

Funkcje analityczne. Funkcja Gamma.

Jan Dereziński

Katedra Metod Matematycznych Fizyki
Uniwersytet Warszawski
Hoża 74, 00-682, Warszawa
e-mail jan.derezinski@fuw.edu.pl

20 grudnia 2009

Metody Matematyczne Fizyki, skrypt I

rok 2010

Spis treści

1	Płaszczyzna zespolona	3
1.1	Ciało liczb zespolonych	3
1.2	$GL(2, \mathbb{C})$	4
1.3	Liczby zespolone jako podgrupa $M(2, \mathbb{R})$	5
1.4	Odwzorowania afiniczne	5
2	Sfera Riemanna	6
2.1	Sfera Riemanna	6
2.2	Homografie	6
2.3	Własności homografii	8
2.4	Okręgi uogólnione	9
2.5	Krzywe na sferze Riemanna	10
2.6	Grupa $U(2)$	10
2.7	Grupa $U(1, 1)$ i $SL(2, \mathbb{R})$	11
2.8	Podgrupa homografii zachowująca punkty antypodalne	13
2.9	Podgrupy homografii zachowujących koło uogólnione	13
3	Rzut stereograficzny	14
3.1	Geometria sfery	14
3.2	Izomorfizm $PSU(2)$ i $SO(3)$	15
3.3	Rzut stereograficzny sfery	15
3.4	* Geometria płaszczyzny hiperbolicznej	16

3.5	* Izomorfizm $PSU(1, 1)$ i $SO^\uparrow(2, 1)$	17
3.6	* Rzut stereograficzny hiperboloidy	17
3.7	* Izomorfizm $PSL(2, \mathbb{C})$ i $SO(3, \mathbb{C})$	18
3.8	* Rzut stereograficzny zespolony	19
4	Funkcje analityczne	20
4.1	Definicja funkcji analitycznych	20
4.2	Krzywe	23
4.3	Całki wzdłuż krzywych	23
4.4	Twierdzenie Cauchy'ego i jego konsekwencje	24
4.5	Związki dyspersyjne	25
4.6	Szeregi potęgowe	26
4.7	Funkcja wykładnicza	29
4.8	Funkcja logarytm i funkcja potęgowa	30
4.9	Punkty osobliwe funkcji analitycznych	32
4.10	Funkcje analityczne a punkt w nieskończoności	35
4.11	Funkcje analityczne z $\overline{\mathbb{C}}$ w $\overline{\mathbb{C}}$	37
5	Przedłużenie analityczne	37
5.1	Jednoznaczność przedłużania funkcji analitycznych	37
5.2	Przedłużanie funkcji analitycznych wzdłuż drogi	38
5.3	Notacja do oznaczania krzywych	40
5.4	* Powierzchnie Riemanna i funkcje analityczne wieloznaczne	42
5.5	* Homotopia krzywych	43
5.6	* Składanie krzywych i grupa homotopii	44
5.7	* Nakrycie uniwersalne	45
5.8	* Nakrycie wyznaczone przez podgrupę grupy homotopii	45
5.9	* Funkcja pierwotna	46
5.10	* Funkcja logarytm i potęgowa	46
5.11	* Funkcja $z^\alpha(z - 1)^\beta$	46
6	Separacja zmiennych w równaniu Helmholtza	47
6.1	Równanie Helmholtza we współrzędnych kartezjańskich	47
6.2	Zamiana zmiennych w laplasjanie	48
6.3	Równanie Helmholtza we współrzędnych biegunowych	49
6.4	Równanie Helmholtza we współrzędnych parabolicznych	50
6.5	Równanie Helmholtza we współrzędnych eliptyczno-hiperbolicznych	50
6.6	Operatory ∂_z i $\partial_{\bar{z}}$	51
6.7	Kiedy transformacja zmiennych w \mathbb{R}^2 separuje równanie Helmholtza?	51
7	Funkcja Gamma Eulera	52
7.1	Funkcja Gamma jako uogólnienie silni i II całka Eulera	52
7.2	I całka Eulera i dalsze tożsamości	54
7.3	Funkcja Gamma i całki w dziedzinie zespolonej	56

7.4	Iloczyny nieskończone	58
7.5	Funkcje trygonometryczne jako iloczyny nieskończone	59
7.6	Funkcja Gamma a iloczyny nieskończone	59
7.7	Pewne całki z parametrem	61
7.8	Pochodna logarytmiczna funkcji Gamma	63
7.9	Szeregi asymptotyczne	63
7.10	Pierwszy wzór Bineta	64
7.11	Wzór Plany i drugi wzór Bineta	66
8	Zastosowania	67
8.1	Jednorodne dystrybucje i ich transformaty Fouriera	67
8.2	Całki wielowymiarowe	68
8.3	Macierze	70
8.4	Wielowymiarowe całki Gaussa i Fresnela	70
8.5	Metoda Laplace'a (punktu siodłowego)	71
8.6	Asymptotyka funkcji Gamma w nieskończoności metodą punktu siodłowego.	73
8.7	Asymptotyka funkcji Beta w nieskończoności metodą punktu siodłowego	74
8.8	Wielowymiarowa wersja metody Laplace'a (bez przedłużenia analitycznego)	75
8.9	Metoda fazy stacjonarnej	76
8.10	Równanie dyfuzji i Schrödingera	76
8.11	Transformacja Legendre'a	78
8.12	Dyspersyjne równanie Schrödingera z parametrem \hbar	79
8.13	Granica semiklasyczna dyspersyjnej ewolucji	79
8.14	Równanie Kleina-Gordona/falowe	80

Gwiazdką * oznaczone są podrozdziały o nieco bardziej zaawansowanej treści, które mogą być pominięte przy lekturze.

1 Płaszczyzna zespolona

1.1 Ciało liczb zespolonych

Liczby zespolone definiujemy jako $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ wyposażone w działanie

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_1 + y_1y_2).$$

Jest to ciało. Wprowadzamy oznaczenie $i := (0, 1)$. Zanurzamy $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ przez

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto (x, 0) \in \mathbb{C}.$$

Jest to homomorfizm ciał. Każdy element \mathbb{C} może być zapisany jako

$$z = x + iy = (x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Wprowadźmy odwzorowanie

$$z = x + iy \mapsto \bar{z} := x - iy.$$

Jest ono jest automorfizmem ciała \mathbb{C} , tzn jest to bijekcja spełniająca

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

Definiujemy też

$$\operatorname{Re} z := x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z := y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}),$$

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Mamy

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

Kładziemy

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &:= \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}, & \mathbb{C}_+ &:= \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}, \\ \mathbb{R}^\times &:= \mathbb{R} \setminus \{0\}, & \mathbb{C}^\times &:= \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ K(z_0, r) &:= \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}, & \text{gdzie } z_0 \in \mathbb{C}, r > 0. \end{aligned}$$

Wygodnie jest wprowadzić notację $\chi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\chi(z) = (x, y)$ dla $z = x + iy$.

1.2 $GL(2, \mathbb{C})$

Zbiór macierzy 2 na 2 oznaczamy przez $M(2, \mathbb{C})$. Typowa notacja:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2, \mathbb{C}) \tag{1.1}$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2.$$

Macierze działają na wektory

$$Az = \begin{bmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik macierzy A :

$$\det A = ad - bc.$$

Macierze odwracalne stanowią grupę:

$$GL(2, \mathbb{C}) := \{A \in M(2, \mathbb{C}) : \det A \neq 0\}.$$

Mamy izomorfizm

$$GL(2, \mathbb{C}) \ni A \mapsto (A^{-1})^t \in GL(2, \mathbb{C}).$$

Dla macierzy (1.1) jest on równy

$$(A^{-1})^t = (ad - bc)^{-1} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Definiujemy

$$SL(2, \mathbb{C}) := \{A \in M_2(\mathbb{C}) : \det A = 1\}.$$

Jeśli $A \in GL(2, \mathbb{C})$ i $\lambda^2 = \det A$, to

$$\lambda^{-1}A \in SL(2, \mathbb{C}).$$

Dla $A \in SL(2, \mathbb{C})$

$$(A^{-1})^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Centrum $SL(2, \mathbb{C})$ stanowi dwuelementowa grupa $Z(SL(2, \mathbb{C})) = \{1, -1\}$. Wprowadzamy oznaczenie

$$PSL(2, \mathbb{C}) := SL(2, \mathbb{C})/\{1, -1\}.$$

1.3 Liczby zespolone jako podgrupa $M(2, \mathbb{R})$

Zdefiniujmy

$$\mathbb{C} \ni (x + iy) \mapsto \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \in M(2, \mathbb{R})$$

Mamy wtedy

$$\begin{aligned} \psi(z_1 + z_2) &= \psi(z_1) + \psi(z_2), & \psi(z_1 z_2) &= \psi(z_1)\psi(z_2), \\ \psi(\bar{z}) &= \psi(z)^t. \end{aligned}$$

Czyli obraz ψ jest ciałem wewnątrz $M(2, \mathbb{R})$ i ψ jest izomorfizmem. Obraz ψ jest równy

$$\left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) : A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} A \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Mamy

$$\chi(az) = \psi(a)\chi(z).$$

Jeśli $a = b + ic = re^{i\phi}$ to mnożenie przez a ma interpretację obrotu o kąt ϕ i skalowania o r .

1.4 Odwzorowania afiniczne

Odwzorowania \mathbb{C} postaci

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto g(z) = az + b \in \mathbb{C} \tag{1.2}$$

gdzie $a \neq 0$ nazywamy transformacjami afinicznymi płaszczyzny zespolonej.

Twierdzenie 1.1 *Odwzorowania afiniczne są bijekcjami \mathbb{C} . Jeśli (z_1, z_2) są dwoma różnymi punktami w \mathbb{C} i (w_1, w_2) są dwoma różnymi punktami w \mathbb{C} to istnieje dokładnie jedno odwzorowanie afiniczne g takie, że*

$$g(z_1) = w_1, \quad g(z_2) = w_2.$$

Transformacje afiniczne tworzą grupę. Niech

$$AGL(1, \mathbb{C}) := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{C}^\times, b \in \mathbb{C} \right\},$$

$$AU(1, \mathbb{C}) := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{C}, |a| = 1, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Jeśli dla $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ h_A oznacza transformację (1.2), to $AGL(1, \mathbb{C}) \ni A \mapsto h_A$ jest izomorfizmem grupy $AGL(1, \mathbb{C})$ na grupę transformacji afinicznych.

Dla $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$, $z_2 \neq z_3$ zdefiniujemy

$$(z_1, z_2; z_3) := \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}.$$

Wtedy jeśli g jest odwzorowaniem afinicznym, to

$$(g(z_1), g(z_2); g(z_3)) = (z_1, z_2; z_3).$$

2 Sfera Riemanna

2.1 Sfera Riemanna

Definicja 2.1 Sferą Riemanna nazywamy zbiór

$$\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Mówimy, że $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ jest otwarty w $\overline{\mathbb{C}}$, gdy $\Omega \cap \mathbb{C}$ jest otwarty w \mathbb{C} i jeśli $\infty \in \Omega$, to istnieje $R > 0$ takie, że

$$\mathbb{C} \setminus K(0, R) \subset \Omega.$$

Jeśli w $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ wprowadzimy relację

$$w \sim v \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^\times \lambda w = v$$

Jest to relacja równoważności. $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / \sim$ jest oznaczane przez \mathbb{CP} . \mathbb{CP} można utożsamić z $\overline{\mathbb{C}}$:

$$\mathbb{CP} \ni \mathbb{C}^\times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \mapsto \frac{w_1}{w_2} \in \overline{\mathbb{C}}.$$

2.2 Homografie

Definicja 2.2 Odwzorowanie $\overline{\mathbb{C}} \ni z \mapsto h(z) \in \overline{\mathbb{C}}$ nazywamy homografią, jeśli jest postaci

$$h(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & z \neq -\frac{d}{c}, \infty, \\ \infty & z = -\frac{d}{c}, \\ \frac{a}{c} & z = \infty. \end{cases}, \quad (2.3)$$

gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ i $ac - bd \neq 0$. Taką homografię będziemy też oznaczali h_A . Zbiór homografií oznaczamy przez Homog.

Zauważmy, że jeśli $ad - bc = 0$, to odwzorowanie (2.3) redukuje się do stałej.

Twierdzenie 2.3 *Homografie są bijekcjami $\overline{\mathbb{C}}$ w siebie. Tworzą grupę odwzorowań. Odwzorowanie*

$$GL(2, \mathbb{C}) \ni A \mapsto h_A \in \text{Homog}$$

jest surjektywnym homomorfizmem grup

Innymi słowy,

$$h_{A_1} h_{A_2} = h_{A_1 A_2}.$$

Mamy

$$h_{A_1} = h_{A_2}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ takie, że

$$A_1 = \lambda A_2$$

Dowód. Jeśli $c = 0$, to homografia jest odwzorowaniem afinicznym, więc jest bijekcją. Załóżmy, że $c \neq 0$. Wtedy można ją przedstawić jako

$$h = g_2 k g_1 \tag{2.4}$$

gdzie

$$g_1(z) = cz + d,$$

$$k(z) = z^{-1},$$

$$g_2(z) = -\frac{ad-bc}{c}z + \frac{a}{c}.$$

Wszystkie te odwzorowania są oczywiście bijekcjami, co dowodzi bijektywności h . \square

Jeśli $\lambda^2 = ac - bd \neq 0$, to przez zamianę $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ na $\frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ nie zmieniamy samej homografii i gwarantujemy, że jest ona sparametryzowana przez element $SL(2, \mathbb{C})$. Dla każdej homografii istnieją wtedy dokładnie 2 macierze z $SL(2, \mathbb{C})$ zadające tę homografię: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ i

$$\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}.$$

Zamiast zatem parametryzować homografie elementami $GL(2, \mathbb{C})$, lepiej jest używać do tego celu elementów $SL(2, \mathbb{C})$. Można też używać elementów $PSL(2, \mathbb{C})$ kładąc

$$h_{\pm A} := h_A$$

gdzie nadużywamy notacji używając symbolu h w dwóch znaczeniach. Wtedy

$$PSL(2, \mathbb{C}) \ni \pm A \mapsto h_{\pm A} \in \text{Homog}$$

jest izomorfizmem grup.

Mamy następujący związek między reprezentacjami $GL(2, \mathbb{C})$ w \mathbb{C}^2 i $\overline{\mathbb{C}}$.

Twierdzenie 2.4 *Niech*

$$\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \ni \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \mapsto \pi \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} := \frac{z_1}{z_2} \in \overline{\mathbb{C}}$$

Wtedy

$$\pi \circ A = h_A \circ \pi$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \pi \circ A \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} &= \pi \begin{bmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{az_1 + bz_2}{cz_1 + dz_2} = \frac{a \frac{z_1}{z_2} + b}{c \frac{z_1}{z_2} + d} \\ &= h_A \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = h_A \circ \pi \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

2.3 Własności homografii

Lemat 2.5 *Homografie zachowujące ∞ to przekształcenia afiniczne.*

Lemat 2.6 *Homografia*

$$h_1(z) := \frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

przekształca (z_1, z_2, z_3) w $(0, \infty, 1)$.

Twierdzenie 2.7 *Jeśli (z_1, z_2, z_3) są trzema różnymi punktami w $\overline{\mathbb{C}}$ i (w_1, w_2, w_3) są trzema różnymi punktami w $\overline{\mathbb{C}}$ to istnieje dokładnie jedna homografia h taka, że*

$$h(z_1) = w_1, \quad h(z_2) = w_2, \quad h(z_3) = w_3. \quad (2.5)$$

Dowód. Niech h_1 przekształca (z_1, z_2, z_3) w $(0, \infty, 1)$ i h_2 przekształca (w_1, w_2, w_3) w $(0, \infty, 1)$. Wtedy szukana homografia jest równa $h_2^{-1}h_1$.

Pokażemy, że warunek (2.5) wyznacza homografię h jednoznacznie. Najpierw zauważmy, że jeśli $z_3 = w_3 = \infty$, to jednoznaczność wynika z Twierdzenia 1.1.

Niech teraz g, k będą homografiami takimi, że

$$g(0) = z_1, \quad g(1) = z_2, \quad g(\infty) = z_3, \quad k(w_1) = 0, \quad k(w_2) = 1, \quad k(w_3) = \infty.$$

Wtedy

$$kh_i g(0) = 0, \quad kh_i g(1) = 1, \quad kh_i g(\infty) = \infty, \quad i = 1, 2.$$

Zatem

$$kh_1 g = kh_2 g. \quad (2.6)$$

Mnożymy (2.6) z lewej przez k^{-1} a z prawej przez g^{-1} i dostajemy $h_1 = h_2$. □

Jeśli z_1, z_2, z_3, z_4 jest czwórką parami różnych punktów z $\overline{\mathbb{C}}$, to liczbę

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) := \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

nazywamy dwustosunkiem tej czwórki punktów.

Twierdzenie 2.8 Jeśli h jest homografią, to

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = (h(z_1), h(z_2); h(z_3), h(z_4)).$$

Jeśli z_1, z_2, z_3, z_4 i w_1, w_2, w_3, w_4 są dwiema czwórkami, to istnieje homografia przekształcająca jedną w drugą $\Leftrightarrow (z_1, z_2; z_3, z_4) = (w_1, w_2; w_3, w_4)$

2.4 Okręgi uogólnione

Definicja 2.9 Uzwarconą prostą rzeczywistą nazywamy zbiór

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Mówimy, że $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}}$ jest otwarty w $\overline{\mathbb{R}}$, gdy $\Omega \cap \mathbb{R}$ jest otwarty w \mathbb{R} i jeśli $\infty \in \Omega$, to istnieje $R > 0$ takie, że

$$\mathbb{R} \setminus [-R, R] \subset \Omega.$$

Ogólniej, uzwarceniem prostej $L \subset \mathbb{C}$ jest $\overline{L} := L \cup \{\infty\} \subset \overline{\mathbb{C}}$.

Definicja 2.10 Okręgiem uogólnionym nazywamy podzbiór $\overline{\mathbb{C}}$ będący okręgiem bądź uzwarconą prostą.

Twierdzenie 2.11 Okrąg uogólniony jest domknięciem w $\overline{\mathbb{C}}$ miejsc zerowych równania

$$\alpha_{11}\bar{z}z + \alpha_{12}z + \alpha_{21}\bar{z} + \alpha_{22} = 0, \quad (2.7)$$

gdzie

$$\alpha_{11}, \alpha_{22} \in \mathbb{R}, \alpha_{12} = \overline{\alpha_{21}} \in \mathbb{C}, \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} < 0.$$

Dowód. Okrąg o środku z_0 i promieniu $r \in \mathbb{R}_+$ ma równanie

$$|z - z_0|^2 - r^2 = 0,$$

czyli

$$\bar{z}z - z\bar{z}_0 - \bar{z}z_0 + \bar{z}_0z_0 - r^2 = 0. \quad (2.8)$$

Każdą prostą można zapisać w postaci $z = re + ite$, gdzie $|e| = 1$ i $r \geq 0$. Ma ona wtedy równanie

$$z\bar{e} + \bar{z}e - 2r = 0. \quad (2.9)$$

Zarówno (2.8) jak i (2.9) są postaci (2.7). \square

Stwierdzenie 2.12 Homografie przekształcają okręgi uogólnione w okręgi uogólnione. Punkty z_1, z_2, z_3, z_4 leżą na jednym okręgu uogólnionym wtedy i tylko wtedy, gdy $(z_1, z_2; z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

Dowód. Na mocy (2.4) wystarczy to sprawdzić dla transformacji afinicznej (co jest oczywiste) i dla inwersji. Jeśli $w = \frac{1}{z}$, to w zmiennej w równanie (2.7) wygląda następująco:

$$\alpha_{11} + \alpha_{12}\bar{w} + \alpha_{21}w + \alpha_{22}\bar{w}w = 0,$$

i jest również równaniem postaci (2.7). \square

2.5 Krzywe na sferze Riemanna

Niech $[0, 1] \ni \tau \mapsto \gamma(\tau) \in \overline{\mathbb{C}}$. Mówimy, że γ jest krzywą (gładką i sparametryzowaną) na $\overline{\mathbb{C}}$, gdy

- 1) Jeśli $\tau_0 \in [0, 1]$, to γ jest funkcją gładką w otoczeniu τ_0 o nieznikającej pochodnej;
- 2) Jeśli $\tau_0 \in [0, 1]$ i $\gamma(\tau_0) = \infty$, to $\frac{1}{\gamma}$ jest funkcją gładką w otoczeniu τ_0 o nieznikającej pochodnej.

Stwierdzenie 2.13 *Jeśli $[0, 1] \ni \tau \mapsto \gamma(\tau) \in \overline{\mathbb{C}}$ jest krzywą i h jest homografią, to $[0, 1] \ni \tau \mapsto h\gamma(\tau) \in \overline{\mathbb{C}}$ też jest krzywą.*

Niech $[0, 1] \ni \tau \mapsto \gamma_i(\tau) \in \overline{\mathbb{C}}$ będą krzywymi zaczynającymi się w tym samym punkcie $z_0 = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Wtedy kąt między γ_1 a γ_2 w dla $\tau = 0$ definiujemy jak następuje.

- 1) Gdy $z_0 \neq \infty$, to jest to zwykły kąt $\alpha \in [0, 2\pi[$ między dwiema krzywymi. Można go obliczyć ze wzoru

$$e^{i\alpha} = \frac{\overline{\gamma_1'(0)}\gamma_2'(0)}{|\gamma_1'(0)||\gamma_2'(0)|}.$$

- 2) Jeśli $z_0 = \infty$, to jest to zwykły kąt między krzywymi $\frac{1}{\gamma_1}$ a $\frac{1}{\gamma_2}$.

Twierdzenie 2.14 *Niech γ_1, γ_2 będą jak powyżej. Niech h będzie homografią. Wtedy kąt między γ_1 a γ_2 dla $\tau = 0$ jest równy kątowi między $h\gamma_1$ a $h\gamma_2$ dla $\tau = 0$.*

Dowód. Jest to ogólna własność funkcji holomorficzy z niezerową pochodną. Sprawdzamy, że

$$h'(z) = (cz + d)^{-2},$$

co jest różne od zera dla $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$. Punkty $\infty, -\frac{d}{c}$ rozpatrujemy osobno. \square

2.6 Grupa $U(2)$

W \mathbb{C}^2 definiujemy iloczyn hermitowski skalarny

$$(z|w) = \overline{z_1}w_1 + \overline{z_2}z_2.$$

Grupę macierzy unitarnych definiujemy

$$U(2) := \{A \in M(2, \mathbb{C}) : (Az|Aw) = (z|w), z, w \in \mathbb{C}^2\}.$$

Równoważny warunek: $A^*A = 1$. Grupa $U(2)$ składa się z macierzy spełniających warunki

$$\begin{cases} |a|^2 + |c|^2 = 1, \\ a\bar{b} + c\bar{d} = 0, \\ |b|^2 + |d|^2 = 1. \end{cases} \quad (2.10)$$

Twierdzenie 2.15 (1) *Macierze z $U(2)$ są postaci*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -\lambda\bar{b} & \lambda\bar{a} \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

gdzie

$$|a|^2 + |b|^2 = 1, \quad |\lambda| = 1.$$

Poza tym, λ jest wyznacznikiem macierzy (2.11).

(2) Macierze z $SU(2)$ są postaci

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$|a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Dowód. Niech

$$\frac{a}{d} = -\frac{c}{b} = \bar{\lambda}.$$

Wtedy $\bar{b} = -\bar{\lambda}c$, $\bar{d} = \bar{\lambda}a$. Wstawiamy to do trzeciego wzoru w (2.10) i dostajemy

$$|\lambda|^2(|c|^2 + |a|^2) = 1$$

Stąd $|\lambda| = 1$. Z tego dostajemy $c = -\lambda\bar{b}$. Czyli macierz z $U(2)$ jest postaci (2.11), gdzie $|\lambda| = 1$. Wyznacznik (2.11) jest równy $\lambda(|a|^2 + |b|^2) = \lambda$. Stąd dla $SU(2)$ mamy $\lambda = 1$. \square

2.7 Grupa $U(1, 1)$ i $SL(2, \mathbb{R})$

Niech

$$I_{1,1} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

W \mathbb{C}^2 definiujemy iloczyn hermitowski pseudoskalarny

$$(z|I_{1,1}w) = \bar{z}_1 w_1 - \bar{z}_2 w_2.$$

Grupę macierzy pseudounitarnych definiujemy jako

$$U(1, 1) := \{A \in M(2, \mathbb{C}) : (Az|I_{1,1}Aw) = (z|I_{1,1}w), \quad z, w \in \mathbb{C}^2\}.$$

Równoważne warunki:

$$A^* I_{1,1} A = I_{1,1},$$

albo

$$\begin{cases} |a|^2 - |c|^2 = 1, \\ a\bar{b} - c\bar{d} = 0, \\ |b|^2 - |d|^2 = -1. \end{cases} \quad (2.12)$$

Twierdzenie 2.16 (1) Macierze z $U(1, 1)$ są postaci

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \lambda\bar{b} & \lambda\bar{a} \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

gdzie

$$|\lambda| = 1, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1.$$

Poza tym λ jest wyznacznikiem macierzy (2.13).

(2) Macierze z $SU(1,1)$ są postaci

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$|a|^2 - |b|^2 = 1.$$

Dowód. Niech

$$\frac{a}{d} = \frac{c}{b} = \bar{\lambda}.$$

Wtedy $\bar{b} = \bar{\lambda}c$, $\bar{d} = \bar{\lambda}a$. Wstawiamy to do trzeciego wzoru w (2.12) i dostajemy

$$|\lambda|^2(|c|^2 - |a|^2) = -1$$

Stąd $|\lambda| = 1$. Z tego dostajemy $c = \lambda\bar{b}$. Czyli macierz z $U(1,1)$ jest postaci (2.13) Wyznacznik (2.13) jest równy $\lambda(|a|^2 - |b|^2) = \lambda$. \square

Definiujemy

$$SL(2, \mathbb{R}) = GL(2, \mathbb{R}) \cap SL(2, \mathbb{C}).$$

Twierdzenie 2.17 *Mamy izomorfizm*

$$SL(2, \mathbb{R}) \ni A \mapsto BAB^{-1} \in SU(1,1),$$

gdzie

$$B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}.$$

Dowód. Mamy

$$BAB^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a + ib - ic + d & ia + b + c - id \\ -ia + b + c + id & a - ib + ic + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ \bar{b}_1 & \bar{a}_1 \end{bmatrix}$$

i

$$|a_1|^2 - |b_1|^2 = ad - bc = 1$$

\square

2.8 Podgrupa homografii zachowująca punkty antypodalne

W $\bar{\mathbb{C}}$ zdefiniujemy “sprzężenie antypodalne”

$$j(z) := -\frac{1}{\bar{z}}.$$

Dla $z = re^{i\phi}$ mamy $j(z) = r^{-1}e^{i(\phi+\pi)}$. Oczywiście, $j^2(z) = z$. Para punktów $\{z_1, z_2\}$ takich, że $j(z_1) = z_2$ (a tym samym $j(z_2) = z_1$) nazywa się parą punktów antypodalnych.

Twierdzenie 2.18 *Homografie przekształcające pary punktów antypodalnych na pary punktów antypodalnych, czyli spełniające*

$$hj = jh$$

są postaci h_A dla $A \in SU(2)$.

Dowód. Niech $A \in GL(2, \mathbb{C})$ i $h = h_A$.

$$j(h(z)) = j\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\bar{d}j(z) - \bar{c}}{-\bar{b}j(z) + \bar{a}} = h(j(z)) = \left(\frac{aj(z)+b}{cj(z)+d}\right).$$

Zatem

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$$

Zatem $|\lambda| = 1$ i $c = -\lambda\bar{b}$, $d = \lambda\bar{a}$. Dostajemy więc macierz z $U(2)$. \square

2.9 Podgrupy homografii zachowujących koło uogólnione

W tym podrozdziale opiszemy różne podgrupy grupy homografii i ich reprezentacje przy pomocy macierzy z $SL(2, \mathbb{C})$

Twierdzenie 2.19 *Wszystkie homografie przekształcające \mathbb{C}_+ w siebie są postaci h_A dla $A \in SL(2, \mathbb{R})$.*

Dowód. Najpierw zauważmy, że h jest ciągłą bijekcją i h^{-1} jest ciągle. Zatem obraz brzegu jest brzegiem obrazu. $\bar{\mathbb{R}}$ jest brzegiem \mathbb{C}_+ . Czyli $h(\bar{\mathbb{R}}) = \bar{\mathbb{R}}$. Posługując się lematem 2.6 i jednoznacznością widzimy, że $h = h_A$ dla $A \in GL(2, \mathbb{R})$. Mamy

$$\begin{aligned} h_A(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \\ &= \frac{ac|z|^2 + (ad+cb)\operatorname{Re}z + bd + i(ad-cb)\operatorname{Im}z}{|cz+d|^2} \end{aligned}$$

Zatem $h_A(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A > 0$. Możemy wtedy zastąpić A przez $(\det A)^{-\frac{1}{2}}A \in SL(2, \mathbb{R})$ \square

Twierdzenie 2.20 *Wszystkie homografie przekształcające koło jednostkowe $\{z : |z| < 1\}$ w siebie mają postać h_A dla $A \in SU(1, 1)$.*

Dowód. Pamiętajmy, że

$$SL(2, \mathbb{R}) \ni A \mapsto BAB^{-1} = \tilde{A} \in SU(1, 1),$$

jest izomorfizmem, gdzie

$$B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$h_{\tilde{A}} = h_B h_A (h_B)^{-1}.$$

Ale

$$(h_B)^{-1}(z) = \frac{z - i}{-iz + 1}$$

przekształca \mathbb{C}_+ na $\{z : |z| < 1\}$. Mamy bowiem,

$$\left| \frac{x + iy - i}{1 + y - ix} \right|^2 = \frac{x^2 + (y - 1)^2}{x^2 + (y + 1)^2} < 1 \Leftrightarrow y \in \mathbb{C}_+.$$

To dowodzi tego, że dla $\tilde{A} \in SU(1, 1)$, $h_{\tilde{A}}$ przekształca $K(0, 1)$ na siebie.

Załóżmy teraz, że $h_{\tilde{A}}$ dla $\tilde{A} \in SU(1, 1)$ przekształca $K(0, 1)$ na siebie. Niech

$$A := B^{-1} \tilde{A} B.$$

Wtedy h_A przekształca \mathbb{C}_+ na siebie. Na mocy Twierdzenia 2.19 $A \in SL(2, \mathbb{R})$. \square

3 Rzut stereograficzny

3.1 Geometria sfery

Przestrzeń \mathbb{R}^3 wyposażamy w iloczyn skalarny

$$(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Rozważmy sferę o średnicy 1

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}\},$$

W standardowy sposób definiujemy długość krzywej γ na sferze, oznaczaną przez $|\gamma|$, pole powierzchni podzbioru Ω , oznaczane przez $Sur(\Omega)$, kąt między przecinającymi się krzywymi. Prosta sferyczną (okręgiem wielkim) nazywamy zbiór postaci $V \cap \mathbb{S}^2$, gdzie V jest 2-wymiarową podprzestrzenią liniową w \mathbb{R}^3 . Zbiór prostych sferycznych oznaczamy przez $\mathcal{L}(\mathbb{S}^2)$.

Grupą izometrii sfery jest $O(3)$.

3.2 Izomorfizm $PSU(2)$ i $SO(3)$

Niech $su(2)$ oznacza macierze 2×2 bezśladowe antyhermitowskie. Wtedy $isu(2)$ to zbiór macierzy 2×2 bezśladowych hermitowskich.

$$\text{Tr}AB, \quad A, B \in isu(2)$$

zadaje iloczyn skalarny w $isu(2)$.

Wprowadźmy macierze Pauliego

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ jest bazą ortonormalną w $isu(2)$. Odwzorowanie

$$\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z \in isu(2)$$

izometrycznie identyfikuje \mathbb{R}^3 z $isu(2)$.

Dla $\pm A \in PSU(2)$ definiujemy odwzorowanie liniowe na $isu(2)$ przez

$$\rho_{\pm A}(B) := ABA^{-1}.$$

Twierdzenie 3.1

$$PSU(2) \ni A \mapsto \rho_A \in SO(3)$$

jest izomorfizmem.

3.3 Rzut stereograficzny sfery

Niech

$$\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}\},$$

Definiujemy $\sigma : \mathbb{S}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$

$$\begin{aligned} \sigma(x, y, z) = w &= \frac{x+iy}{\frac{1}{2}-z} \\ &= \frac{\frac{1}{2}+z}{x-iy} \in \overline{\mathbb{C}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

σ jest bijekcją:

$$\sigma^{-1}(w) = (x, y, z), \quad x + iy = \frac{w}{(|w|^2+1)}, \quad z = \frac{|w|^2-1}{2(|w|^2+1)}.$$

Rzut stereograficzny pozwala utożsamić \mathbb{S}^2 z $\overline{\mathbb{C}}$.

Twierdzenie 3.2 Niech γ będzie krzywą na \mathbb{S}^2 , Ω podzbiorem w \mathbb{S}^2 . Wtedy

$$|\gamma| := 2 \int_{\sigma(\gamma)} (1 + |z|^2)^{-1} |dz|.$$

$$Sur(\Omega) = 4 \int_{\sigma(\Omega)} (1 + |z|^2)^{-2} \frac{dzd\bar{z}}{2}.$$

$\sigma(\mathcal{L}(\mathbb{S}^2))$ jest równe zbiorowi okręgów uogólnionych w $\overline{\mathbb{C}}$ zawierający parę punktów antypodalnych (i tym samym niezmienniczych ze względu na j). Jeśli \mathbb{R}^3 utożsamimy z $isu(2)$, to

$$\sigma \rho_A \sigma^{-1}(w) = h_A(w), \quad A \in PSU(2), w \in \overline{\mathbb{C}}. \quad (3.16)$$

Poza tym

$$\sigma(-1)\sigma^{-1}(w) = j(w) = -\overline{w}^{-1}.$$

Dowód. Udowodnimy (3.16).

Krok 1 Pamiętajmy, że \mathbb{S}^2 jako podzbiór $isu(2)$ jest równe

$$\mathbb{S}^2 = \{B \in iu(2) : \text{Tr}B = 0, \text{Tr}B^2 = \frac{1}{2}\}.$$

Zatem B ma dwie wartości własne równe $\pm \frac{1}{2}$. Zatem $\frac{1}{2} + B$ ma wartości własne $0, 1$, czyli jest rzutem ortogonalnym jednowymiarowym. I na odwrót, jeśli P jest rzutem ortogonalnym jednowymiarowym, to $-\frac{1}{2} + P \in \mathbb{S}^2$.

Krok 2. Mamy $B + \frac{1}{2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + z & x + iy \\ x - iy & \frac{1}{2} - z \end{bmatrix}$. Zatem

$$\text{Ran}(\frac{1}{2} + B) = \mathbb{C} \begin{bmatrix} x + iy \\ \frac{1}{2} - z \end{bmatrix} = \mathbb{C} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + z \\ x - iy \end{bmatrix}.$$

$$\text{Ran}(\frac{1}{2} + \rho_A(B)) = \text{Ran} \rho_A(\frac{1}{2} + B) = A \text{Ran}(\frac{1}{2} + B).$$

Krok 3. Niech $\pi : \mathbb{C}P \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ bądzie określone jako

$$\pi \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix} = \frac{v^1}{v^2}. \quad (3.17)$$

($\mathbb{C}P$ można utożsamić ze zbiorem jednowymiarowych podprzestrzeni liniowych w \mathbb{C}^2). Wtedy

$$\pi \text{Ran}(\frac{1}{2} + B) = \frac{x+iy}{\frac{1}{2}-z} = w,$$

$$\pi \text{Ran}(\frac{1}{2} + \rho_A(B)) = \pi A \text{Ran}(\frac{1}{2} + B) = h_A(\pi \text{Ran}(\frac{1}{2} + B)) = h_A(w).$$

□

3.4 * Geometria płaszczyzny hiperbolicznej

Przestrzeń \mathbb{R}^3 wyposażamy w iloczyn skalarny

$$(x|I_{2,1}y) = x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_3.$$

Rozważmy hiperboloide

$$\mathbb{H}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 = \frac{1}{4}, z > 0\},$$

W standardowy sposób definiujemy długość krzywej γ na \mathbb{H}^2 , oznaczaną przez $|\gamma|$, Pole powierzchni podzbioru Ω , oznaczane przez $Sur(\Omega)$, kąt między przecinającymi się krzywymi. Prostą hiperboliczną nazywamy zbiór postaci $V \cap \mathbb{H}^2$, gdzie V jest 2-wymiarową podprzestrzenią liniową w \mathbb{R}^3 . Zbiór prostych hiperbolicznych oznaczamy przez $\mathcal{L}(\mathbb{H}^2)$.

Grupa $O^\uparrow(2, 1)$ jest grupą izometrii \mathbb{H}^2 . Ma cztery składowe spójne. Składową spójną jedynki jest $SO^\uparrow(2, 1)$.

3.5 * Izomorfizm $PSU(1, 1)$ i $SO^\uparrow(2, 1)$

Niech $isu(1, 1)$ oznacza zbiór macierzy 2×2 spełniających $I_{1,1}A^*I_{1,1} = A$. Wyposażamy $isu(1, 1)$ w iloczyn skalarny

$$\text{tr}AB, \quad A, B \in isu(1, 1).$$

$(i\sigma_x, i\sigma_y, \sigma_z)$ jest bazą ortonormalną w $isu(1, 1)$. Odwzorowanie

$$\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto xi\sigma_x + yi\sigma_y + z\sigma_z \in isu(1, 1)$$

identyfikuje \mathbb{R}^3 z $isu(1, 1)$ i zachowuje iloczyn skalarny.

Twierdzenie 3.3

$$PSU(1, 1) \ni \pm A \mapsto \rho_{\pm A} \in SO^\uparrow(2, 1)$$

jest izomorfizmem. \square

3.6 * Rzut stereograficzny hiperboloidy

Definiujemy $\sigma : \mathbb{H}^2 \rightarrow K(1) \subset \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \sigma(x, y, z) = w &= \frac{x+iy}{\frac{1}{2}-z} \\ &= \frac{\frac{1}{2}+z}{-x+iy} \in K(1). \end{aligned} \tag{3.18}$$

σ jest bijekcją:

$$\sigma^{-1}(w) = (x, y, z), \quad x + iy = \frac{w}{(|w|^2 - 1)}, \quad z = \frac{|w|^2 + 1}{2(|w|^2 - 1)}.$$

Rzut stereograficzny pozwala utożsamić geometrię \mathbb{H}^2 z geometrią $K(0, 1)$.

Twierdzenie 3.4 Niech γ będzie krzywą na \mathbb{H}^2 , Ω podzbiorem w \mathbb{H}^2 . Wtedy

$$\begin{aligned} |\gamma| &:= \int_{\sigma(\gamma)} (1 - |z|^2)^{-1} |dz|. \\ Sur(\Omega) &= \int_{\sigma(\Omega)} (1 - |z|^2)^{-2} \frac{dzd\bar{z}}{2}. \end{aligned}$$

$\sigma(\mathcal{L}(\mathbb{H}^2))$ jest równe zbiorowi przecięć okręgów w \mathbb{C} z $K(0, 1)$, które są prostopadłe do $S(0, 1)$.

Jeśli \mathbb{R}^3 utożsamimy z $isu(1, 1)$, to

$$\sigma\rho_A\sigma^{-1}(w) = h_A(w), \quad A \in PSU(1, 1), w \in K(0, 1). \tag{3.19}$$

Cała grupa $\sigma O^\uparrow(2, 1)\sigma^{-1}$ jest generowana przez $\{h_A : A \in PSU(1, 1)\}$ i sprzężenie zespolone.

Dowód. Udowodnimy (3.19).

Krok 1 Pamiętajmy, że \mathbb{H}^2 jako podzbiór $isu(1, 1)$ jest równy

$$\mathbb{H}^2 = \{B \in iu(2) : \text{Tr}B = 0, \text{Tr}B^2 = \frac{1}{2}, B_11 > 0\}.$$

Zatem B ma dwie wartości własne równe $\pm\frac{1}{2}$. Zatem $\frac{1}{2} + B$ ma wartości własne $0, 1$, czyli jest rzutem pseudoortogonalnym na jednowymiarową podprzestrzeń dodatnią (składającą się z wektorów v takich, że $(v|I_{1,1}v) > 0$). I na odwrót, jeśli P jest rzutem pseudoortogonalnym na jednowymiarową dodatnią podprzestrzeń, to $-\frac{1}{2} + P \in \mathbb{H}^2$.

Krok 2.

$$\text{Ran}(\frac{1}{2} + B) = \mathbb{C} \begin{bmatrix} x + iy \\ \frac{1}{2} - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + z \\ -x + iy \end{bmatrix},$$

$$\text{Ran}(\frac{1}{2} + \rho_A(B)) = \text{Ran}A(\frac{1}{2} + B)A^{-1} = A\text{Ran}(\frac{1}{2} + B).$$

Krok 3. Niech $\pi : \mathbb{C}P \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ będzie określone jak w (3.17).

Wtedy

$$\pi\text{Ran}(\frac{1}{2} + B) = \frac{x+iy}{\frac{1}{2}-z} = w,$$

$$\pi\text{Ran}(\frac{1}{2} + \rho_A(B)) = \pi A\text{Ran}(\frac{1}{2} + B) = h_A(\pi\text{Ran}(\frac{1}{2} + B)) = h_A(w).$$

□

3.7 * Izomorfizm $PSL(2, \mathbb{C})$ i $SO(3, \mathbb{C})$

Niech $sl(2, \mathbb{C})$ oznacza przestrzeń macierzy 2×2 zespolonych bezśladowych wyposażoną w dwulinową formę

$$\text{Tr}AB, \quad A, B \in sl(2, \mathbb{C})$$

Dla $\pm A \in PSL(2, \mathbb{C})$ definiujemy odwzorowanie liniowe na $sl(2, \mathbb{C})$ przez

$$\rho_{\pm A}(B) := ABA^{-1}.$$

Twierdzenie 3.5

$$PSL(2, \mathbb{C}) \ni \pm A \mapsto \rho_{\pm A} \in SO(3, \mathbb{C})$$

jest izomorfizmem. W bazie (3.14), jeśli

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

to

$$\rho_{\pm A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(a^2 - b^2 - c^2 + d^2) & \frac{1}{2i}(-a^2 - b^2 + c^2 + d^2) & (-ab + cd) \\ \frac{1}{2i}(a^2 - b^2 + c^2 - d^2) & \frac{1}{2}(-a^2 - b^2 - c^2 - d^2) & i(ab + cd) \\ bd - ac & -i(bd + ac) & ad + bc \end{bmatrix}$$

Dowód. Mamy

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} z & x + iy \\ x - iy & -z \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$ABA^{-1} = \begin{bmatrix} adz + bd(x - iy) - ac(x + iy) + bcz, & -ab - b^2(x - iy) + a^2(x + iy) - abz \\ cdz + d^2(x - iy) - c^2(x + iy) + cdz, & -bcz - db(x - iy) + ca(x + iy) - daz \end{bmatrix}.$$

□

3.8 * Rzut stereograficzny zespolony

Zdefiniujmy sferę zespoloną

$$\mathbb{W}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}\},$$

$$W_0 := \{(w_-, w_+) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : w_- w_+ = -1\} \cup \{(0, \infty), (\infty, 0)\}.$$

$$W = \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \setminus W_0.$$

Definiujemy $\sigma : \mathbb{W}^2 \rightarrow W$

$$\begin{aligned} \sigma(x, y, z) = (w_-, w_+) &= \left(\frac{x+iy}{\frac{1}{2}-z}, \frac{x-iy}{\frac{1}{2}-z}\right) \\ &= \left(\frac{\frac{1}{2}+z}{x-iy}, \frac{\frac{1}{2}+z}{x+iy}\right) \in W. \end{aligned} \tag{3.20}$$

(Może się zdarzyć, że $x + iy = \frac{1}{2} - z = 0$ i $\frac{x+iy}{\frac{1}{2}-z}$ jest nieoznaczone. Wtedy $\frac{1}{2} + z \neq 0$, zatem $\frac{\frac{1}{2}+z}{x-iy}$ jest oznaczone).

σ jest bijekcją:

$$\sigma^{-1}(w_-, w_+) = \left(\frac{w_- + w_+}{2(w_- w_+ + 1)}, \frac{w_- - w_+}{2i(w_- w_+ + 1)}, \frac{w_- w_+ - 1}{2(w_- w_+ + 1)}\right) \in \mathbb{W}^2.$$

Twierdzenie 3.6 *Jeśli identyfikujemy \mathbb{W}^2 z podzbiorem $sl(2, \mathbb{C})$, to*

$$\sigma \rho_A \sigma^{-1}(w_-, w_+) = (h_{(A^{-1})^t}(w_-), h_A(w_+)), \quad A \in PSL(2, \mathbb{C}), \quad (w_-, w_+) \in W.$$

Dowód. Krok 1 Pamiętajmy, że \mathbb{W}^2 jako podzbiór $sl(2, \mathbb{C})$ jest równe

$$\mathbb{W}^2 = \{B : \text{Tr} B = 0, \text{Tr} B^2 = \frac{1}{2}\}.$$

Więc B ma dwie wartości własne równe $\pm \frac{1}{2}$. Zatem $\frac{1}{2} + B$ ma wartości własne 0, 1, czyli jest rzutem jednowymiarowym. I na odwrót, jeśli P jest rzutem jednowymiarowym, to $-\frac{1}{2} + P \in \mathbb{W}^2$.

Krok 2. Niech P będzie rzutem jednowymiarowym. Wtedy $\text{Ran}P$ i $\text{Ran}P^t$ są podprzestrzeniami jednowymiarowymi takimi, że jedna nie anihiluje drugiej, tzn jeśli $\begin{bmatrix} v_-^1 \\ v_-^2 \end{bmatrix} \in \text{Ran}P^t$, $\begin{bmatrix} v_+^1 \\ v_+^2 \end{bmatrix} \in \text{Ran}P$, to $v_-^1 v_+^1 + v_-^2 v_+^2 \neq 0$. Mamy

$$\begin{aligned} \text{Ran}\left(\frac{1}{2} + B^t\right) &= \mathbb{C} \begin{bmatrix} x - iy \\ \frac{1}{2} - z \end{bmatrix} = \mathbb{C} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + z \\ x + iy \end{bmatrix}, \\ \text{Ran}\left(\frac{1}{2} + B\right) &= \mathbb{C} \begin{bmatrix} x + iy \\ \frac{1}{2} - z \end{bmatrix} = \mathbb{C} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + z \\ x - iy \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(Patrz uwaga po (3.20)).

Na odwrót, jeśli V_- , V_+ są jednowymiarowymi podprzestrzeniami takimi, że jedna nie anihiluje drugiej, to istnieje dokładnie jeden rzut jednowymiarowy P taki, że $\text{Ran}P^t = V_-$ i $\text{Ran}P = V_+$.

Mamy

$$\text{Ran}\left(\frac{1}{2} + \rho_A(B)\right) = \text{Ran}\rho_A\left(\frac{1}{2} + B\right) = A\text{Ran}\left(\frac{1}{2} + B\right),$$

$$\text{Ran}\left(\frac{1}{2} + \rho_A(B)^t\right) = \text{Ran}\rho_A\left(\frac{1}{2} + B\right)^t = (A^{-1})^t\text{Ran}\left(\frac{1}{2} + B^t\right).$$

Krok 3. Niech π będzie określone jak w (3.17). Wtedy warunek, że podprzestrzenie V_- i V_+ nie anihilują się wzajemnie jest równoważny temu, że $\pi(V_-)\pi(V_+) \neq -1$. Zatem odwzorowanie $(V_-, V_+) \mapsto (\pi(V_-), \pi(V_+))$ jest bijekcją zbioru par nie anihilujących się wzajemnie jednowymiarowych podprzestrzeni liniowych na W .

Zatem

$$\pi\text{Ran}\left(\frac{1}{2} + B^t\right) = \frac{x - iy}{\frac{1}{2} - z} = w_-,$$

$$\pi\text{Ran}\left(\frac{1}{2} + B\right) = \frac{x + iy}{\frac{1}{2} - z} = w_+,$$

$$\pi\text{Ran}\left(\frac{1}{2} + \rho_A(B)\right) = \pi A\text{Ran}\left(\frac{1}{2} + B\right) = h_A\pi\text{Ran}\left(\frac{1}{2} + B\right) = h_A(w_+),$$

$$\pi\text{Ran}\left(\frac{1}{2} + \rho_A(B)^t\right) = \pi(A^{-1})^t\left(\text{Ran}\left(\frac{1}{2} + B^t\right)\right) = h_{(A^{-1})^t}\pi\text{Ran}\left(\frac{1}{2} + B^t\right) = h_A(w_-).$$

□

4 Funkcje analityczne

4.1 Definicja funkcji analitycznych

Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie otwartym podzbiorem i $\Omega \ni z \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ funkcją. Mówimy, że f jest różniczkowalna w $x_0 \in I$, jeśli istnieje

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (4.21)$$

Granicę tę nazywamy pochodną w sensie zespolonym funkcji f w x_0 . Jest ona oznaczana przez $\partial_x f(x_0)$, $f'(x_0)$ lub $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Niech $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwartym podzbiorem i $\mathcal{U} \ni t \mapsto F(t) \in \mathbb{C}$ funkcją. Mówimy, że F jest różniczkowalna w $t_0 \in \Omega$, jeśli istnieje odwzorowanie liniowe A

$$F(t_0 + s) = F(t_0) + As + R(s), \quad (4.22)$$

A nazywamy pochodną F w punkcie t_0 i oznaczamy przez $F'(t_0)$ lub $\nabla F(t_0)$.

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie otwartym podzbiorem i $\Omega \ni z \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ funkcją. Mówimy, że f jest różniczkowalna w sensie zespolonym w $z_0 \in \Omega$, jeśli istnieje

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (4.23)$$

Granice tę nazywamy pochodną w sensie zespolonym funkcji f w z_0 . Jest ona oznaczana przez $\partial_z f(z_0)$, $f'(z_0)$ lub $\frac{df(z_0)}{dz}$.

Będziemy pisali $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$.

Twierdzenie 4.1 *Następujące warunki są równoważne:*

- (1) f jest różniczkowalna w sensie zespolonym w z_0 .
- (2) (**Warunki Cauchy’ego–Riemanna**) Funkcja $\chi \circ f \circ \chi^{-1}$ jest jednokrotnie różniczkowalna w sensie rzeczywistym i spełnione są następujące wzory:

$$\begin{aligned} \partial_x u &= \partial_y v, \\ \partial_x v &= -\partial_y u, \end{aligned}$$

- (3) $f \circ \chi^{-1}$ jest jednokrotnie różniczkowalna w sensie rzeczywistym i spełnione są następujące wzory:

$$i\partial_x f \circ \chi^{-1} = \partial_y f \circ \chi^{-1}.$$

Dowód Twierdzenia 4.1. Udowodnijmy $1) \Rightarrow 2)$. We wzorze

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h},$$

gdzie $h = t + is$, możemy położyć $t = 0$ i zbiegać z $s \rightarrow 0$, wtedy dostajemy

$$f'(z_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} = \partial_x u(z_0) + i\partial_x v(z_0) \quad (4.24)$$

lub możemy trzymać $t = 0$, wtedy

$$f'(z_0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + is) - f(z_0)}{is} = -i\partial_y u(z_0) + \partial_y v(z_0) \quad (4.25)$$

Przez porównanie (4.24) i (4.25) dostajemy wzory Cauchy’ego–Riemanna.

Równoważność (2) i (3) jest oczywista.

Udowodnijmy teraz (3) \Rightarrow (1). Różniczkowalność w sensie rzeczywistym oznacza, że

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + R(z_0, h)$$

gdzie $f'(z_0)$ oznacza macierz Jacobiego pochodnej

$$\begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{bmatrix},$$

h jest wektorem

$$\begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix}$$

a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|R(z_0, h)|}{|h|} = 0.$$

Korzystając z Warunków Cauchy-Riemanna można to zapisać jako

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = \partial_z f(z_0)(t + is) + R(z_0, h),$$

Z tego wynika istnienie granicy (4.23) i to, że jest równa $\partial_z f(z_0)$. \square

Definicja 4.2 Funkcję f spełniającą jeden, a zatem i wszystkie, powyższe warunki nazywamy funkcją holomorficzną na Ω lub, co traktujemy jako synonim, funkcją analityczną na Ω .

Stwierdzenie 4.3 Jeśli f, g są holomorficzne w Ω , to również $f + g$ i fg . Jeśli w dodatku $f \neq 0$ na Ω , to $\frac{1}{f}$ jest holomorficzną na Ω . Jeśli f jest holomorficzną na Ω a g na $f(\Omega)$, to $g \circ f$ jest holomorficzną na Ω . Jeśli f jest bijekcją z Ω na $f(\Omega)$ i f^{-1} jest funkcją odwrotną do f , to f^{-1} jest holomorficzną na $f(\Omega)$. Zachodzą wzory

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(f + g) &= \frac{d}{dz}f + \frac{d}{dz}g, \\ \frac{d}{dz}(fg) &= \left(\frac{d}{dz}f\right)g + f\frac{d}{dz}g, \\ \frac{d}{dz}\frac{1}{f} &= -\frac{1}{f^2}\frac{d}{dz}f, \\ \frac{d}{dz}g \circ f(z) &= \frac{d}{dw}g(w)\frac{d}{dz}f(z), \text{ gdzie } f(z) = w, \\ \frac{d}{dw}f^{-1}(w) &= \frac{1}{\frac{d}{dz}f(z)}, \text{ gdzie } f(z) = w. \end{aligned}$$

Wniosek 4.4 Funkcja wymierna, czyli funkcja postaci

$$\frac{P(z)}{Q(z)},$$

gdzie P, Q są wielomianami, jest holomorficzną poza zerami $Q(z)$.

4.2 Krzywe

Krzywą sparametryzowaną kawałkami gładką nazywamy odwzorowanie ciągłe

$$]0, 1[\ni \tau \mapsto \gamma(\tau) \in \mathbb{C} \quad (4.26)$$

takie, że istnieją $0 := \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n := 1$ i po obcięciu γ do $]\tau_i, \tau_{i+1}[$, odwzorowanie γ jest gładkie i ma wszędzie niezerową pochodną. Zamiast “kawałkami gładka krzywa”, będziemy pisać po prostu “krzywa”.

W zbiorze krzywych wprowadzamy relację: $\gamma_1 \sim \gamma_2$, gdy istnieje ciągła bijekcja $]0, 1[\ni \tau \mapsto \kappa(\tau) \in]0, 1[$ taka, że dla pewnych $0 := \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n := 1$ κ po obcięciu do $]\tau_i, \tau_{i+1}[$ jest gładka, ma dodatnią pochodną oraz $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \kappa$. Jest to relacja równoważności. Klasę abstrakcji względem tej relacji nazywamy krzywą zorientowaną (niesparametryzowaną).

W zbiorze krzywych wprowadzamy też inną relację: $\gamma_1 \sim \gamma_2$, gdy istnieje ciągła bijekcja $]0, 1[\ni \tau \mapsto \kappa(\tau) \in]0, 1[$ taka, że dla pewnych $0 := \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n := 1$ κ po obcięciu do $]\tau_i, \tau_{i+1}[$ jest gładka, ma dodatnią lub ujemną pochodną oraz $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \kappa$. Jest to też relacja równoważności. Klasę abstrakcji względem tej relacji nazywamy krzywą niezorientowaną (niesparametryzowaną).

W definicji (4.26) można również zamienić $]0, 1[$ na $[0, 1]$, $]0, 1[$, $[0, 1[$ bądź S^1 (okrąg). W ostatnim wypadku mamy do czynienia z krzywą zamkniętą.

Założmy, że brzeg zbioru otwartego składa się z krzywych zamkniętych. Wtedy każda z tych krzywych ma naturalną orientację: posuwamy się wzdłuż niej w dodatnim kierunku, jeśli zbiór mamy z lewej strony.

4.3 Całki wzdłuż krzywych

Niech krzywa γ będzie sparametryzowana przez $[0, 1] \ni \tau \mapsto \gamma(\tau) \in \Omega$. Zakładamy, że parametryzacja jest kawałkami C^1 . Założmy też, że na $\gamma([0, 1])$ określona jest funkcja f (niekoniecznie holomorficzna). Zdefiniujmy całkę z funkcji f po krzywej γ wzorem

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_0^1 f(\gamma(\tau)) \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (4.27)$$

Definicja ta nie zależy od parametryzacji zachowującej orientację. Przy zmianie orientacji zmienia się znak całki,

Wprowadzamy również oznaczenie na niezorientowaną całkę wzdłuż krzywej γ :

$$\int_{\gamma} f(z) |dz| := \int_0^1 f(\gamma(\tau)) \left| \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} \right| d\tau.$$

Definicja ta nie zależy od parametryzacji, również zmieniającej orientację.

Zauważmy, że

$$\left| \int_{\gamma} f(z) g(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \sup_{z \in \gamma[0,1]} |g(z)|.$$

Przykład. Niech γ będzie okręgiem $[0, 2\pi] \ni \phi \mapsto e^{i\phi}a + b \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^n dz &= \int_0^{2\pi} i(ae^{i\phi} + b)^n ae^{i\phi} d\phi \\ &= \sum_{j=0}^n \int_0^{2\pi} a^m b^{n-m} i \frac{n!}{m!(n-m)!} e^{i(m+1)\phi} d\phi = 0; \\ \int_{\gamma} z^n |dz| &= \int_0^{2\pi} (ae^{i\phi} + b)^n a d\phi \\ &= b^n a 2\pi; \\ \int_{\gamma} \bar{z} dz &= \int_0^{2\pi} (\bar{a}e^{-i\phi} + \bar{b}) ae^{i\phi} i d\phi \\ &= i2\pi|a|^2. \end{aligned}$$

4.4 Twierdzenie Cauchy'ego i jego konsekwencje

Twierdzenie 4.5 (Twierdzenie Cauchy'ego). Niech f będzie holomorficzną na otwartym i ograniczonym zbiorze Ω i ciągłą na $\bar{\Omega}$. Wtedy

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = 0. \quad (4.28)$$

Dowód. Udowodnijmy najpierw dla prostokąta $\Omega := \{(x + iy) : 0 < x < b, 0 < y < c\}$. Będziemy pisać f zamiast $f \circ \chi^{-1}$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} f(z) dz &= \int_0^b f(x, 0) dx + \int_0^c f(b, y) i dy - \int_0^b f(x, c) dx - \int_0^c f(0, y) i dy \\ &= i \int_0^b \int_0^c \partial_x f_x(x, y) dx dy - \int_0^b \int_0^c \partial_y f_x(x, y) dx dy = 0. \end{aligned}$$

Dla dowolnego obszaru Ω , wypełniamy go prostokącikami. \square

Wniosek 4.6 (Wzór Cauchy'ego) Przy tych samych założeniach, co powyżej, jeśli $z_0 \in \Omega$, to

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (4.29)$$

Dowód. Funkcja $\frac{f(z)}{z - z_0}$ jest holomorficzną w $\Omega \setminus K(z_0, r)$. Zatem

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial(\Omega \setminus K(z_0, r))} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \end{aligned}$$

Ale przez podstawienie $z = z_0 + re^{i\phi}$ dostajemy, że

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

\square

Wniosek 4.7 Każda funkcja holomorphyzna jest różniczkowalna nieskończenie wiele razy w sensie zespolonym. Zachodzi wzór

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \quad (4.30)$$

Wniosek 4.8 (Nierówność Cauchy'ego) Jeśli f jest holomorphyzna w $K(z_0, r)$ i ciągła na $\overline{K}(z_0, r)$, to

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{z \in K(z_0, r)} |f(z)| \quad (4.31)$$

Wniosek 4.9 (Twierdzenie Liouville'a) Każda funkcja holomorphyzna na \mathbb{C} i ograniczona jest stała.

Dowód. Dla dowolnego $z_0 \in \mathbb{C}$ i $r > 0$ z nierówności Cauchy'ego wynika oszacowanie

$$|f'(z_0)| \leq \frac{\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|}{r}.$$

Zatem $f' = 0$. \square

Wniosek 4.10 (Twierdzenie Gaussa) Każdy wielomian różny od stałej ma na \mathbb{C} miejsce zerowe.

Dowód. Załóżmy, że wielomian $P(z)$ stopnia $n \geq 1$ nie ma pierwiastka. Niech

$$f(z) := (P(z))^{-1}.$$

Wtedy f jest holomorphyzna na \mathbb{C} . Poza tym, wiemy, że dla $z > R$, $|P(z)| \geq |z|^n$. Zatem, $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Funkcja ciągła zbieżna do zera w nieskończoności jest ograniczona. A więc z Twierdzenia Liouville'a wynika, że f jest stała. \square

4.5 Związki dyspersyjne

Wartość główną całki z $\frac{f(\xi)}{\xi - \omega}$ definiujemy jako

$$P \int \frac{f(\xi)}{\xi - \omega} d\xi := \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\omega - \epsilon} + \int_{\omega + \epsilon}^{\infty} \right) \frac{f(\xi)}{\xi - \omega} d\xi.$$

Twierdzenie 4.11 (Wzór Sochockiego) Niech $\frac{f}{1+|\xi|} \in L^1$ i $|f(\xi) - f(\omega)| \leq c|\xi - \omega|^\delta$, niech f będzie ciągła w ω i w pewnym otoczeniu ω , $|f(\xi) - f(\omega)| \leq c|\xi - \omega|^\delta$, $\delta > 0$. Wtedy

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{f(\xi)}{\xi - \omega \pm i\epsilon} = \mp i\pi f(\omega) + P \int \frac{f(\xi)}{\xi - \omega} d\xi.$$

Twierdzenie 4.12 (Związki dyspersyjne) Niech f będzie ciągła na $\{\text{Im}z \geq 0\}$ i analityczna w $\{\text{Im}z > 0\}$. Zakładamy, że na \mathbb{R} jest różniczkowalna, $\frac{f}{1+|\omega|} \in L^1$ i na górnej półpłaszczyźnie mamy $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} f(\omega) = 0$. Niech $f = f_R + if_I$ będzie rozkładem na część rzeczywistą i urojoną. Wtedy dla $\omega \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_R(\omega) &= \frac{1}{\pi} P \int \frac{f_I(\xi)}{\xi - \omega} d\xi, \\ f_I(\omega) &= -\frac{1}{\pi} P \int \frac{f_R(\xi)}{\xi - \omega} d\xi. \end{aligned}$$

Dowód.

$$f(\omega + i\epsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\xi)}{\xi - i\epsilon - \omega} d\xi$$

Następnie korzystamy z tego, że $f(\omega + i\epsilon) \rightarrow f(\omega)$ i ze wzoru Sochockiego:

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int \frac{f(\xi)}{\xi - \omega - i\epsilon} d\xi = i\pi f(\omega) + P \int \frac{f(\xi)}{\xi - \omega} d\xi.$$

□

Fizyczne zastosowania Twierdzenia 4.12 są oparte na następującym schemacie. Załóżmy, że $g(t)$ jest “bodźcem” a $h(t)$ “reakcją”. Zakładamy, że $h(t)$ zależy od $g(t)$ liniowo i przyczynowo. Oznacza to, że

$$h(t) = \int_0^\infty \epsilon(s)g(t-s)ds. \quad (4.32)$$

Po przejściu do transformat Fouriera dostajemy

$$\hat{h}(\omega) = \hat{\epsilon}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

(Stosujemy konwencję $\hat{\epsilon}(\omega) = \int \epsilon(t)e^{it\omega} dt$.) Załóżmy, że $\epsilon \in L^1$. Wtedy funkcja $\hat{\epsilon}$ przedłuża się analitycznie na $\{\text{Im}z \geq 0\}$ i zatem stosuje się do niej powyższe twierdzenie.

4.6 Szeregi potęgowe

Twierdzenie 4.13 1) Niech (a_0, a_1, \dots) będzie ciągiem i

$$\rho^{-1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}. \quad (4.33)$$

Wtedy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

jest funkcją holomorficzną w kole $K(0, \rho)$. Poza tym

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

2) Niech $f(z)$ będzie holomorphyzna w kole $K(0, r)$. Wtedy jeśli

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

to

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \leq r^{-1}$$

i w $K(0, r)$ mamy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Dowód. Udowodnijmy 1). Niech $\rho_2 < \rho_1 < \rho$. Wtedy dla $n > N_0$, $|a_n| < \rho_1^{-n}$. Zatem dla $N > N_0$

$$|\sum_{n=N}^{\infty} a_n z^n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \rho_1^n |z|^n = \rho_1^{-N} |z|^N (1 - \frac{|z|}{\rho_1})^{-1}.$$

Czyli

$$f_N(z) := \sum_{n=0}^N a_n z^n$$

spełnia dla $N_0 \leq N_1 \leq N_2$ i $z \in K(0, \rho_2)$

$$|f_{N_1} - f_{N_2}| \leq \rho_1^{-N_1} \rho_2^{N_1} (1 - \frac{\rho_2}{\rho_1})^{-1}.$$

Czyli f_N jest zbieżny jednostajnie w $K(0, \rho_2)$, a więc niemal jednostajnie w $K(0, \rho)$ do funkcji $f(z)$. Podobnie pochodne $f'(z)$ są granicą niemal jednostajną pochodnych tego ciągu. Każdy z elementów tego ciągu spełnia warunki Cauchy'ego–Riemanna. Zatem i granica spełnia te warunki.

Udowodnijmy teraz 2). Z nierówności Cauchy'ego wynika, że jeśli $r_1 \leq r$, to istnieje C takie, że

$$|a_n| \leq C r_1^{-n}$$

Zatem szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

jest zbieżny w kole $K(0, r_1)$. Korzystając z jednostajnej zbieżności przy zamianie kolejności całkowania i sumowania dla $r_2 < r_1$ dostajemy

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(0, r_2)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(0, r_2)} \frac{f(\xi)}{\xi} \frac{1}{1 - \frac{z}{\xi}} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{\partial K(0, r_2)} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \end{aligned}$$

□

Wniosek 4.14 Niech Ω będzie podzbiorem otwartym w \mathbb{C} i $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Wtedy f jest holomorficzną \Leftrightarrow dla każdego $z_0 \in \Omega$ istnieje ciąg a_0, a_1, \dots i $r > 0$ takie, że

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < r.$$

W praktyce wystarczają prostsze kryteria:

1) **(Kryterium D'Alemberta)** Jeśli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

istnieje, to jest równe (4.33);

2) **(Kryterium Cauchy'ego)** Jeśli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$$

istnieje, to jest równe (4.33).

Przykłady rozwinięć funkcji analitycznych

$$(1 - z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1;$$

$$(1 - z)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m+1)\dots(m+n-1)}{n!} z^n, \quad |z| < 1, \quad m = 1, 2, \dots;$$

$$(1 + z)^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} z^n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Twierdzenie 4.15 (Rozwinięcie w szereg Laurent'a) Niech funkcja f będzie holomorficzną w pierścieniu

$$\{z : r < |z| < R\},$$

gdzie $0 \leq r < R \leq \infty$. Wtedy na tym pierścieniu

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n. \tag{4.34}$$

Współczynniki b_n można obliczyć ze wzoru

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(0, \rho)} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi.$$

gdzie $r < \rho < R$.

Dowód. Niech $r < r_1 < |z| < R_1 < R$. Wtedy

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(R_1,0)} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(r_1,0)} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(R_1,0)} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} z^n d\xi + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(r_1,0)} \frac{f(\xi)}{z^{n+1}} \xi^n d\xi \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n. \end{aligned}$$

□

Przykład. Funkcja

$$\frac{3-2z}{2-3z+z^2} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2-z}$$

ma następujące rozwinięcia

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} (1+2^{-n-1})z^n, \quad |z| < 1; \\ &-\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}z^n, \quad 1 < |z| < 2; \\ &-\sum_{n=0}^{\infty} (1+2^n)z^{-n-1}, \quad 2 < |z|. \end{aligned}$$

4.7 Funkcja wykładnicza

Funkcję wykładniczą można zdefiniować przez szereg

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Funkcja ta ma następujące własności:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2},$$

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z},$$

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z,$$

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}},$$

$$e^z = 1 \text{ wtedy i tylko wtedy gdy } z = i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Z funkcją e^z związane są funkcje trygonometryczne

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

i hiperboliczne

$$\operatorname{ch} z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Funkcje e^z , $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$ i $\operatorname{sh} z$ obcięte do \mathbb{R} mają wartości rzeczywiste. Możemy przy ich pomocy wyrazić e^z jak następuje:

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Funkcje $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$ i $\operatorname{sh} z$ są w pewnym sensie przełужeniami analitycznymi jednej funkcji, na przykład $\operatorname{ch} z$:

$$\operatorname{sh} t = -i \operatorname{ch}(t - i\frac{\pi}{2}), \quad \sin t = \operatorname{ch}(it - i\frac{\pi}{2}).$$

Oto własności funkcji $\operatorname{ch} z$:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} z &= \operatorname{ch}(-z), & \operatorname{ch}(z + i\pi) &= -\operatorname{ch} z, \\ i\partial_z \operatorname{ch} z &= \operatorname{ch}(z + i\frac{\pi}{2}), & \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{ch}^2(z + i\frac{\pi}{2}) &= 1. \end{aligned}$$

4.8 Funkcja logarytm i funkcja potęgowa

Funkcja e^z przekształca bijektywnie pas $\{z : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ na $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. Funkcję odwrotną do e^z określoną na

$$\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \tag{4.35}$$

nazywamy gałęzią główną logarytmu i oznaczamy $\log_{(0)} z$. (Dziedzina (4.35) została wybrana dość arbitralnie). Ma własności:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \log_{(0)} z &= \frac{1}{z} \\ \log_{(0)} 1 &= 0. \end{aligned}$$

Dostajemy zatem wzór

$$\log_{(0)} z = \int_{\gamma} \frac{dw}{w}$$

gdzie γ jest dowolnym konturem wewnątrz (4.35) zaczynającym się w 1 i kończącym się w z .

Czasami przydatna jest funkcja argument (która nie jest holomorficzną)

$$\arg_{(0)} z := \operatorname{Im} \log_{(0)} z.$$

Wychodząc ze wzoru

$$\frac{d}{dz} \log_{(0)}(1+z) = \frac{1}{1+z}$$

i całkując rozwinięcie dla $\frac{1}{1+z}$ dostajemy

$$\log_{(0)}(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n, \quad |z| < 1.$$

Zauważmy, że dla zdefiniowanej powyżej funkcji logarytm nie dla wszystkich $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ zachodzi wzór

$$\log_{(0)}(z_1 z_2) = \log_{(0)} z_1 + \log_{(0)} z_2. \tag{4.36}$$

(4.36) jest spełniony, jeśli $|\arg z_1 + \arg z_2| < \pi$.

Funkcja $\log_{(0)} x$ obcięta do \mathbb{R}_+ ma wartości w \mathbb{R} . Funkcję $\log_{(0)} z$ możemy następująco wyrazić przez funkcje rzeczywiste:

$$\log_{(0)} (r(\cos \phi + i \sin \phi)) = \log r + i\phi, \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \phi \in]-\pi, \pi[.$$

Jeśli $\mu \in \mathbb{C}$, to definiujemy gałąź główną funkcji potęgowej jako

$$\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \ni z \mapsto z_{(0)}^\mu := e^{\mu \log_{(0)} z}.$$

Zauważmy, że gdy $\mu \in \mathbb{Z}$ to powyższa definicja sprowadza się do zwykłej potęgi (która zdefiniowana jest na całym \mathbb{C} , być może z wyjątkiem $\{0\}$). Mamy tożsamości

$$\begin{aligned} 1_{(0)}^\mu &= 1, \\ \frac{d}{dz} z_{(0)}^\mu &= \mu z_{(0)}^{\mu-1}, \\ z_{(0)}^{\mu_1 + \mu_2} &= z_{(0)}^{\mu_1} z_{(0)}^{\mu_2}, \quad |\arg z_1 + \arg z_2| < \pi. \end{aligned}$$

Zdefiniujmy

$$\binom{\mu}{n} := \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{n!}.$$

Wtedy wychodząc ze wzoru Taylora dostajemy następujące rozwinięcie funkcji potęgowej:

$$(1+z)_{(0)}^\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\mu}{n} z^n, \quad |z| < 1.$$

Funkcja $z_{(0)}^\mu$ dla $z \in \mathbb{R}_+$ i $\mu \in \mathbb{R}$ ma wartości w \mathbb{R}_+ . Funkcję $z_{(0)}^\mu$ możemy następująco wyrazić przez funkcje rzeczywiste:

$$(r(\cos \phi + i \sin \phi))_{(0)}^{\alpha+i\beta} = r^\alpha e^{-\beta\phi} e^{i\alpha\phi + i\beta \log_{(0)} r}, \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \phi \in]-\pi, \pi[.$$

Niech $\theta \in \mathbb{R}$. Funkcja e^z jest bijekcją również jeśli damy jej następującą dziedzinę i przeciwdziedzinę:

$$\{z : \theta - \pi < \operatorname{Im} z < \theta + \pi\} \ni z \mapsto e^z \in \mathbb{C} \setminus [e^{i\theta}, \infty[.$$

Odwrotna do niej funkcja też będzie nazywana logarytmem. Będziemy ją oznaczać

$$\Omega_\theta := \mathbb{C} \setminus [e^{i\theta}, \infty[\ni z \mapsto \log_{(\theta)}(z).$$

Zauważmy, że jeśli $\theta_1 < \theta_2 < \theta_1 + 2\pi$, to na jednej ze spójnych składowych $\Omega_{(\theta_1)} \cap \Omega_{(\theta_2)}$ $\log_{\theta_1}(z) = \log_{\theta_2}(z)$ na drugiej zaś, $\log_{(\theta_1)} z + i2\pi = \log_{(\theta_2)} z$.

Podobnie można zdefiniować

$$\Omega_\theta \ni z \mapsto z_{(\theta)}^\mu := e^{\mu \log_{(\theta)}(z)}.$$

Jeśli $\theta_1 < \theta_2 < \theta_1 + 2\pi$, to na jednej ze spójnych składowych $\Omega_{\theta_1} \cap \Omega_{\theta_2}$ mamy $z_{(\theta_1)}^\mu = z_{(\theta_2)}^\mu$ na drugiej zaś, $z_{(\theta_1)}^\mu e^{i2\pi\mu} = z_{(\theta_2)}^\mu$

Jeśli μ jest wymierne i równe nieskracalnemu ułamkowi $\frac{p}{q}$, to

$$z_{(\theta)}^\mu = z_{(\theta+q2\pi)}^\mu.$$

W przyszłości będziemy traktować $\log_{(0)} z$ i $z_{(0)}^\mu$ jako standardowe odmiany funkcji logarytmu i funkcji potęgowej i będziemy pomijać indeks (0) .

4.9 Punkty osobliwe funkcji analitycznych

Punkt z_0 nazywamy izolowanym punktem osobliwym funkcji f jeśli istnieje $r > 0$ taki, że f jest holomorficzną na $K(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ ale z_0 nie należy do dziedziny funkcji f . Rozróżniamy następujące przypadki.

Definicja 4.16 (1) Funkcja f ma w z_0 osobliwość pozorną (usuwalną) gdy istnieje

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \neq \infty.$$

(2) Funkcja f ma w z_0 biegun rzędu $k = 1, 2, \dots$ gdy istnieje

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^k \neq 0, \infty.$$

(3) Jeśli izolowany punkt osobliwy z_0 nie jest ani osobliwością pozorną ani biegunem, to mówimy, że funkcja f ma w z_0 osobliwość istotną.

W wyżej opisanej sytuacji wiemy, że dla pewnego $R > 0$ możemy rozwinąć funkcję f na $K(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ w szereg Laurenta:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Możemy wtedy rozpoznać typ osobliwości:

Twierdzenie 4.17 (1) Funkcja f ma w z_0 osobliwość pozorną (usuwalną) $\Leftrightarrow a_n = 0$ dla $n = -1, -2, \dots$

(2) Funkcja f ma w z_0 biegun rzędu $k = 1, 2, \dots$ $\Leftrightarrow a_{-k} \neq 0$ i $a_n = 0$ dla $n = -k - 1, -k - 2, \dots$

(3) Funkcja f ma w z_0 osobliwość istotną, $\Leftrightarrow \inf\{n : a_n \neq 0\} = -\infty$.

Przykład.

$$\frac{\sin z}{z}$$

ma w 0 osobliwość usuwalną.

$$(1 + z^2)^{-2}$$

ma w $\pm i$ bieguny drugiego rzędu.

$$e^{1/z}$$

ma w 0 osobliwość istotną.

Definicja 4.18 Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie otwarty. Funkcja f jest meromorficzna na Ω gdy istnieją punkty $z_1, z_2, \dots \in \Omega$ takie, że f jest holomorficzną na $\Omega \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$ i punkty z_1, z_2, \dots są biegunami funkcji f .

Przykład. Funkcja

$$(\sin z)^{-1}$$

jest meromorficzna na \mathbb{C} .

Definicja 4.19 Residuum funkcji f w punkcie z_0 jest zdefiniowane jako

$$\operatorname{Res}f(z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, R_1)} f(z) dz,$$

gdzie R_1 jest dowolną liczbą dodatnią taką, że $K(z_0, R_1) \setminus \{z_0\}$ jest zawarte w dziedzinie f .

Zauważmy, że definicja ta nie zależy od wyboru R_1 . Mamy

$$\frac{d}{dz} \frac{z^{n+1}}{n+1} = z^n, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}.$$

Dlatego

$$\int_{\partial K(z_0, R_1)} z^n dz = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}.$$

Poza tym

$$\int_{\partial K(z_0, R_1)} z^{-1} dz = 2\pi i.$$

Stąd wynika wzór

$$\operatorname{Res}f(z_0) = a_{-1}. \tag{4.37}$$

Jeśli f ma biegun rzędu najwyżej k , to residuum można obliczyć ze wzoru

$$\operatorname{Res}f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - z_0)^k f(z). \tag{4.38}$$

Jeśli funkcja f jest holomorficzna na $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$, to zachodzi wzór

$$\int_{\partial \Omega} f(z) dz = \sum_{j=1}^n 2\pi i \operatorname{Res}f(z_j). \tag{4.39}$$

Przykład. Jeśli

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2},$$

to

$$\operatorname{Res}f(ia) = -\frac{i}{2a}$$

Zatem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}f(ia) = \frac{\pi}{a}.$$

Lemat 4.20 (Lemat Jordana) Niech $a > 0$. Dla $R > 0$ oznaczamy przez γ_R górny półokrąg o promieniu R . Niech $zf(z)$ będzie ograniczone dla $\operatorname{Re} z > 0$, $|z| > R_0$. Wtedy dla $\xi > 0$

$$\int_{\gamma_R} e^{iz\xi} f(z) dz \rightarrow 0.$$

Dowód.

$$\left| \int e^{iz\xi} f(z) dz \right| \leq \int_0^\pi r |f(re^{i\phi})| e^{-r \sin \phi} d\phi \leq C \int_0^\pi e^{-r \sin \phi} d\phi \rightarrow 0,$$

gdzie w ostatnim kroku skorzystaliśmy z Twierdzenia Lebesgue'a. \square

Przykład. Niech

$$f(z) := \frac{ze^{iz}}{1+z^2}$$

Wtedy

$$\operatorname{Res} f(i) = \frac{e^{-1}}{2}.$$

Poza tym,

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \sup_{R>0} \int_{\gamma_R} |e^{iaz}| |dz| \sup_{z \in \gamma_R} \left| \frac{z}{1+z^2} \right| \leq C \sup_{z \in \gamma_R} \left| \frac{z}{1+z^2} \right|,$$

co dąży do zera gdy $R \rightarrow \infty$. Zatem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx = \operatorname{Im} \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R, R]} f(z) dz \right) = \operatorname{Im} (2\pi i \operatorname{Res} f(i)) = \pi e^{-1}.$$

Przykład.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ix\xi}}{x-i} dx = \begin{cases} 0 & \xi < 0, \\ i\pi & \xi = 0, \\ 2i\pi e^{-\xi} & \xi > 0. \end{cases}$$

Lemat 4.21 Niech funkcja holomorphyzna f ma w z_0 biegun pierwszego rzędu. Zdefiniujemy krzywą

$$\gamma_r := \{z_0 + re^{i\phi} : \phi_0 < \phi < \phi_1\}.$$

Wtedy

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = (\phi_1 - \phi_0) i \operatorname{Res} f(z_0).$$

Dowód. Mamy

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + g(z),$$

gdzie g jest holomorphyzna w z_0 . Oczywiście,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} g(z) dz = 0.$$

Przykład. Jeśli

$$f(z) := \frac{e^{iz}}{z},$$

to

$$\operatorname{Res} f(0) = 1$$

Dlatego

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_{-R}^R f(z) dz = \operatorname{Im}(\pi i \operatorname{Res} f(0)) = \pi.$$

4.10 Funkcje analityczne a punkt w nieskończoności

Przez $\overline{\mathbb{C}}$ będziemy oznaczać sferę Riemanna, to znaczy $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Niech $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$. Mówimy, że f jest analityczna w ∞ , gdy $f(\frac{1}{z})$ jest analityczna w 0.

Punkt ∞ nazywamy izolowanym punktem osobliwym funkcji f , gdy dla pewnego R funkcja f jest holomorficzna na $\mathbb{C} \setminus K(0, R)$ i ∞ nie należy do dziedziny f . Rozróżniamy następujące przypadki:

1) f ma w ∞ osobliwość pozorną, jeśli istnieje

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \neq \infty.$$

2) f ma w ∞ biegun rzędu $k = 1, 2, \dots$, gdy istnieje

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) z^{-k} \neq 0, \infty.$$

3) f ma w ∞ osobliwość istotną w przeciwnym razie.

W wyżej opisanej sytuacji wiemy, że dla pewnego $R > 0$ możemy rozwinąć funkcję f na $\mathbb{C} \setminus K(z_0, R)$ w szereg Laurenta:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Możemy wtedy rozpoznać typ osobliwości:

- 1) Funkcja f ma w ∞ osobliwość pozorną (usuwalną) gdy $a_n = 0$ dla $n = 1, 2, \dots$
- 2) Funkcja f ma w ∞ biegun rzędu $k = 1, 2, \dots$ gdy $a_k \neq 0$ i $a_n = 0$ dla $n = k + 1, k + 2, \dots$
- 3) Funkcja f ma w ∞ osobliwość istotną, jeśli

$$\sup\{n : a_n \neq 0\} = \infty.$$

Przykład. Funkcja e^z ma w ∞ istotny punkt osobliwy.

Definicja 4.22 Jeśli $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ jest otwarty to mówimy, że funkcja f jest meromorficzna na Ω gdy istnieją punkty $z_1, z_2, \dots \in \Omega$ takie, że f jest holomorficzna na $\Omega \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$ i ma w $\{z_1, z_2, \dots\}$ osobliwości pozorne bądź bieguny.

Przykład. Punkt ∞ nie jest izolowanym punktem osobliwym funkcji

$$(\sin z)^{-1}.$$

Zatem, funkcja ta nie jest meromorficzna na $\overline{\mathbb{C}}$.

Definicja 4.23 Residuum funkcji f w ∞ jest równe

$$\operatorname{Res} f(\infty) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial(\mathbb{C} \setminus K(0, R_1))} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(0, R_1)} f(z) dz$$

gdzie $R_1 > R$.

Zauważmy, że definicja ta nie zależy od wyboru R_1 . Mamy wzór

$$\operatorname{Res} f(\infty) = -a_{-1}. \quad (4.40)$$

W praktyce możemy wyliczać residuum w nieskończoności ze wzoru

$$\operatorname{Res} f(\infty) = \operatorname{Res} g(0), \quad g(w) := -f\left(\frac{1}{w}\right) \frac{1}{w^2} \quad (4.41)$$

Jeśli funkcja f jest holomorficzna na $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$, gdzie $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, to zachodzi wzór

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = \sum_{j=1}^n 2\pi i \operatorname{Res} f(z_j). \quad (4.42)$$

Przykład. Niech $f(z) := \frac{z^{99}}{1-z^{100}}$. Wtedy

$$\operatorname{Res} f(\infty) = 1.$$

Dlatego,

$$\int_{\partial K(0, 2)} f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res} f(\infty) = -2\pi i.$$

Twierdzenie 4.24 Każda funkcja meromorficzna na $\overline{\mathbb{C}}$ jest wymierna. Innymi słowy, każda funkcja analityczna z $\overline{\mathbb{C}}$ w $\overline{\mathbb{C}}$ jest wymierna.

Dowód. Niech f będzie meromorficzna na $\overline{\mathbb{C}}$. Ponieważ sfera Riemanna jest zwarta a punkty osobliwe f są izolowane, więc jest ich skończona liczba. Niech $\{z_1, \dots, z_m, \infty\}$ będą punktami osobliwymi funkcji f . Niech

$$\sum_{n=1}^{k_i} a_{n,i} (z - z_i)^{-n}$$

będą osobliwymi częściami rozwinięć w szereg Laurent'a wokół z_i oraz

$$\sum_{n=1}^{k_\infty} a_{n,\infty} z^n$$

niech będzie częścią rozwinięcia w szereg Laurent'a wokół ∞ z dodatnimi potęgami. Wtedy

$$f(z) - \sum_{i=1}^m \sum_{n=1}^{k_i} a_{n,i} (z - z_i)^{-n} - \sum_{n=1}^{k_\infty} a_{n,\infty} z^n$$

jest funkcją analityczną na $\overline{\mathbb{C}}$. Zatem na mocy twierdzenia Liouville'a jest stała. \square

4.11 Funkcje analityczne z $\overline{\mathbb{C}}$ w $\overline{\mathbb{C}}$

Definicja 4.25 Niech $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ i $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Mówimy, że f jest analityczna w $z_0 \in \Omega$, gdy spełnione są następujące warunki:

- 1) gdy $z_0 \neq \infty$, $f(z_0) \neq \infty$, to f jest analityczna w otoczeniu z_0 w zwykłym sensie;
- 2) gdy $z_0 \neq \infty$, $f(z_0) = \infty$, to $\frac{1}{f(z)}$ jest analityczna w otoczeniu z_0 w zwykłym sensie;
- 3) gdy $z_0 = \infty$ i $f(z_0) \neq \infty$, to $f(\frac{1}{z})$ jest analityczna w otoczeniu 0 w zwykłym sensie;
- 4) gdy $z_0 = f(z_0) = \infty$, to $\frac{1}{f(\frac{1}{z})}$ jest analityczna w otoczeniu 0 w zwykłym sensie.

Twierdzenie 4.26 Niech f będzie meromorficzna na $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$. Rozszerzmy funkcję f na cały Ω kładąc

$$f(z_j) := \lim_{z \rightarrow z_j} f(z),$$

w szczególności w biegunach funkcji f kładziemy $f(z_j) := \infty$. Wtedy funkcja

$$f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{C}},$$

jest analityczna w sensie definicji (4.25).

Twierdzenie 4.27 (1) Każda funkcja holomorficzna z $\overline{\mathbb{C}}$ w \mathbb{C} jest stała.

(2) Każda bijekcja analityczna $\overline{\mathbb{C}}$ w siebie jest homografią.

(3) Każda funkcja analityczna z $\overline{\mathbb{C}}$ w $\overline{\mathbb{C}}$ jest wymierna.

Dowód. (1) jest preformulowaniem twierdzenia Liouville'a. (3) jest preformulowaniem Twierdzenia (4.24). Aby dowieść (2) korzystamy z (3). \square

5 Przedłużenie analityczne

5.1 Jednoznaczność przedłużania funkcji analitycznych

Twierdzenie 5.1 Niech f, g będą holomorficzne w otwartym spójnym obszarze $\Omega \subset \mathbb{C}$. Załóżmy, że istnieje ciąg $\{z_n\} \subset \Omega$ taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n =: z_0 \in \Omega$ i $z_n \neq z_0$ dla $n = 1, 2, \dots$. Niech

$$f(z_n) = g(z_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Wtedy $f = g$ na całym Ω .

Dowód. Niech

$$\Omega_1 := \{z \in \Omega : f^{(j)}(z) = g^{(j)}(z), j = 0, 1, \dots\}.$$

Zbiór Ω_1 jest domknięty w Ω jako przecięcie domkniętych w Ω zbiorów

$$\{z \in \Omega : f^{(j)}(z) = g^{(j)}(z)\}.$$

Jest on również otwarty, bo dla każdego $\tilde{z}_0 \in \Omega_1$ istnieje $r > 0$ takie, że na $K(\tilde{z}_0, r)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\tilde{z}_0)}{n!} (z - \tilde{z}_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(\tilde{z}_0)}{n!} (z - \tilde{z}_0)^n = g(z).$$

Jest on wreszcie niepusty, bo $z_0 \in \Omega_1$. W rzeczy samej, istnieje $r > 0$ takie, że na $K(z_0, r)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

i

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n.$$

Niech $c_j := a_j - b_j$ i m niech będzie najmniejszym indeksem takim, że $c_m \neq 0$. Wtedy

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - g(z_n)}{(z_n - z_0)^m} = c_m \neq 0$$

co jest sprzecznością. \square

5.2 Przedłużanie funkcji analitycznych wzdłuż drogi

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie otwartym spójnym zbiorem i $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funkcją analityczną. Niech $[0, 1] \ni \tau \mapsto \gamma(\tau) \in \mathbb{C}$ będzie krzywą taką, że $\gamma(0) \in \Omega$. Mówimy, że można przedłużyć f wzdłuż γ , gdy dla każdego $\tau \in [0, 1]$ istnieją $r_\tau > 0$ i funkcja analityczna $f_\tau : K(\gamma(\tau), r_\tau) \rightarrow \mathbb{C}$ takie, że

(1) $f_0 = f$ na $K(\gamma(0), r_0) \cap \Omega$;

(2) Dla każdego $\tau_0 \in [0, 1]$ istnieje $\epsilon > 0$ taki, że dla każdego $\sigma \in [0, 1] \cap [\tau_0 - \epsilon, \tau_0 + \epsilon]$ mamy $\gamma(\tau_0) \in K(\gamma(\sigma), r_\sigma)$ oraz $f_\tau = f_\sigma$ na $K(\gamma(\tau_0), r_{\tau_0}) \cap K(\gamma(\sigma), r_\sigma)$.

Twierdzenie 5.2 *Niech $\sigma \in [0, 1]$ i $z_\sigma = \gamma(\sigma)$. Wtedy $f_\tau(z_\tau)$ zależy tylko od funkcji $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ i krzywej γ (a nie zależy od wyboru r_τ, f_τ).*

Definicja 5.3 *Liczbę*

$$f(z_\sigma)_{z_\sigma = \gamma(\sigma)} := f_\sigma(z_\sigma)$$

nazywamy wartością w punkcie z_σ funkcji f przedłużonej wzdłuż krzywej γ .

Dowód. Niech r_τ, f_τ i $\tilde{r}_\tau, \tilde{f}_\tau$ są dwiema rodzinami spełniającymi warunki definicji przedłużenia funkcji. Załóżmy, że istnieje $\tau \in [0, 1]$ taki, że $f_\tau \neq \tilde{f}_\tau$ na $K(\gamma(\tau), \min(r_\tau, \tilde{r}_\tau))$. Niech

$$\tau_0 = \inf\{\tau \in [0, 1] : f_\tau \neq \tilde{f}_\tau \text{ na } K(\gamma(\tau), \min(r_\tau, \tilde{r}_\tau))\}.$$

Oczywiście, $\tau_0 > 0$. Niech $\epsilon > 0$ spełnia warunek (2) definicji zarówno dla rodziny z tyldą jak i bez tyldy. Niech $\tau_- \in [\tau_0 - \epsilon, \tau_0]$, $\tau_+ \in [\tau_0, \tau_0 + \epsilon]$. Wtedy

$$\begin{aligned} f_{\tau_-} &= f_{\tau_+} \text{ na } K(\gamma(\tau_-), r_{\tau_-}) \cap K(\gamma(\tau_+), r_{\tau_+}); \\ \tilde{f}_{\tau_-} &= \tilde{f}_{\tau_+} \text{ na } K(\gamma(\tau_-), \tilde{r}_{\tau_-}) \cap K(\gamma(\tau_+), \tilde{r}_{\tau_+}); \\ f_{\tau_-} &= \tilde{f}_{\tau_-} \text{ na } K(\gamma(\tau_-), \min(r_{\tau_-}, \tilde{r}_{\tau_-})). \end{aligned}$$

Czyli $f_{\tau_+} = \tilde{f}_{\tau_+}$ na

$$K(\gamma(\tau_-), \min(r_{\tau_-}, \tilde{r}_{\tau_-})) \cap K(\gamma(\tau_+), \min(r_{\tau_+}, \tilde{r}_{\tau_+})). \quad (5.43)$$

Zbiór (5.43) jest niepusty, bo $\gamma(\tau_0)$ do niego należy, jest otwarty i wypukły jako przecięcie kół otwartych. Jest więc spójny. Zatem na mocy jednoznaczności przedłużania funkcji analitycznych $f_{\tau_+} = \tilde{f}_{\tau_+}$ na $K(\gamma(\tau_+), \min(r_{\tau_+}, \tilde{r}_{\tau_+}))$, co przeczy definicji τ_0 . \square

Przykład. Niech krzywa $[0, 1] \ni \tau \mapsto \gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ będzie zamknięta (czyli $w := \gamma(0) = \gamma(1)$) i okrąży punkt 0 $n \in \mathbb{Z}$ razy. Załóżmy też, że $\gamma(0) \in \mathbb{C} \setminus e^{i\theta}[-\infty, 0]$. Wtedy można przedłużyć funkcje $\log_{(\theta)} z$ i $z_{(\theta)}^\mu$ wzdłuż krzywej γ i mamy

$$\log_{(\theta)}(w)_{w=\gamma(1)} = n2\pi i + \log_{(\theta)} w, \quad w_{(\theta)}^\mu_{w=\gamma(1)} = e^{n\mu 2\pi i} w_{(\theta)}^\mu.$$

Przykład. W ramach analizy rzeczywistej definiuje się osobno funkcje odwrotne do trygonometrycznych i hiperbolicznych

$$\begin{aligned} \operatorname{archt} &= \log(\sqrt{t^2 - 1} + t) \\ &= -\log(-\sqrt{t^2 - 1} + t), \quad t \in [1, \infty[\\ \operatorname{arsht} &= \log(\sqrt{t^2 + 1} + t) \\ &= -\log(-\sqrt{t^2 + 1} - t), \quad t \in \mathbb{R} \\ \operatorname{arccos} t &= \frac{1}{i} \log(i\sqrt{t^2 - 1} + t) \\ &= -\frac{1}{i} \log(-i\sqrt{t^2 - 1} + t), \quad t \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Funkcje te mogą być traktowane jako przedłużenia analityczne jednej z nich, na przykład archt . Mamy bowiem

$$\begin{aligned} \operatorname{arch}(\pm is) &= \pm i\frac{\pi}{4} + \operatorname{arsh}s, \quad s \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{archt} &= \pm i \operatorname{arccos} t, \quad t \in]-1, 1[, \\ \operatorname{arch}(-t) &= \pm i\pi + \operatorname{archt}, \quad t \in [1, \infty[, \end{aligned}$$

gdzie $+$ lub $-$ zależy od tego, czy przedłużamy górą czy dołem.

Zauważmy też, że okrążenie punktu ± 1 prowadzi do pomnożenia $\operatorname{arct}t$ przez -1 , zaś okrążenie $[-1, 1]$ prowadzi do dodania $2\pi i$ do $\operatorname{arct}t$.

Przykład.

$$\operatorname{arct}gt = \frac{1}{2i} (\log(1 + it) - \log(1 - it)).$$

Przykład. Rozważmy funkcję

$$f(z) = z^\alpha (z - 1)^\beta.$$

Możemy ją rozumieć jako iloczyn gałęzi głównych z^α i $(z - 1)^\beta$, który jest dobrze określony na $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 1]$.

Załóżmy, że krzywa γ zaczyna się w dowolnym punkcie $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 1]$, obiega odcinek $[0, 1]$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek i wraca do punktu wyjścia, np. $\partial K(0, R)$, gdzie $R > 1$. Wtedy wartość funkcji $f(z)$ po przedłużeniu analitycznym wzdłuż γ wartość funkcji $f(z)$ mnoży się przez czynnik $e^{i2\pi(\alpha+\beta)}$. W szczególności, jeśli

$$\alpha + \beta \in \mathbb{Z}, \quad (5.44)$$

to wracamy do tej samej wartości funkcji f . Wtedy możemy naszą funkcję zdefiniować na $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ jako jednoznacznie funkcję analityczną.

Przykład. Policzmy całkę

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}(1+x)} dx$$

Rozważmy

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z(z-1)}(1+z)}$$

rozumianą jako funkcję analityczną na $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ w sposób opisany powyżej. W ∞ residuum jest równe 0. Zatem

$$\int_{[1, 0^-, 1^-]} f(z) dz = -e^{-i\frac{1}{2}\pi} I + e^{-i\frac{3}{2}\pi} I = -2\pi i \operatorname{Res} f(-1),$$

$$\operatorname{Res} f(-1) = \lim_{z \rightarrow -1} f(z)(z+1) = \frac{1}{\sqrt{z(z-1)}} \Big|_{z=-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Zatem

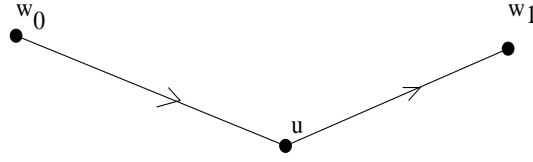
$$I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

5.3 Notacja do oznaczania krzywych

Teraz opiszemy notację, którą będziemy stosować do oznaczania krzywych.

Czasami można stosować łamane postaci

$$[w_0, u, w_1] := [w_0, u] \cup [u, w_1].$$

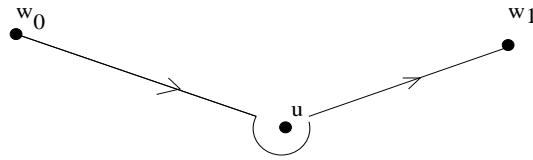


Osobliwość funkcji w u może prowadzić do kłopotów w postaci rozbieżności całki. Można również omijać punkt u małym łukiem o promieniu r i rozważać łamaną postaci:

$$[w_0, u + re^{i\phi_0}] \cup \{u + re^{i\phi} : \phi \in [\phi_0, \phi_1]\} \cup [u + re^{i\phi_1}, w_1]. \quad (5.45)$$

gdzie $w_0 := u + Re^{i\phi_0}$, $w_1 := u + R_1e^{i\phi_1}$, $R_0 > r$, $R_1 > r$, $\phi_0 < \phi_1$ i $|\phi_0 - \phi_1| < 2\pi$. Oczywiście, całka po takim konturze nie zależy od r , dla dostatecznie małego r . Zauważmy, że punkt rozgałęzienia u jest omijany łukiem w kierunku przeciwnym do ruch wskazówek. Krzywą powyższą będziemy oznaczali

$$[w_0, u^+, w_1].$$

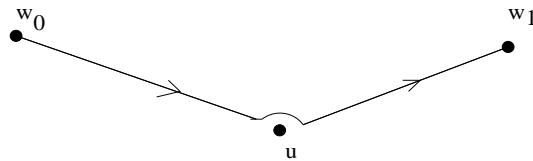


Podobnie, warto mieć oznaczenie na łamaną

$$[w_0, u + re^{i\phi_0}] \cup \{u + re^{i\phi} : \phi \in [\phi_1, \phi_0]\} \cup [u + re^{i\phi_1}, w_1]. \quad (5.46)$$

gdzie $R_0 > r$, $R_1 > r$, $\phi_1 < \phi_0$, $|\phi_0 - \phi_1| < 2\pi$. Różni się ona od (5.45) tym, że punkt rozgałęzienia u obiegamy zgodnie z ruchem wskazówek. Krzywą (5.46) będziemy oznaczać przez

$$[w_0, u^-, w_1].$$



$[u^+]$ będzie oznaczało kontur obiegający punkt u po małym okręgu w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek. $[u^-]$ będzie oznaczało kontur obiegający punkt u po małym okręgu w kierunku zgodnym do ruchu wskazówek.

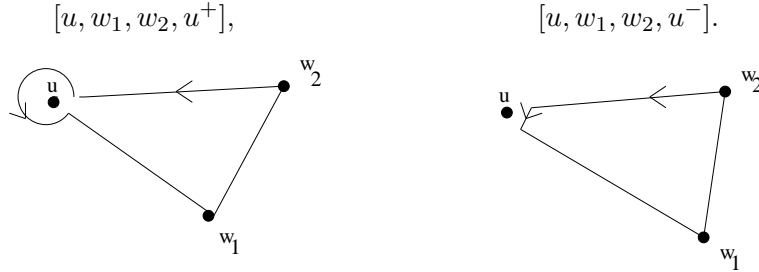
$$[u^+],$$



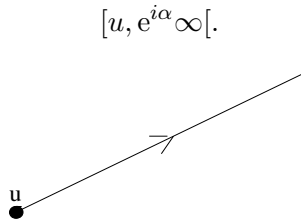
$$[u^-].$$



Pisząc $\gamma = [u, w_1, \dots, w_n, u^+]$ będziemy mieli na myśli, że γ jest konturem zamkniętym i połączonym małym łukiem obiegającym u w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek. Podobnie, jeśli $\gamma = [u, w_1, \dots, w_n, u^-]$, to γ jest konturem zamkniętym połączonym małym łukiem obiegającym z w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek.



$[u, e^{i\alpha} \infty[$ będzie oznaczać półprostą $\{u + e^{i\alpha}t : t > 0\}$ zaczynającą się w u i biegnącą do nieskończoności pod kątem α .

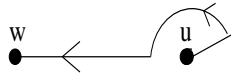


$[(u + e^{i\phi_0} \cdot 0)^+, w]$ oznaczać będzie łamaną

$$[u, u + re^{i\phi_0}] \cup \{u + re^{i\phi} : \phi \in [\phi_0, \phi_1]\} \cup [u + re^{i\phi_1}, w],$$

gdzie $w = u + Re^{i\phi_1}$, $r < R$, $\phi_1 < \phi_0$, $|\phi_1 - \phi_0| < 2\pi$ (łamana wychodzi z punktu u pod kątem ϕ_0 , obiega punkt u małym łukiem przeciwnie do ruchu wskazówek i biegnie do w).

$$[(u + e^{i\alpha}0)^+, w].$$



5.4 * Powierzchnie Riemanna i funkcje analityczne wieloznaczne

Niech Ξ będzie przestrzenią topologiczną Hausdorffa i ϕ odwzorowaniem z Ξ w \mathbb{C} . Mówimy, że (Ξ, ϕ) jest powierzchnią Riemanna nad \mathbb{C} , gdy dla każdego $v \in \Xi$ istnieje $r > 0$ oraz ciągle odwzorowanie $\psi_{v,r} : K(\phi(v), r) \rightarrow \Xi$ takie, że

$$\phi \circ \psi_{v,r}(z) = z, \quad z \in K(\phi(v), r)$$

i $\psi_{v,r}(K(\phi(v), r))$ jest otwarty w Ξ .

Niech (Ξ, ϕ) będzie powierzchnią Riemanna nad \mathbb{C} .

Ma miejsce następujący fakt: Dla każdego $v \in \Xi$, istnieje $r_v \in]0, \infty]$ takie, że odwzorowanie ψ_{v,r_v} o własnościach opisanych powyżej istnieje, zaś dla $r > r_v$ takie $\psi_{r,v}$ nie istnieje. Dostajemy w ten sposób funkcję $\Xi \ni v \mapsto r_v \in]0, \infty]$. Będziemy pisać $\psi_v := \psi_{v,r_v}$.

Niech $f : \Xi \rightarrow \mathbb{C}$. Mówimy, że (Ξ, ϕ, f) jest funkcją analityczną na Ξ , gdy dla każdego v to $f \circ \psi_v : K(\phi(v), r_v) \rightarrow \mathbb{C}$ jest funkcją analityczną w zwykłym sensie.

Niech (Ξ, ϕ, f) będzie funkcją analityczną na Ξ . Dla każdego $v \in \Xi$, niech $r_{v,f}$ oznacza promień zbieżności funkcji $f \circ \psi_{v,r}$ dla pewnego $r > 0$. Oczywiście, $0 < r_v < r_{v,f}$.

Mówimy, że (Ξ, ϕ, f) jest maksymalną funkcją analityczną, gdy dla każdego $v \in \Xi$, $r_v = r_{v,f}$.

Mówimy, że (Ξ, ϕ, f) jest zredukowana, gdy z tego, że $v_1, v_2 \in \Xi$, $\phi(v_1) = \phi(v_2) = z_0$ i $0 < r < \min(r_{v_1}, r_{v_2})$ wynika, że funkcje

$$\begin{aligned} K(z_0, r) \ni z &\mapsto f(\psi_{v_1,r}(z)), \\ K(z_0, r) \ni z &\mapsto f(\psi_{v_2,r}(z)), \end{aligned}$$

są różnymi funkcjami. Jeśli (Ξ, ϕ, f) nie jest funkcją zredukowaną, zawsze można ją w jednoznaczny sposób zredukować. Wprowadzamy w Ξ relację: $v_1 \sim v_2$ gdy $\phi(v_1) = \phi(v_2)$ i dla $r := \min(r_{v_1}, r_{v_2})$

$$f \circ \psi_{v_1,r} = f \circ \psi_{v_2,r}.$$

Wtedy \sim jest relacją równoważności. Definiujemy

$$\Xi_{\text{red}} := \Xi / \sim,$$

Niech $\phi^{\text{red}} : \Xi \rightarrow \Xi_{\text{red}}$ będzie kanoniczną surjekcją. Definiujemy również

$$\phi_{\text{red}}([v]) := \phi(v), \quad f_{\text{red}}([v]) := f(v).$$

Wtedy $(\Xi_{\text{red}}, \phi_{\text{red}})$ jest powierzchnią Riemanna nad \mathbb{C} , $(\Xi_{\text{red}}, \phi_{\text{red}}, f_{\text{red}})$ jest zredukowaną funkcją analityczną i spełnione są warunki

$$\phi = \phi_{\text{red}} \circ \phi^{\text{red}}, \quad f = f_{\text{red}} \circ \phi^{\text{red}}.$$

Niech (Ξ_1, ϕ_1, f_1) i (Ξ, ϕ, f) będą funkcjami analitycznymi. Mówimy, że (Ξ_1, ϕ_1, f_1) jest przedłużeniem (Ξ_0, ϕ_0, f_0) , gdy $\Xi_0 \subset \Xi_1$ i ϕ_1, f_1 obcięte do Ξ_0 pokrywają się z ϕ_0, f_0 .

Każdą zredukowaną funkcję analityczną można w sposób jednoznaczny przedłużyć do maksymalnej zredukowanej funkcji analitycznej.

5.5 * Homotopia krzywych

Niech Ω będzie otwartym podzbiorem \mathbb{C} i $z_1, z_2 \in \Omega$. Oznaczmy przez $K(z_0, z_1, \Omega)$ zbiór krzywych zaczynających się w z_0 i kończących się w z_1 , tzn $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z_1$.

Niech $\gamma_0, \gamma_1 \in K(z_0, z_1, \Omega)$. Mówimy, że γ_0 jest homotopijnie równoważna γ_1 i piszemy $\gamma_0 \sim \gamma_1$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje funkcja ciągła $[0, 1] \times [0, 1] \ni (t, s) \mapsto H(t, s)$ taka, że $H(t, 0) = \gamma_0(t)$ i $H(t, 1) = \gamma_1(t)$.

Twierdzenie 5.4 Niech $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ będzie analityczna, $\gamma_0, \gamma_1 \in K(z_0, z_1, \Omega)$ będą kawałkami gładkie i homotopijnie równoważne. Wtedy

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Twierdzenie 5.5 Homotopijna równoważność jest relacją równoważności.

Dowód. Kładąc $H(t, s) = \gamma_0(t)$ dostajemy $\gamma_0 \sim \gamma_0$.

Kładąc $H_{10}(t, s) := H_{01}(t, 1 - s)$ dostajemy $\gamma_0 \sim \gamma_1 \Rightarrow \gamma_1 \sim \gamma_0$.

Kładąc

$$H_{02}(t, s) := \begin{cases} H_{01}(t, 2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}; \\ H_{12}(t, 2s - 1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

dostajemy $\gamma_0 \sim \gamma_1, \gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \gamma_0 \sim \gamma_2$.

Zbiór klas homotopii krzywych zaczynających się w z_0 i kończących w z_1 oznaczany jest przez

$$\Pi(z_0, z_1, \Omega) := K(z_0, z_1, \Omega) / \sim.$$

Twierdzenie 5.6 Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie otwarty i spójny. Następujące warunki są równoważne:

- (1) $\Pi(z_0, z_0, \Omega)$ jest jednoelementowy dla każdego $z_0 \in \Omega$.
- (2) Istnieje $z_0 \in \Omega$ taki, że $\Pi(z_0, z_0, \Omega)$ jest jednoelementowy.

Jeśli spełnione są warunki powyższego twierdzenia, mówimy, że zbiór Ω jest jednospójny.

5.6 * Składanie krzywych i grupa homotopii

Niech $z_0, z_1 \in \Omega, \gamma \in K(z_0, z_1, \Omega)$. Definiujemy $\gamma^{-1} \in K(z_1, z_0, \Omega)$.

$$\gamma^{-1}(t) := \gamma(1 - t).$$

Oczywiście, jeśli $\gamma' \sim \gamma$, to $(\gamma')^{-1} \sim \gamma^{-1}$.

Niech $z_0, z_1, z_2 \in \Omega, \gamma_0 \in K(z_0, z_1, \Omega), \gamma_1 \in K(z_1, z_2, \Omega)$. Definiujemy $\gamma_0 \circ \gamma_1 \in K(z_0, z_2, \Omega)$:

$$\gamma_0 \circ \gamma_1(t) := \begin{cases} \gamma_0(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ \gamma_1(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Oczywiście, jeśli $\gamma_0 \sim \gamma'_0, \gamma_1 \sim \gamma'_1$, to

$$\gamma_0 \circ \gamma_1 \sim \gamma'_0 \circ \gamma'_1.$$

Jeśli $\gamma_2 \in K(z_2, z_3, \Omega)$

$$(\gamma_0 \circ \gamma_1) \circ \gamma_2 \sim \gamma_0 \circ (\gamma_1 \circ \gamma_2).$$

Jeśli przez z oznaczamy krzywą stałą równą $z \in \Omega$, to dla $z_0, z_1 \in \Omega, \gamma \in K(z_0, z_1, \Omega)$,

$$z_0 \circ \gamma \sim \gamma \circ z_1 \sim \gamma.$$

W szczególności, dla każdego $z_0 \in \Omega, \Pi(z_0, z_0, \Omega)$ jest grupą. Jeśli zbiór Ω jest spójny, to grupa $\Pi(z_0, z_0, \Omega)$ jest izomorficzna dla różnych $z_0 \in \Omega$. Nazywamy ją grupą homotopii zbioru Ω . Oznaczamy ją przez $\Pi(\Omega)$.

Przykłady

- (1) $\Pi(\mathbb{C})$ jest grupą jednoelementową.
(2) $\Pi(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$ (liczba okrążeń wokół zera).
(3) $\Pi(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}) = \mathbb{F}_2$ – grupa wolna o dwóch generatorach. Jako generatory można wybrać τ_0 – okrążenie 0, τ_1 – okrążenie 1. Grupa \mathbb{F}_2 składa się z elementów następujących typów:

$$\begin{aligned} \tau_1^{n_p} \tau_0^{m_p} \cdots \tau_1^{n_0} \tau_0^{m_0}, & \quad \tau_0^{m_{p+1}} \tau_1^{n_p} \cdots \tau_1^{n_0} \tau_0^{m_0}, \\ \tau_1^{n_p} \tau_0^{m_p} \cdots \tau_0^{m_1} \tau_1^{n_0}, & \quad \tau_0^{m_{p+1}} \tau_1^{n_p} \cdots \tau_0^{m_1} \tau_1^{n_0}, \end{aligned} \quad (5.47)$$

gdzie $n_i, m_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

5.7 * Nakrycie uniwersalne

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie otwarte i spójne. Ustalmy $z_0 \in \Omega$. Nakryciem uniwersalnym Ω z punktem bazowym $[z_0]$ nazywamy $(\text{Cov}(\Omega), \phi, [z_0])$, gdzie

$$\text{Cov}(\Omega) := \bigcup_{z \in \Omega} \Pi(z_0, z, \Omega),$$

$\phi : \text{Cov}(\Omega) \rightarrow \Omega$ jest zadane przez $\phi([\gamma]) := \gamma(1)$. $\text{Cov}(\Omega)$ jest wyposażone w naturalną topologię. Oczywiście, $(\text{Cov}(\Omega), \phi)$ jest spójną i jednospójną powierzchnią Riemanna nad \mathbb{C} .

5.8 * Nakrycie wyznaczone przez podgrupę grupy homotopii

Niech G będzie podgrupą $\Pi(z_0, z_0, \Omega)$. W $\Pi(z_0, z, \Omega)$ wprowadzamy relację: Dla $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \Pi(z_0, z, \Omega)$ piszemy $[\gamma_1] \underset{G}{\sim} [\gamma_2]$, gdy $[\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}] \in G$. Jest to relacja równoważności. Będziemy oznaczali przez $[\gamma]_G$ klasę abstrakcji γ względem tej relacji. Definiujemy

$$\Pi_G(z_0, z, \Omega) := \Pi(z_0, z, \Omega) / \underset{G}{\sim}.$$

Nakryciem Ω związanym z grupą G nazywamy $(\text{Cov}_G(\Omega), \phi_G, [z_0]_G)$, gdzie

$$\text{Cov}_G(\Omega) := \bigcup_{z \in \Omega} \Pi_G(z_0, z, \Omega),$$

$$\phi_G([\gamma]_G) = \gamma(1).$$

Mamy oczywiście naturalne odwzorowanie

$$\phi^G : \text{Cov}(\Omega) \rightarrow \text{Cov}_G(\Omega), \quad \phi^G([\gamma]) = [\gamma]_G,$$

spełniające związek $\phi_G \circ \phi^G = \phi$. Oczywiście, $(\text{Cov}_G(\Omega), \phi)$ jest spójną (leż niekoniecznie jednospójną) powierzchnią Riemanna nad \mathbb{C} .

5.9 * Funkcja pierwotna

Twierdzenie 5.7 Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie jednospójnym obszarem a $\Omega \ni z \mapsto f(z)$ funkcją holomorficzną. Ustalmy $z_0 \in \Omega$. Zdefiniujemy

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(w)dw,$$

gdzie γ_z jest dowolną krzywą leżącą w Ω łączącą z_0 i z . Wtedy $F(z)$ nie zależy od wyboru krzywej i

$$F'(z) = f(z).$$

Jeśli Ω jest spójny i otwarty, ale niekoniecznie jednospójny, to powyższą konstrukcję należy zmodyfikować. Jeśli $[\gamma] \in \Pi(z_0, z, \Omega) \subset \text{Cov}(\Omega)$, to kładziemy

$$F([\gamma]) := \int_{\gamma} f(w)dw.$$

Dostajemy funkcję analityczną $F : \text{Cov}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$, która spełnia

$$F'([\gamma]) = f(\phi([\gamma])), \quad F([z_0]) = 0.$$

5.10 * Funkcja logarytm i potęgowa

Funkcję logarytm można zdefiniować jako funkcję pierwotną do funkcji $\frac{1}{z}$ z punktem bazowym $z_0 = 1$. Dostajemy wtedy funkcję na nakryciu uniwersalnym

$$\text{Cov}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \ni v \mapsto \log v := \int_{\gamma} \frac{dw}{w}, \quad v = [\gamma].$$

Jest ona zredukowana i maksymalna.

Niech $\mu \in \mathbb{C}$. Funkcję z^μ definiujemy najpierw na nakryciu uniwersalnym $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ jako

$$\text{Cov}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \ni v \mapsto e^{\mu \log v}. \quad (5.48)$$

Jeśli $\mu \neq 0, 1, 2, \dots$, jest to maksymalna funkcja analityczna. Jeśli $\mu \notin \mathbb{Q}$, to jest ona również zredukowana.

Jeśli $\mu \in \mathbb{Q}$, to (5.48) jest niezredukowana. Niech $\mu = \frac{p}{q}$ dla nieskracalnego ułamka, gdzie $q \in \{1, 2, \dots\}$. Wtedy $v^\mu = 1$, jeśli $v \in \mathbb{Z}_q \subset \Pi(1, 1, \mathbb{C} \setminus \{0\}) \subset \text{Cov}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Po zredukowaniu dostajemy funkcję

$$\text{Cov}_{\mathbb{Z}_q}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \ni v \mapsto e^{\mu \log v}. \quad (5.49)$$

5.11 * Funkcja $z^\alpha(z-1)^\beta$.

Funkcję $z^\alpha(z-1)^\beta$ można najpierw zdefiniować na nakryciu uniwersalnym $\text{Cov}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$. Jest ona wtedy niezredukowana.

Opiszmy teraz jej zredukowane wersje w niektórych sytuacjach. Załóżmy najpierw, że mamy do czynienia z generyczną sytuacją, kiedy α i β są niewymierne i niewspółmierne, tzn. $\alpha n + \beta m \in \mathbb{Q}$ implikuje $n = m = 0$. Wtedy w grupie \mathbb{F}_2 wprowadzamy podgrupę G zadaną przez

$$\sum_j n_j = \sum_j m_j = 0,$$

gdzie n_j, m_j są liczbami występującymi w (5.47). Wtedy $z^\alpha(z-1)^\beta$ można przenieść na nakrycie $\text{Cov}_G(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$, i dostajemy wtedy zredukowaną maksymalną funkcję analityczną.

Inną sytuację mamy, gdy $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Wprowadzamy wtedy podgrupę H zadaną przez

$$\sum_{j=0}^{\infty} n_j = \sum_{j=0}^{\infty} m_j$$

i funkcję $z^\alpha(z-1)^\beta$ przenosimy na nakrycie $\text{Cov}_H(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$. Dostajemy wtedy zredukowaną maksymalną funkcję analityczną.

6 Separacja zmiennych w równaniu Helmholtza

6.1 Równanie Helmholtza we współrzędnych kartezjańskich

Równania Helmholtza w 2 wymiarach ma postać

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + E)g, \tag{6.50}$$

gdzie E jest parametrem. Ma ono wiele rozwiązań. Aby wyróżnić interesujące nas rozwiązania, trzeba dodać warunki brzegowe, np. warunki brzegowe Dirichleta na brzegu obszaru Ω .

We współrzędnych kartezjańskich wygodnie rozwiązuje się równanie Helmholtza na prostokącie, np. $[0, A] \times [0, B]$. Wtedy stosujemy ansatz

$$g(x, y) = p(x)q(y),$$

i dostajemy

$$\frac{1}{p(x)} (\partial_x^2 + E) p(x) = -\frac{1}{q(y)} \partial_y^2 q(y). \tag{6.51}$$

Lewa strona nie zależy od y a prawa strona nie zależy od x . Zatem (6.51) jest równe stałej C , co prowadzi do

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 + E - C)p(x) &= 0, \\ (\partial_y^2 + C)q(y) &= 0. \end{aligned}$$

Warunki Dirichleta oznaczają

$$p(0) = p(A) = 0, \quad q(0) = q(B) = 0,$$

co prowadzi do

$$p(x) = \sin n\pi \frac{x}{A}, \quad p(x) = \sin n\pi \frac{x}{A}, \quad E - C = \frac{n^2\pi^2}{A^2}, \quad C = \frac{m^2\pi^2}{B^2}.$$

W szczególności, $E = \pi^2(\frac{n^2}{A^2} + \frac{m^2}{B^2})$.

Jeśli Ω jest kołem, pierścieniem lub ich wycinkiem, wygodniej jest stosować współrzędne biegunowe. Ogólniej, we współrzędnych $u(x, y), v(x, y)$ wygodnie jest rozwiązywać równania różniczkowe cząstkowe na obszarze typu $\Omega = \{(x, y) : u_0 < u(x, y) < u_1, v_0 < v(x, y) < v_1\}$.

6.2 Zamiana zmiennych w laplasjanie

Niech Ω będzie otwartym podzbiorem \mathbb{R}^2 i

$$\Omega \ni (x, y) \mapsto (u, v) \in \mathbb{R}^2 \tag{6.52}$$

będzie gładką transformacją. Mamy wtedy

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 + \partial_y^2)g &= \partial_x(\partial_x u \partial_u g + \partial_x v \partial_v g) + \partial_y(\partial_y u \partial_u g + \partial_y v \partial_v g) \\ &= (\partial_x^2 + \partial_y^2)u \partial_u g + (\partial_x^2 + \partial_y^2)v \partial_v g \\ &\quad + (\partial_x u \partial_x u + \partial_y u \partial_y u) \partial_u^2 g \\ &\quad + 2(\partial_x u \partial_x v + \partial_y u \partial_y v) \partial_u \partial_v g, \\ &\quad + (\partial_x v \partial_x v + \partial_y v \partial_y v) \partial_v^2 g. \end{aligned}$$

Załóżmy teraz, że $z = x + iy \mapsto u + iv = f$ jest funkcją analityczną. Warunki Cauchy-Riemanna $\partial_x u = \partial_x v, \partial_y u = -\partial_x v$ implikują

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 + \partial_y^2)u &= (\partial_x^2 + \partial_y^2)v = 0, \\ \partial_x u \partial_x u + \partial_y u \partial_y u &= \partial_x v \partial_x v + \partial_y v \partial_y v = (\partial_x u)^2 + (\partial_x v)^2 = |\partial_z f|^2, \end{aligned} \tag{6.53}$$

$$\partial_x u \partial_x v + \partial_y u \partial_y v = \partial_x u \partial_x v - \partial_x v \partial_x u = 0. \tag{6.54}$$

Zatem

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)g = |\partial_z f|^2 (\partial_u^2 + \partial_v^2)g. \tag{6.55}$$

Zauważmy, że warunki (6.53) i (6.54) oznaczają, że wektory $(\partial_x u, \partial_y u)$ i $(\partial_x v, \partial_y v)$ są ortogonalne i równej długości. Zatem macierz $\begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{bmatrix}$ jest macierzą obrotu razy $|\partial_z f|$. Czyli jeśli $|\partial_z f| \neq 0$, to transformacja (6.52) zachowuje kąty. Mówiąc precyzyjniej, jeśli $[0, 1] \ni \tau \mapsto (x_i(\tau), y_i(\tau))$, $i = 1, 2$, są dwiema krzywymi rozpoczynającymi się w punkcie $(x_1(0), y_1(0)) = (x_2(0), y_2(0))$, zaś $[0, 1] \ni \tau \mapsto (u_i(\tau), v_i(\tau))$ są ich obrazami, to

$$\frac{(\partial_\tau x_1(0), \partial_\tau y_1(0)) \cdot (\partial_\tau x_2(0), \partial_\tau y_2(0))}{\|(\partial_\tau x_1(0), \partial_\tau y_1(0))\| \|(\partial_\tau x_2(0), \partial_\tau y_2(0))\|} = \frac{(\partial_\tau u_1(0), \partial_\tau v_1(0)) \cdot (\partial_\tau u_2(0), \partial_\tau v_2(0))}{\|(\partial_\tau u_1(0), \partial_\tau v_1(0))\| \|(\partial_\tau u_2(0), \partial_\tau v_2(0))\|}$$

6.3 Równanie Helmholtza we współrzędnych biegunowych

Zastosujemy zamianę zmiennych (6.52) do równania Helmholtza. Wygodniej nam będzie skupić się na transformacji odwrotnej

$$(u, v) \mapsto (x, y) \quad (6.56)$$

i jej interpretacji w terminach zmiennej zespolonej

$$f = u + iv \mapsto x + iy = z.$$

Równanie (6.55) można wtedy przepisać jako

$$|\partial_f z|^2 (\partial_x^2 + \partial_y^2) = \partial_u^2 + \partial_v^2. \quad (6.57)$$

Rozważmy funkcję $z = e^f$, czyli

$$x = e^u \cos v, \quad y = e^u \sin v.$$

Wtedy $\partial_f z = e^f$, zatem $|\partial_f z|^2 = e^{2u}$. Mamy zatem

$$\partial_x^2 + \partial_y^2 = e^{-2u} (\partial_u^2 + \partial_v^2). \quad (6.58)$$

Aby sprowadzić je do bardziej znanej postaci, podstawmy $r = e^u$ i przemianujmy v na ϕ . Mamy wtedy $\partial_u = r\partial_r$ i (6.58) sprowadza się do znanej zamiany zmiennych

$$\partial_x^2 + \partial_y^2 = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\phi^2. \quad (6.59)$$

Zastosujmy teraz następujący ansatz:

$$g(r, \phi) = p(r)q(\phi). \quad (6.60)$$

Wtedy równanie Helmholtza

$$(r^2\partial_r^2 + r\partial_r + \partial_\phi^2 + r^2E) p(r)q(\phi)$$

po podzieleniu przez $p(r)q(\phi)$ można przepisać jako

$$\frac{1}{p(r)} (r^2\partial_r^2 + r\partial_r + r^2E) p(r) = -\frac{1}{q(\phi)} \partial_\phi^2 q(\phi) \quad (6.61)$$

Lewa strona (6.61) nie zależy od r zaś prawa strona nie zależy od ϕ . Dlatego (6.61) równa się stałej, którą możemy nazwać C . (6.61) rozdziela się zatem na dwa równania

$$(r^2\partial_r^2 + r\partial_r - C + r^2E) p(r) = 0, \quad (6.62)$$

$$(\partial_\phi^2 + C) q(\phi) \quad (6.63)$$

(6.63) ma rozwiązanie równe

$$q(\phi) = e^{im\phi}, \quad m^2 = C.$$

Zatem (6.62) można przepisać jako

$$(r^2\partial_r^2 + r\partial_r - m^2 + r^2E) p(r) = 0. \quad (6.64)$$

Sprowadza się ono do równania Bessela (standardowego lub zmodyfikowanego).

6.4 Równanie Helmholtza we współrzędnych parabolicznych

Rozważmy teraz układ współrzędnych zadany przez analityczną transformację $z = \frac{f^2}{2}$. Mamy wtedy

$$x = \frac{u^2 - v^2}{2}, \quad y = uv,$$

$\partial_f z = f$, $|\partial_f z|^2 = u^2 + v^2$. Laplasjan transformuje się zatem następująco:

$$\partial_x^2 + \partial_y^2 = (u^2 + v^2)^{-1}(\partial_u^2 + \partial_v^2).$$

Równanie Helmholtza we współrzędnych parabolicznych ma zatem postać

$$(\partial_u^2 + \partial_v^2 + E(u^2 + v^2))g = 0. \quad (6.65)$$

Ansatz

$$g(u, v) = p(u)q(v). \quad (6.66)$$

prowadzi do

$$\frac{1}{p(u)} (\partial_u^2 + Eu^2) p(u) = -\frac{1}{q(v)} (\partial_v^2 + Ev^2) q(v) = C \quad (6.67)$$

co można zamienić jako

$$(\partial_u^2 + Eu^2 - C) p(u) = 0, \quad (6.68)$$

$$(\partial_v^2 + Ev^2 + C) q(v) = 0, \quad (6.69)$$

które sprowadzają się do równania dla oscylatora harmonicznego, zwanego też równaniem Webera.

6.5 Równanie Helmholtza we współrzędnych eliptyczno-hiperbolicznych

Rozważmy teraz układ współrzędnych zadany przez analityczną transformację $z = \cosh f$. Mamy wtedy

$$x = \cosh u \cos v, \quad y = \sinh u \sin v,$$

$\partial_f z = \sinh f = \sinh u \cos v + i \cosh u \sin v$, $|\partial_f z|^2 = \sinh^2 u + \sin^2 v$. Laplasjan transformuje się zatem następująco:

$$\partial_x^2 + \partial_y^2 = (\sinh^2 u + \sin^2 v)^{-1}(\partial_u^2 + \partial_v^2).$$

Równanie Helmholtza we współrzędnych parabolicznych ma zatem postać

$$(\partial_u^2 + \partial_v^2 + E(\sinh^2 u + \sin^2 v))g. \quad (6.70)$$

Ansatz (6.66) prowadzi do

$$\frac{1}{p(u)} (\partial_u^2 + E \sinh^2 u) p(u) = -\frac{1}{q(v)} (\partial_v^2 + E \sin^2 v) q(v) = C \quad (6.71)$$

co można zamienić na

$$(\partial_u^2 + E \sinh^2 u - C) p(u) = 0, \quad (6.72)$$

$$(\partial_v^2 + E \sin^2 v + C) p(u) = 0, \quad (6.73)$$

które sprowadzają się do równania Mathieu (standardowego lub zmodyfikowanego).

6.6 Operatory ∂_z i $\partial_{\bar{z}}$

Utożsamiamy \mathbb{R}^2 z \mathbb{C} odwzorowaniem $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto z := x + iy \in \mathbb{C}$. Wprowadzamy następujące operatory działające na \mathbb{C}

$$\partial_z := \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \quad \partial_{\bar{z}} := \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y).$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \partial_z z &= 1, & \partial_z \bar{z} &= 0, \\ \partial_{\bar{z}} z &= 0, & \partial_{\bar{z}} \bar{z} &= 1, \\ \partial_x &= \partial_z + \partial_{\bar{z}}, & \partial_y &= i\partial_z - i\partial_{\bar{z}}. \end{aligned}$$

$$df = \partial_z f dz + \partial_{\bar{z}} f d\bar{z}.$$

Stwierdzenie 6.1 *Funkcja $z \mapsto f$ jest holomorficzna wtedy i tylko wtedy gdy $\partial_{\bar{z}} f = 0$. Jeśli to ma miejsce, to $\partial_z f$ jest zwykłą pochodną funkcji f w sensie zespolonym.*

Dowód. $\partial_{\bar{z}} f = 0$ oznacza $\partial_x f = -i\partial_y f$, czyli warunki Cauchy-Riemanna. Przy ich spełnieniu, $\partial_z f = \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f) = \partial_x f$. \square

Mówimy, że funkcja $z \mapsto f$ jest antyholomorficzna, gdy $z \mapsto \overline{f(z)}$ jest holomorficzna. Oczywiście, jest to równoważne temu, że $\partial_z f = 0$.

6.7 Kiedy transformacja zmiennych w \mathbb{R}^2 separuje równanie Helmholtza?

Niech

$$(x, y) \mapsto (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

będzie transformacją taką, że $z = x + iy \mapsto u + iv = f$ jest funkcją analityczną. Równanie Helmholtza

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)g = Eg,$$

zapisuje się wtedy w nowych współrzędnych jako

$$(\partial_u^2 + \partial_v^2)g = |\partial_f z|^2 Eg.$$

Równanie to się separuje gdy $|\partial_f z|^2$ jest postaci

$$|\partial_f z|^2 = a(u) + b(v).$$

Jest to równoważne warunkowi

$$\partial_u \partial_v |\partial_f z|^2 = 0.$$

Używamy zmiennej $f = u + iv$, zatem odpowiedniki operatorów ∂_z i $\partial_{\bar{z}}$ mają teraz inne oznaczenia:

$$\partial_f := \frac{1}{2}(\partial_u - i\partial_v), \quad \partial_{\bar{f}} := \frac{1}{2}(\partial_u + i\partial_v).$$

Korzystając z $\overline{\partial_f z} = \partial_{\bar{f}} \bar{z}$ i

$$\partial_u = \partial_f + \partial_{\bar{f}}, \quad \partial_v = i\partial_f - i\partial_{\bar{f}},$$

dostajemy

$$\begin{aligned} 0 = \partial_u \partial_v |\partial_f z|^2 &= i(\partial_f^2 - \partial_{\bar{f}}^2) \partial_f z \partial_{\bar{f}} \bar{z} \\ &= i \left(\partial_f^3 z \partial_{\bar{f}} \bar{z} - \partial_f z \partial_{\bar{f}}^3 \bar{z} \right). \end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{\partial_f^3 z}{\partial_f z} = \frac{\partial_{\bar{f}}^3 \bar{z}}{\partial_{\bar{f}} \bar{z}}. \quad (6.74)$$

Lewa strona (6.74) jest holomorficzną a prawa antyholomorficzną. Zatem (6.74) jest równe stałej, którą nazwiemy D i dostajemy równanie

$$\partial_f^3 z = D \partial_f z. \quad (6.75)$$

Sklasyfikujemy rozwiązania (6.75) z dokładnością do translacji $z \mapsto z + a$, obrotów $z \mapsto e^{i\alpha} z$ i skalowania $z \mapsto \lambda z$.

- (1) $D = 0$. Wtedy $z = Af^2 + Bf + C$. Jeśli $A = 0$, to zamiana współrzędnych jest trywialna. Jeśli $A \neq 0$, to sprowadza się do $z = f^2$.
- (2) $D \neq 0$, $z = Ae^{\sqrt{D}f}$. Zamiana współrzędnych sprowadza się do $z = e^f$.
- (3) $D \neq 0$, $z = Ae^{\sqrt{D}f} + Be^{-\sqrt{D}f}$. Zamiana współrzędnych sprowadza się do $z = \cosh f$.

7 Funkcja Gamma Eulera

7.1 Funkcja Gamma jako uogólnienie silni i II całka Eulera

Przy pomocy tzw. **II całki Eulera** definiujemy funkcję Gamma:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &:= \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-\xi^2} \xi^{2z-1} d\xi, \quad \operatorname{Re} z > 0, \end{aligned} \quad (7.76)$$

Zakładamy, że w powyższym wzorze bierzemy gałąź główną funkcji t^{z-1} . Zdefiniujmy też tzw symbol Pochhammera

$$\begin{aligned} (a)_n &:= a(a+1) \dots (a+n-1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ (a)_n &:= \frac{1}{(a-n) \dots (a-1)}, \quad n = \dots, -2, -1. \end{aligned}$$

Oczywiście, $(1)_n = n!$.

Twierdzenie 7.1 *Zachodzą następujące tożsamości:*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (7.77)$$

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.78)$$

$$\Gamma(z+n) = (z)_n \Gamma(z), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dowód. (7.77) wynika z całkowania przez części. (7.78) wynika z (7.77) i $\Gamma(1) = 1$. \square

Zdefiniujemy zbiór

$$\Omega_n := \{z : \operatorname{Re} z > -n\} \setminus \{0, -1, \dots, -n+1\}$$

i funkcję

$$\Omega_n \ni z \mapsto \Gamma_n(z) := \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\dots(z+n-1)}.$$

Wtedy jeśli $n > m$, to

$$\Gamma_n(z) = \Gamma_m(z), \quad z \in \Omega_m.$$

Wynika to z tożsamości

$$\Gamma(z+n) = \Gamma(z+m)(z+m)\dots(z+n-1),$$

będącej konsekwencją wzoru (7.77). Ostatecznie, na

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$$

definiujemy

$$\Gamma(z) := \Gamma_n(z), \quad z \in \Omega_n.$$

Tak zdefiniowana funkcja Γ jest to maksymalnym przedłużeniem analitycznym funkcji $\Gamma(z)$ zdefiniowanej przy pomocy całki (7.76).

Oto inne wzory, które pozwalają maksymalnie przedłużyć funkcję Gamma:

Twierdzenie 7.2 (Rozkład Pryma)

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

Twierdzenie 7.3 (Wzór Cauchy-Saalschütza)

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \left(e^{-t} - \sum_{k=0}^n \frac{(-t)^k}{k!} \right) dt, \quad -1-n < \operatorname{Re} z < -n. \quad (7.79)$$

Dowód. Niech $\Gamma_n(z)$ będzie prawą stroną (7.79). Oczywiście

$$\Gamma_{-1}(z) = \Gamma(z), \quad 0 < \operatorname{Re} z.$$

Całkując przez części dostajemy

$$\begin{aligned} \Gamma_n(z) &= \frac{t^z}{z} \left(e^{-t} - \sum_{k=0}^n \frac{(-t)^k}{k!} \right) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{z} \int_0^{\infty} t^z \left(e^{-t} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-t)^k}{k!} \right) dt \\ &= \frac{1}{z} \Gamma_{n-1}(z+1). \end{aligned}$$

\square

7.2 I całka Eulera i dalsze tożsamości

Twierdzenie 7.4 (I całka Eulera)

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} &= \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2u-1} \phi \sin^{2v-1} \phi d\phi, \quad \operatorname{Re} u > 0, \operatorname{Re} v > 0.\end{aligned}\tag{7.80}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} \frac{\sin \pi u}{\sin \pi(u+v)} &= \frac{\Gamma(1-u-v)\Gamma(v)}{\Gamma(1-u)} = \int_0^\infty (t+1)^{u-1} t^{v-1} dt \\ &= 2 \int_0^\infty \operatorname{ch}^{2u-1} \theta \operatorname{sh}^{2v-1} \theta, \quad \operatorname{Re} v > 0, \operatorname{Re}(1-u-v) > 0.\end{aligned}\tag{7.81}$$

Dowód. Stosując podstawienie $t = \frac{1}{s} + 1$ z (7.80) dostajemy (7.81), z wyjątkiem pierwszej równości, wynikającej z tożsamości (7.84), którą dowiedzimy później. Udowodnijmy więc (7.80)

Mamy

$$\Gamma(u)\Gamma(v) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\xi^2 - \eta^2} \xi^{2u-1} \eta^{2v-1} d\xi d\eta.\tag{7.82}$$

Przechodzimy do współrzędnych biegunowych podstawiając

$$\xi = r \cos \phi, \quad \eta = r \sin \phi$$

i otrzymujemy, że (7.82) równa się

$$\begin{aligned}4 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2u+2v-1} dr \int_0^{\pi/2} \cos^{2u-1} \phi \sin^{2v-1} \phi d\phi \\ = \Gamma(u+v) \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt,\end{aligned}\tag{7.83}$$

(W ostatnim kroku podstawiliśmy $t = \cos^2 \phi$). \square

Wzór (7.80) jest uzasadnieniem tego, że często wprowadza się tak zwaną funkcję Beta:

$$B(u, v) := \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}.$$

Twierdzenie 7.5 *Zachodzą następujące tożsamości:*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},\tag{7.84}$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}\tag{7.85}$$

Dowód. Załóżmy na razie, że $0 < \operatorname{Re} z < 1$. Rozważmy funkcję holomorficzną $\mathbb{C} \setminus [0, 1] \ni t \mapsto f(t) = t^{z-1}(t-1)^{-z}$ (Funkcje t^{z-1} i $(t-1)^{-z}$ rozumiemy w sensie ich gałęzi głównych zdefiniowanych odpowiednio na $\mathbb{C} \setminus [-\infty, 0]$ i $\mathbb{C} \setminus [-\infty, 1]$. Zatem funkcja $f(t)$ zdefiniowana jest a priori na $\mathbb{C} \setminus [-\infty, 1]$, ale przedłuża się analitycznie do funkcji na $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$.

Niech $\gamma = [0, 1^+, 0^+]$ będzie konturem zwanym kością. Wtedy biorąc pod uwagę, że w nieskończoności residuum funkcji f jest równe -1 , dostajemy

$$\begin{aligned} 2i\pi &= -2\pi i \operatorname{Res} f(\infty) = \int_{\gamma} f(t) dt \\ &= (e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}) \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{-z} dt = (2i \sin \pi z) B(z, 1-z) = (2i \sin \pi z) \Gamma(z) \Gamma(1-z). \end{aligned}$$

Stąd wynika (7.84) dla $0 < \operatorname{Re} z < 1$. Rozszerzamy go na wszystkie $z \in \mathbb{C}$ przez analityczność.

Podstawiając w (7.84) $z = 1/2$ dostajemy

$$\Gamma^2(1/2) = \pi.$$

Wiemy, że

$$\Gamma(z) > 0, \quad z > 0.$$

Stąd wynika (7.85). \square

Wniosek 7.6 (Całka Gaussa) *Jeśli $\operatorname{Re} a > 0$, to*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (7.86)$$

Dowód. Wychodząc z (7.85) przez zamianę zmiennych dostajemy

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} = \Gamma(1/2) &= \int_{-\infty, \infty} e^{-t^2} dt \\ &= \int_{-\sqrt{a}\infty, \sqrt{a}\infty} e^{-t^2} dt \\ &= \sqrt{a} \int_{-\infty, \infty} e^{-as^2} ds. \end{aligned}$$

\square

Wniosek 7.7 (Całka Fresnela) *Mamy*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{\pm ix^2} dx = e^{\pm i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\pi}.$$

Dowód. Całkujemy po bokach trójkąta $0, R, R + iR$. Po pionowym boku mamy

$$\int_0^R e^{-R^2+y^2} dy = \int_0^1 e^{-R^2(1-t^2)} R dt \rightarrow 0,$$

po zastosowaniu Tw. Lebesgue'a. \square

Zauważmy, że funkcja $\Gamma(z)$ ma w $z = 0, -1, \dots$ bieguny 1-go rzędu z residuami

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \Gamma(-n) &= \lim_{z \rightarrow -n} \Gamma(z)(z+n) \\ &= \frac{(z+n)\pi}{\Gamma(1-z) \sin \pi z} = \frac{(-1)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 7.8 *Wzór Legendre'a o podwajaniu:*

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z),$$

Dowód.

$$\frac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(2z)} = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}dt = 2 \int_0^{1/2} t^{z-1}(1-t)^{z-1}dt.$$

Podstawiamy $s = 4t(1-t)$ i otrzymujemy

$$2^{1-2z} \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{-1/2}ds = 2^{1-2z} \frac{\Gamma(z)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})}.$$

□

Prawdziwe jest też następujące uogólnienie powyższego wzoru, zwane wzorem Gaussa o mnożeniu, które udowodnimy później:

$$\Gamma(nz) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} n^{nz-\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma(z + \frac{k}{n}) \quad (7.87)$$

7.3 Funkcja Gamma i całki w dziedzinie zespolonej

Twierdzenie 7.9 (Wzór Hankela)

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{[-\infty, 0^+, -\infty[} e^s s^{-z-1} ds. \quad (7.88)$$

Dowód. Załóżmy tymczasowo, że $\text{Re} z < 0$.

$$\begin{aligned} \int_{[-\infty, 0^+, -\infty[} e^s s^{-z-1} ds &= e^{-i\pi(-z-1)} \int_{]-\infty, 0]} e^s (-s)^{-z-1} ds + e^{i\pi(-z-1)} \int_{]0, -\infty[} e^s (-s)^{-z-1} ds \\ &= (e^{-i\pi(-z-1)} - e^{i\pi(-z-1)}) \int_0^\infty e^{-t} t^{-z-1} dt \\ &= i2 \sin(-\pi z) \Gamma(-z) = \frac{2\pi i}{\Gamma(z+1)} \end{aligned}$$

Następnie rozszerzamy tożsamość na wszystkie z przez przedłużenie analityczne. □

Twierdzenie 7.10

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(u+v+1)}{\Gamma(u+1)\Gamma(v+1)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{]-\infty, 0^+, -\infty[} t^{-u-1}(1-t)^{-v-1} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{]0, 1^-, \infty[} t^{-u-1}(1-t)^{-v-1} dt, \quad u+v+1 > 0. \end{aligned}$$

Dowód. Zauważmy, że $] -\infty, 0^+, -\infty[$ i $]0, 1^-, \infty[$ dają tę samą całkę.

$$\begin{aligned} \int_{]0, 0^-, \infty[} t^{-u-1}(1-t)^{-v-1} dt &= (-e^{-i\pi(v+1)} + e^{i\pi(v+1)}) \int_1^\infty t^{-u-1}(t-1)^{-v-1} dt \\ &= -2i \sin \pi v \frac{\Gamma(-v)\Gamma(1+u+v)}{\Gamma(1+u)} = 2i\pi \frac{\Gamma(1+u+v)}{\Gamma(1+u)\Gamma(1+v)}. \end{aligned}$$

□

Jeśli $u+v \in \mathbb{Z}$, to pętla okrążająca 1 i 0 przeciwnie do ruchu wskazówek leży na powierzchni Riemanna funkcji $t^{u-1}(t-1)^{v-1}$ i dostajemy wzór:

Twierdzenie 7.11 Niech $n \in \mathbb{Z}$. Wtedy

$$\frac{\Gamma(u)}{\Gamma(n+1)\Gamma(u-n)} = \frac{(u-1)\dots(u-n)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{[0,1^+,0^+]} t^{u-1}(t-1)^{n-u} dt, \quad (7.89)$$

Dowód. Gdy zastosujemy homografię $t = -s^{-1}$ to dostaniemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{[0,1^+,0^+]} t^{u-1}(t-1)^{n-u} dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_{[0^+]} s^{n+1}(1-s)^{n-u} ds \\ &= \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{ds}\right)^n (1-s)^{n-u} \Big|_{s=0} = \frac{(u-1)\dots(u-n)}{n!}. \end{aligned} \quad (7.90)$$

□

Rozważmy teraz funkcję $(-t)^{u-1}(t-1)^{v-1}$. Jeśli obie potęgi rozumiemy w sensie ich gałęzi głównych, to dziedziną tej funkcji jest $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Jest to dziedzina składająca się z dwóch spójnych części na których mamy

$$(-t)^{u-1}(t-1)^{v-1} = \begin{cases} t^{u-1}(1-t)^{v-1} e^{-i\pi(u-1)} e^{i\pi(v-1)}, & \text{Im} z > 0; \\ t^{u-1}(1-t)^{v-1} e^{i\pi(u-1)} e^{-i\pi(v-1)}, & \text{Im} z < 0. \end{cases} \quad (7.91)$$

Rozważmy teraz kontur "podwójna ósemka" $[0, 1^+, 0^-, 1^-, 0^+]$. Kontur ten rozpoczynamy na dolnym płacie powierzchni Riemanna funkcji $(-t)^{u-1}(t-1)^{v-1}$, na którym leży pierwszy odcinek $[0, 1]$ z tego konturu. Łatwo się przekonać, że $[0, 1^+, 0^-, 1^-, 0^+]$ jest krzywą zamkniętą na tej powierzchni Riemanna. Nawiasem mówiąc, trzeci odcinek w tym konturze znajduje się na górnym płacie opisanym w (7.91). Całkę z funkcji $(-t)^{u-1}(t-1)^{v-1}$ po podwójnej ósemce można wyrazić poprzez funkcję Gamma:

Twierdzenie 7.12

$$\frac{1}{\Gamma(u+v)\Gamma(1-u)\Gamma(1-v)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0,1^+,0^-,1^-,0^+]} (-t)^{u-1}(t-1)^{v-1} dt, \quad (7.92)$$

Dowód. Załóżmy, że $\text{Re} u, \text{Re} v > 0$.

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1^+,0^-,1^-,0^+]} (-t)^{u-1}(t-1)^{v-1} dt \\ &= (e^{i\pi(u-1)} e^{-i\pi(v-1)} - e^{i\pi(u-1)} e^{i\pi(v-1)} + e^{-i\pi(u-1)} e^{i\pi(v-1)} - e^{-i\pi(u-1)} e^{-i\pi(v-1)}) \\ & \quad \times \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt \\ &= -(e^{i\pi u} - e^{-i\pi u})(e^{i\pi v} - e^{-i\pi v}) B(u, v) \\ &= -(2i \sin \pi v)(2i \sin \pi u) \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} \\ &= (2\pi)^2 \frac{1}{\Gamma(u+v)\Gamma(1-u)\Gamma(1-v)} \end{aligned}$$

Przez przedłużenie analityczne rozszerzamy tożsamość na wszystkie u, v . □

7.4 Iloczyny nieskończone

Przypomnijmy najpierw podstawowe fakty dotyczące szeregów.

Jeśli istnieje skończona granica $I := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n b_j$, to mówimy, że szereg $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ jest zbieżny warunkowo i piszemy $I = \sum_{j=1}^{\infty} b_j$.

Jeśli $\sum_{j=1}^{\infty} |b_j| < \infty$, to mówimy, że szereg $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ jest zbieżny bezwzględnie. Można pokazać, że zbieżność bezwzględna szeregu pociąga za sobą zbieżność warunkową, również po zmianie kolejności wyrazów w szeregu i jego wartość nie zależy od tej kolejności.

Jeśli istnieje skończona granica $I := \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n (1 + a_j)$, to mówimy, że iloczyn nieskończony $\prod_{j=1}^{\infty} (1 + a_j)$ jest zbieżny warunkowo i piszemy $I = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + a_j)$.

Mówimy, że iloczyn nieskończony $\prod_{j=1}^{\infty} (1 + a_j)$ jest zbieżny bezwzględnie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty. \quad (7.93)$$

Lemat 7.13 *Iloczyn nieskończony $\prod_{j=1}^{\infty} (1 + a_j)$ jest zbieżny bezwzględnie wtedy i tylko wtedy, gdy jedynie skończona liczba wyrazów a_j jest równa -1 i*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\log(1 + a_n)| < \infty, \quad (7.94)$$

przy czym w szeregu (7.94) usunęliśmy wyrazy $a_j = -1$. (W powyższym wzorze przez $|\log(1 + a)|$ rozumiemy wartość bezwzględną gałęzi głównej logarytmu rozszerzoną przez ciągłość do funkcji na $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$, która jest jednoznaczna, mimo że sam $\log(1 + a)$ jednoznaczny nie jest).

Dowód. Niech spełnione będzie (7.93). Wtedy $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$ i dlatego skończona liczba wyrazów a_j jest równa -1 . Poza tym poza skończoną liczbą indeksów

$$|a_j| \leq \frac{1}{2}. \quad (7.95)$$

$\mathbb{C} \setminus \{-1\} \ni t \mapsto \left| \frac{\log(1+t)}{t} \right|$ jest funkcją ciągłą i dodatnią. Zatem dla $|t| \leq \frac{1}{2}$ istnieją $0 < C_1 \leq C_2$, takie, że

$$C_1 \leq \left| \frac{\log(1+t)}{t} \right| \leq C_2.$$

Zatem

$$|\log(1 + a_n)| \leq C_2 |a_n|.$$

Aby dowieść implikację przeciwną, wystarczy założyć, że wszystkie a_j są różne od -1 . (7.94) pociąga za sobą $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(a_n + 1) = 0$, a więc (7.95) jest spełnione poza skończoną liczbą indeksów i wtedy

$$|a_n| \leq C_1^{-1} |\log(1 + a_n)|.$$

□

Oczywiście, logarytmując wyraz po wyrazie iloczyn bezwzględnie zbieżny dostajemy szereg bezwzględnie zbieżny. Dlatego zbieżność bezwzględna iloczynu nieskończonego pociąga za sobą zbieżność warunkową, również po zmianie kolejności wyrazów w iloczynie i jego wartość nie zależy od tej kolejności.

7.5 Funkcje trygonometryczne jako iloczyny nieskończone

Twierdzenie 7.14 *Mamy następujące wzory:*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}, \quad (7.96)$$

$$\frac{1}{z} + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 - j^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n \frac{1}{z+j} = \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z}, \quad (7.97)$$

$$z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2}\right) = \frac{\sin \pi z}{\pi}. \quad (7.98)$$

Uwaga Iloczyn nieskończony występujący we wzorze (7.98) jest zbieżny bezwzględnie.

Dowód.

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$$

jest funkcją całkowitą. Jest ona okresowa z okresem 1 i dąży do zera dla $|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty$. Jest więc ograniczona. Na mocy tw. Liouville'a jest więc równa zero. To dowodzi (7.96).

Na mocy (7.96) pochodna

$$\frac{1}{z} + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 - j^2} - \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z}, \quad (7.99)$$

jest równa zero. (7.99) jest funkcją nieparzystą i stałą, więc jest równe zero. To dowodzi (7.97).

Na mocy (7.97) mamy

$$\frac{d}{dz} \log \left(z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2}\right) \right) = \frac{d}{dz} \log \left(\frac{\sin \pi z}{\pi} \right)$$

Zatem

$$z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2}\right) = C \frac{\sin \pi z}{\pi}. \quad (7.100)$$

Porównując pochodne obu stron w (7.100) w zerze dostajemy $C = 1$. To dowodzi (7.98). \square

7.6 Funkcja Gamma a iloczyny nieskończone

Zdefiniujmy stałą Eulera-Mascheroniego

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) = 1 + \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{1}{j} + \log \left(1 - \frac{1}{j}\right) \right) \sim 0,577 \dots$$

Twierdzenie 7.15 (Wzór Gaussa)

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)}$$

(Wzór Weierstrassa)

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right).$$

Uwaga Iloczyn nieskończony występujący we wzorze Weierstrassa jest zbieżny bezwzględnie.

Lemat 7.16 Dla $0 \leq t \leq n$ mamy

$$0 \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}.$$

Dowód. Dla $f_n(t) := e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ mamy $f_n(n) = 0$, $f_n(0) = 1$

$$f'_n(t) = -e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \frac{t}{n} \leq 0.$$

Zatem $0 \leq f_n(t) \leq 1$. \square

Dowód Twierdzenia 7.15. Mamy

$$\int_0^1 (1 - \beta)^n \beta^{z-1} d\beta = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(z)}{\Gamma(z+n+1)} = \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Zatem

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Ale dla $0 \leq t \leq \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(n-t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} = e^{-t} t^{z-1}.$$

Na mocy Lematu 7.16 możemy zastosować Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności majoryzowanej (z majorantą równą $e^{-t} t^{\operatorname{Re} z - 1}$). Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

To dowodzi wzoru Gaussa dla $\operatorname{Re} z > 0$.

Aby pokazać wzór Weierstrassa zauważmy, że

$$\begin{aligned} & z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right) \\ &= z \lim_{n \rightarrow \infty} \exp z \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n\right) \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) \exp\left(-\frac{z}{k}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-z} z \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-z} z(z+1)\cdots(z+n)}{n!}. \end{aligned}$$

\square

Wzory Gaussa lub Weierstrassa mogą być wykorzystane do udowodnienia rezultatów z poprzednich rozdziałów. Na przykład, stosując wzór Gaussa dostajemy

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{z+1}}{(z+1)\cdots(z+n+1)} = z \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{z+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(n+1)^z}{z(z+1)\cdots(z+n+1)} = z\Gamma(z).$$

Stosując zaś wzór Weierstrassa dostajemy łatwo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} &= \frac{-1}{z\Gamma(z)\Gamma(-z)} \\ &= z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\sin \pi z}{\pi}. \end{aligned}$$

Dowód wzoru Gaussa o zwielokrotnianiu (7.87). Niech

$$G(z) = \prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{m}\right).$$

Wtedy korzystając ze wzoru Gaussa dostajemy

$$\frac{1}{G(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{k=0}^{nm+m-1} (mz+k)}{(n!)^m n^{mz+\frac{1}{2}(m-1)} m^{m(n+1)}},$$

$$\Gamma(mz) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(mn)!(mn)^{mz}}{\prod_{k=0}^{mn} (mz+k)}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(mz)}{G(z)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(mn)! m^{mz-m(n+1)} n^{-\frac{1}{2}(m-1)}}{(n!)^m} \prod_{k=mn+1}^{mn+m-1} (mz+k) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(mn)! m^{mz-mn-1} n^{\frac{1}{2}(m-1)}}{(n!)^m} = (2\pi)^{\frac{1}{2}(m-1)} m^{mz-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

gdzie użyliśmy najpierw

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=nm+1}^{nm+m-1} \frac{mz+k}{n} = m^{m-1},$$

a potem skorzystaliśmy ze wzory Stirlinga. \square

7.7 Pewne całki z parametrem

Stwierdzenie 7.17 Niech $f(t)$ będzie holomorphyzna dla $0 \leq \arg t \leq \alpha$ i ciągła na domknięciu tego zbioru. Załóżmy, że dla pewnego $\epsilon > 0$

$$|f(z)| \leq C|z|^{-\epsilon}, \quad |f(z) - f(0)| \leq C|z|^\epsilon.$$

Wtedy dla $0 \leq \arg z \leq \alpha$

$$\int_0^\infty (f(t) - f(zt)) \frac{dt}{t} = f(0) \log z.$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \int_r^R (f(t) - f(zt)) \frac{dt}{t} &= \left(\int_{[r,R]} + \int_{[zR,zr]} \right) f(t) \frac{dt}{t} \\ &= \left(\int_{[r,zr]} + \int_{[zR,R]} \right) f(t) \frac{dt}{t} \\ &\rightarrow \int_{[r,zr]} f(0) \frac{dt}{t} = f(0) \log(z), \end{aligned}$$

gdzie na końcu $r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$. \square

Na marginesie wspomnijmy, że istnieje “wariant rzeczywisty” powyższego stwierdzenia:

Stwierdzenie 7.18 Niech $f(t)$ będzie funkcją mierzalną na $[0, \infty[$ taką, że

$$\int_1^\infty |f(t)| \frac{dt}{t} < \infty, \quad \int_0^1 |f(t) - f(0)| \frac{dt}{t} < \infty.$$

Wtedy dla $z \in [0, \infty[$

$$\int_0^\infty (f(t) - f(zt)) \frac{dt}{t} = f(0) \log z.$$

Wniosek 7.19 Zachodzi wzór

$$\log z = \int_0^\infty (e^{-t} - e^{-zt}) \frac{dt}{t}.$$

Stwierdzenie 7.20 Mamy następującą reprezentację całkową stałej Eulera-Mascheroniego:

$$\gamma = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{te^t} \right) dt.$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-nt}}{1 - e^{-t}} e^{-t} dt &= \sum_{j=1}^n \int_0^\infty e^{-jt} dt = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}, \\ \int_0^\infty (e^{-t} - e^{-(n+1)t}) \frac{dt}{t} &= \log(n+1), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) e^{-t(n+1)} dt &= 0. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n+1) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left(\frac{1 - e^{-nt}}{1 - e^{-t}} e^{-t} - (1 - e^{-nt}) t^{-1} e^{-t} \right) dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{te^t} \right) dt. \end{aligned}$$

□

Stwierdzenie 7.21 (Wzór Pringsheima)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{t} dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{t} dt. \end{aligned}$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że

$$\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \sim \frac{1}{12} t.$$

Dlatego powyższa całka jest zbieżna.

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{t} dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\frac{1}{2}t} + 1}{2(1 - e^{-\frac{1}{2}t})} - \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} - \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{t} \right) \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\frac{1}{2}t} + 1}{2(1 - e^{-\frac{1}{2}t})} - \frac{2e^{-\frac{1}{2}t}}{t} \right) \frac{dt}{t} + \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} + \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{t} \right) \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t} + 1}{2(1 - e^{-t})} - \frac{e^{-t}}{t} \right) \frac{dt}{t} + \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} + \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{t} \right) \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\frac{1}{2}t} - e^{-t}}{t} - \frac{1}{2} e^{-t} \right) \frac{dt}{t} = - \int_0^\infty \left(\frac{d}{dt} \frac{e^{-\frac{1}{2}t} - e^{-t}}{t} \right) dt - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}t} - e^{-t}}{t} dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

7.8 Pochodna logarytmiczna funkcji Gamma

Ze wzoru Weierstrassa wynika natychmiast, że

$$\begin{aligned}\log \Gamma(z) &= -\gamma z - \log z + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n} - \log\left(1 + \frac{z}{n}\right) \right), \\ \partial_z \log \Gamma(z) &= -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z} \right), \\ \partial_z^2 \log \Gamma(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2}.\end{aligned}\tag{7.101}$$

Mamy też

$$\log \Gamma(1) = 0, \quad \log \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \log \pi, \quad \partial_z \log \Gamma(1) = -\gamma.$$

Stwierdzenie 7.22

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1+\epsilon) &= n! \left(1 + \epsilon \left(-\gamma + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \right) \right) + O(\epsilon^2), \quad n = 1, 2, \dots, \\ \Gamma(-n+\epsilon) &= \frac{(-1)^n}{n!} \left(\epsilon^{-1} - \gamma + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \right) + O(\epsilon), \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{7.102}$$

Dowód. Najpierw zauważamy, że

$$\partial_z \log \Gamma(n+1) = -\gamma + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ale $\Gamma'(z) = \Gamma(z) \partial_z \log \Gamma(z)$ i $\Gamma(n+1) = n!$. To pokazuje pierwszy wzór.

Następnie

$$\partial_z \left(\log \Gamma(z) + \frac{1}{z+n} \right) \Big|_{z=-n} = -\gamma + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

Ale

$$\partial_z \Gamma(z)(z+n) = (z+n) \Gamma'(z) + \Gamma(z) = (z+n) \Gamma(z) \partial_z \left(\log \Gamma(z) + (z+n)^{-1} \right).$$

□

7.9 Szeregi asymptotyczne

Niech funkcja f będzie określona na zbiorze $K(z_0, r) \cap \{\alpha_1 < \arg(z - z_0) < \alpha_2\}$. Piszemy

$$f(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j,$$

gdy dla każdego n istnieje C_n takie, że

$$\left| f(z) - \sum_{j=0}^n a_j (z - z_0)^j \right| \leq C_n |z - z_0|^{n+1}.$$

Oczywiście, jeśli $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ dla $z \in K(z_0, r)$, to $f(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$.

Przykład. dla $-\frac{\pi}{2} + \epsilon < \arg z < \frac{\pi}{2} - \epsilon$

$$e^{-\frac{1}{z}} \sim \sum_{j=0}^{\infty} 0z^j.$$

Przykład. dla $-\frac{\pi}{4} + \epsilon < \arg z < \frac{\pi}{4} - \epsilon$ i $-\frac{\pi}{4} + \epsilon < \arg -z < \frac{\pi}{4} - \epsilon$

$$e^{-\frac{1}{z^2}} \sim \sum_{j=0}^{\infty} 0z^j.$$

W szczególności, wszystkie pochodne funkcji $\mathbb{R} \ni x \rightarrow e^{-\frac{1}{x^2}}$ w zerze są równe zero.

Przykład – Funkcja błędu.

$$\operatorname{Erf}(z) := \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

Oczywiście, $\lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{Erf}(z) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Dla $-\frac{\pi}{2} + \epsilon < \arg z < \frac{\pi}{2} - \epsilon$ łatwo pokazujemy metodą całkowania przez części, że

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \operatorname{Erf}(z) = \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt \sim \frac{e^{-z^2}}{2z} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{(2z^2)^k} \right).$$

7.10 Pierwszy wzór Bineta

Twierdzenie 7.23 (Pierwszy wzór Bineta)

$$\log \Gamma(z) = (z - \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) e^{-zt} \frac{dt}{t}; \quad (7.103)$$

$$\partial_z \log \Gamma(z) = \log z + \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) e^{-zt} dt; \quad (7.104)$$

$$\partial_z^2 \log \Gamma(z) = \int_0^{\infty} \frac{te^{-tz}}{1 - e^{-t}} dt. \quad (7.105)$$

Uwaga Zwróćmy uwagę na to, że powyższe całki są skończone. W szczególności funkcje podcałkowe są ciągłe w zerze:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) \frac{1}{t} = \frac{1}{12},$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{1 - e^{-t}} = 1.$$

Dowód. Najpierw dowodzimy (7.105). Korzystając z (7.101) dostajemy

$$\begin{aligned} \partial_z^2 \log \Gamma(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-t(z+n)} t dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{te^{-tz}}{1 - e^{-t}} dt. \end{aligned} \quad (7.106)$$

To dowodzi (7.105). Następnie przekształcamy (7.106) dostając

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) te^{-tz} dt + \int_0^\infty e^{-tz} dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) te^{-tz} dt + \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \partial_z \log \Gamma(z) &= \partial_z \log \Gamma(1) + \int_1^z \partial_y^2 \log \Gamma(y) dy \\ &= -\gamma + \int_1^z \frac{1}{y} dy + \int_1^z \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) te^{-ty} dt dy \\ &= -\gamma + \log z - \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) e^{-ty} dt \Big|_{y=1}^{y=z} \\ &= \log z - \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) e^{-tz} dt, \end{aligned} \tag{7.107}$$

gdzie w ostatnim kroku wykorzystaliśmy wzór całkowy na stałą γ . To dowodzi (7.104). Następnie przekształcamy (7.107) dostając

$$\begin{aligned} & \log z - \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-tz} dt - \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) e^{-tz} dt \\ &= \log z - \frac{1}{2} \frac{1}{z} - \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) e^{-tz} dt. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \log \Gamma(z) &= \log \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^z \partial_y \log \Gamma(y) dy \\ &= \frac{1}{2} \log \pi + \int_{\frac{1}{2}}^z \log y dy - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^z \frac{1}{y} dy - \int_{\frac{1}{2}}^z \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) e^{-ty} dt dy \\ &= \frac{1}{2} \log \pi + z - \log z - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log z + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) e^{-ty} \frac{dt}{t} \Big|_{y=\frac{1}{2}}^{y=z} \\ &= (z - \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) e^{-tz} \frac{dt}{t}, \end{aligned}$$

gdzie w ostatnim kroku wykorzystaliśmy wzór Pringsheima. To kończy dowód (7.103). \square

Wniosek 7.24 Niech $\epsilon > 0$ i $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \epsilon$.

(1) Zachodzi **Wzór Stirlinga**

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\log \Gamma(z) - \left((z - \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi \right) \right) = 0, \\ & \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z)}{z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \sqrt{2\pi}} = 1. \end{aligned}$$

(2) Niech

$$f(t) = \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}.$$

Wtedy f jest ograniczona wraz ze wszystkimi pochodnymi dla $t \in [0, \infty[$ i

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n t^n, \quad |t| < 2\pi.$$

Mamy następujące rozwinięcie funkcji Gamma w szereg asymptotyczny:

$$\left| \log \Gamma(z) - \left((z - \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi - \sum_{j=1}^n (j-1)! z^{-j} f_j \right) \right| \leq C|z|^{-n-1}.$$

7.11 Wzór Plany i drugi wzór Bineta

Twierdzenie 7.25 (Wzór Plany) Niech $m \leq n$ będą całkowite, $\phi(z)$ funkcja analityczna, $|\phi(z)| \leq e^{(1-\epsilon)|\operatorname{Im}z|}$ dla $\epsilon > 0$ i $m \leq \operatorname{Re}z \leq n$. Wtedy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\phi(m) + \phi(m+1) + \dots + \phi(n-1) + \frac{1}{2}\phi(n) \\ &= \int_m^n \phi(z) dz - i \int_0^\infty \frac{\phi(n+iy) - \phi(n-iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy + i \int_0^\infty \frac{\phi(m+iy) - \phi(m-iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy \end{aligned}$$

Dowód. Wprowadźmy kontury

$$\begin{aligned} \gamma_+ &= [m^-, (m+1)^-, \dots, (n-1)^-, n^-, n + iR, m + iR, m], \\ \gamma_- &= [m^+, (m+1)^+, \dots, (n-1)^+, n^+, n - iR, m - iR, m]. \end{aligned}$$

Korzystając z tego, że

$$\operatorname{Res} \frac{\phi(z)}{e^{\pm 2\pi iz} - 1} \Big|_{z=k} = \mp \frac{1}{2\pi i} \phi(k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

dostajemy

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_+} \frac{\phi(z)}{e^{-2\pi iz} - 1} dz \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} -i \int_0^\infty \frac{\phi(m+iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy + i \int_0^\infty \frac{\phi(n+iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy \\ &\quad + P \int_m^n \frac{\phi(x)}{e^{-2\pi ix} - 1} dx + \frac{1}{4}\phi(m) + \frac{1}{2} \sum_{j=m+1}^{n-1} \phi(j) + \frac{1}{4}\phi(n); \end{aligned} \quad (7.108)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_-} \frac{\phi(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} i \int_0^\infty \frac{\phi(m-iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy - i \int_0^\infty \frac{\phi(n-iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy \\ &\quad + P \int_m^n \frac{\phi(x)}{e^{2\pi ix} - 1} dx + \frac{1}{4}\phi(m) + \frac{1}{2} \sum_{j=m+1}^{n-1} \phi(j) + \frac{1}{4}\phi(n). \end{aligned} \quad (7.109)$$

$$(7.110)$$

Następnie dodajemy (7.108) i (7.109), korzystając z tożsamości

$$(e^{2\pi ix} - 1)^{-1} + (e^{-2\pi ix} - 1)^{-1} = -1.$$

□

Twierdzenie 7.26 (Drugi wzór Bineta)

$$\log \Gamma(z) = (z - \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + 2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \frac{t}{z}}{e^{2\pi t} - 1} dt, \quad (7.111)$$

$$\partial_z \log \Gamma(z) = \log z - \frac{1}{2z} - 2 \int_0^\infty \frac{t dt}{(z^2 + t^2)(e^{2\pi t} - 1)}, \quad (7.112)$$

$$\partial_z^2 \log \Gamma(z) = \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{z} + 4 \int_0^\infty \frac{z t dt}{(z^2 + t^2)^2 (e^{2\pi t} - 1)}. \quad (7.113)$$

Dowód. Aby pokazać (7.113) stosujemy Wzór Plany do $\phi(z) = (z+t)^{-2}$. Następnie całkujemy dwukrotnie i dostajemy

$$\log \Gamma(z) = A + Bz + (z - \frac{1}{2}) \log z + 2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \frac{t}{z}}{e^{2\pi t} - 1} dt.$$

Porównując z pierwszym wzorem Bineta dla $z \sim 0$ dostajemy $A = \frac{1}{2} \log 2\pi$, $B = -1$. \square

8 Zastosowania

8.1 Jednorodne dystrybucje i ich transformaty Fouriera

Dla $\lambda \in \mathbb{C}$ możemy zdefiniować dystrybucje temperowane

$$(\pm ix + 0)^\lambda := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\pm ix + \epsilon)^\lambda.$$

Wzory

$$x_+^\lambda := x^\lambda \theta(x), \quad x_-^\lambda := (-x)^\lambda \theta(-x)$$

zadają dystrybucje tylko dla $\operatorname{Re} \lambda > -1$. Możemy je rozszerzyć na wszystkie $\lambda \in \mathbb{C}$ prócz $z = -1, -2, \dots$ kładąc

$$x_+^\lambda := \frac{1}{2i \sin \frac{\pi}{2} \lambda} \left(-e^{-i\frac{\pi}{2} \lambda} (ix + 0)^\lambda + e^{i\frac{\pi}{2} \lambda} (-ix + 0)^\lambda \right),$$

$$x_-^\lambda := \frac{1}{2i \sin \frac{\pi}{2} \lambda} \left(-e^{-i\frac{\pi}{2} \lambda} (-ix + 0)^\lambda + e^{i\frac{\pi}{2} \lambda} (ix + 0)^\lambda \right)$$

Wygodnie jest rozważać $\frac{x_\pm^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$. Mamy wtedy

$$\frac{x_\pm^{-n}}{\Gamma(n+1)} = (\pm 1)^n \delta^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Spełniają one związki rekurencyjne:

$$\partial_z \frac{x_\pm^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} = \pm \frac{x_\pm^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}.$$

A oto transformaty Fouriera:

$$\int e^{-i\xi x} \frac{x_\pm^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} dx = (\pm i\xi + 0)^{-\lambda-1},$$

$$\int e^{-i\xi x} (\mp i\xi + 0)^\lambda d\xi = 2\pi \frac{\xi_\pm^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda)}.$$

Szczególnie symetryczne wzory na transformaty Fouriera dostaniemy wprowadzając

$$\begin{aligned}\eta^\lambda(x) &:= \Gamma\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right) 2^{-\frac{\lambda}{2}} |x|^\lambda = (2\pi)^{-1} \Gamma\left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right) 2^{-\frac{\lambda}{2}} \left((ix + 0)^\lambda + (-ix + 0)^\lambda \right), \\ \nu^\lambda(x) &:= \Gamma\left(\frac{\lambda}{2} + 1\right) 2^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}} |x|^\lambda \operatorname{sgn} x = i(2\pi)^{-1} \Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right) 2^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}} \left((ix + 0)^\lambda - (-ix + 0)^\lambda \right).\end{aligned}$$

Mamy następujące związki:

$$\begin{aligned}\partial_x \eta^\lambda &= \lambda \nu^{\lambda-1}, & \partial_x \nu^\lambda &= \eta^{\lambda-1}, \\ \widehat{\eta^\lambda} &= \sqrt{2\pi} \eta^{-\lambda-1}, & \widehat{\nu^\lambda} &= \sqrt{2\pi} \nu^{-\lambda-1}.\end{aligned}$$

8.2 Całki wielowymiarowe

W tym rozdziale rozważamy d -wymiarową przestrzeń euklidesową.

Twierdzenie 8.1 *Pole sfery jednostkowej $d - 1$ -wymiarowej wynosi*

$$S_{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}.$$

Dowód. Metoda I. Obliczamy 2 sposobami całkę gaussowską: we współrzędnych kartezjańskich

$$\int e^{-x_1^2 - \dots - x_d^2} dx_1 \dots dx_d = \pi^{\frac{d}{2}},$$

i we współrzędnych sferycznych

$$S_{d-1} \int_0^\infty e^{-r^2} r^{d-1} dr = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right).$$

Metoda II. We współrzędnych sferycznych pole sfery jest równe

$$S_{d-1} = \int_0^\pi \sin^{d-2} \phi_{d-1} d\phi_{d-1} \dots \int_0^\pi \sin \phi_2 d\phi_2 \int_0^{2\pi} d\phi_1$$

Następnie stosujemy

$$\int_0^\pi \sin^{k-1} \phi_k d\phi_k = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}, \quad k = 2, \dots, d-1; \quad \int_0^{2\pi} d\phi_1 = 2\pi.$$

□

Twierdzenie 8.2 Całki występujące w diagramach Feynmana W przestrzeni euklidesowej d -wymiarowej mamy

$$\int (x^2 + m^2)^{-\alpha} d^d x = \pi^{\frac{d}{2}} m^{d-2\alpha} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)}, \quad (8.114)$$

$$\int (x^2 + 2xy + m^2)^{-\alpha} d^d x = \pi^{\frac{d}{2}} (m^2 - y^2)^{\frac{d}{2}-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)}, \quad (8.115)$$

$$\int x_\mu (x^2 + 2xy + m^2)^{-\alpha} d^d x = -\pi^{\frac{d}{2}} y_\mu (m^2 - y^2)^{\frac{d}{2}-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)}, \quad (8.116)$$

$$\begin{aligned} \int x_\mu x_\nu (x^2 + 2xy + m^2)^{-\alpha} d^d x &= \pi^{\frac{d}{2}} y_\mu y_\nu (m^2 - y^2)^{\frac{d}{2}-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)} \\ &\quad - \pi^{\frac{d}{2}} \delta_{\mu\nu} (m^2 - y^2)^{\frac{d-1}{2}-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(\alpha)}. \end{aligned} \quad (8.117)$$

Dowód. Stosujemy wzór na powierzchnię sfery i

$$\int_0^\infty (r^2 + m^2)^{-\alpha} r^{d-1} dr = 2^{-1} m^{d-2\alpha} \frac{\Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)}.$$

□

Twierdzenie 8.3 Niech $-d < \lambda < 0$. Zdefiniujemy

$$\eta^\lambda(x) := \frac{1}{\Gamma(\frac{\lambda+d}{2})} 2^{-\frac{\lambda}{2}} |x|^\lambda.$$

Wtedy

$$\widehat{\eta^\lambda} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \eta^{-\lambda-d}.$$

Dowód. Stosujemy współrzędne sferyczne.

$$\begin{aligned} &\int |x|^\lambda e^{-ix\xi} dx = \\ &\int_0^\infty dr \int_0^\pi d\phi_{d-1} r^{\lambda+d-1} e^{-ir|\xi| \cos \phi_{d-1}} r^{\lambda+d-1} \sin^{d-2} \phi_{d-1} S_{d-2} \\ &= \Gamma(\lambda + d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((i|\xi| \cos \phi_{d-1} + 0)^{-\lambda-d} + (-i|\xi| \cos \phi_{d-1} + 0)^{-\lambda-d} \right) \sin^{d-2} \phi_{d-1} d\phi_{d-1} S_{d-2} \\ &= \Gamma(\lambda + d) 2 \cos\left(\frac{\lambda+d}{2}\pi\right) |\xi|^{-\lambda-d} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\lambda-d} \phi_{d-1} \sin^{d-2} \phi_{d-1} d\phi_{d-1} S_{d-2}. \end{aligned}$$

Następnie stosujemy

$$S_{d-2} = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\lambda-d} \phi_{d-1} \sin^{d-2} \phi_{d-1} d\phi_{d-1} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(-\frac{\lambda-d+1}{2}) \Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})},$$

$$\Gamma(\lambda + d) = \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{\lambda+d-1} \Gamma\left(\frac{\lambda+d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\lambda+d+1}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{\lambda+d+1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\lambda-d+1}{2}\right) \cos \frac{\lambda+d}{2} \pi = \pi,$$

i dostajemy

$$\int |x|^\lambda e^{-ix\xi} d^d x = |\xi|^{-\lambda-d} 2^{\lambda+d} \pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+d}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})}.$$

□

8.3 Macierze

Niech $c = [c_{ij}]$ będzie macierzą. Wyznacza ona formę kwadratową zdefiniowaną dla $x = [x_i] \in \mathbb{R}^d$ jako

$$xcx = \sum_{i,j=1}^d x_i c_{ij} x_j.$$

Każdą macierz przez zamianę współrzędnych $y_j = \sum_{i=1}^d a_{ji} x_i$ można sprowadzić do postaci diagonalnej:

$$xcx = \sum_{i=1}^d \lambda_i (y_i)^2.$$

Liczba dodatnich i ujemnych λ_i nie zależy od wyboru przekształcenia i definiuje sygnaturę macierzy (d_+, d_-) . Oczywiście, $d \geq d_+ + d_-$. Indeks macierzy c definiujemy jako $\text{ind} c := d_+ - d_-$.

Mówimy, że macierz c jest niezdegenerowana, gdy dla każdego $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$, istnieje $y \in \mathbb{R}^d$ taki, że

$$ycx = \sum_{i,j=1}^d y_i c_{ij} x_j \neq 0.$$

Równoważny warunek: $d_+ + d_- = d$.

Zakładamy, że w \mathbb{R}^d wprowadzony jest kanoniczny iloczyn skalarny $x \cdot y := \sum_{j=1}^d x_j y_j$. Macierz można sprowadzić do postaci diagonalnej odwzorowaniem ortogonalnym. Ciąg $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ z dokładnością do permutacji nie zależy od wyboru diagonalizującego odwzorowania ortogonalnego. Wyznacznik macierzy nie zmienia się po zastosowaniu transformacji ortogonalnej. Dlatego

$$\det[c_{ij}] = \prod_{i=1}^d \lambda_i.$$

Mówimy, że macierz c jest dodatnio określona, jeśli dla $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$,

$$xcx > 0.$$

Równoważny warunek: $d_+ = d$.

8.4 Wielowymiarowe całki Gaussa i Fresnela

Niech macierz c będzie dodatnio określona. Wtedy

$$\int dx \exp(-xcx) = \pi^{\frac{d}{2}} (\det c)^{-\frac{1}{2}}. \quad (8.118)$$

Zamieniamy bowiem współrzędne odwzorowaniem ortogonalnym diagonalizując macierz c . Mamy wtedy $dx = dx_1 \cdots dx_d = dy_1 \cdots dy_d = dy$ i (8.118) jest równe

$$\int dy \exp\left(-\sum_i \lambda_i (y_i)^2\right) = \prod_{i=1}^d \int e^{-\lambda_i (y_i)^2} dy_i = \prod_{i=1}^d \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}}.$$

Jeśli c jest macierzą niezdegenerowaną, to

$$\int_{|x|<R} dx_1 \cdots dx_d \exp(ixcx) = \pi^{d/2} e^{i\frac{\pi}{4} \text{ind}c} |\det c|^{-\frac{1}{2}}. \quad (8.119)$$

8.5 Metoda Laplace'a (punktu siodłowego)

Dla dużych λ rozważamy całkę typu

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{\lambda\phi(x)} dx.$$

Zakładamy, że f , ϕ rozszerzają się do funkcji analitycznych na Ω , otoczeniu $[a, b]$ w \mathbb{C} , i że znajdziemy drogę $\gamma \subset \Omega$, która łączy a z b przechodząc przez punkt z_0 , w którym $\phi'(z_0) = 0$. Zakładamy też, że w z_0 funkcja $\text{Re}\phi$ obcięta do γ ma maksimum i $\phi'(0) \neq 0$. W otoczeniu z_0 mamy

$$\phi(z) \approx \phi(z_0) + \frac{1}{2}\phi''(z_0)(z - z_0)^2. \quad (8.120)$$

Wprowadźmy współrzędne $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ tak, by

$$z = z_0 + (t + is)e^{i\psi},$$

gdzie $\phi''(z_0)e^{2i\psi} < 0$. Zakładamy, że $|\psi| \leq \frac{\pi}{2}$. Wtedy (8.120) można przepisać jako

$$\phi(z) \approx \phi(z_0) + \frac{1}{2}\phi''(z_0)e^{2i\psi}(t^2 - s^2 + 2its).$$

Zatem poziomice $\text{Re}\phi$ wokół z_0 przypominają poziomice wokół przełęczy (punktu siodłowego).

Największy wkład do całka po krzywej γ pochodzi z otoczenia punktu z_0 , gdzie γ można zastąpić częścią prostej $\mathbb{R} \ni t \mapsto z_0 + e^{i\psi}t$. Dostajemy

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda\phi(z)} dz \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} f(z_0) e^{\lambda\phi(z_0) + \frac{\lambda}{2}\phi''(z_0)e^{2i\psi}t^2} e^{i\psi} dt \\ &= f(z_0) e^{\lambda\phi(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda\phi''(z_0)e^{2i\psi}}} e^{i\psi} \\ &= f(z_0) e^{\lambda\phi(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda\phi''(z_0)}}. \end{aligned}$$

Można to sformułować ściślej.

Twierdzenie 8.4 *Przy założeniach opisanych powyżej, mamy*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{I(\lambda)}{f(z_0) e^{\lambda\phi(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda\phi''(z_0)}}} = 1. \quad (8.121)$$

Dowód. Bez zmniejszenia ogólności, można założyć, że $\phi''(z_0) = -1$, $\phi(z_0) = 0$ i $z_0 = 0$. Droge γ można zdeformować tak, żeby w otoczeniu $z_0 = 0$ zawierała odcinek $[-\epsilon, \epsilon]$ dla pewnego $\epsilon > 0$. Resztę drogi, czyli $\gamma \setminus [-\epsilon, \epsilon]$, nazywamy γ' . Możemy wtedy napisać

$$I(\lambda) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x)e^{\lambda\phi(x)} dx + I'(\lambda),$$

$$I'(\lambda) := \int_{\gamma'} f(z)e^{\lambda\phi(z)} dz.$$

Następnie,

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x)e^{\lambda\phi(x)} dx = I_0(\lambda) + I_1(\lambda) + I_2(\lambda) + I_3(\lambda),$$

$$I_0(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} dx,$$

$$I_1(\lambda) = -2 \int_{\epsilon}^{\infty} f(0)e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} dx,$$

$$I_2(\lambda) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} (f(x) - f(0))e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} dx,$$

$$I_3(\lambda) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x)e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} (1 - e^{\lambda(\phi(x) + \frac{1}{2}x^2)}) dx.$$

Szacujemy po kolei. Znajdziemy $c > 0$ takie, że $\operatorname{Re}\phi(x) < -c$ na γ' . Dlatego

$$|I'(\lambda)| \leq Ce^{-\lambda c}.$$

Całkę $I_0(\lambda)$ już policzyliśmy wcześniej i wynosi ona $f(0)\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}$. Szacujemy kolejne wyrazy:

$$\begin{aligned} |I_1(\lambda)| &\leq 2f(0) \int_{\epsilon}^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} dx \\ &\leq \frac{2f(0)}{\lambda\epsilon} \int_{\epsilon}^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} \lambda x dx \leq \frac{2f(0)}{\lambda\epsilon} \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \frac{2f(0)}{\lambda\epsilon}, \\ |I_2(\lambda)| &\leq C \int_0^{\epsilon} x e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} dx \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \int_0^{\epsilon} e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} \lambda x dx \leq \frac{C}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \frac{C}{\lambda}, \\ |I_3(\lambda)| &\leq C\lambda \int_0^{\epsilon} x^3 e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} dx \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \int_0^{\epsilon} e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} \lambda^2 x^3 dx \leq \frac{2C}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-t} t dt = \frac{2C}{\lambda}. \end{aligned}$$

Zatem

$$I(\lambda) = f(0)\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} + O(\lambda^{-1}),$$

co implikuje (8.121). \square

8.6 Asymptotyka funkcji Gamma w nieskończoności metodą punktu siodłowego.

Twierdzenie 8.5 Niech $\epsilon > 0$. Dla $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \epsilon$ mamy

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z+1)}{\sqrt{2\pi} \frac{z^{z+1/2}}{e^z}} = 1. \quad (8.122)$$

Dowód. Mamy

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{\phi(t)} dt,$$

gdzie

$$\phi(t) = -t + z \log t.$$

Obliczamy:

$$\partial_t \phi(t) = -1 + \frac{z}{t}, \quad \partial_t^2 \phi(t) = -\frac{z}{t^2}.$$

Zatem $\phi(t)$ ma jedno i tylko jeden punkt stacjonarny: dla $t_0 = z$. Mamy

$$\phi(t_0) = -z + z \log z, \quad \partial_t^2 \phi(t_0) = -\frac{1}{z}.$$

Można zmienić kontur całkowania tak, by przechodził przez z , na przykład całkować po półprostej $[0, z\infty[$:

$$\Gamma(z+1) = \int_{]0, z\infty[} e^{\phi(t)} dt.$$

Funkcję $\phi(t)$ przybliżamy przez jej rozwinięcie w okolicy t_0

$$\phi(t) \sim \phi(t_0) + \frac{1}{2} \phi''(t_0)(t-t_0)^2.$$

To prowadzi do przybliżenia dla funkcji Gamma:

$$\Gamma(z+1) \sim \int_{]0, z\infty[} e^{\phi(t_0) + \frac{1}{2} \phi''(t_0)(t-t_0)^2} dt,$$

Kontur, po którym całkujemy przedłużamy do całej prostej $z] - \infty, \infty[$. Dla dużych z w sektorze $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \epsilon$ te modyfikacje nie wpłyną zbytnio na wartość całki. Oczekujemy więc, że $\Gamma(z)$ zachowuje się asymptotycznie jak

$$e^{\phi(t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2} \partial_t^2 \phi(t_0)(t-t_0)^2} dt = \frac{z^z}{e^z} \sqrt{2\pi z}.$$

Pokażmy teraz to w ścisły sposób. Niech $\operatorname{Re} z > 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_{]0, \infty[} e^{-t} t^z dt = \int_{]0, z\infty[} e^{-t} t^z dt \\ &= e^{-z+z \log z} \int_{]0, z\infty[} e^{-z(\frac{t}{z}-1-\log \frac{t}{z})} dt \\ &= e^{-z} z^{z+1} \int_{-1}^{\infty} e^{-z(s-\log(1+s))} ds, \end{aligned}$$

gdzie dokonaliśmy zamiany zmiennych

$$s = \frac{t}{z} - 1.$$

Zauważmy, że funkcja

$$]-1, \infty[\ni s \mapsto s - \log(1+s)$$

maleje na $]-1, 0]$ od ∞ do 0, w 0 zachowuje się jak $\frac{s^2}{2}$ i na $[0, \infty[$ rośnie do ∞ . Zatem funkcja

$$\mathbb{R} \ni s \mapsto u(s) = \sqrt{2(s - \log(1+s))}$$

(w której bierzemy ujemny pierwiastek dla $s < 0$ i dodatni pierwiastek dla $s > 0$) jest gładka. Mamy

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(s)}{s} = 1, \quad \frac{du(s)}{ds} = \frac{s}{u(s)(1+s)},$$

oraz

$$f(u) := \frac{ds}{du}(u) = \frac{(1+s(u))u}{s(u)}, \quad f(0) = 1.$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{\infty} e^{-z(s - \log(1+s))} ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z}{2}u^2} f(u) du. \end{aligned}$$

Niech

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z}{2}u^2} du = \sqrt{\frac{2\pi}{z}}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \left| \frac{I}{I_0} - 1 \right| &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z}{2}u^2} |f(u) - 1| du}{\sqrt{\frac{2\pi}{z}}} \\ &\leq C\sqrt{z} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z}{2}u^2} |u| du = C_1 \frac{1}{\sqrt{z}}. \end{aligned}$$

To kończy dowód (8.122) \square

8.7 Asymptotyka funkcji Beta w nieskończoności metodą punktu siodłowego

Asymptotykę dla $B(u, v)$ można dostać z asymptotyki funkcji $\Gamma(z)$. My jednak pokażemy ją bezpośrednio z metody punktu siodłowego.

Twierdzenie 8.6 *Niech $\epsilon > 0$. Dla $|\arg u| < \frac{\pi}{2} - \epsilon$, $|\arg v| < \frac{\pi}{2} - \epsilon$, mamy*

$$\lim_{u, v \rightarrow \infty} \frac{B(u+1, v+1)}{\sqrt{2\pi} \frac{u^{u+1/2} v^{v+1/2}}{(u+v)^{u+v+3/2}}} = 1. \quad (8.123)$$

Dowód. Mamy

$$B(u+1, v+1) = \int_0^1 e^{\psi(t)} dt,$$

gdzie

$$\psi(t) := u \log t + v \log(1-t).$$

Obliczamy:

$$\partial_t \psi(t) = \frac{u}{t} - \frac{v}{1-t}, \quad \partial_t^2 \psi(t) = -\frac{u}{t^2} - \frac{v}{(1-t)^2}.$$

Zatem $\psi(t)$ ma jedyny punkt stacjonarny: dla $t_0 = \frac{u}{u+v}$ i

$$\psi(t_0) = u \log \left(\frac{u}{u+v} \right) + v \log \left(\frac{v}{u+v} \right), \quad \partial_t^2 \psi(t_0) = -\frac{(u+v)^3}{uv}.$$

Jeśli $\operatorname{Re} u > 0$ i $\operatorname{Re} v > 0$, to $\operatorname{Re} \psi(t) \rightarrow -\infty$, gdy t zbliża się do 0 bądź 1. Łatwo więc uzasadnić, że deformując kontur $[0, 1]$ możemy dostać krzywą γ zaczynającą się w 0, kończącą się w 1 i przechodzącą przez t_0 tak, że $\operatorname{Re} \psi(t)$ osiąga wzdłuż tej krzywej maksimum w t_0 . Mamy

$$B(u+1, v+1) = \int_{\gamma} e^{\psi(t)} dt.$$

Można oczekiwać, że przyczynek wokół t_0 w tej całce będzie dominować. Zatem

$$B(u+1, v+1) \sim \int_{\gamma} e^{\psi(t_0) + \frac{1}{2} \psi''(t_0)(t-t_0)^2} dt.$$

Następnie zastępujemy krzywą γ przez prostą nachyloną pod odpowiednim kątem α , czyli:

$$\begin{aligned} B(u+1, v+1) &\sim e^{\psi(t_0)} \int_{e^{\alpha] - \infty, \infty[} e^{\frac{1}{2} \partial_t^2 \psi(t_0) t^2} dt \\ &= \left(\frac{u}{u+v} \right)^u \left(\frac{v}{u+v} \right)^v \left(\frac{2\pi uv}{(u+v)^3} \right)^{1/2} = \sqrt{2\pi} \frac{u^{u+1/2} v^{v+1/2}}{(u+v)^{u+v+3/2}}. \end{aligned}$$

□

8.8 Wielowymiarowa wersja metody Laplace'a (bez przedłużenia analitycznego)

Dla dużych λ rozważamy całkę typu

$$I(\lambda) = \int_{\Theta} f(x) e^{\lambda \phi(x)} dx,$$

gdzie Θ jest podzbiorem w \mathbb{R}^d . Zakładamy, że ϕ posiada globalne maksimum w Θ w punkcie \tilde{x} należącym do wnętrza Θ i że jest różniczkowalne dwa razy w \tilde{x} . Mamy wtedy $\nabla \phi(\tilde{x}) = 0$.

Zakładamy też, że Hessjan (druga pochodna) ϕ w \tilde{x} , oznaczany przez $\nabla^2\phi(\tilde{x})$, jest ujemnie określony. Wtedy

$$\begin{aligned} I(\lambda) &\approx \int_{\mathbb{R}^d} f(\tilde{x}) \exp\left(\lambda\phi(\tilde{x}) + \frac{\lambda}{2} \sum_{i,j=1}^d \nabla_i \nabla_j \phi(\tilde{x})(x_i - \tilde{x}_i)(x_j - \tilde{x}_j)\right) dx \\ &= f(\tilde{x}) e^{\lambda\phi(\tilde{x})} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{d}{2}} (\det(-\nabla^2\phi(\tilde{x})))^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

8.9 Metoda fazy stacjonarnej

Zakładamy teraz, że f i ϕ są dostatecznie gładkie. Dla dużych λ , rozważamy całkę typu

$$I(\lambda) = \int_{\Theta} f(x) e^{i\lambda\phi(x)} dx,$$

gdzie Θ jest podzbiorem w \mathbb{R}^d . Zakładamy, że ϕ posiada globalne maksimum w Θ w punkcie \tilde{x} należącym do wnętrza Θ . Mamy wtedy $\nabla\phi(\tilde{x}) = 0$. Zakładamy też, że Hessjan ϕ w \tilde{x} , oznaczany przez $\nabla^2\phi(\tilde{x})$, jest niezdegenerowany. Wtedy

$$\begin{aligned} I(\lambda) &\approx \int_{\mathbb{R}^d} f(\tilde{x}) \exp\left(i\lambda\phi(\tilde{x}) + \frac{i\lambda}{2} \sum_{i,j=1}^d \nabla_i \nabla_j \phi(\tilde{x})(x_i - \tilde{x}_i)(x_j - \tilde{x}_j)\right) dx \\ &= f(\tilde{x}) e^{i\frac{\pi}{4} \text{ind} \nabla^2\phi(\tilde{x})} e^{i\lambda\phi(\tilde{x})} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{d}{2}} |\det \nabla^2\phi(\tilde{x})|^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

8.10 Równanie dyfuzji i Schrödingera

Swobodne równanie Schrödingera:

$$i \frac{d}{dt} \psi_t(x) = -\frac{1}{2m} \Delta \psi_t(x).$$

Równanie dyfuzji (ciepła):

$$\frac{d}{dt} f_t(x) = \kappa \Delta f_t(x).$$

Wprowadźmy operator pędu

$$p_i = -i\nabla_{x_i}.$$

Wtedy $-\Delta = p^2$. Można uogólnić równanie Schrödingera do dyspersyjnego równania Schrödingera, gdzie ω jest dowolną funkcją pędu:

$$i \frac{d}{dt} \psi_t(x) = \omega(p) \psi_t(x).$$

Formalne rozwiązanie:

$$\psi_t = e^{it\omega(p)} \psi_0.$$

Transformacja Fouriera w konwencji “unitarnej”:

$$\hat{\psi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int \psi(x) e^{-ix\xi} dx,$$

$$\psi(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int \hat{\psi}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Transformacja Fouriera diagonalizuje pęd:

$$\widehat{p\psi}(\xi) = \xi \hat{\psi}(\xi).$$

Ogólniej

$$\widehat{\omega(p)\psi}(\xi) = \omega(\xi) \hat{\psi}(\xi).$$

Dlatego

$$i \frac{d}{dt} \hat{\psi}_t(\xi) = \omega(\xi) \hat{\psi}_t(\xi),$$

$$\hat{\psi}_t(\xi) = e^{-it\omega(\xi)} \hat{\psi}_0(\xi).$$

W reprezentacji położeniowej

$$\psi_t(x) = \int U_t(x-y) \psi_0(y) dy,$$

gdzie “propagator” jest równy

$$U_t(x) = (2\pi)^{-d} \int e^{-it\omega(\xi) + ix\xi} d\xi.$$

W przypadku dyfuzji dostajemy

$$f_t(x) = \int (4\pi\kappa t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}} f_0(y) dy.$$

Zauważmy, że

$$(1) \int f_t(x) dx = \int f_0(x) dx;$$

$$(2) f_0 \geq 0 \text{ implikuje } f_t \geq 0;$$

$$(3) \int |f_t|^2(x) dx = \int |f_0|^2(x) dx.$$

Dla swobodnego równania Schrödingera z $m = 1$ mamy

$$\psi_t(x) = \int (2\pi t i)^{-\frac{d}{2}} e^{\frac{i(x-y)^2}{2t}} \psi_0(y) dy.$$

Mamy $\int |\psi_t|^2(x) dx = \int |\psi_0|^2(x) dx$.

8.11 Transformacja Legendre'a

Niech Ω będzie otwartym zbiorem w \mathbb{R}^d a

$$\Omega \ni \xi \mapsto \omega(\xi) \in \mathbb{R} \quad (8.124)$$

niech będzie funkcją wypukłą klasy C^2 . Ścisłej rzecz biorąc, zakładamy, że dla różnych $\xi_1, \xi_2 \in \Omega$, $\xi_1 \neq \xi_2$, $0 < \tau < 1$,

$$\tau\omega(\xi_1) + (1 - \tau)\omega(\xi_2) > \omega(\tau\xi_1 + (1 - \tau)\xi_2).$$

Wtedy

$$\Omega \ni \xi \mapsto v(\xi) := \nabla\omega(\xi) \in \mathbb{R}^d \quad (8.125)$$

jest funkcją różnowartościową. Niech $\tilde{\Omega}$ będzie obrazem (8.125). Można zdefiniować funkcję

$$\tilde{\Omega} \ni v \mapsto \xi(v) \in \Omega$$

odwrotną do (8.124). Transformację Legendre'a definiujemy jako

$$\tilde{\omega}(v) := v\xi(v) - \omega(\xi(v)).$$

Twierdzenie 8.7 (1) $\nabla\tilde{\omega}(v) = \xi(v)$.

(2) $\nabla^2\tilde{\omega}(v) = \nabla_v\xi(v) = \left(\nabla_\xi^2\omega(\xi(v))\right)^{-1}$. *Zatem $\tilde{\omega}$ jest wypukła.*

(3) $\tilde{\tilde{\omega}}(\xi) = \omega(\xi)$.

Dowód. (1)

$$\nabla_v\tilde{\omega}(v) = \xi(v) + v\nabla_v\xi(v) - \nabla_\xi\omega(\xi(v))\nabla_v\xi(v) = \xi(v).$$

(2)

$$\nabla_v^2\tilde{\omega}(v) = \nabla_v\xi(v) = \nabla_\xi v(\xi(v))^{-1} = \left(\nabla_\xi^2\omega(\xi(v))\right)^{-1}.$$

(3)

$$\tilde{\tilde{\omega}}(\xi) = \xi v(\xi) - v(\xi)\xi(v(\xi)) + \omega(\xi(v(\xi))) = \omega(\xi).$$

□

Przykłady.

(1) $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\omega(\xi) = \frac{1}{2}(\xi - a)m^{-1}(\xi - a) + v$, $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}^d$, $\tilde{\omega}(v) = \frac{1}{2}\xi m\xi + a\xi - v$.

(2) $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\omega(\xi) = \sqrt{\xi^2 + m^2}$, $\tilde{\Omega} = \{v \in \mathbb{R}^d : |v| < 1\}$, $\tilde{\omega}(\xi) = -m\sqrt{1 - v^2}$.

(3) $\Omega = \mathbb{R}$, $\omega(\xi) = e^\xi$, $\tilde{\Omega} =]0, \infty[$, $\tilde{\omega}(v) = v \log v - v$.

8.12 Dyspersyjne równanie Schrödingera z parametrem \hbar

Wprowadźmy mały parametr \hbar . Zmieńmy definicję pędu i energii:

$$p_i = -i\hbar\nabla_{x_i}, \quad E = i\hbar\partial_t.$$

Dyspersyjne równanie Schrödingera w postaci zawierającej \hbar :

$$i\hbar\frac{d}{dt}\psi_t(x) = \omega(p)\psi_t(x). \quad (8.126)$$

Ma ono rozwiązanie:

$$\psi_t = e^{\frac{it\omega(p)}{\hbar}}\psi_0.$$

Aby je rozwiązać wygodnie jest zastosować semiklasyczną wersję transformacji Fouriera:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\xi) &= (2\pi\hbar)^{-\frac{d}{2}} \int \psi(x)e^{-\frac{ix\xi}{\hbar}} dx, \\ \psi(x) &= (2\pi\hbar)^{-\frac{d}{2}} \int \hat{\psi}(\xi)e^{\frac{ix\xi}{\hbar}} d\xi. \end{aligned}$$

Ma ona własności

$$\begin{aligned} \int |\psi(x)|^2 dx &= \int |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi, \\ \widehat{\omega(p)\psi}(\xi) &= \omega(\xi)\hat{\psi}(\xi). \end{aligned}$$

Propagator wynosi

$$U_t(x) = (2\pi\hbar)^{-d} \int e^{\frac{-it\omega(\xi)+i(x-y)\xi}{\hbar}} d\xi.$$

8.13 Granica semiklasyczna dyspersyjnej ewolucji

Założmy, że $\psi_t(x)$ ewoluje zgodnie z równaniem (8.126). Chcemy wyznaczyć propagację dla małych wartości \hbar w zależności od $\hat{\psi}_0$

Niech $v(\xi)$ i $\tilde{\omega}(x)$ będą zdefiniowane jak w podrozdziale 8.11. Wtedy

$$\begin{aligned} \psi_t(x) &\approx \exp\left(i\frac{\pi}{4}\text{ind}\nabla_\xi v(\xi(x/t))\right) \\ &\times t^{-\frac{d}{2}} |\det|\nabla_\xi v(\xi(x/t))|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{it}{\hbar}\tilde{\omega}(x/t)\right) \hat{\psi}_0((\xi(x/t))). \end{aligned} \quad (8.127)$$

Czyli paczka falowa o pędzie ξ podróżuje z prędkością $v(\xi) = \nabla\omega(\xi)$ zwaną “prędkością grupową”. Zauważmy przy tym, że norma L^2 prawej strony (8.127) nie zależy od czasu.

Aby otrzymać (8.127) zapisujemy $\psi_t(x)$ w postaci

$$\psi_t(x) = (2\pi\hbar)^{-\frac{d}{2}} \int \exp\left(\frac{i\phi_t(x, \xi)}{\hbar}\right) \hat{\psi}_0(\xi) d\xi,$$

gdzie

$$\phi_t(x, \xi) = -t\omega(\xi) + x\xi.$$

Stosujemy metodę fazy stacjonarnej

$$\nabla_\xi \phi(x, \xi) = -t\nabla_\xi \omega(\xi) + x.$$

Zatem

$$x/t = \nabla_\xi \omega(\xi) = v(\xi),$$

$$\phi(x, \xi(x/t)) = x\xi(x/t) - t\omega(\xi(x/t)) = t\tilde{\omega}(x/t).$$

Poza tym

$$\nabla_\xi^2 \phi(x, \xi) = -t\nabla^2 \omega(\xi) = -t\nabla_\xi v(\xi).$$

Metoda fazy stacjonarnej prowadzi do

$$\begin{aligned} \psi_t(x) &\approx (2\pi\hbar)^{-\frac{d}{2}} (2\pi\hbar)^{\frac{d}{2}} \exp\left(i\frac{\pi}{4} \text{ind} \nabla_\xi v(\xi(x/t))\right) \\ &\times t^{-\frac{d}{2}} |\det |\nabla_\xi v(\xi(x/t))|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{it}{\hbar} \tilde{\omega}(x/t)\right) \hat{\psi}_0(\xi(x/t)), \end{aligned}$$

z którego wynika wzór (8.127).

8.14 Równanie Kleina-Gordona/falowe

Poniższe równanie dla $m \neq 0$ nazywa się równaniem Kleina-Gordona a dla $m = 0$ równaniem falowym:

$$\partial_t^2 \psi(t, x) = (\Delta - m^2)\psi(t, x). \quad (8.128)$$

Twierdzenie 8.8 *Znając $\psi(t, \cdot)$ i $\partial_t \psi(t, \cdot)$ dla $t = 0$ możemy otrzymać rozwiązanie równania (8.128) w dowolnej chwili ze wzoru*

$$\psi(t) = -\partial_t G(t)\psi(0) + G(t)\partial_t \psi(0),$$

gdzie funkcja Greena $G(t)$ jest zadana przez

$$\begin{aligned} G(t) &= -\frac{i}{2}(-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} e^{it\sqrt{-\Delta + m^2}} \\ &\quad + \frac{i}{2}(-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-it\sqrt{-\Delta + m^2}}. \end{aligned}$$

Dowód. (8.128) można przepisać w formie

$$\left(i\partial_t - \sqrt{-\Delta + m^2}\right) \left(i\partial_t + \sqrt{-\Delta + m^2}\right) \psi = 0.$$

Dzielimy ψ na część o dodatniej i ujemnej częstotliwości: $\psi = \psi_+ + \psi_-$, gdzie

$$\left(i\partial_t \pm \sqrt{-\Delta + m^2}\right) \psi_\pm = 0.$$

Mamy

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{2} \left(1 - i(-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} \partial_t \right) \psi \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(1 + i(-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} \partial_t \right) \psi.\end{aligned}$$

Dlatego

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \mp i(-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} \partial_t \right) \psi.$$

Stosując

$$\psi_{\pm}(t) = e^{\pm i\sqrt{-\Delta+m^2}t} \psi_{\pm}(0),$$

dostajemy

$$\begin{aligned}\psi(t) &= e^{i\sqrt{-\Delta+m^2}t} \psi_+(0) + e^{-i\sqrt{-\Delta+m^2}t} \psi_-(0) \\ &= \frac{1}{2} (e^{it\sqrt{-\Delta+m^2}} + e^{-it\sqrt{-\Delta+m^2}}) \psi(0) \\ &\quad + \frac{i}{2} \left(-(\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} e^{it\sqrt{-\Delta+m^2}} + (-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-it\sqrt{-\Delta+m^2}} \right) \partial_t \psi(0).\end{aligned}$$

□