'_+(x) \omega \cos \omega x + c'_-(x) \omega \cos \omega(x - \pi) &= f(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -c'_+(x) &= f(x) \frac{\sin \omega(x - \pi)}{\omega \sin \omega \pi}, \\ c'_-(x) &= f(x) \frac{\sin \omega x}{\omega \sin \omega \pi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_+(x) &= \int_x^\pi \frac{\sin \omega(y - \pi)}{\omega \sin \omega \pi} f(y) dy, \\ c_-(x) &= \int_0^x \frac{\sin \omega y}{\omega \sin \omega \pi} f(y) dy; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin \omega x \int_x^\pi \frac{\sin \omega(y - \pi)}{\omega \sin \omega \pi} f(y) dy \\ &\quad + \sin \omega(x - \pi) \int_0^x \frac{\sin \omega y}{\omega \sin \omega \pi} f(y) dy. \end{aligned}$$

Zatem jądro całkowe rezolwenty $R_D(\omega)$ (funkcja Greena dla problemu Dirichleta) jest równe

$$\begin{aligned} R_D(\omega^2)(x, y) &= \frac{\sin \omega x \sin \omega(y - \pi) \theta(x - y)}{\omega \sin \omega \pi} \\ &\quad + \frac{\sin \omega(x - \pi) \sin \omega y \theta(y - x)}{\omega \sin \omega \pi} \end{aligned}$$

3.4 Laplasjan na odcinku z warunkami brzegowymi Neumanna

Niech H_N będzie równy $-\partial_x^2$ na funkcjach gładkich spełniających $f'(0) = f'(\pi) = 0$. Wtedy operator H_N definiuje operator samosprzężony zwany Laplasjanem z warunkami brzegowymi Neumanna i z jego wektorów własnych można utworzyć bazę ortonormalną:

$$c_0 := \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad c_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos xn, \quad H_N c_n = c^2 f_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

Zatem

$$\text{sp}H_N = \text{sp}_p H_N = \{n^2 : n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Można policzyć jego rezolwentę $R_N(\omega^2) = (\omega^2 - H_N)^{-1}$. Niech

$$(\partial_x^2 + \omega^2)g(x) = f(x), \quad g'(0) = g'(\pi) = 0.$$

Stosujemy metodę uzmienniania stałej: $c_+(\pi) = c_-(0) = 0$,

$$\begin{aligned} g(x) &= c_+(x) \cos \omega x + c_-(x) \cos \omega(x - \pi), \\ g'(x) &= -c_+(x)\omega \sin \omega x - c_-(x)\omega \sin \omega(x - \pi). \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} c'_+(x) \cos \omega x + c'_-(x) \cos \omega(x - \pi) &= 0, \\ -c'_+(x)\omega \sin \omega x - c'_-(x)\omega \sin \omega(x - \pi) &= f(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -c'_+(x) &= f(x) \frac{\cos \omega(x - \pi)}{\omega \sin \omega \pi}, \\ c'_-(x) &= f(x) \frac{\cos \omega x}{\omega \sin \omega \pi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_+(x) &= \int_x^\pi \frac{\cos \omega(y - \pi)}{\omega \sin \omega \pi} f(y) dy, \\ c_-(x) &= \int_0^x \frac{\cos \omega y}{\omega \sin \omega \pi} f(y) dy; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \cos \omega x \int_x^\pi \frac{\cos \omega(y - \pi)}{\omega \sin \omega \pi} f(y) dy \\ &\quad + \sin \omega(x - \pi) \int_0^x \frac{\cos \omega y}{\omega \sin \omega \pi} f(y) dy. \end{aligned}$$

Zatem jądro całkowe rezolwenty $R_N(\omega)$ (funkcja Greena dla problemu Neumanna) jest równe

$$\begin{aligned} R_D(\omega^2)(x, y) &= \frac{\cos \omega x \cos \omega(y - \pi) \theta(x - y)}{\omega \sin \omega \pi} \\ &\quad + \frac{\cos \omega(x - \pi) \cos \omega y \theta(y - x)}{\omega \sin \omega \pi}. \end{aligned}$$

3.5 Laplasjan na odcinku z okresowymi warunkami brzegowymi

Niech H_{per} będnie r6wny $-\partial_x^2$ na funkcjach gładkich spełniających $f(0) = f(\pi)$, $f'(0) = f'(\pi)$. Wtedy operator H_{per} definiuje operator samosprężony zwany Laplasjanem z okresowymi warunkami brzegowymi i z jego wektor6w wlasnych mozna utworzyc baze ortonormalna:

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i2nx}, \quad H_{\text{per}} e_n = 4n^2 e_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.13)$$

Zatem

$$\text{sp} H_{\text{per}} = \text{sp}_p H_{\text{per}} = \{4n^2 : n = 0, 1, 2, \dots\},$$

przy czym wartosci wlasne odpowiadajace $n = 1, 2, \dots$ sa dwukrotnie zdegenerowane.

3.6 Laplasjan na odcinku z antyokresowymi warunkami brzegowymi

Niech H_{ant} będnie r6wny $-\partial_x^2$ na funkcjach gładkich spełniających $f(0) = -f(\pi)$, $f'(0) = -f'(\pi)$. Wtedy operator H_{ant} definiuje operator samosprężony zwany Laplasjanem z antyokresowymi warunkami brzegowymi i z jego wektor6w wlasnych mozna utworzyc baze ortonormalna:

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i(2n+1)x}, \quad H_{\text{ant}} f_n = (2n+1)^2 f_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.14)$$

Zatem

$$\text{sp} H_{\text{ant}} = \text{sp}_p H_{\text{ant}} = \{(2n+1)^2 : n = 0, 1, 2, \dots\},$$

i wszystkie wartosci wlasne sa dwukrotnie zdegenerowane.

3.7 Operatory r6niczkowe drugiego rzędu w jednym wymiarze

W fizyce szczeg6lna role odgrywaja operatory drugiego rzędu

$$\mathcal{C} := \sigma(x) \partial_x^2 + \tau(x) \partial_x. \quad (3.15)$$

Często wygodnie jest zapisac taki operator w innej formie. Niech $\rho(x)$ spełnia

$$\sigma(x) \rho'(x) = (\tau(x) - \sigma'(x)) \rho(x). \quad (3.16)$$

Wtedy mamy

$$\mathcal{C} = \rho(x)^{-1} \partial_x \rho(x) \sigma(x) \partial_x. \quad (3.17)$$

Twierdzenie 3.1 *Niech*

$$\mathcal{D} = \{f \in C^\infty([a, b]) : f = 0 \text{ w otoczeniu } a, b\}.$$

Zakladamy, że \mathcal{C} jest operatorem zdefiniowanym na \mathcal{D} wzorem (3.8), $\rho > 0$, σ jest rzeczywiste. Rozważmy przestrzen Hilberta $L^2([a, b], \rho)$. Wtedy \mathcal{C} jest hermitowski.

Niestety, powyższa dziedzina jest z reguly za mala aby dostac operator posiadajacy wektory wlasne.

3.8 Warunki brzegowe dla problemu Sturm-Liouville'a

Rozważmy teraz operator zadany tym samym wzorem różniczkowym ale na większej dziedzinie. Przy odpowiednich założeniach nadal dostaniemy operator hermitowski:

Twierdzenie 3.2 Niech σ, ρ będą rzeczywistymi różniczkowalnymi funkcjami na $[a, b]$. Niech $\rho > 0$ i

$$\sigma(a)\rho(a) = \sigma(b)\rho(b) = 0.$$

Wtedy \mathcal{C} jest hermitowski na dziedzinie $C^2([a, b])$ w sensie przestrzeni $L^2([a, b], \rho)$

Dowód.

$$\begin{aligned} (g|\mathcal{C}f) &= \int_a^b \rho(x)\bar{g}(x)\rho(x)^{-1}\partial_x\sigma(x)\rho(x)\partial_x f(x)dx \\ &= \int_a^b \bar{g}(x)\partial_x\sigma(x)\rho(x)\partial_x f(x)dx \\ &= g(x)\rho(x)\sigma(x)f'(x)\Big|_a^b - \int_a^b (\partial_x\bar{g}(x))\sigma(x)\rho(x)\partial_x f(x)dx \\ &= -\overline{g'(x)}\rho(x)\sigma(x)f(x)\Big|_a^b + \int_a^b (\partial_x\rho(x)\sigma(x)\partial_x\bar{g}(x))f(x)dx \\ &= \int_a^b \rho(x)\overline{(\rho(x)^{-1}\partial_x\sigma(x)\rho(x)\partial_x g(x))}f(x)dx = (\mathcal{C}g|f). \end{aligned}$$

□

Analogicznie dowodzimy następującego twierdzenia:

Twierdzenie 3.3 Niech σ, ρ będą rzeczywistymi różniczkowalnymi funkcjami na $[-\infty, \infty]$. Niech $\rho > 0$ i

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sigma(x)\rho(x)|x|^n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma(x)\rho(x)|x|^n = 0.$$

Wtedy \mathcal{C} jest hermitowski na dziedzinie będącej przestrzenią wielomianów w sensie przestrzeni Hilberta $L^2([-\infty, \infty], \rho)$.

Oczywiście, podobne twierdzenia zachodzą dla odcinków $]-\infty, b]$ i $[a, \infty[$.

Szukanie wartości własnych operatora \mathcal{C} bywa nazywane problemem Sturm-Liouville'a.

4 Wielomiany ortogonalne

4.1 Wielomiany ortogonalne

Niech $\rho > 0$ jest ustaloną wagą na odcinku $[a, b]$. Załóżmy, że

$$\int_a^b |x|^n \rho(x) dx < \infty, \quad n = 0, 1, \dots$$

Wtedy jednomiany $1, x, x^2, \dots$ tworzą układ liniowo niezależny w $L^2([a, b], \rho)$. Stosując do nich procedurę Grama-Schmidta dostajemy wielomiany ortogonalne P_0, P_1, P_2, \dots gdzie $\deg P_n = n$.

Istnieje proste kryterium pozwalające sprawdzić, kiedy jest to baza ortogonalna.

Twierdzenie 4.1 *Załóżmy, że dla pewnego $\epsilon > 0$*

$$\int_a^b e^{\epsilon|x|} \rho(x) dx < \infty.$$

Wtedy wielomiany są gęste w $L^2([a, b], \rho)$. Dlatego też, wielomiany P_0, P_1, \dots stanowią bazę ortogonalną w $L^2([a, b], \rho)$.

Dowód. Niech $h \in L^2([a, b], \rho)$. Wtedy dla $|\operatorname{Im}z| \leq \frac{\epsilon}{2}$

$$\int_a^b |\rho(x)h(x)e^{izx}| dx \leq \left(\int_a^b \rho(x)e^{\epsilon|x|} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b \rho(x)|h(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Zatem dla $|\operatorname{Im}z| \leq \frac{\epsilon}{2}$ możemy zdefiniować

$$F(z) := \int_a^b \rho(x)e^{-izx} h(x) dx.$$

A więc F jest analityczna na pasku $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}z| < \frac{\epsilon}{2}\}$. Niech $(x^n|h) = 0, n = 0, 1, \dots$. Wtedy

$$\frac{d^n}{dz^n} F(z) \Big|_{z=0} = (-i)^n \int_a^b x^n \rho(x) h(x) dx = (-i)^n (x^n|h) = 0.$$

Ale funkcja analityczna, która znika wraz ze wszystkimi pochodnymi w jednym punkcie, znika na całej dziedzinie (jeśli ta dziedzina jest spójna). Zatem $F = 0$ na całej dziedzinie, w szczególności na prostej rzeczywistej. Czyli $\hat{h} = 0$. Z odwrotnej transformaty Fouriera wynika, że $h = 0$.

Czyli nie istnieje niezerowy wektor ortogonalny do wielomianów. Zatem wielomiany są gęste w $L^2([a, b], \rho)$. \square

4.2 Wzór Christoffela-Darboux

Niech $p_n(x) = \frac{P_n(x)}{\|P_n\|}$ będzie bazą ortonormalną powstałą z bazy ortogonalnej P_1, P_2, \dots

Elementy macierzowe operatora x oznaczamy przez

$$\beta_{jm} := (p_j | x p_m) = \int_a^b \rho(x) x p_j(x) p_m(x) dx.$$

Twierdzenie 4.2

$$\beta_{jm} = \beta_{mj},$$

$$\beta_{jm} = 0, \quad |j - m| \geq 2.$$

Niech k_j będzie współczynnikiem p_j przy potęgze x^j . Wtedy

$$\beta_{j,j+1} = \frac{k_j}{k_{j+1}},$$

bo $x p_j$ ma najwyższy wyraz $k_j x^{j+1}$. Dostajemy wzór rekurencyjny

$$x p_n = \beta_{n,n-1} p_{n-1} + \beta_{n,n} p_n + \beta_{n,n+1} p_{n+1}.$$

Twierdzenie 4.3 (Wzór Christoffela-Darboux) Jądro całkowe rzutu na przestrzeń wielomianów stopnia $\leq n$ jest równe

$$\begin{aligned} P_n(x, y) &= \sum_{k=0}^n p_k(x) p_k(y) \\ &= \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{p_n(x) p_{n+1}(y) - p_{n+1}(x) p_n(y)}{x-y}, \end{aligned}$$

a na diagonalu

$$P_n(x, x) = \frac{k_n}{k_{n+1}} (p_n(x) p'_{n+1}(x) - p_{n+1}(x) p'_n(x)).$$

Dowód. Niech Q_k będzie rzutem na p_k . Ma on jądro całkowe

$$Q_k(x, y) = p_k(x) p_k(y).$$

$[x, Q_k]$ ma jądro całkowe

$$\begin{aligned} x Q_k(x, y) - Q_k(x, y) y &= x p_k(x) p_k(y) - p_k(x) p_k(y) y \\ &= \beta_{k,k-1} (p_{k-1}(x) p_k(y) - p_k(x) p_{k-1}(y)) \\ &\quad + \beta_{k+1,k} (p_{k+1}(x) p_k(y) - p_k(x) p_{k+1}(y)). \end{aligned}$$

Zatem $[x, P_n] = \sum_{k=1}^n [x, Q_k]$ ma jądro całkowe

$$x P_n(x, y) - P_n(x, y) y = \beta_{n,n+1} (p_{n+1}(x) p_n(y) - p_n(x) p_{n+1}(y)).$$

□

4.3 Wielomiany Czebyszewa 1-go rodzaju

Rozważamy przestrzeń

$$L^2([-1, 1], (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}).$$

Definiujemy

$$\begin{aligned} T_n(\cos \phi) &= \cos n\phi, & \phi &\in [0, \pi], \\ T_n(x) &= \frac{1}{2}((x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n), & x &\in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Twierdzenie 4.4 *Wielomiany T_m są bazą ortogonalną i*

$$\|T_0\| = \pi, \quad \|T_n\|^2 = \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Spełniają równanie

$$((1-x^2)\partial_x^2 - x\partial_x + n^2)T_n(x) = 0. \quad (4.18)$$

Dowód. Zdefiniujmy

$$W : L^2([-1, -1], (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}) \rightarrow L^2([0, \pi]),$$

$$Wf(\phi) := f(\cos \phi).$$

Wtedy

$$\|Wf\|^2 = \int_0^\pi |f(\cos \phi)|^2 d\phi = \int_0^\pi |f(\cos \phi)|^2 \sin^{-1} \phi d \cos \phi = \int_{-1}^1 |f(x)|^2 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

czyli operator W jest unitarny. Poza tym

$$WT_n(\phi) = T_n(\cos \phi) = \cos n\phi.$$

Mamy

$$(\partial_\phi^2 + n^2) \cos n\phi = 0. \quad (4.19)$$

Aby zobaczyć (4.18) liczymy:

$$\partial_\phi Wf(\phi) = -\sin \phi f'(\cos \phi),$$

$$W^* \partial_\phi Wf(x) = -\sin(\arccos x) f'(x) = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \partial_x f(x).$$

Zatem

$$W^* \partial_\phi W = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \partial_x.$$

Stąd

$$W^* \partial_\phi^2 W = (W^* \partial_\phi W)^2 = (1-x^2) \partial_x^2 - x \partial_x.$$

□

4.4 Wielomiany Czebyszewa 2-go rodzaju

Rozważamy przestrzeń

$$L^2([-1, 1], (1-x^2)^{\frac{1}{2}}).$$

Definiujemy

$$U_n(\cos \phi) = \frac{\sin(n+1)\phi}{\sin \phi}, \quad \phi \in [0, \pi],$$

$$U_n(x) = \frac{(x+i\sqrt{1-x^2})^{n+1} - (x-i\sqrt{1-x^2})^{n+1}}{2i\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [-1, 1].$$

Twierdzenie 4.5 *Wielomiany U_m są bazą ortogonalną i*

$$\|U_n\|^2 = \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Spełniają równanie

$$((1-x^2)\partial_x^2 - 3x\partial_x + n(n+2))U_n(x) = 0. \quad (4.20)$$

Dowód. Zdefiniujmy

$$W : L^2([-1, 1], (1-x^2)^{\frac{1}{2}}) \rightarrow L^2([0, \pi]),$$

$$Wf(\phi) := f(\cos \phi) \sin \phi.$$

Wtedy

$$\|Wf\|^2 = \int_0^\pi |f(\cos \phi)|^2 \sin^2 \phi d\phi = \int_0^\pi |f^2(\cos \phi)| \sin \phi d \cos \phi = \int_{-1}^1 |f(x)|^2 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx,$$

czyli operator W jest unitarny. Poza tym

$$WU_n(\phi) = U_n(\cos \phi) \sin \phi = \sin(n+1)\phi.$$

Mamy

$$(\partial_\phi^2 + (n+1)^2) \sin(n+1)\phi = 0. \quad (4.21)$$

Aby zobaczyć (4.20) liczymy

$$\partial_\phi Wf(\phi) = -\sin^2 \phi f'(\cos \phi) + \cos \phi f(\cos \phi),$$

Zatem

$$W^* \partial_\phi W = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \partial_x + x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Stąd

$$W^* \partial_\phi^2 W = (W^* \partial_\phi W)^2 = (1-x^2) \partial_x^2 - 3x \partial_x - 1.$$

□

5 Klasyczne wielomiany ortogonalne

5.1 Wielomiany typu hipergeometrycznego

Szukamy operatorów różniczkowych drugiego rzędu, których wektorami własnymi są wielomiany każdego stopnia.

Twierdzenie 5.1 *Niech*

$$\mathcal{C} := \sigma(z) \partial_z^2 + \tau(z) \partial_z + \eta(z) \quad (5.22)$$

będzie operatorem różniczkowym takim, że istnieją wielomiany P_0, P_1, P_2 stopnia odpowiednio 0, 1, 2 spełniające

$$\mathcal{C}P_n = \lambda_n P_n.$$

Wtedy

- (1) $\sigma(z)$ jest wielomianem stopnia ≤ 2 ,
- (2) $\tau(z)$ jest wielomianem stopnia ≤ 1 ,
- (3) $\eta(z)$ jest wielomianem stopnia ≤ 0 (jest liczbą).

Dowód. $\mathcal{C}P_0 = \eta(z)P_0$, więc $\deg\eta = 0$.

$\mathcal{C}P_1 = \tau(z)P_1' + \eta P_1$, więc $\deg\tau \leq 1$.

$\mathcal{C}P_2 = \sigma(z)P_2'' + \tau(z)P_2'(z) + \eta P_2$, więc $\deg\sigma \leq 2$. \square

Zatem wystarczy ograniczyć się do operatorów postaci

$$\mathcal{C}(\tau) := \sigma(z)\partial_z^2 + \tau(z)\partial_z, \quad (5.23)$$

gdzie $\deg\sigma \leq 2$ i $\deg\tau \leq 1$. Pokażemy, że dla szerokiej klasy (5.23) dla każdego n naturalnego istnieje wielomian P_n będący wektorem własnym (5.23).

5.2 Uogólniony wzór Rodrigues'a

Niektóre własności wielomianów będących funkcjami własnymi operatora postaci opisanej w Twierdzeniu 5.1 można wyprowadzić w jednolity sposób nie rozbijając rozumowania na przypadki szczególne. (Niniejszy rozdział można pominąć, odpowiednie wzory będą później wyprowadzone dla przypadków szczególnych).

Ustalamy σ , ale będziemy jawnie zaznaczali zależność od τ . Niech ρ będzie funkcją spełniającą równanie

$$\sigma(z)\partial_z\rho(z) = (\tau(z) - \sigma'(z))\rho(z). \quad (5.24)$$

Zauważmy, że ρ wyraża się poprzez funkcje elementarne. Operator \mathcal{C} można zapisać jako

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\tau) &= \rho^{-1}(z)\partial_z\sigma(z)\rho(z)\partial_z \\ &= \partial_z\rho^{-1}(z)\sigma(z)\partial_z\rho(z) - \tau' + \sigma''. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Zdefiniujmy

$$\begin{aligned} P_n(\tau; z) &:= \frac{1}{n!}\rho^{-1}(z)\partial_z^n\sigma^n(z)\rho(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\rho^{-1}(z)\int_{[0^+]} \sigma^n(z+t)\rho(z+t)t^{-n-1}dt. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Twierdzenie 5.2 *Mamy*

$$(\sigma(z)\partial_z^2 + \tau(z)\partial_z)P_n(\tau; z) = (n\tau' + n(n-1)\frac{\sigma''}{2})P_n(\tau; z), \quad (5.27)$$

$$(\sigma(z)\partial_z + \tau(z) - \sigma'(z))P_n(\tau; z) = (n+1)P_{n+1}(\tau - \sigma'; z), \quad (5.28)$$

$$\partial_z P_n(\tau; z) = \left(\tau' + (n-1)\frac{\sigma''}{2} \right) P_{n-1}(\tau + \sigma'; z), \quad (5.29)$$

$$\frac{\rho(z + t\sigma(z))}{\rho(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(\tau - n\sigma'; z). \quad (5.30)$$

Dowód. Wprowadzamy następujące “operatory kreacji i anihilacji”:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^+(\tau) &:= \sigma(z)\partial_z + \tau(z) = \rho^{-1}(z)\partial_z\rho(z)\sigma(z), \\ \mathcal{A}^- &:= \partial_z.\end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\tau) &= \mathcal{A}^+(\tau)\mathcal{A}^- \\ &= \mathcal{A}^-\mathcal{A}^+(\tau - \sigma') - (\tau' - \sigma'').\end{aligned}$$

Niech $\mathcal{C}(\tau + \sigma')F = \lambda F$. Wtedy

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\tau)\mathcal{A}^+(\tau)F &= \mathcal{A}^+(\tau)\mathcal{A}^-\mathcal{A}^+(\tau)F \\ &= \mathcal{A}^+(\tau)(\mathcal{C}(\tau + \sigma') + \tau')F \\ &= (\lambda + \tau')F.\end{aligned}$$

Zatem jeśli $\mathcal{C}(\tau + n\sigma')F_0 = \lambda_0 F_0$, to

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\tau) \mathcal{A}^+(\tau) \cdots \mathcal{A}^+(\tau + (n-1)\sigma')F_0 \\ = (\lambda_0 + n\tau' + n(n-1)\frac{\sigma''}{2})\mathcal{A}^+(\tau) \cdots \mathcal{A}^+(\tau + (n-1)\sigma')F_0.\end{aligned}$$

Korzystając z tego, że

$$\begin{aligned}A^+(\tau) &= \rho^{-1}(z)\partial_z\rho(z)\sigma(z), \\ A^+(\tau + \sigma') &= \rho^{-1}(z)\sigma^{-1}(z)\partial_z\rho(z)\sigma^2(z), \\ &\dots = \dots \\ A^+(\tau + (n-1)\sigma') &= \rho^{-1}(z)\sigma^{-(n-1)}\partial_z\rho(z)\sigma^n(z),\end{aligned}$$

dostajemy

$$A^+(\tau) \cdots A^+(\tau + (n-1)\sigma')F_0 = \rho^{-1}\partial_z\rho(z)\sigma^n(z)F_0(z).$$

Weźmy teraz $F_0 = 1$, dla którego $\lambda_0 = 0$. Dostajemy wtedy (5.27). \square

5.3 Klasyczne wielomiany ortogonalne jako wektory własne operatora Sturm-Liouville’a

Szukamy takich odcinków $[a, b] \subset \mathbb{R}$ i wag $[a, b] \ni x \mapsto \rho(x)$, dla których istnieją wielomiany P_0, P_1, \dots w spełniające $\deg P_n = n$,

$$\int \overline{P}_n(x)P_m(x)\rho(x)dx = c_n\delta_{n,m} \quad (5.31)$$

i będące funkcjami własnymi operatora różniczkowego drugiego rzędu $\mathcal{C} := \sigma(x)\partial_x^2 + \tau(x)\partial_x$, czyli dla pewnych $\lambda_n \in \mathbb{R}$

$$(\sigma(x)\partial_x^2 + \tau(x)\partial_x + \lambda_n)P_n(x) = 0. \quad (5.32)$$

(Dopuszczamy $a = -\infty$ lub $b = \infty$).

Wiemy już, że należy w tym celu spełnić następujące warunki:

- (1) σ musi być wielomianem stopnia co najwyżej 2 a τ wielomianem stopnia co najwyżej 1. (Patrz Twierdzenie 5.1).
- (2) Waga ρ musi być rozwiązaniem równania

$$\sigma(x)\rho'(x) = (\tau(x) - \sigma'(x))\rho(x), \quad (5.33)$$

być dodatnia a σ rzeczywiste. Wtedy bowiem operator \mathcal{C} , który można zapisać jako

$$\mathcal{C} = \rho(x)^{-1}\partial_x\rho(x)\sigma(x)\partial_x,$$

jest hermitowski przynajmniej na funkcjach znikających w otoczeniu końców przedziału $[a, b]$. (Patrz Twierdzenie 3.1).

- (3) Należy sprawdzić, czy operator jest hermitowski na przestrzeni wielomianów.
- (i) W przypadku gdy koniec przedziału, powiedzmy a , jest skończoną liczbą, jest to równoznaczne z warunkiem $\rho(a)\sigma(a) = 0$. (Patrz Twierdzenie 3.2).
- (ii) Jeśli koniec przedziału jest w nieskończoności, np. $a = -\infty$, to trzeba spełnić

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^n \sigma(x) \rho(x) = 0$$

dla każdego n .

Dodatkowo, P_n powinny należeć do przestrzeni Hilberta $L^2([a, b], \rho)$, dla każdego n , a więc musi zachodzić

$$\int_a^b \rho(x)|x|^n dx < \infty. \quad (5.34)$$

Trochę mocniejszy warunek

$$\int_a^b e^{\epsilon|x|} \rho(x) dx < \infty \quad (5.35)$$

dla pewnego $\epsilon > 0$, wystarcza, aby dostać bazę ortogonalną. (Patrz Twierdzenie 4.1).

Znajdziemy wszystkie przestrzenie z wagą $L^2([a, b], \rho)$ dla których takie wielomiany ortogonalne istnieją. Będziemy upraszczać nasze odpowiedzi do standardowych postaci

- (1) dokonując zamiany zmiennych $x \mapsto ax + b$ dla $a \neq 0$;
- (2) dzieląc (zarówno równanie różniczkowe, jak i wagę) przez stałą.

Otrzymamy w ten sposób wszystkie tak zwane *klasyczne wielomiany ortogonalne*.

5.4 Klasyczne wielomiany ortogonalne dla $\deg\sigma = 0$

Można przyjąć, że $\sigma(x) = 1$.

Jeśli $\deg\tau = 0$, to

$$\mathcal{C} = \partial_y^2 + c\partial_y.$$

Latwo odrzucić ten przypadek.

Zatem $\deg\tau = 1$. Czyli

$$\mathcal{C} = \partial_y^2 + (ay + b)\partial_y.$$

Podstawmy $x = \sqrt{\frac{|a|}{2}} \left(y + \frac{b}{a}\right)$. Dostajemy

$$\mathcal{C} = \partial_x^2 + 2x\partial_x, \quad a > 0; \quad (5.36)$$

$$\mathcal{C} = \partial_x^2 - 2x\partial_x, \quad a < 0. \quad (5.37)$$

Dostajemy $\rho(x) = e^{\pm x^2}$.

$\sigma(x)\rho(x) = e^{\pm x^2}$ nigdy się nie zeruje, zatem jedynym możliwym przedziałem jest $[-\infty, \infty]$.

W przypadku $a > 0$, $\rho(x) = e^{x^2}$, co jest niemożliwe ze względu na (3ii).

W przypadku $a < 0$, $\rho(x) = e^{-x^2}$ i dostajemy operator Hermite'a. Przedział $[-\infty, \infty]$ jest dopuszczalny, a nawet spełnia warunek (5.35). Dostajemy równanie i wagę dla wielomianów Hermite'a, które zostaną omówione w następnym podrozdziale.

5.5 Wielomiany Hermite'a

Twierdzenie 5.3 *Zdefiniujmy wielomiany Hermite'a*

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{x^2} \partial_x^n e^{-x^2}.$$

Spełniają one równanie Hermite'a

$$(\partial_x^2 - 2x\partial_x + 2n)H_n(x) = 0.$$

oraz relacje

$$(-\partial_x + 2x)H_n(x) = (n+1)H_{n+1}(x) \quad (5.38)$$

$$\partial_x H_n(x) = 2H_{n-1}(x), \quad (5.39)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n H_n(x) = e^{2tx-t^2}. \quad (5.40)$$

H_n jest wielomianem stopnia n i jest to (z dokładnością do czynnika) jedyny wektor własny operatora $\partial_x^2 - 2x\partial_x$ będący wielomianem stopnia n .

Dowód. Twierdzenie to wynika z Twierdzenia 5.2 dla

$$\sigma(x) = -1, \quad \rho = e^{-x^2}.$$

Poniżej podajemy dowód bezpośredni. Wprowadźmy "operatory kreacji i anihilacji"

$$A^- = \partial_x,$$

$$A^+ = -\partial_x + 2x = -e^{x^2} \partial_x e^{-x^2}.$$

Spełniają one relacje

$$[A^+, A^-] = 2. \quad (5.41)$$

Mamy $H_n = \frac{(A^+)^n 1}{n!}$. (1 oznacza tu wektor w $L^2(e^{-x^2})$ zadany przez funkcję równą 1. Natomiast w (5.41) 2 oznacza operator mnożenia przez liczbę 2.) Stąd wynika

$$A^+ H_n = (n+1)H_{n+1}, \quad (5.42)$$

$$A^- H_n = 2H_{n-1}. \quad (5.43)$$

Aby dowieść (5.43) używamy (5.41).

Wreszcie (5.42), (5.43) pokazują, że

$$A^+ A^- H_n = 2nH_n. \quad (5.44)$$

Ale

$$-\partial_x^2 + 2x\partial_x = A^+ A^-. \quad (5.45)$$

□

Twierdzenie 5.4 H_n stanowią bazę ortogonalną w $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$ z normalizacją

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi} 2^n}{n!}.$$

Dowód. Załóżmy, że $n \geq m$. Wtedy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x^n e^{-x^2}) H_m(x) dx \\ &= \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \partial_x^n H_m(x) dx. \end{aligned} \quad (5.46)$$

(5.46) równa się zero dla $n > m$.

Niech $n = m$. Z (5.39) i $H_0 = 1$ wynika $\partial_x^n H_n(x) = 2^n$. Zatem (5.46) jest równe

$$\frac{2^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{2^n}{n!} \sqrt{\pi}.$$

□

Uwaga. Definicja wielomianów Hermite'a którą wprowadziliśmy jest zgodna z uogólnionym wzorem Rodrigues'a (5.26). W literaturze spotyka się też inne definicje dla wielomianów Hermite'a, np. $H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \partial_x^n e^{-x^2}$.

5.6 Klasyczne wielomiany ortogonalne dla $\deg \sigma = 1$

Wystarczy ograniczyć się do przypadku $\sigma(y) = y$.

Jeśli $\deg \tau = 0$, to

$$\mathcal{C} = y\partial_y^2 + c\partial_y$$

Ale takie \mathcal{C} zawsze obniża stopień wielomianu. Czyli jeśli $\mathcal{C}P = \lambda P$ dla pewnego wielomianu, to $\lambda = 0$. To oznacza, że $P(x) = x^{-c}$. Czyli nie dostaniemy wielomianów wszystkich stopni jako funkcji własnych.

Zatem $\deg \tau = 1$. Czyli, dla $b \neq 0$,

$$y\partial_y^2 + (a + by)\partial_y. \quad (5.47)$$

Przeskalowując, dostajemy operator występujący w równaniu Laguerre'a

$$\mathcal{C} = -x\partial_x^2 + (-\alpha - 1 + x)\partial_x.$$

Obliczamy, że $\rho = x^\alpha e^{-x}$. $\rho(x)\sigma(x) = x^{\alpha+1}e^{-x}$ zeruje się jedynie dla $x = 0$ i $\alpha > -1$. Przedział $[-\infty, 0]$ jest wyeliminowany przez warunek (3ii). Przedział $[0, \infty]$ jest dopuszczalny dla $\alpha > -1$, a nawet spełnia wtedy warunek 5.35.

Dostajemy równanie i wagę dla wielomianów Laguerre'a, które zostaną omówione w następnym podrozdziale.

5.7 Wielomiany Laguerre'a

Twierdzenie 5.5 *Zdefiniujmy wielomiany Laguerre'a*

$$\begin{aligned} L_n^\alpha(x) &= \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} \partial_x^n e^{-x} x^{n+\alpha} \\ &= \frac{(1+\alpha)_n}{n!} F(-n; 1+\alpha; x). \end{aligned}$$

Spełniają one równanie Laguerre'a, które jest równaniem konfluentnym ze zmodyfikowanymi parametrami:

$$(x\partial_x^2 + (\alpha + 1 - x)\partial_x + n) L_n^\alpha(x) = 0$$

oraz relacje

$$(x\partial_x + \alpha - x)L_n^\alpha(x) = (n+1)L_{n+1}^{\alpha-1}(x), \quad (5.48)$$

$$\partial_x L_n^\alpha(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x). \quad (5.49)$$

L_n jest wielomianem stopnia n i jest to (z dokładnością do czynnika) jedyny wektor własny operatora $x\partial_x^2 + (\alpha + 1 - x)\partial_x$ będący wielomianem stopnia n .

Dowód. Można zastosować Twierdzenie 5.2 dla

$$\sigma(x) = x, \quad \rho(x) = e^{-x} x^\alpha.$$

Poniżej podajemy dowód bezpośredni. Wprowadźmy “operatory kreacji i anihilacji”

$$\begin{aligned} A^- &= -\partial_x, \\ A_\alpha^+ &= x\partial_x + \alpha - x = x^{-\alpha+1} e^x \partial_x x^\alpha e^{-x}. \end{aligned}$$

Spełniają one relacje

$$A_{\alpha+1}^+ A^- - A^- A_\alpha^+ = 1. \quad (5.50)$$

Mamy

$$L_n^\alpha = \frac{A_{\alpha+1}^+ \cdots A_{\alpha+n}^+ 1}{n!}. \quad (5.51)$$

(1 oznacza w (5.51) wektor zadany przez funkcję równą 1. Natomiast w (5.50) 1 oznacza operator mnożenia przez liczbę 1.) Stąd wynika

$$A_\alpha^+ L_n^\alpha = (n+1)L_{n+1}^{\alpha-1}, \quad (5.52)$$

$$A^- L_n^\alpha = L_{n-1}^{\alpha+1}. \quad (5.53)$$

Aby dowieść (5.53) używamy (5.50).

Wreszcie (5.52), (5.53) pokazuje, że

$$A_{\alpha+1}^+ A^- L_n^\alpha = n L_n^\alpha. \quad (5.54)$$

Ale

$$-x\partial_x^2 - (\alpha+1-x)\partial_x = A_{\alpha+1}^+ A^-. \quad (5.55)$$

□

Twierdzenie 5.6 *Jeśli $\alpha > -1$, to wielomiany Laguerre'a stanowią bazę ortogonalną w $L^2([0, \infty[, e^{-x}x^\alpha)$ z normalizacją*

$$\int_0^\infty L_n^\alpha(x)^2 x^\alpha e^{-x} dx = \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{n!}.$$

Dowód. Załóżmy, że $n \geq m$. Wtedy

$$\begin{aligned} \int_0^\infty L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) x^\alpha e^{-x} dx &= \frac{1}{n!} \int_0^\infty (\partial_x^n x^{n+\alpha} e^{-x}) L_m^\alpha(x) dx \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty x^{n+\alpha} e^{-x} \partial_x^n L_m^\alpha(x) dx. \end{aligned} \quad (5.56)$$

(5.56) równa się zero dla $n > m$.

Niech $n = m$. Z (5.49) i $L_0^\alpha = 1$ wynika $\partial_x^n L_n^\alpha(x) = (-1)^n$. Zatem (5.56) jest równe

$$\frac{1}{n!} \int_0^\infty x^{n+\alpha} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}.$$

□

5.8 Klasyczne wielomiany ortogonalne dla $\deg \sigma = 2$, σ ma pierwiastek podwójny

Można przyjąć, że $\sigma(x) = x^2$.

Jeśli $\tau(0) = 0$, to

$$\mathcal{C} = x^2 \partial_x^2 + cx \partial_x.$$

Funkcjami własnymi tego operatora są co prawda wielomiany x^n , ale waga $\rho(x) = x^{c-2}$ jest niedobra.

Założmy zatem, że $\tau(0) \neq 0$. Przez przeskalowanie można założyć, że

$$\tau(x) = 1 + (\gamma + 2)x.$$

To daje $\rho(x) = e^{-\frac{1}{x}x^\gamma}$. Jedyne punkty, gdzie $\rho(x)\sigma(x) = e^{-\frac{1}{x}x^{\gamma+2}}$ może się zerować jest $x = 0$. Zatem jedynymi możliwymi przedziałami są $[-\infty, 0]$ i $[0, \infty]$. Oba są wyeliminowane przez warunek (3ii).

5.9 Klasyczne wielomiany ortogonalne dla $\deg\sigma = 2$, σ ma dwa pierwiastki

Jeśli oba pierwiastki są różne i urojone, wystarczy założyć, że $\sigma(x) = 1 + x^2$. Można przyjąć, że $\tau(x) = a + (b + 2)x$. Wtedy $\rho(x) = e^{a \arctan x (1 + x^2)^b}$. $\sigma(x)\rho(x)$ nigdzie się nie zeruje i dlatego trzeba rozważać przedział $[-\infty, \infty]$. Przypadek ten odrzucamy, gdyż $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \rho(x)|x|^n(1 + x^2) = \infty$ dla dostatecznie dużych n .

Czyli można założyć, że pierwiastki są różne i rzeczywiste. Wystarczy założyć, że $\sigma(x) = 1 - x^2$. Niech

$$\tau(x) = \beta - \alpha - (\alpha + \beta - 2)x.$$

Dostajemy $\rho(x) = |1 - x|^\beta |1 + x|^\alpha$. Podobnie jak powyżej, warunek (3ii) eliminuje przedziały $[-\infty, -1]$ i $[1, \infty]$. Zostaje przedział $[-1, 1]$, który spełnia warunek (3i) dla $\alpha, \beta > -1$. Prowadzi on do wielomianów Jacobiego omawianych w następnym podrozdziale.

5.10 Wielomiany Jacobiego

Twierdzenie 5.7 *Zdefiniujmy wielomiany Jacobiego*

$$\begin{aligned} P_n^{\alpha, \beta}(x) &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \partial_x^n (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \\ &= \frac{(n+\alpha)_n}{n!} F(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2}). \end{aligned}$$

Spełniają one równanie Jacobiego, które jest nieco zmodyfikowanym równaniem hipergeometrycznym:

$$((1-x^2)\partial_x^2 + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)\partial_x + n(n + \alpha + \beta + 1)) P_n^{\alpha, \beta}(x) = 0.$$

oraz relacje

$$\partial_x P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{\alpha + \beta + n + 1}{2} P_{n-1}^{\alpha+1, \beta+1}, \quad (5.57)$$

$$-\frac{(1-x^2)\partial_x + \beta - \alpha - (\alpha + \beta)x}{2} P_n^{\alpha, \beta}(x) = (n+1) P_{n+1}^{\alpha-1, \beta-1}(x). \quad (5.58)$$

$P_n^{\alpha, \beta}$ są wielomianami stopnia $\leq n$. Jeśli dodatkowo $-\alpha - \beta \notin \{1, 2, \dots\}$, to $P_n^{\alpha, \beta}$ jest wielomianem stopnia n i jest to (z dokładnością do czynnika) jedyny wektor własny operatora $(1-x^2)\partial_x^2 + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)\partial_x$ będący wielomianem stopnia n .

Dowód. Można zastosować Twierdzenie 5.2 dla

$$\sigma(x) = \frac{x^2 - 1}{2}, \quad \rho(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta.$$

Poniżej podajemy dowód bezpośredni. Wprowadźmy “operatory kreacji i anihilacji”

$$\begin{aligned} A^- &= \partial_x, \\ A_{\alpha,\beta}^+ &= -\frac{1}{2}((1-x^2)\partial_x + \beta - \alpha - (\alpha + \beta)x) \\ &= -\frac{1}{2}(1-x)^{-\alpha+1}(1+x)^{-\beta+1}\partial_x(1-x)^\alpha(1+x)^\beta. \end{aligned}$$

Spełniają one relacje

$$A^- A_{\alpha,\beta}^+ - A_{\alpha+1,\beta+1}^+ A^- = \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (5.59)$$

Mamy

$$P_n^{\alpha,\beta} = \frac{A_{\alpha+1,\beta+1}^+ \cdots A_{\alpha+n,\beta+n}^+ 1}{n!}. \quad (5.60)$$

Stąd wynika

$$A_{\alpha,\beta}^+ P_n^{\alpha,\beta} = (n+1)P_{n+1}^{\alpha-1,\beta-1}, \quad (5.61)$$

$$A^- P_n^{\alpha,\beta} = \frac{\alpha + \beta + n + 1}{2} P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}. \quad (5.62)$$

Aby dowieść (5.62) używamy (5.59) i sumujemy szereg arytmetyczny.

Wreszcie (5.61), (5.62) pokazuje, że

$$A_{\alpha+1,\beta+1}^+ A^- P_n^{\alpha,\beta} = \frac{n(\alpha + \beta + n + 1)}{2} P_n^{\alpha,\beta}. \quad (5.63)$$

Ale

$$-\frac{1}{2}(1-x^2)\partial_x^2 + (-\beta + \alpha + (\alpha + \beta)x)\partial_x = A_{\alpha+1,\beta+1}^+ A^-. \quad (5.64)$$

□

Twierdzenie 5.8 *Jeśli $\alpha, \beta > -1$, to wielomiany Jacobiego stanowią bazę ortogonalną w $L^2([-1, 1], (1-x)^\alpha(1+x)^\beta)$ z normalizacją*

$$\int_{-1}^1 (P_n^{\alpha,\beta}(x))^2 (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx = \frac{\Gamma(1+\alpha+n)\Gamma(1+\beta+n)2^{\alpha+\beta+1}}{(1+2n+\alpha+\beta)n!\Gamma(1+\alpha+\beta+n)}.$$

Dowód. Załóżmy, że $n \geq m$. Wtedy

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 P_n^{\alpha,\beta}(x) P_m^{\alpha,\beta}(x) (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 \left(\partial_x^n (1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n} \right) P_m^{\alpha,\beta}(x) dx \\ &= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n} \partial_x^n P_m^{\alpha,\beta}(x) dx. \end{aligned} \quad (5.65)$$

(5.65) równa się zero dla $n > m$.

Niech $n = m$. Z (5.58) i $P_0^{\alpha,\beta} = 1$ wynika $\partial_x^n P_n^{\alpha,\beta}(x) = (\alpha + \beta + n + 1) \cdots (\alpha + \beta + 2n)$. Zatem (5.56) jest równe

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} (\alpha + \beta + n + 1) \cdots (\alpha + \beta + 2n) dx \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{n!} \int_0^1 t^{\alpha+n} (1-t)^{\beta+n} (\alpha + \beta + n + 1) \cdots (\alpha + \beta + 2n) dt \\ &= \frac{\Gamma(1 + \alpha + n) \Gamma(1 + \beta + n) 2^{\alpha+\beta+1}}{(1 + 2n + \alpha + \beta) n! \Gamma(1 + \alpha + \beta + n)}. \end{aligned}$$

□

5.11 Wielomiany ultrasferyczne (Gegenbauera lub Jacobiego z $\alpha = \beta$)

Rozważmy szczególny przypadek wielomianów Jacobiego dla $\alpha = \beta = m$. Wtedy

$$\sigma(x) = \frac{x^2 - 1}{2}, \quad \rho(x) = (1 - x^2)^m.$$

Uwaga 5.9 W literaturze, czasami zamiast wielomianów $P_n^{m,m}(x)$ stosuje się wielomiany Gegenbauera zdefiniowane jako

$$C_n^\lambda(x) := \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda + \frac{1}{2})_n} P_n^{\lambda - \frac{1}{2}, \lambda - \frac{1}{2}}(x).$$

Spełniają one równanie Gegenbauera, które jest równaniem (5.67) z parametrem $\lambda = m + \frac{1}{2}$:

$$((1 - x^2)\partial_x^2 - (2\lambda + 1)x\partial_x + n(n + 2\lambda)) C_n^\lambda(x) = 0. \quad (5.66)$$

Ich zaletą jest następująca funkcja tworząca:

$$(1 - 2xt + t^2)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n C_n^\lambda(x).$$

W zastosowaniach stopień jest dany często przez $n = l - m$. Dla konsystencji z późniejszymi oznaczeniami, zamieniamy x na w . Wielomiany Jacobiego w tym wypadku są zdefiniowane wzorem

$$P_{l-m}^{m,m}(w) = \frac{(-1)^{l-m}}{2^{l-m} (l-m)!} (1 - w^2)^{-m} \partial_w^{l-m} (1 - w^2)^l.$$

Spełniają one równanie

$$((1 - w^2)\partial_w^2 - 2(m+1)w\partial_w + (l-m)(l+m+1)) P_{l-m}^{m,m}(w) = 0. \quad (5.67)$$

Dla $m > -1$ i $l - m = 0, 1, 2, \dots$ stanowią one układ ortogonalny w $L^2([-1, 1], (1 - w^2)^m)$ z normalizacją

$$\int_{-1}^1 (P_{l-m}^{m,m}(w))^2 (1 - w^2)^m dw = \frac{\Gamma(1+l)^2 2^{2m+1}}{(1+2l)(l-m)! \Gamma(1+l+m)}. \quad (5.68)$$

Lemat 5.10 Wyraz o najwyższej potędze $P_{l-m}^{m,m}(w)$ jest równy $w^{l-m} \frac{\Gamma(2l+1)}{2^{l-m}(l-m)!\Gamma(l+m+1)}$.

Dowód. Dla dużych w

$$\begin{aligned} P_{l-m}^{m,m}(w) &= \frac{(-1)^{l-m}}{2^{l-m}(l-m)!} (-w^2)^{-m} \partial_w^{l-m} (-w^2)^l \\ &= w^{l-m} \frac{2l \cdots (l-m+1)}{2^{l-m}(l-m)!}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 5.11 Niech $l = 0, 1, \dots$, $m = 0, 1, \dots, l$. Wtedy

$$P_{l+m}^{-m,-m}(w) = \frac{(-1)^m (1-w^2)^m}{2^{2m}} P_{l-m}^{m,m}(w). \quad (5.69)$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że

$$\begin{aligned} &(1-w^2)^m \left((1-w^2) \partial_w^2 - 2(m+1)w \partial_w + (l-m)(l+m+1) \right) (1-w^2)^{-m} \\ &= \left((1-w^2) \partial_w^2 - 2(-m+1)w \partial_w + (l+m)(l-m+1) \right). \end{aligned} \quad (5.70)$$

Zatem operator (5.70) anihiluje zarówno $(1-w^2)^m P_{l-m}^{m,m}(w)$ jak i $P_{l+m}^{-m,-m}(w)$. Obie funkcje są wielomianami, pierwsza ma najstarszy wyraz $w^{l-m+2m} (-1)^m \frac{(2l)!}{2^{l-m}(l-m)!(l+m)!}$, druga ma najstarszy wyraz $w^{l+m} \frac{2^{l+m}(2l)!}{(l-m)!(l+m)!}$. \square

5.12 Wielomiany Legendre'a

Szczególnie ważnym przypadkiem wielomianów Jacobiego jest $\alpha = \beta = 0$ (co dla wielomianów Gegenbauera odpowiada $\lambda = \frac{1}{2}$). Mamy wtedy

$$\sigma(w) = \frac{w^2 - 1}{2}, \quad \rho(w) = 1.$$

Dostajemy wtedy wielomiany Legendre'a:

$$P_l(w) := P_l^{0,0}(w) = C_l^{\frac{1}{2}}(w) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \partial_w^l (1-w^2)^l.$$

Spełniają one równanie Legendre'a

$$\left((1-w^2) \partial_w^2 - 2w \partial_w + l(l+1) \right) P_l(w) = 0. \quad (5.71)$$

Stanowią one układ ortogonalny w $L^2([-1, 1])$ z normalizacją

$$\int_{-1}^1 P_l(w)^2 dw = \frac{2}{(1+2l)}.$$

Mamy $P_0 = 1$, $P_1(w) = w$, $P_2(w) = \frac{1}{2}(3w^2 - 1)$.

Twierdzenie 5.12 *Wielomian Legendre'a jest jedynym rozwiązaniem równania Legendre'a spełniającym $P_l(1) = 1$.*

Dowód. Przez indukcję sprawdzamy, że dla $k = 1, \dots, l$,

$$\partial_w^k (1-w^2)^l = (-1)^k (2w)^k l \cdots (l-k+1) (1-w^2)^{l-k} + C(w) (1-w^2)^{l-k+1},$$

gdzie $C(w)$ jest wielomianem. Kładąc $k = l$ i stosując wzór Rodrigueza dostajemy $P_l(1) = 1$. Jedyność wynika z bardziej ogólnego faktu dotyczącego równania Jacobiego. \square

6 Harmoniki sferyczne

6.1 Operator translacji

W $L^2(\mathbb{R})$ dla $t \in \mathbb{R}$ definiujemy rodzinę operatorów

$$(U_t)f(x) := f(x-t).$$

Zauważmy, że są one unitarne, spełniają $U_t U_s = U_{t+s}$, $U_t = 1$. Zdefiniujmy generator translacji ∂_x . W mechanice kwantowej zwyczajowo zamiast niego używa się operatora pędu $p = \frac{1}{i} \partial_x$, który jest hermitowski na $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Mamy

$$\frac{d}{dt} U_t f = -\partial_x U_t f.$$

Dlatego też piszemy

$$U_t = e^{-t\partial_x}.$$

6.2 Operator obrotu w $L^2(\mathbb{R}^2)$

W $L^2(\mathbb{R}^2)$ dla $\psi \in \mathbb{R}$ definiujemy rodzinę operatorów

$$(R_\psi f)(x, y) := f(\cos \psi x + \sin \psi y, -\sin \psi x + \cos \psi y).$$

Zauważmy, że są one unitarne i spełniają $R_{\psi_1} R_{\psi_2} = R_{\psi_1 + \psi_2}$, $R_0 = 1$.

Zdefiniujmy generator obrotów

$$L = x\partial_y - y\partial_x.$$

W mechanice kwantowej zwyczajowo zamiast niego używa się operatora momentu pędu $\frac{1}{i}L$, który jest hermitowski. Pokażmy, że

$$\frac{d}{d\psi} R_\psi f = -LR_\psi. \tag{6.72}$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$\tilde{x} := x \cos \psi + y \sin \psi, \quad \tilde{y} := -x \sin \psi + y \cos \psi.$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\psi} R_\psi f(x, y) &= (-x \sin \psi + y \cos \psi) \partial_{\tilde{x}} f(\tilde{x}, \tilde{y}) \\
&\quad + (-x \cos \psi - y \sin \psi) \partial_{\tilde{y}} f(\tilde{x}, \tilde{y}), \\
LR_\psi f(x, y) &= x(\sin \psi \partial_{\tilde{x}} + \cos \psi \partial_{\tilde{y}}) f(\tilde{x}, \tilde{y}) \\
&\quad - y(\cos \psi \partial_{\tilde{x}} - \sin \psi \partial_{\tilde{y}}) f(\tilde{x}, \tilde{y}),
\end{aligned}$$

co dowodzi (6.72). Dlatego też piszemy

$$R_\psi = e^{-\psi L}.$$

6.3 Współrzędne biegunowe

Wprowadźmy współrzędne biegunowe

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi.$$

Zamiana współrzędnych kartezjańskich na biegunowe można interpretować jako odwzorowanie unitarne $U : L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2([0, \infty[\times [0, 2\pi], r dr d\phi)$ zdefiniowane przez

$$(Uf)(r, \phi) := f(r \cos \phi, r \sin \phi).$$

We współrzędnych biegunowych operator R_ψ działa jak

$$(U^{-1} R_\psi U f)(r, \phi) = f(r, \phi - \psi).$$

Generator przybiera postać $(U^{-1} L U) f = \partial_\phi$.

6.4 Przestrzeń $L^2(\mathbb{R}^d)$

Rozważmy $L^2(\mathbb{R}^d)$. W tej przestrzeni działają operatory unitarne translacji $e^{-t\partial_{x_i}}$, obrotu $e^{-\psi L_{ij}}$ i skalowania $e^{s(D+\frac{d}{2})}$, gdzie

$$\begin{aligned}
L_{ij} &= x_i \partial_{x_j} - x_j \partial_{x_i}, \\
D &= x_1 \partial_{x_1} + \cdots + x_d \partial_{x_d}.
\end{aligned}$$

6.5 Laplasjan

Definiujemy Laplasjan jak

$$\Delta = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2.$$

Latwo się przekonać, że Δ jest niezmienniczy ze względu na te transformacje translacje i obroty:

$$\begin{aligned}
e^{-t\partial_{x_i}} \Delta &= \Delta e^{-t\partial_{x_i}}, \\
e^{-\psi L_{ij}} \Delta &= \Delta e^{-\psi L_{ij}}.
\end{aligned}$$

6.6 Kwadrat momentu pędu

Zdefiniujmy

$$\Delta_{\text{LB}} := \sum_{i < j} L_{ij}^2$$

Zauważmy, że dla każdego ij ,

$$e^{-\psi L_{ij}} \Delta_{\text{LB}} = \Delta_{\text{LB}} e^{-\psi L_{ij}}.$$

Czyli operator Δ_{LB} jest niezmienniczy ze względu na obroty. Jest on też niezmienniczy ze względu na skalowanie i mnożenie przez r :

$$\begin{aligned} e^{-s(D + \frac{d}{2})} \Delta_{\text{LB}} &= \Delta_{\text{LB}} e^{-s(D + \frac{d}{2})}, \\ r \Delta_{\text{LB}} &= \Delta_{\text{LB}} r. \end{aligned}$$

6.7 Laplasjan i operator laplace'a-Beltramiego we współrzędnych sferycznych

Załóżmy, że $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_{d-1})$ są współrzędnymi na sferze.

Dołączając $r := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$ do współrzędnych $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_{d-1})$ dostajemy współrzędne w \mathbb{R}^d . (Takie współrzędne można nazwać "uogólnionymi współrzędnymi sferycznymi").

Twierdzenie 6.1

$$D = r \partial_r, \tag{6.73}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \partial_r r^{d-1} \partial_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\text{LB}} \\ &= \partial_r^2 + \frac{d-1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\text{LB}}. \end{aligned} \tag{6.74}$$

Poza tym, L_{ij} i Δ_{LB} zależą tylko od współrzędnych Ω na sferze.

Dowód. Można zapisać

$$D = c_0(r, \Omega) \partial_r + \sum_{j=1}^{d-1} c_j(r, \Omega) \partial_{\omega_j}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} D \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2} &= \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}, \\ D \frac{x_j}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}} &= 0, \quad j = 1, d. \end{aligned}$$

Z drugiego wzoru wynika, że $D \omega_j = 0$, $j = 1, \dots, d-1$. Z pierwszego wynika, że $c_0(r, \Omega) = r$. To dowodzi (6.73).

Mamy

$$L_{ij}^2 = x_i^2 \partial_{x_j}^2 + x_j^2 \partial_{x_i}^2 - x_i x_j \partial_{x_i} \partial_{x_j} - x_i \partial_{x_i} - x_j \partial_{x_j}.$$

Dlatego

$$\begin{aligned} \sum_{i < j} L_{ij}^2 &= \sum_{i \neq j} x_i^2 \partial_{x_j}^2 - \sum_{i \neq j} x_i x_j \partial_{x_i} \partial_{x_j} - (d-1) \sum_i x_i \partial_{x_i} \\ &= \sum_{i,j} x_i^2 \partial_{x_j}^2 - \sum_{i,j} x_i x_j \partial_{x_i} \partial_{x_j} - (d-1) \sum_i x_i \partial_{x_i} \\ &= \sum_{i,j} x_i^2 \partial_{x_j}^2 - \left(\sum_i x_i \partial_{x_i} \right)^2 - (d-2) \sum_i x_i \partial_{x_i} \\ &= r^2 \Delta - D^2 - (d-2)D. \end{aligned}$$

To dowodzi (6.74).

Mamy $L_{ij}r = rL_{ij}$. To dowodzi, że w L_{ij} nie występuje pochodna po r .

Mamy również $L_{ij}D = DL_{ij}$. Korzystając z tego, że $D = r\partial_r$ widzimy, że w L_{ij} nie występuje zależność od r .

Ponieważ Δ_{LB} wyraża się poprzez L_{ij} , widzimy, że Δ_{LB} również nie zawiera ∂_r ani żadnej zależności od r . \square

6.8 Przestrzeń $L^2(S^{d-1})$

Niech

$$S^{d-1} := \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_1^2 + \dots + x_d^2 = 1\}$$

oznacza sferę jednostkową w \mathbb{R}^d . Przez $d\Omega$ będziemy oznaczać miarę naturalną na sferze. Jest to miara, która jest niezmiennicza ze względu na obroty i cała sfera ma objętość $\frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$. Możemy wprowadzić przestrzeń Hilberta $L^2(S^{d-1})$ składającą się z funkcji mierzalnych na S^{d-1} takich, że

$$\int |f(\Omega)|^2 d\Omega < \infty,$$

z iloczynem skalarnym

$$(f|g) = \int \overline{f(\Omega)} g(\Omega) d\Omega.$$

Zamiana współrzędnych kartezjańskich na biegunowe można interpretować jako odwzorowanie unitarne $U : L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2([0, \infty[\times [0, 2\pi], r^{d-1} dr d\Omega)$ zdefiniowane przez

$$(Uf)(r, \Omega) := f(x_1, \dots, x_d).$$

Operatory obrotu $Ue^{\psi L_{ij}}U^{-1}$ i operator $U\Delta_{\text{LB}}U^{-1}$ działają tylko na współrzędne Ω . Można zatem zinterpretować je jako operatory działający wyłącznie na $L^2(S^{D-1})$. Tak zinterpretowane operatory będziemy oznaczali również $e^{\psi L_{ij}}$ i Δ_{LB} (co jest pewnym nadużyciem). Operatory $e^{\psi \tilde{L}_{ij}}$ są unitarne na $L^2(S^{d-1} d\Omega)$. Operator Δ_{LB} jest samosprzężony na $L^2(S^{d-1} d\Omega)$ i nazywamy go operatorem Laplace'a-Beltramiego na sferze. Naszym głównym zadaniem będzie teraz diagonalizacja Δ_{LB} .

6.9 Wielomiany wielu zmiennych

Wielomianem zależnym od zmiennych x_1, \dots, x_d nazywamy skończoną kombinacją liniową wyrażeń postaci

$$x_1^{k_1} \cdots x_d^{k_d}.$$

Czyli są to funkcje postaci

$$P(x_1, \dots, x_d) = \sum_{k_1, \dots, k_d} P_{k_1, \dots, k_d} x_1^{k_1} \cdots x_d^{k_d}.$$

Stopień wielomianu P definiujemy jako

$$\deg P := \max\{k_1 + \cdots + k_d : P_{k_1, \dots, k_d} \neq 0\}.$$

6.10 Wielomiany jednorodne wielu zmiennych

Mówimy, że P jest wielomianem jednorodnym stopnia l , gdy

$$P(\lambda x_1, \dots, \lambda x_d) = \lambda^l P(x_1, \dots, x_d).$$

Innymi słowy, mamy wtedy

$$P(x_1, \dots, x_d) = \sum_{k_1 + \cdots + k_d = l} P_{k_1, \dots, k_d} x_1^{k_1} \cdots x_d^{k_d}.$$

Niech Pol^l oznacza przestrzeń wielomianów jednorodnych stopnia l

Twierdzenie 6.2 *Wymiar przestrzeni wielomianów jednorodnych l -tego stopnia d zmiennych wynosi*

$$\dim \text{Pol}^l := \binom{d+l-1}{d-1} = \frac{(d+l-1)!}{(d-1)!l!}. \quad (6.75)$$

Dowód. Rozważmy $d+l-1$ białych kulek ustawionych w rząd. Zaczerniamy $d-1$ spośród nich. Dostajemy n rzędów białych kulek. W j -tym rzędzie jest k_j kulek, w sumie $k_1 + \cdots + k_d = d+l-1 - (d-1) = l$. Liczba możliwych takich konfiguracji wynosi tyle ile $d-1$ elementowych kombinacji w zbiorze $l+d-1$ -elementowym, czyli (6.75). \square

6.11 Wielomiany harmoniczne

Mówimy, że wielomian H jest wielomianem harmonicznym, jeśli

$$\Delta H = 0.$$

Niech Har^l oznacza przestrzeń wielomianów harmonicznych jednorodnych stopnia l .

Twierdzenie 6.3 *Wymiar przestrzeni wielomianów harmonicznych jednorodnych stopnia l w wymiarze d wynosi $\dim \text{Har}^l = \dim \text{Pol}^l - \dim \text{Pol}^{l-2}$.*

Dowód. Niech H będzie wielomianem jednorodnym stopnia l . Wtedy ΔH jest wielomianem jednorodnym stopnia $l-2$. Dostajemy zatem operator liniowy $\Delta_l : \text{Pol}^l \rightarrow \text{Pol}^{l-2}$. Ale $\text{Ker}\Delta_l = \text{Har}^l$. Zatem

$$\begin{aligned} \dim \text{Pol}^l &= \dim \text{Ran}\Delta_l + \dim \text{Ker}\Delta_l \\ &\leq \dim \text{Pol}^{l-2} + \dim \text{Har}^l. \end{aligned}$$

Niech $P \in \text{Pol}^{l-2}$. Twierdzę, że $x_1^2 P$ jest harmoniczny tylko gdy $P = 0$. Zawsze bowiem można zapisać $P = P_k x_1^{l-k-2}$, gdzie P_k jest wielomianem stopnia k nie zawierającym x_1 . Niech $x_1^2 P$ będzie harmoniczny. Wtedy

$$\begin{aligned} 0 = \Delta x_1^2 P &= \sum (l-k)(l-k-1)x_1^{l-k-2}P_k + \sum x_1^{l-k}\Delta P_k \\ &= \sum x_1^{l-k-2}((l-k)(l-k-1)P_k + \Delta P_{k+2}). \end{aligned} \quad (6.76)$$

Niech k_0 będzie najwyższym stopniem dla którego $P_{k_0} \neq 0$. Wtedy $\Delta P_{k_0+2} = 0$. Każdy z wyrazów w sumie (6.76) musi być zero. Dlatego $(l-k_0)(l-k_0-1)P_{k_0} = 0$, co jest niemożliwe, bo $k_0 \leq l-2$.

Czyli jeśli T_{l-2} jest operatorem mnożenia przez x_1^2 na Pol^{l-2} , to

$$\begin{aligned} \dim \text{Pol}^l &\geq \dim \text{Ran}T_{l-2} + \dim \text{Har}^l \\ &= \dim \text{Pol}^{l-2} + \dim \text{Har}^l. \end{aligned}$$

□

A oto przykłady wielomianów harmonicznych jednorodnych:

Wymiar $d = 2$. Wielomiany harmoniczne jednorodne stopnia $m \geq 1$ we współrzędnych kartezjańskich i biegunowych:

$$(x \pm iy)^m = r^m e^{\pm i\phi}.$$

$h_{1,0} = 1, h_{1,l} = 2, l \geq 1$.

Wymiar $d = 3$. Wielomiany harmoniczne jednorodne stopnia $l \geq 1$ we współrzędnych kartezjańskich i sferycznych

$$(x \sin \psi - y \cos \psi \pm iz)^l = r^l (\sin \theta \sin(\phi - \psi) \pm i \cos \theta)^l$$

$h_{2,l} = 2l + 1$.

6.12 Harmoniki sferyczne

Mówimy, że funkcja $Y : S^{d-1} \rightarrow \mathbb{C}$ jest harmoniką sferyczną stopnia l , jeśli istnieje harmoniczny wielomian H jednorodny stopnia l taki, że Y jest obcięciem H do sfery. Równoważny warunek:

$$(x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{\frac{l}{2}} Y \left(\frac{x_1, \dots, x_d}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}} \right)$$

jest wielomianem harmonicznym

A oto przykłady harmonik sferycznych:

Wymiar $d = 2$ Rozważamy współrzędne biegunowe: Harmoniki sferyczne stopnia m :

$$e^{\pm im\phi}.$$

Wymiar $d = 3$ Rozważamy współrzędne kartezjańskie i sferyczne: Harmoniki sferyczne stopnia l :

$$(\cos\theta \sin(\phi + \psi) \pm i \sin\theta)^l.$$

Twierdzenie 6.4 Niech Y_l będzie harmoniką sferyczną stopnia l . Wtedy

$$\Delta_{\text{LB}} Y_l = -l(l + d - 2)Y_l.$$

Dowód.

$$\begin{aligned} 0 = \Delta r^l Y_l &= \left(\partial_r r^{d-1} \partial_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\text{LB}} \right) r^l Y_l \\ &= l(l + d - 2) r^{l-2} Y_l + r^{l-2} \Delta_{\text{LB}} Y_l. \end{aligned}$$

□

Harmoniki sferyczne stopnia l tworzą podprzestrzeń w $L^2(S^{d-1})$. Oznaczmy ją przez $\mathcal{H}_{d,l}$.

Twierdzenie 6.5 (1) $\mathcal{H}_{d,l}$ jest przestrzenią wektorów własnych operatora Δ_{LB} na $L^2(S^{d-1})$ z wartością własną $l(l + d - 2)$.

(2) $\mathcal{H}_{d,l}$ są wzajemnie ortogonalne dla różnych l .

(3) Kombinacje liniowe elementów \mathcal{H}_l są gęste w $L^2(S^{d-1})$.

(4) Operatory obrotu $e^{\psi L_{ij}}$ zachowują $\mathcal{H}_{d,l}$.

Dowód. (2) wynika z (1) i z tego, że Δ_{LB} jest operatorem samosprężonym na $L^2(S^{d-1})$.

(3) wynika z Twierdzenia Stone'a-Weierstrassa, które mówi, że wielomiany są gęste przestrzeni funkcji ciągłych na zwartym podzbiorze S^{d-1} w normie supremum. Z kolei funkcje ciągłe są gęste w $L^2(S^{d-1})$.

(4) wynika z tego, że $e^{\psi L_{ij}} \Delta_{\text{LB}} = \Delta_{\text{LB}} e^{\psi L_{ij}}$. □

(2) i (3) można razem wyrazić równością $L^2(S^{d-1}) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{H}_{d,l}$.

6.13 Standardowa baza harmonik sferycznych w $L^2(S^2)$

Rozważamy S^2 we współrzędnych sferycznych

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \quad y = r \sin\theta \sin\phi, \quad z = r \cos\theta.$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \phi = \arctan \frac{y}{x}.$$

Macierz Jacobiego jest równa

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} & \frac{\cos \theta \sin \phi}{r} & -\frac{\sin \theta}{r} \\ -\frac{\sin \phi}{r \sin \theta} & \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} & 0 \end{bmatrix}.$$

Dalej dostajemy, podstawiając $w = -\cos \theta$,

$$\begin{aligned} L_x &= y\partial_z - z\partial_y = -\sin \phi \partial_\theta - \frac{\cos \theta \cos \phi}{\sin \theta} \partial_\phi \\ &= -\sin \phi \sqrt{1-w^2} \partial_w + \frac{w}{\sqrt{1-w^2}} \cos \phi \partial_\phi, \\ L_y &= z\partial_x - x\partial_z = -\cos \phi \partial_\theta - \frac{\cos \theta \sin \phi}{\sin \theta} \partial_\phi \\ &= \cos \phi \sqrt{1-w^2} \partial_w + \frac{w}{\sqrt{1-w^2}} \sin \phi \partial_\phi, \\ L_z &= x\partial_y - y\partial_x = \partial_\phi. \end{aligned}$$

Operator Laplace'a Beltramiego na S^2 ma postać

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{LB}} &= \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta + \frac{\partial_\phi^2}{\sin^2 \theta} \\ &= \partial_w (1-w^2) \partial_w + \frac{\partial_\phi^2}{1-w^2} \\ &= (1-w^2) \partial_w^2 - 2w \partial_w + \frac{\partial_\phi^2}{1-w^2}, \end{aligned}$$

gdzie $w = \cos \theta$, $\partial_\theta = (1-w^2)^{\frac{1}{2}} \partial_w$.

Szukamy harmonik sferycznych w postaci $Y(\theta, \phi) = f(\cos \theta) e^{im\phi}$. Dostajemy równanie

$$\left(\partial_w (1-w^2) \partial_w - \frac{m^2}{1-w^2} + l(l+1) \right) f(w) = 0 \quad (6.77)$$

(6.77) znane jest jako stowarzyszone równanie Legendre'a. Równanie to można przekształcić do równania Jacobiego z $\alpha = \beta = m$ (równania Gegenbauera):

$$\begin{aligned} &(1-w^2)^{-\frac{m}{2}} \left((1-w^2) \partial_w^2 - 2w \partial_w - \frac{m^2}{1-w^2} + l(l+1) \right) (1-w^2)^{\frac{m}{2}} \\ &= (1-w^2) \partial_w^2 - (2+2m)w \partial_w + (l-m)(l+m+1), \end{aligned}$$

(patrz (5.70)). Pamiętamy, że wielomiany Jacobiego $P_{l-m}^{m,m}$ spełniają

$$((1-w^2) \partial_w^2 - (2+2m)w \partial_w + (l-m)(l+m+1)) P_{l-m}^{m,m}(w) = 0.$$

Zatem

$$e^{\pm im\phi} (1-w^2)^{\frac{m}{2}} P_{l-m}^{m,m}(w) = (-1)^{l-m} e^{\pm im\phi} \sin^m(\theta) P_{l-m}^{m,m}(\cos \theta). \quad (6.78)$$

są harmonikami sferycznymi stopnia l .

Standardowa miara na sferze wynosi

$$d\Omega = \cos \theta d\theta d\phi = dw d\phi.$$

Jedną ze standardowych normalizacji harmonik (6.78) jest

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(l+1) \cdots (l+|m|)}{(l-|m|+1) \cdots l}} 2^{-m} e^{im\phi} \sin^{|m|}(\theta) P_{l-|m|}^{|m|,|m|}(\cos \theta).$$

Twierdzenie 6.6 Funkcje $Y_{l,m}$ stanowią bazę ortogonalną w $L^2(S^2)$ spełniającą

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_\pi^\pi d\phi |Y_{l,m}(\theta, \phi)|^2 = \frac{4\pi}{1+2l}.$$

Dowód. Dla różnych $m_1 \neq m_2$, iloczyn skalarny $(Y_{l_1, m_1} | Y_{l_2, m_2})$ znika po przecałkowaniu po ϕ .

W dalszym ciągu, wystarczy założyć, że $m \geq 0$. Wielomiany Jacobiego $P_n^{m,m}$ stanowią bazę ortogonalną w $L^2([-1, 1], (1-w^2)^m)$. Spełniają one

$$\int_{-1}^1 P_{l-m}^{m,m}(w)^2 (1-w^2)^m dw = \frac{2^{2m+1} l \cdots (l-m+1)}{(1+2l)(l+1) \cdots (l+m)}.$$

(Patrz (5.68)). Dlatego,

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{-\pi}^\pi d\phi \bar{Y}_{l_1, m}(\theta, \phi) Y_{l_2, m}(\theta, \phi) \\ &= 2^{-2m} 2\pi \sqrt{\frac{(l_1+1) \cdots (l_1+m)}{l_1 \cdots (l_1-m+1)}} \sqrt{\frac{(l_2+1) \cdots (l_2+m)}{l_2 \cdots (l_2-m+1)}} \int_{-1}^1 dw (1-w^2)^m P_{l_1-m}^{m,m}(w) P_{l_2-m}^{m,m}(w) \\ &= \delta_{l_1, l_2} \frac{4\pi}{2l_1+1}. \end{aligned}$$

□

6.14 Potencjał elektrostatyczny

Mówimy, że funkcja f jest harmoniczna, jeśli $\Delta f = 0$. Przykładem funkcji harmonicznej na $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ jest $(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$. Po przesunięciu też jest harmoniczna. Zatem

$$(x^2 + y^2 + (z-1)^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{6.79}$$

jest harmoniczne na $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 1)\}$

Twierdzenie 6.7 Dla $|r| < 1$ i $-1 \leq w \leq 1$ mamy

$$(r^2 - 2r \cos \theta + 1)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(w). \tag{6.80}$$

Zatem

$$P_l(w) = \frac{1}{l!} \partial_r^l (r^2 - 2rw + 1)^{-\frac{1}{2}} \Big|_{r=0}. \tag{6.81}$$

Dowód. Funkcja $r \mapsto (r^2 - 2r \cos \theta + 1)^{-\frac{1}{2}}$ ma punkty rozgałęzienia tam gdzie zeruje się $r^2 - 2r \cos \theta + 1$, czyli w $r = w \pm i\sqrt{1 - w^2}$. Zatem w kole $|r| < 1$ jest analityczna i można ją rozwinąć w szereg względem r .

Funkcja (6.79) we współrzędnych biegunowych jest równa $(r^2 - 2r \cos \theta + 1)^{-\frac{1}{2}}$.

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta(r^2 - 2rw + 1)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \left((1 - w^2) \partial_w^2 - 2w \partial_w + \frac{1}{1 - w^2} \partial_\phi^2 \right) \right) \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(w) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} r^{l-2} (l(l-1) + 2l + (1 - w^2) \partial_w^2 - 2w \partial_w) P_l(w). \end{aligned}$$

Zatem $P_l(w)$ spełniają l -te równanie Legendre'a

$$((1 - w^2) \partial_w^2 - 2w \partial_w + l(l+1)) P_l(w). \quad (6.82)$$

Ze wzoru (6.81) łatwo wynika, że $P_l(w)$ są wielomianami l -tego stopnia. Zatem $P_l(w)$ muszą być proporcjonalne do wielomianów Legendre'a.

Kładziemy $w = 1$:

$$\begin{aligned} (r^2 - 2r + 1)^{-\frac{1}{2}} &= (1 - r)^{-1} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} r^l = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(1). \end{aligned}$$

Zatem $P_l(w)$ są wielomianami Legendre'a. \square

Ladunek elektrostatyczny 4π umieszczony w $(0, 0, r)$ wywołuje punkcie oddalonym o R od centrum i pod kątem $\cos \theta = w$ potencjał

$$(R^2 - 2Rrw + r^2)^{-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} r^l R^{-l-1} P_l(w), & R > r; \\ \sum_{l=0}^{\infty} R^l r^{-l-1} P_l(w), & R < r. \end{cases}$$

6.15 Funkcje Legendre'a

Niech $l = 0, 1, \dots$ i $m = -l, \dots, l$. Wprowadza się często tzw. funkcje Legendre'a

$$\begin{aligned} P_l^m(w) &:= \frac{2^{-m} (l+m)!}{l!} (1-w^2)^{\frac{m}{2}} P_{l+m}^{m,m}(w), & \text{lub} \\ P_l^m(w) &:= (-1)^m \frac{2^{-m} (l+m)!}{l!} (1-w^2)^{\frac{m}{2}} P_{l+m}^{m,m}(w). \end{aligned}$$

(Pierwszy wzór stosuje tzw. konwencję Condon-Shockley'a). Są one rozwiązaniami stowarzyszonego równania Legendre'a (6.77).

Niech $l = 0, 1, \dots$ i $m = 0, \dots, l$. Mamy wtedy tożsamości dla wielomianów Jacobiego

$$\begin{aligned} 2^{-m}(1-w^2)^{\frac{m}{2}}P_{l+m}^{m,m}(w) &= 2^m(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}P_{l+m}^{-m,-m}(w) \\ &= \frac{(-1)^{l-m}}{2^l(l+m)!}(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}\partial_w^{l+m}(1-w^2)^l \\ &= \frac{(-1)^{ml}}{(l+m)!}(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}\partial_w^m P_l(w). \end{aligned}$$

Dlatego też dla stowarzyszone funkcje Legendre'a można wyrazić poprzez wielomiany Legendre'a

$$\begin{aligned} P_l^m(w) &:= (-1)^m(1-w^2)^{\frac{m}{2}}\partial_w^m P_l(w), \quad \text{lub} \\ P_l^m(w) &:= (1-w^2)^{\frac{m}{2}}\partial_w^m P_l(w). \end{aligned}$$

Mamy też tożsamość

$$P_l^{-m}(w) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(w).$$

Dostajemy więc następujące wyrażenie harmonik sferycznych (stosujemy konwencję Condon-Shockleya):

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = \frac{(-1)^m e^{im\phi}}{\sqrt{(l-m+1)\cdots(l+m)}} P_l^m(\cos \theta).$$