Elementy matematyki współczesnej—1998-99

Teoria operatorów liniowych w przestrzeniach Banacha

Jan Dereziński

1 Relacje i odwzorowania

Niech X, Y będą zbiorami. Wtedy $R \subset X \times Y$ nazywamy relacją. Przykładem relacji jest relacja tożsamościowa $\mathbf{1}_X := \{(x, x) \ : \ x \in X\} \subset X \times X$.

Jeśli $Y_1 \subset X_1$, to definiujemy lewe obcięcie relacji R do Y_1 kładąc ${}_{Y_1}\Big|R := Y_1 \times X_2 \cap R$. Jeśli $Y_2 \subset X_2$, to definiujemy prawe obcięcie relacji R do Y_2 kładąc $R\Big|_{Y_2} := X_1 \times Y_2 \cap R$.

Wprowadźmy rzuty

$$X_1 \times X_2 \ni (x_1, x_2) \mapsto \pi_1(x_1, x_2) := x_1 \in X_1,$$

$$X_1 \times X_2 \ni (x_1, x_2) \mapsto \pi_2(x_1, x_2) := x_2 \in X_2$$

i "flip"

$$X_1 \times X_2 \ni (x_1, x_2) \mapsto \tau(x_1, x_2) := (x_2, x_1) \in X_2 \times X_1.$$

Definiujemy dziedzinę relacji $\mathcal{D}(R) := \pi_1 R$, jej obraz $\mathrm{Ran}(R) = \pi_2 R$ relację odwrotną $R^{-1} := \tau R \subset X_2 \times X_1$. Jeśli $S \subset X_2 \times X_3$, to definiujemy złożenie relacji $S \circ R \subset X_1 \times X_3$, $S \circ R := \{(x_1, x_3) \in X_1 \times X_3 \ : \ \exists_{x_2 \in X_2} \ (x_1, x_2) \in R, \ (x_2, x_3) \in S\}$.

Mówimy, że relacja R jest prawostronnie jednoznaczna, gdy dla każdego $x_1 \in X_1$ $\pi_2(R \cap \{x_2\} \times X_2)$ jest jednoelementowy. Mówimy, że R ma maksymalną dziedzinę, gdy $\mathcal{D}(R) = X_1$.

Stwierdzenie 1.1 *a) Jeśli R, S są prawostronnie jednoznaczne, to $S \circ R$ też.*
b) Jeśli R, S mają maksymalną dziedzinę, to $S \circ R$ też.

Pseudoodwzorowaniem (pseudofunkcją, pseudooperatorem...) nazywamy relację prawostronnie jednoznaczną. Zamiast pisać $(x_1, x_2) \in R$, piszemy wtedy $x_2 = R(x_1)$. Złożenie pseudodwzorowań jest pseudoodwzorowaniem.

Mówimy, że pseudoodwzorowanie jest injektywne, gdy jest lewostronnie jednoznaczne. Relacja odwrotna do pseudoodwzorowania jest pseudoodwzorowniem, wtedy i tylko wtedy, gdy jest ono injektywne.

Odwzorowaniem (funkcją, operatorem...) nazywamy pseudoodwzorowanie z maksymalną dziedziną. Złożenie odwzorowań jest odwzorowań.

Mówimy, że odwzorowanie jest bijektywne, gdy jest lewostronnie jednoznaczne i $\mathrm{Ran} R = X_2$. Relacja odwrotna do odwzorowania jest odwzorowaniem, gdy jest ono bijektywne.

Stwierdzenie 1.2 *Niech $R \subset X \times Y$ i $S \subset Y \times X$ będą funkcjami takimi, że $R \circ S = \mathbf{1}_Y$ i $S \circ R = \mathbf{1}_X$. Wtedy S i R są bijekcjami i $S = R^{-1}$.*

2 Przestrzenie wektorowe

Niech X będzie przestrzenią wektorową a $V \subset X$ jej podprzestrzenią. Definiujemy

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in V.$$

Wtedy $\sim$ jest relacją równoważności w X zgodną z dodawaniem wektorów i mnożeniem wektorów przez liczby. Zbiór $X/\sim$ oznaczamy przez X/V, jest to w naturalny sposób przestrzeń wektorowa.

Jeśli X jest przestrzenią wektorową a X_1, X_2 jej podprzestrzeniami, to piszemy $X = X_1 \oplus X_2$, gdy $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ i $X = X_1 + X_2$. Mówimy, że X jest wewnętrzną sumą prostą X_1 i X_2.

Oznaczmy przez $L(X, Y)$ operatory liniowe z X w Y i $L(X) := L(X, X)$. O operatorze liniowym $P \in L(X)$ mówimy, że jest rzutem, gdy $P^2 = P$. Jeśli P jest rzutem, to $1 - P$ też.

Jeśli $X = X_1 \oplus X_2$, to istnieje dokładnie jeden rzut P taki, że $\mathrm{Ran}P = X_1$ i $\mathrm{Ker}P = X_2$. I na odwrót, jeśli P jest rzutem, to $X = \mathrm{Ran}P \oplus \mathrm{Ker}P$.

Jeśli X_1 i X_2 są przestrzeniami wektorowymi, to $X_1 \times X_2$ ma naturalną strukturę wektorową. Mamy wtedy

$$X_1 \times X_2 = X_1 \times \{0\} \oplus \{0\} \times X_2$$

w sensie wewnętrznej sumy prostej. Często piszemy $X_1 \oplus X_2$ zamiast $X_1 \times X_2$ i nazywamy to zewnętrzną sumą prostą.

Niech $\tilde{L}(X, Y)$ oznacza zbiór pseudooperatorów liniowych z X w Y. Jeśli $A \in \tilde{L}(X, Y)$, to wprowadzamy oznaczenie dla wykresu pseudooperatora A:

$$\Gamma(A) := \{(x, y) \in X \times Y \ : \ y = Ax, \ x \in \mathcal{D}(A)\}.$$

(W sensie standartowej definicji teoriomnogościowej $A = \Gamma(A)$. Różnica leży jedynie w funkcji syntaktycznej).

Stwierdzenie 2.1 *1) Podprzestrzeń liniowa $M \subset X \times Y$ jest wykresem pewnego operatora wtedy i tylko wtedy gdy $(0, y) \in M$ implikuje $y = 0$.*
2) A jest injektywny wtedy i tylko wtedy gdy $(x, 0) \in \Gamma(A)$ implikuje $y = 0$.

3 Przestrzenie topologiczne

Niech X będzie zbiorem. Przez 2^X oznaczamy rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru X.

$(X, \mathcal{T})$ nazywamy przestrzenią topologiczną, gdy $\mathcal{T} \subset 2^X$ spełnia następujące warunki:
$\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
$U_i, \ i \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_\alpha U_\alpha \in \mathcal{T}$;.
$U_i \in \mathcal{T}, \ i = 1, \ldots, n \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_\alpha \in \mathcal{T}$.

Jeśli $\mathcal{B} \subset 2^X$, to topologią generowaną przez $\mathcal{B}$ nazywamy najmniejszą rodzinę $\mathcal{T}$ zawierającą $\mathcal{B}$ spełniającą powyższe warunki. Łatwo zauważyć, że jest to rodzina składająca się z sum teoriomnogościowych skończonych przecięć elementów z $\mathcal{B}$, oraz $\emptyset$ i X.

Elementy $\mathcal{T}$ nazywamy zbiorami otwartymi.

Definicja 3.1 *Wnętrze zbioru B:*

$$\begin{aligned}\mathrm{Int}(B) &= \textit{największy zbiór otwarty zawarty w } B\\ &= \bigcup_{U\in\mathcal{T},\ U\subset B} U.\end{aligned}$$

Oczywiście

$$\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(B)) = \mathrm{Int}(B).$$

Mówimy, że $B \in X$ jest domknięty, gdy $X\backslash B$ jest otwaty. Rodzinę podzbiorów domkniętych oznaczmy przez $\mathcal{C}$.

Twierdzenie 3.2 *Spełnione są własności:*
$\emptyset, X \in \mathcal{C}$;
$B_i \in \mathcal{C},\ i \in I, \Rightarrow \bigcap_\alpha B_i \in \mathcal{C}$;
$B_i \in \mathcal{C},\ i = 1,\dots,n \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n B_i \in \mathcal{C}$.

Definicja 3.3 *Domknięcie zbioru B*

$$\begin{aligned}\bar{B} : &= \textit{najmniejszy zbiór domknięty zawierający } B\\ &= \textstyle\bigcap_{A\ \textit{domknięty},\ A\supset B} A.\end{aligned}$$

Oczywiście,

$$\bar{\bar{B}} = \bar{B}.$$

$$\mathrm{Int}B = X\backslash(\overline{X\backslash B}), \qquad \bar{B} = X\backslash(\mathrm{Int}(X\backslash B)).$$

Definicja 3.4 *B jest gęsty w X, gdy $\bar{B} = X$*

Definicja 3.5 *Niech X, Y będą przestrzeniami topologicznymi, $F : X \to Y$.*
1) Niech $x_0 \in X$. Mówimy, że F jest ciągła w x_0, gdy z tego, że W jest otwarty w Y i $x_0 \in F^{-1}(W)$ wynika, że istnieje zbiór otwarty U w X taki, że $x_0 \in U$ i $U \subset F^{-1}(W)$.
2) Mówimy, że F jest ciągła gdy, dla każdego W otwartego w Y, $F^{-1}(W)$ jest otwarty.

Stwierdzenie 3.6 *F jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła w każdym punkcie.*

Definicja 3.7 *Mówimy, że ciąg (x_n) zbiega do granicy x, czyli $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, gdy dla każdego U otwartego w X takiego, że $x \in U$, istnieje N takie, że dla $n > N$ $x_n \in U$.*

Stwierdzenie 3.8 *Niech $B \subset X$. Z tego, że istnieje ciąg (x_n) zawarty w B taki, że $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ wynika, że $x \in \bar{B}$.*

4 Przestrzenie metryczne

Definicja 4.1 *Zbiór X z funkcją $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbf{R}.$ nazywamy przestrzenią metryczną, gdy*

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}(x,y) \geq 0 \\ &\mathrm{d}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ &\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x) \\ &\mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z) \geq \mathrm{d}(x,z). \end{aligned}$$

Definicja 4.2 *Kulą otwartą o środku w $x \in X$ i promieniu $r \in \mathbf{R}_+$ nazywamy zbiór*

$$K(x,r) := \{y \in X \ : \ \mathrm{d}(x,y) < r\}$$

Topologię w X generowaną przez rodzinę kul otwartych nazywamy topologią zadaną przez metrykę.

Mówimy, że metryki d_1 i d_2 są równoważne, gdy istnieją $0 < C_1 \leq C_2$ takie, że

$$C_1 \mathrm{d}_1(x,y) \leq \mathrm{d}_2(x,y) \leq C_2 \mathrm{d}_1(x,y), \quad x, y \in X.$$

Metryki równoważne generują równoważne topologie.

Stwierdzenie 4.3 *$U \subset X$ jest otwarty gdy*

$$\forall_{x \in U} \exists_{r>0} K(x,r) \subset U.$$

Stwierdzenie 4.4 *$A \subset X$ jest domknięty gdy*

$$\forall_{x \in X} \left(\forall_{r>0} \ K(x,r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A \right).$$

Stwierdzenie 4.5 *Ciąg (x_n) zbiega do granicy x, gdy*

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{d}(x_n, x) = 0.$$

Stwierdzenie 4.6 *Każdy ciąg ma najwyżej jedną granicę.*

Stwierdzenie 4.7 *Niech $B \subset X$. Istnieje ciąg (x_n) zawarty w B taki, że $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ wtedy i tylko wtedy gdy $x \in \bar{B}$.*

Stwierdzenie 4.8 *Niech $F : X \to Y$ i $x_0 \in X$. F jest ciągła w x_0, gdy dla każdego ciągu $x_n \to x$ zawartego w X mamy*

$$F(x_n) \to F(x).$$

Definicja 4.9 *$F : X \to Y$ jest jednostajnie ciągła, gdy*

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x_1,x_2\in X}\left(\mathrm{d}_X(x_1,x_2)<\delta \Rightarrow \mathrm{d}_Y(F(x_1),F(x_2))<\epsilon\right).$$

Każda funkcja jednostajnie ciągła jest ciągła.

Definicja 4.10 *F jest izometrią, gdy*

$$\mathrm{d}_Y(F(x_1),F(x_2)) = \mathrm{d}_X(x_1,x_2).$$

Każda izometria jest jednostajnie ciągła.

Twierdzenie 4.11 *Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi, $F : X \to Y$ niech będzie jednostajnie ciągła, X_0 gęsty w X, FX gęsty w Y. Wtedy FX_0 jest gęsty w Y.*

Dowód. Niech $y \in Y$ Istnieje $y_1 \in FY$ taki, że $d(y,y_1) < \frac{\epsilon}{2}$. Istnieje $\delta >)$ taka, że $d(x_1,x_2) < \delta$ implikuje $d(Fx_1,Fx_2) < \frac{\epsilon}{2}$. Niech $x_1 \in X$ taki, że $y_1 = Fx_1$. Istnieje $x_0 \in X_0$ taki, że $d(x_1,x_0) < \delta$. Mamy zatem

$$d(y,F(x_0)) \le d(y,y_1) + d(F(x_1),F(x_0)) < \epsilon.$$

□

5 Topologie w iloczynach kartezjańskich

Niech X_i, $i \in I$ będzie rodziną przestrzeni topologicznych. Oto przykłady topologii w $\Pi_{i\in I}X_i$.

Przykład 5.1 Topologia Tichonowa. *Topologia generowana przez rodzinę zbiorów postaci $\Pi_{i\in I}U_i$, gdzie wszystkie U_i są otwarte i wszystkie prócz skończonej ilości zbiory U_i są równe X_i.*

Przykład 5.2 *Topologia generowana przez rodzinę zbiorów postaci $\Pi_{i\in I}U_i$, gdzie wszystkie U_i są otwarte*

Jeśli I jest zbiorem skończonym, to wszystkie te topologie są metryczne. Można je zadać np przez metrykę

$$D_\infty((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \max(d_1(x_1,y_1),\ldots d_n(x_n,y_n))$$

lub

$$D_1((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \sum(d_1(x_1,y_1),\ldots d_n(x_n,y_n)).$$

Jeśli I jest zbiorem przeliczalnym, to topologię Tichonowa też można zadać przez metrykę.

Jeśli I jest nieprzeliczalny i zbiory X_i są co najmniej dwupunktowe, to łatwo podać przykłady zbioru B, którego domknięcie nie jest równe zbiorowi granic ciągów o elementach z B. Zatem dla nieprzeliczalnego I topologia Tichonowa nie jest zadana przez metrykę.

6 Zupełność

Niech X będzie przestrzenią metryczną.

Definicja 6.1 *Mówimy, że ciąg (x_n) spełnia warunek Cauchy'ego, gdy*

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_N\forall_{n,m>N}\mathrm{d}(x_n, x_m) < \epsilon,$$

czyli

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathrm{d}(x_n, x_m) = 0.$$

Dwie równoważne metryki mają te same ciągi Cauchy'ego

Twierdzenie 6.2 *1) Każdy zbieżny ciąg spełnia warunek Cauchy'ego.*
2) Każdy ciąg Cauchy'ego jest ograniczony.
3) Jeśli podciąg $(x_{n_i})_{i\in\mathbf{N}}$ ciągu Cauchy'ego (x_n) jest zbieżny do x, to sam ciąg (x_n) jest zbieżny do x.
4) Każda funkcja jednostajnie ciągła przekształca ciąg Cauchy'ego w ciąg Cauchy'ego.

Definicja 6.3 *Zbiór X jest zupełny, gdy każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny.*

Jeśli metryki d_1 i d_2 są równoważne, to zbiór zupełny względem jednej metryki jest zupełny względem drugiej.

Twierdzenie 6.4 *Niech X będzie przestrzenią metryczną, X_0 jej gęstą podprzestrzenią, Y przestrzenią metryczną zupełną i $F_0 : X_0 \to Y$ funkcją jednostajnie ciągłą. Wtedy istnieje jedna i tylko jedna funkcja ciągła $F : X \to Y$ taka, że $F\Big|_{X_0} = F_0$. Funkcja F jest przy tym jednostajnie ciągła. Jeśli F jest izometrią, to $\tilde{F}$ też.*

Dowód. Jeśli $x \in X$, to istnieje ciąg $x_n \in X_0$ taki, że $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Ponieważ (x_n) jest ciągiem Cauchy'ego i F_0 jest jednostajnie ciągła, więc $F_0(x_n)$ jest też ciągiem Cauchy'ego. Z zupełności Y wynika istnienie $y = \lim_{n\to\infty} F_0(x_n)$. Kładziemy $F(x) := y$ i sprawdzamy poprawność definicji. □

7 Przestrzenie Banacha

Definicja 7.1 *Niech X będzie przestrzenią liniową nad $\mathbf{C}$. Funkcję $X \ni x \mapsto \|x\| \in \mathbf{R}$ nazywamy półnormą, gdy*

$$1)\ \|x\| \geq 0$$

$$2)\ \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|,$$

$$3)\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Jeśli dodatkowo

$$4)\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

to jest to norma.

Jeśli X jest przestrzenią z półnormą, to

$$x \sim y \Leftrightarrow \|x - y\| = 0$$

jest relacją równoważności. Dodawanie wektorów, mnożenie przez liczby jest zgodne tą relacją. Zatem $X/\sim$ jest przestrzenią wektorową a

$$\|[x]\| := \|x\|$$

jest normą na $X/\sim$.

Jeśli $\|\cdot\|$ jest normą, to

$$\mathrm{d}(x, y) := \|x - y\|$$

definiuje odległość.

Niech $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ będą dwiema normami na X. Normy te są równoważne, gdy istnieją $C_1, C_2 > 0$ takie, że

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1.$$

Równoważność norm jest relacją równoważności. Jeśli $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ są równoważne, to generują one równoważne metryki.

Twierdzenie 7.2 *Wszystkie normy na skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej są równoważne. Zadają one topologię identyczną z topologią produktową w* $\mathbf{R}^m$*, gdzie* m *wymiar rzeczywisty* X*.*

Dowód. Przez wybór bazy $(e_1, \ldots, e_n)$ można utożsamić X z $\mathbf{C}^n$. Niech $\|\cdot\|$ będzie normą. Będziemy porównywać naszą normę z normą $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_1|$. Będziemy korzystać z faktu, że norma $\|\cdot\|_1$ zadaje zwykła topologię w $\mathbf{R}^{2n}$ (topologię iloczynu kartezjańskiego). Zbiór $S := \{x \in X \ : \ \|x\|_1 = 1\}$ jest domknięty (bo $x \mapsto \|x\|_1$ jest funkcją ciągłą) i ograniczony. Zatem jest zwarty.

Dla $x = \sum_{i=1}^n x_j e_i$

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^n \|e_i x_i\| \leq C\|x\|_1.$$

Zatem $X \ni x \mapsto \|x\| \in \mathbf{R}$ jest funkcją ciągła. Więc funkcja $\|x\|$ przyjmuje na zbiorze zwartym S minimum $c > 0$. Zatem, dla $x \in X$,

$$c\|x\|_1 \leq \|x\| \leq C\|x\|_1.$$

$\square$

Definicja 7.3 *X jest przestrzenią Banacha gdy X jest unormowana i zupełna.*

Definicja 7.4 *Niech x_i, $i \in I$, będzie rodziną wektorów w przestrzeni unormowanej. Wtedy*

$$\sum_{i\in I} x_i = x \Leftrightarrow \forall_{\epsilon>0}\exists_{\text{skończony } I_0\subset I}\forall_{\text{skończony } I_1\supset I_0}\left\|\sum_{i\in I_1} x_i - x\right\| < \epsilon.$$

Mówimy wtedy, że $\sum_{i\in I} x_i$ jest zbieżna do x.

Oczywiście,

$$\left\|\sum_{i\in I} x_i\right\| \leq \sum_{i\in I}\|x_i\|.$$

Jeśli $c_n \in \mathbf{R}$ i suma $\sum_{i\in I} c_i$ jest zbieżna, to tylko przeliczalna liczba wyrazów $c_n \neq 0$.

Twierdzenie 7.5 *1) Niech X będzie przestrzenią Banacha, $x_i \in X$*

$$\sum_{i\in I}\|x_i\| < \infty.$$

Wtedy istnieje

$$\sum_{i\in I} x_i.$$

2) I na odwrót, jeśli X jest przestrzenią unormowaną taką, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < \infty$$

pociąga za sobą zbieżność

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

to X jest przestrzenią Banacha.

Dowód. 1) Ponieważ tylko przeliczalna liczba wyrazów x_n jest różna od zera, więc można niezerowe wyrazy ustawić w ciąg i założyć, że mamy do czynienia ze zwykłym szeregiem. Niech

$$y_N := \sum_{n=1}^{N} x_n.$$

Mamy dla $n \leq m$

$$\|y_n - y_m\| = \left\|\sum_{i=n+1}^{m} x_i\right\| \leq \sum_{i=n+1}^{m}\|x_i\| \to_{n,m\to\infty} 0.$$

Zatem y_N jest ciągiem Cauchy'ego i posiada granicę.

2) Niech x_n będzie ciągiem Cauchy'ego w X. Przez indukcję znajdziemy podciąg x_{n_j} ciągu x_n taki, że

$$\|x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\| < 2^{-n}.$$

Z założenia, suma

$$\sum_{j=1}^{\infty}(x_{n_{j+1}} - x_{n_j})$$

jest zbieżna. Jej $m-$ta suma częściowa jest równa $x_{n_{m+1}} - x_{n_1}$. Zatem x_{n_j} musi być zbieżny do jakiegoś $x \in X$. Ponieważ początkowy ciąg jest Cauchy'ego, też musi być zbieżny do x. □

Niech $]a,b[\ni t \mapsto v(t) \in X$. Normową pochodną $v(t)$ definiujemy jako

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t_0) := \lim_{h\to 0}\frac{v(t_0+h)-v(t_0)}{h}.$$

Dla funkcji $]a,b[\ni t \mapsto v(t) \in X$ ciągłych mozna zdefiniować całkę Riemanna.

Niech Ω będzie otwartym podzbiorem $\mathbf{C}$. Mówimy, że $\Omega \ni z \mapsto v(z) \in X$ jest funkcją analityczną, gdy dla każdego $z_0 \in \Omega$ istnieje

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}v(z_0) := \lim_{h\to 0}\frac{v(z_0+h)-v(z_0)}{h}.$$

Stwierdzenie 7.6 *$\Omega \ni z \mapsto v(z) \in X$ jest analityczna wtedy i tylko wtedy gdy wokół każdego punktu $z_0 \in \Omega$ można rozwijać ją w szereg potęgowy. Promień zbieżności tego szeregu jest równy*

$$\left(\limsup_{n\to\infty}\|v^{(n)}(z_0)\|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}.$$

8 Przykłady przestrzeni Banacha

Niech I będzie dowolnym zbiorem indeksów. Przez $v = (v^i)_{i\in I}$ oznaczamy ciągi indeksowane przez I o wartościach w $\mathbf{C}$. Definiujemy

$$\|v\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{i\in I}|v^i|^p\right)^{1/p}, \ 1 \le p < \infty \\ \sup_{i\in I}|v^i|, \ p = \infty. \end{cases}$$

Lemat 8.1 *Spełniona jest nierówność Höldera*

$$\left|\sum_{i\in I} v^i w^i\right| \le \|v\|_p\|w\|_q, \ p^{-1}+q^{-1} = 1,$$

i Minkowskiego

$$\|v+w\|_p \le \|v\|_p + \|w\|_p.$$

Definicja 8.2

$$L^p(I) := \{(v^i),\ i \in I\ :\ \|v\|_p < \infty\}$$

$$C_\infty(I) := \{(v^i),\ i \in I\ :\ \forall_{\epsilon>0} \exists_{I \supset I_0}\ \textit{skończony} \sup_{i \in I \setminus I_0} |v^i| < \epsilon.\}.$$

Twierdzenie 8.3 *$L^p(I)$ z normą $\|\cdot\|_p$ i i $C_\infty(I)$ z normą $\|\cdot\|_\infty$ są przestrzeniami Banacha.*

Dowód. Nierówność Minkowskiego pokazuje, że są to przestrzenie unormowane.

Pokażmy, że $L^p(I)$ jest zupełna. Niech $v_n = (v_n^i)$ spełnia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|_p < \infty.$$

Wtedy v_n^i jest też sumowalny i istnieje

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n^i =: v^i.$$

Kładziemy $v := (v^i)$. Z nierówności Minkowskiego mamy

$$\|v - \sum_{j=1}^{n} v_j\|_p < \sum_{j=n+1}^{\infty} \|v^j\|_p.$$

Zatem

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} v^j = v.$$

Czyli na mocy Twierdzenia 7.5, $L^p(I)$ jest przestrzenią Banacha. Żeby zobaczyć, że $C_\infty(I)$ jest zupełna, sprawdzamy, że jest domkniętą podprzestrzenią w $L^\infty(I)$. □

9 Naturalne konstrukcje w przestrzeniach Banacha

Jeśli X, Y są przestrzeniami Banacha i p jest dowolną normą w $\mathbf{R}^2$, to $X \oplus Y$ staje się przestrzenią Banacha, jeśli wprowadzimy normę

$$\|(x, y)\| = p(\|x\|, \|y\|).$$

Topologia w $X \oplus Y$ zadana przez tę normę nie zależy od p i jest równa topologii produktowej.

Niech V będzie domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Banacha X. W przestrzeni X/V wprowadzamy normę

$$\|[x]\| := \inf\{\|y\|\ :\ y \in [x]\}.$$

Twierdzenie 9.1 *X/V jest przestrzenią Banacha.*

Dowód. W dowodzie nierówności trójkąta korzystamy z własności

$$\inf(a+b) \leq \inf a + \inf b.$$

W dowodzie

$$\|[x]\| = 0 \Rightarrow [x] = [0],$$

korzystamy z domkniętości V.

Aby dowieść zupełności załóżmy, że $y_n \in X/V$ spełnia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| < \infty.$$

Istnieje wtedy ciąg $x_n \in X$ taki, że $y_n = [x_n]$ i

$$\|x_n\| \leq \|y_n\| + 2^{-n}.$$

Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty.$$

Ponieważ X jest zupełna, więc $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ zbiega do jakiegoś $x \in X$. Ale

$$\|[x - \sum_{n=1}^{N} x_n]\| \leq \|x - \sum_{n=1}^{N} x_n\| \underset{N\to\infty}{\to} 0,$$

zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

jest zbieżna do $[x]$. □

10 Operatory ograniczone w przestrzeni Banacha

Niech X i Y będą przestrzeni Banacha. Operator liniowy $A : X \to Y$ nazywamy ograniczonym, gdy istnieje liczba C taka, że

$$\|Ax\| \leq C\|x\|, \quad x \in X. \tag{10.1}$$

Definiujemy wtedy $\|A\|$ jako najmniejszą z możliwych liczb C występujących w (10.1), czyli

$$\|A\| := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| < \infty.$$

Zbiór takich operatorów nazywamy $B(X,Y)$. Piszemy też $B(X) := B(X,X)$.

Twierdzenie 10.1 *Następujace własności są równoważne:*
1. A jest ograniczony
2. A jest jednostajnie ciągły
3. A jest ciągły
4. A jest ciągły w jednym punkcie.

Dowód. $0 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$ jest oczywiste. Oczywiście $4 \Leftrightarrow A$ jest ciągły w 0. Pokażmy, że to pociąga za sobą ograniczoność.

Niech A nie będzie ograniczony. Wtedy istnieje ciąg x_n taki, że $\|x_n\| = 1$ i

$$\|Ax_n\| \geq n.$$

Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \left\| A\frac{x_n}{\sqrt{n}} \right\| = \infty.$$

Czyli A nie jest ciągły w zerze. □

Przykład 10.2 *Operator liniowy z $\mathbf{C}^m$ w $\mathbf{C}^n$ można zadać przez macierz $[a_{ij}]$.*
1) Jeśli $\mathbf{C}^m$ wyposażymy w normę $\|\cdot\|_1$ a $\mathbf{C}^n$ w normę $\|\cdot\|_\infty$, to $\|A\| = \max\{|a_{ij}|\}$.
2) Jeśli $\mathbf{C}^m$ wyposażymy w normę $\|\cdot\|_\infty$ a $\mathbf{C}^n$ w normę $\|\cdot\|_1$, to $\|A\| = \sum_{i,j} |a_{ij}|$.
3) Jeśli $\mathbf{C}^m$ wyposażymy w normę $\|\cdot\|_1$ a $\mathbf{C}^n$ w normę $\|\cdot\|_1$, to $\|A\| = \sum_i \max_j\{|a_{ij}|\}$.
4) Jeśli $\mathbf{C}^m$ wyposażymy w normę $\|\cdot\|_\infty$ a $\mathbf{C}^n$ w normę $\|\cdot\|_\infty$, to $\|A\| = \max_i\{\sum_j |a_{ij}|\}$.

Stwierdzenie 10.3 *Jeśli X jest skończenie wymiarowa, to A jest ograniczony.*

Dowód. Oczywiście, $\mathrm{Ran}A$ jest skończenie wymiarowy. Wystarczy więc założyć, że $A : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^m$. Ponieważ wszystkie normy na przestrzeni skończenie wymiarowej są równoważne, więc wystarczy wyposażyć dziedzinę np. w normę $\|\cdot\|_1$ i przeciwdziedzinę w normę $\|\cdot\|_\infty$ i skorzystać z poprzedniego przykładu. □

Twierdzenie 10.4 *$B(X, Y)$ jest przestrzenią Banacha. Poza tym, jeśli $A \in B(X, Y)$ i $B \in B(Y, Z)$, to*

$$\|BA\| \leq \|B\|\|A\|.$$

Dowód. Oczywiście, $B(X, Y)$ jest przestrzenią unormowaną. Pokażmy, że jest zupełna. Niech $A_n \in B(X, Y)$ będzie ciągiem Cauchy'ego. Wtedy A_nx jest ciągiem Cauchy'ego w Y Zdefiniujmy więc

$$Ax := \lim_{n\to\infty} A_nx.$$

Ustalmy n. Oczywiście,

$$(A - A_n)x = \lim_{m\to\infty}(A_m - A_n)x.$$

Zatem
$$\|(A - A_n)x\|$$
$$= \lim_{m\to\infty} \|(A_m - A_n)x\| \leq \|x\| \lim_{m\to\infty} \|(A_m - A_n)\|.$$
Stąd,
$$\|A - A_n\| \leq \lim_{m\to\infty} \|A_m - A_n\|.$$
Zatem
$$\lim_{n\to\infty} \|A - A_n\| = 0.$$
Czyli ciąg A_n jest zbieżny normowo do A. □

Stwierdzenie 10.5 *Niech $B \in B(X,Y)$ i $\mathrm{Ran} B$ niech będzie gęsty w Y i $\mathcal{D}$ gęsty w X. Wtedy $B\mathcal{D}$ jest gęsty w X.*

Dowód. Niech $y \in Y$, $y_n \in \mathrm{Ran} B$, $y_n \to y$. Istnieją $x_n \in X$ takie, że $Bx_n = y_n$. Istnieją $x_{n,m} \in \mathcal{D}$ takie że $x_{nm} \leq_{m\to\infty} x_n$. □

11 Spektrum operatorów ograniczonych

Definicja 11.1 *Niech $A \in B(X,Y)$. Mówimy, że A jest odwracalny, gdy A jest bijekcją z X na Y i operator odwrotny A^{-1} jest ograniczony.*

Stwierdzenie 11.2 *Niech A, B będą odwracalne. Wtedy zachodzi wzór*
$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}.$$

Twierdzenie 11.3 *Niech A będzie odwracalny i*
$$\|BA^{-1}\| < 1.$$
Wtedy $A + B$ jest też odwracalny i
$$(A+B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A^{-1}(BA^{-1})^j.$$

Dowód. Oczywiście, szereg jest zbieżny bezwzględnie w normie. Aby sprawdzić, że jest on równy $(A+B)^{-1}$ mnożymy $(A+B)$ raz z jednej a raz z drugiej strony przez ten szereg i redukujemy wyrazy dostając 1. □

Definicja 11.4 *Niech $A \in B(X)$. $\lambda \in \mathbf{C}$ należy do $\rho(A)$ (do zbioru rezolwentowego operatora A) gdy $\lambda - A$ jest odwracalny. Spektrum operatora A definiujemy jako*
$$\sigma(A) := \mathbf{C} \backslash \rho(A).$$

Twierdzenie 11.5 *1) Jeśli $\lambda, \mu \in \rho(A)$, to*

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}.$$

2) Jeśli $\|(\lambda - A)^{-1}\| = c$, to $\{z : \ |z - \lambda| < c^{-1}\} \subset \rho(A)$. Zatem $\sigma(A)$ jest zbiorem domkniętym.
3) $\|(z - A)^{-1}\| \geq (\mathrm{dist}(z, \sigma(A)))^{-1}$.
4) $\|(z - A)^{-1}\| \leq |z|^{-1}(|z| - \|A\|)^{-1}, \quad |z| > \|A\|$.
5) $(z - A)^{-1}$ jest funkcją analityczną na $\rho(A)$

Definicja 11.6 *$\lambda \in \mathbf{C}$ jest wartością własną A, gdy istnieje $x \in X$taki, że $Ax = \lambda x$. Zbiór wartości własnych operatora A oznaczamy $\sigma^{\mathrm{pp}}(A)$ i nazywamy spektrum czysto punktowym.*

Oczywiście,

$$\overline{\sigma^{\mathrm{pp}}(A)} \subset \sigma(A).$$

Definicja 11.7 *Promieniem spektralnym operatora A nazywamy*

$$r(A) := \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Lemat 11.8 *Niech ciąg liczb rzeczywistych (c_n) spełnia*

$$c_n + c_m \geq c_{n+m}.$$

Wtedy

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c_n}{n} = \inf \frac{c_n}{n}.$$

Dowód. Ustalmy m. Niech $n = mq + r$, $r < m$. Mamy

$$c_n \leq q c_m + c_r.$$

Czyli

$$\frac{c_n}{n} \leq \frac{q c_m}{n} + \frac{c_r}{n}.$$

Zatem

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{c_n}{n} \leq \frac{c_m}{m}.$$

Czyli,

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{c_n}{n} \leq \inf \frac{c_m}{m}.$$

□

Twierdzenie 11.9 *Niech A będzie operatorem ograniczonym. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

istnieje i jest równy $r(A)$. Poza tym, $r(A) \leq \|A\|$.

Dowód. Niech

$$c_n := \log \|A^n\|.$$

Sprawdzamy, że

$$c_n + c_m \geq c_{n+m}$$

Wtedy istnieje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{n}.$$

Przynajmniej dla $|z| > \|A\|$ mamy

$$(z-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n z^{-1-n}.$$

Ale z kryterium d'Alemberta, promień zbieżności tego szeregu jest równy $\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$.
□

Wniosek 11.10 *Jeśli $A \in B(X)$, to $\sigma(A)$ jest niepuste.*

Dowód. $(z-A)^{-1}$ jest funkcją analityczną dążącą do zera w nieskończoności. Zatem nie może być analityczna wszędzie, chyba że jest równa zero, co jest niemożliwe. □

Definicja 11.11 *Mówimy, że operator N jest nilpotentny stopnia n, gdy $N^n = 0$.*
Mówimy, że operator N jest quasinilpotentny, gdy $\sigma(N) = \{0\}$.

Stwierdzenie 11.12 *1) Operator nilpotentny jest quasinilpotentny.*
2) N jest quasinilpotentny, $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|N^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$.

12 Rzuty

Rzut P jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Ran}P$ i $\mathrm{Ker}P$ są domkniętymi podprzestrzeniami.

Twierdzenie 12.1 *Niech $P, Q \in B(X)$ będą rzutami takimi, że $r((P-Q)^2) < 1$. Wtedy* $\dim P = \dim Q$.

Dowód. Zdefiniujmy

$$U' := QP + (1-Q)(1-P), \quad V' := PQ + (1-P)(1-Q).$$

Mamy

$$QU' = U'P, \qquad PV' = V'Q.$$

Mamy też

$$V'U' = U'V' = 1 - R,$$

$$R = (P-Q)^2 = P + Q - PQ - QP.$$

Sprawdzamy, że P i Q komutują z R (licząc w szczególności $PR = P - PQP$, itd).

Niech $C := r(R) < 1$. Wtedy na $\sigma(1-R) \subset 1 + K(C)$ jest jednoznacznie zdefiniowana funkcja $(\cdot)^{\frac{1}{2}}$. Czyli można wprowadzić funkcję

$$(1-R)^{-1/2}$$

(która też może być zdefiniowana przez szereg). Kładziemy

$$U := U'(1-R)^{-1/2} = (1-R)^{-1/2}U', \qquad V := V'(1-R)^{-1/2} = (1-R)^{-1/2}V'.$$

Mamy wtedy $UV = VU = 1$, czyli $V = U^{-1}$ i

$$Q = UPU^{-1}.$$

Stwierdzenie 12.2 *Niech $t \mapsto P(t)$ będzie funkcją różniczkowalną o wartościach w rzutach. Wtedy*

$$P\dot{P}P = 0.$$

Dowód.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P^2 = \dot{P}P + P\dot{P}.$$

Zatem $P\dot{P}P = 2P\dot{P}P$. □

13 Metoda Feshbacha

Niech $P^0 \in B(X)$ będzie rzutem a $P^{\bar{0}}$ rzutem komplementarnym. Niech $X^0 := \mathrm{Ran} P^0$ a $X^{\bar{0}} := \mathrm{Ran} P^{\bar{0}}$.

Jeśli $H \in B(X)$, to pełna informacja o H jest zawarta w macierzy $H^{ij} := {}_{X_i}\Big| P_i H P_j \Big|_{X_j}$, gdzie $i, j \in \{0, \bar{0}\}$. Operator H można zapisać jako

$$H = \begin{bmatrix} H^{00} & H^{0\bar{0}} \\ H^{\bar{0}0} & H^{\bar{0}\bar{0}} \end{bmatrix}. \tag{13.2}$$

Jeśli podprzestrzenie X^0 i $X^{\bar{0}}$ są niezmiennicze dla operatora H, czyli $H^{0\bar{0}} = H^{\bar{0}0} = 0$, to H jest odwracalny wtedy i tylko wtedy gdy H^{00} i $H^{\bar{0}\bar{0}}$ są odwracalne i $(H^{-1})^{ii} = (H^{ii})^{-1}$. Zatem

$$\sigma(H) = \sigma(H^{00}) \cup \sigma(H^{\bar{0}\bar{0}}).$$

Metoda Feshbacha pozwala znaleźć $\sigma(H)$ w ogólnym przypadku.

Stwierdzenie 13.1 *Jeśli $H^{\bar{0}\bar{0}}$ jest odwracalny, oznaczmy*

$$G_0 = H^{00} - H^{0\bar{0}}(H^{\bar{0}\bar{0}})^{-1}H^{\bar{0}0}.$$

Wtedy H jest odwracalny gdy G_0 jest odwracalny i

$$\begin{aligned} H^{-1} &= \begin{bmatrix} G_0^{-1} & -G_0^{-1}H^{0\bar{0}}(H^{\bar{0}\bar{0}})^{-1} \\ -(H^{\bar{0}\bar{0}})^{-1}H^{\bar{0}0}G_0^{-1} & (H^{\bar{0}\bar{0}})^{-1} + (H^{\bar{0}\bar{0}})^{-1}H^{\bar{0}0}G_0^{-1}H^{0\bar{0}}(H^{\bar{0}\bar{0}})^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \left(\mathbf{1}^{00} - (H^{\bar{0}\bar{0}})^{-1}H^{\bar{0}0}\right) G_0^{-1} \left(\mathbf{1}^{00} - H^{0\bar{0}}(H^{\bar{0}\bar{0}})^{-1}\right) \\ &\quad +(H^{\bar{0}\bar{0}})^{-1}. \end{aligned}$$

Stosując powyższy wzór do $z - H$ dostaniemy:

Stwierdzenie 13.2 *Niech $z \notin \sigma(H^{\bar{0}\bar{0}})$. Zdefiniujmy tzw energię własną*

$$W_0(z) := H^{0\bar{0}}(z\mathbf{1}^{\bar{0}\bar{0}} - H^{\bar{0}\bar{0}})^{-1}H^{\bar{0}0}.$$

i tzw funkcję rezonansową

$$G_0(z) = z\mathbf{1}^{00} - H^{00} - W_0(z).$$

Wtedy $z \notin \sigma(H)$ wtedy i tylko wtedy gdy $0 \notin \sigma(G_0(z))$. Poza tym

$$\begin{aligned} (z - H)^{-1} &= \left(\mathbf{1}^{00} + (z\mathbf{1}^{\bar{0}\bar{0}} - H^{\bar{0}\bar{0}})^{-1}H^{\bar{0}0}\right) G_0^{-1}(z) \left(\mathbf{1}^{00} + H^{0\bar{0}}(z\mathbf{1}^{\bar{0}\bar{0}} - H^{\bar{0}\bar{0}})^{-1}\right) \\ &\quad +(z\mathbf{1}^{\bar{0}\bar{0}} - H^{\bar{0}\bar{0}})^{-1}. \end{aligned} \tag{13.3}$$

14 Rachunek funkcyjny operatorów

Niech $K \subset \mathbf{C}$ będzie zwarty. Wtedy przez $\mathcal{A}(K)$ będziemy oznaczali zbiór funkcji analitycznych na otoczeniu K. Zbiór ten tworzy algebrę przemienną.

Definicja 14.1 *Niech $f \in \mathcal{A}(\sigma(A))$. Niech γ będzie konturem leżącym w dziedzinie f okrążającym $\sigma(A)$ przeciwnie do ruchu wskazówek. Wtedy definiujemy*

$$f(A) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (z-A)^{-1} f(z)\mathrm{d}z$$

Oczywiście, definicja nie zależy od wyboru konturu.

Twierdzenie 14.2 *Niech $A \in B(X)$. Wtedy*

1) $f(z) = 1 \Rightarrow f(A) = 1$,
2) $f(z) = z \Rightarrow f(A) = A$,
3) $f(z) = (\lambda - z)^{-1},\ \lambda \in \rho(A), \Rightarrow f(A) = (\lambda - A)^{-1}$,
4) $fg(A) = f(A)g(A)$,
5) $(\lambda f)(A) = \lambda f(A)$,
6) $A\psi = \lambda\psi \Rightarrow f(A)\psi = f(\lambda)\psi$,
7) $B \in B(\mathcal{H}),\ [B, A] = 0 \Rightarrow [B, f(A)] = 0$,
8) $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$,
9) $g \in \mathcal{A}(f(\sigma(A)) \Rightarrow g \circ f(A) = g(f(A))$,
10) $\|f(A)\| \le C_{\gamma,A} \sup_{z\in\gamma} |f(z)|$.

Dowód. Ze wzoru

$$(z-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1}A^n, \quad |z| > \|A\|,$$

wynika 1), 2). Udowodnijmy 4) Wybierzmy kontur γ_2 naokoło konturu γ_1.

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_1} f_1(z_1)(z_1 - A)^{-1}\mathrm{d}z_1 \int_{\gamma_2} f_2(z_2)(z_2 - A)^{-1}\mathrm{d}z_2\\
&= \int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} f_1(z_1)f_2(z_2)\left((z_1 - A)^{-1} - (z_2 - A)^{-1}\right)(z_2 - z_1)^{-1}\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\\
&= \int_{\gamma_1} f_1(z_1)(z_1 - A)^{-1}\mathrm{d}z_1 \int_{\gamma_2} (z_2 - z_1)^{-1} f_2(z_2)\mathrm{d}z_2\\
&+ \int_{\gamma_2} f_2(z_2)(z_2 - A)^{-1}\mathrm{d}z_2 \int_{\gamma_1} (z_1 - z_2)^{-1} f_1(z_1)\mathrm{d}z_1.
\end{aligned}$$

Ale

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_1} (z_1 - z_2)^{-1} f_1(z_1)\mathrm{d}z_1 = 0,\\
&\int_{\gamma_2} (z_2 - z_1)^{-1} f_2(z_2)\mathrm{d}z_2 = 2\pi i f(z_1).
\end{aligned}$$

Pokażemy teraz 8). Niech $\mu \in \rho(f(A))$. Jeśli μ nie należy do obrazu funkcji f, to tym bardziej nie należy do $f(\sigma(A))$. Załóżmy więc, że $\mu = f(\lambda)$. Wtedy funkcja

$$z \mapsto g(z) := (f(z) - f(\lambda))(z - \lambda)^{-1}$$

jest analityczna na dziedzinie f. Zatem możemy zdefiniować $g(A) \in B(X)$. Wiemy, że $(f(A) - f(\lambda))^{-1}$ jest ograniczony. Zatem $g(A)(f(A) - f(\lambda))^{-1}$ jest też ograniczony. Sprawdzamy, że

$$(\lambda - A)g(A)(f(A) - f(\lambda))^{-1} = (f(A) - f(\lambda))(f(A) - f(\lambda))^{-1} = \mathbf{1}.$$

Zatem $g(A)(f(A) - f(\lambda))^{-1} = (z - A)^{-1}$ i $\lambda \in \rho(A)$. Czyli $\mu \notin f(\sigma(A))$. Zatem,

$$\sigma(f(A)) \supset f(\sigma(A)).$$

Jeśli $\mu \notin f(\sigma(f(A))$, to funkcja $z \mapsto f(z) - \mu \neq 0$ na $\sigma(A)$. Zatem $(z \mapsto (f(z) - \mu)^{-1}$ jest analityczna na otoczeniu $\sigma(A)$. Czyli $(f(A) - \mu)^{-1} \in B(X)$ i dlatego $\mu \in \rho(f(A))$. Zatem

$$\sigma(f(A)) \subset f(\sigma(A)).$$

Udowodnimy teraz 9). Zauważmy, że jeśli $w \notin f(\sigma(A))$, to funkcja $z \mapsto (w - f(z))^{-1}$ jest analityczna na otoczeniu $\sigma(A)$. Zatem

$$(w - f(A))^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (w - f(z))^{-1}(z - A)^{-1} \mathrm{d}z.$$

Obliczamy:

$$\begin{aligned}
&g(f(A)) \\
&= \tfrac{1}{2\pi i} \textstyle\int_{\tilde{\gamma}} g(w)(w - f(A))^{-1} \mathrm{d}w \\
&= \tfrac{1}{(2\pi i)^2} \textstyle\int_{\tilde{\gamma}} \int_\gamma g(w)(w - f(z))^{-1}(z - A)^{-1} \mathrm{d}w \mathrm{d}z \\
&= \tfrac{1}{2\pi i} \textstyle\int_\gamma (z - A)^{-1} \mathrm{d}z \int_{\tilde{\gamma}} g(w)(w - f(z))^{-1} \mathrm{d}w \\
&= \tfrac{1}{2\pi i} \textstyle\int_\gamma g(f(z))(z - A)^{-1} \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

□

Niech Ω będzie podzbiorem $B \subset \mathbf{C}$ i $\Omega' := B \backslash \Omega$. Ω będziemy nazywali izolowanym podzbiorem B, jeśli $\Omega \cap \overline{\Omega'}$ i $\bar{\Omega} \cap \overline{\Omega'} = \emptyset$ (czyli Ω jest domknięty i otwarty w topologii B).

Niech $\Omega \subset \sigma(A)$ będzie izolowanym podzbiorem $\sigma(A)$ i $\Omega' := \sigma(A) \backslash \Omega$. Definiujemy funkcję

$$\mathbf{1}_\Omega(z) := \begin{cases} 1 & z \text{ należy do otoczenia } \Omega, \\ 0 & z \text{ należy do otoczenia } \Omega'. \end{cases}$$

Oczywiście, $\mathbf{1}_\Omega \in \mathcal{A}(\sigma(A))$ i $\mathbf{1}_\Omega^2 = \mathbf{1}_\Omega$ Zatem $\mathbf{1}_\Omega(A)$ jest rzutem. Jeśli γ jest konturem okrążającym Ω, leżącym na zewnątrz Ω', wtedy

$$\mathbf{1}_\Omega(A) := \frac{1}{2\pi \subset} \int_\gamma (z - A)^{-1} \mathrm{d}z$$

Operator ten nazywamy rzutem spektralnym operatora A na Ω. Jest on przemienny z operatorem A. Zatem $Z := \mathrm{Ran}\mathbf{1}_\Omega(A)$ jest niezmienniczą podprzestrzenią dla A. Mamy

$$\sigma\left(A\Big|_Z\right) = \sigma(A) \cap \Omega.$$

Poza tym, jeśli Ω_1 i Ω_2 są dwoma izolowanymi zbiorami w $\sigma(A)$, to

$$\mathbf{1}_{\Omega_1}(A)\mathbf{1}_{\Omega_2}(A) = \mathbf{1}_{\Omega_1\cap\Omega_2}(A)$$

Załóżmy teraz, że e jest izolowanym punktem w $\sigma(A)$. Połóżmy

$$P := \mathbf{1}_e(A), \qquad N := (A-e)P.$$

Definicja 14.3 *Mówimy, że e jest półprostą wartością własną, gdy $N = 0$, czyli*

$$\mathbf{1}_{\{e\}}(A) = \mathrm{Ker}(A-e).$$

Jeśli N^n, to mówimy, że e_0 ma stopień nilpotentności n. Latwo pokazać, że stopień nilpotentności jest mniejszy od $\dim \mathbf{1}_{\{e_0\}}(A)$.

Stwierdzenie 14.4 *Operator N jest quasinilpotentny, spełnia $PN = NP = N$ i można zapisać go jako*

$$N = f(A), \quad f(z) := (z-e)\mathbf{1}_e(z). \tag{14.4}$$

Poza tym

$$(z-A)^{-1}P = (z-\lambda)^{-1}P + \sum_{j=1}^{\infty} N^j(z-\lambda)^{-j+1}.$$

i

$$(z-A)^{-1} - (z-\lambda)^{-1}P - \sum_{j=1}^{\infty} N^j(z-\lambda)^{-j+1}$$

jest analityczne w otoczeniu e. Jeśli N jest nilpotentny stopnia n, to istnieją $\delta > 0$ i C takie, że

$$\|(z-A)^{-1}\| \leq C|z-e|^{-n}, \quad z \in K(e,\delta). \tag{14.5}$$

Dowód.

$$N - f(A) = (A-e)P - \int_\gamma (z-e)(z-A)^{-1}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \subset}\int_\gamma (z-A)(z-A)^{-1}\mathrm{d}z = 0.$$

To dowodzi (14.4). Następnie zauważamy, że $f(z) = 0$ na $\sigma(A)$. Zatem $\sigma(N) = \{0\}$.

Z rozwinięcia w szereg Laurent'a dostajemy

$$(z-A)^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-\lambda)^n,$$

gdzie

$$C_n = \int_\gamma (z-A)^{-1}(z-\lambda)^{-n-1}\mathrm{d}z.$$

Oczywiście, $C_{-1} = \mathbf{1}_{\{\lambda\}}(A)$ i $C_{-2} = N^n$. Poza tym z Twierdzenia 14.2 4) mamy, że

$$C_{-1-n}C_{-1-m} = C_{-1-n-m}.$$

□

15 Przykłady operatorów

Przykład 15.1 *Niech $(a_i)_{i\in I}$ będzie ograniczonym ciągiem zespolonym. Definiujemy operator*

$$L^p(I) \ni x \mapsto Ax \in L^p(I)$$

wzorem

$$(Ax)_i = a_i x_i.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup\{|a_i| \ : \ i \in I\}, \\ \sigma^{\mathrm{pp}}(A) &= \{a_i \ : \ i \in I\}, \\ \sigma(A) &= \overline{\sigma^{\mathrm{pp}}(A)}. \end{aligned}$$

Przykład 15.2 *Definiujemy operator*

$$L^p(\mathbf{Z}) \ni x \mapsto Ux \in L^p(\mathbf{Z})$$

wzorem

$$(Ux)_i = x_{i-1}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} &\|U\| = 1, \\ &\sigma^{\mathrm{pp}}(U) = \begin{cases} \{z \ : \ |z| = 1\} \ \textit{dla} \ p = \infty, \\ \emptyset \ \textit{dla} \ p < \infty. \end{cases}, \\ &\sigma(U) = \{z \ : \ |z| = 1\} \end{aligned}$$

$$(z-U)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1}U^n, \qquad |z| > 1, \qquad (z-U)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n U^{-n-1}, \qquad |z| < 1,$$

Jeśli zdefiniujemy dla $|\lambda| = 1$

$$v_N := \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(2N+1)^{\frac{1}{p}}}, & |n| \le N, \\ 0, & |n| > N, \end{cases}$$

to $\|(\lambda - U)v_N\|_p = (2/(2N+1))^{1/p}$, $\|v_N\|_p = 1$. Zatem $\lambda \in \sigma(U)$.

Przykład 15.3 *Definiujemy operator*

$$L^p(\{0,1,2,\ldots\}) \ni x \mapsto Ux \in L^p(\{0,1,2,\ldots\})$$

wzorem

$$(Ux)_i = x_{i+1}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned}
&\|U\| = 1, \\
&\sigma^{\mathrm{pp}}(U) = \begin{cases} \{z \ : \ |z| \leq 1\} \ \mathit{dla}\ p = \infty, \\ \{z \ : \ |z| < 1\} \ \mathit{dla}\ p < \infty. \end{cases}, \\
&\sigma(U) = \{z \ : \ |z| \leq 1\}
\end{aligned}$$

Przykład 15.4 *Definiujemy operator*

$$L^p(\{0,1,2,\ldots\}) \ni x \mapsto Ux \in L^p(\{0,1,2,\ldots\})$$

wzorem

$$(Ux)_i = \begin{cases} x_{i-1}, \ i = 1,2,\ldots \\ 0, \ i = 0. \end{cases}$$

Wtedy

$$\begin{aligned}
&\|U\| = 1, \\
&\sigma^{\mathrm{pp}}(U) = \emptyset, \\
&\sigma(U) = \{z \ : \ |z| \leq 1\}.
\end{aligned}$$

Jeśli $v \in \mathrm{Ran}(z - U)$, $|z| < 1$, *to* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n v_n = 0$. *Zatem* $\mathrm{Ran}(z - U) \neq L^p$.

Przykład 15.5 *Niech* (a_n) *będzie ciągiem zbieżnym do zera. Definiujemy operator*

$$L^p(\{0,1,2,\ldots\}) \ni x \mapsto Nx \in L^p(\{0,1,2,\ldots\})$$

wzorem

$$(Nx)_i = \begin{cases} a_{i-1}x_{i-1}, \ i = 1,2,\ldots \\ 0, \ i = 0. \end{cases}$$

Wtedy

$$\begin{aligned}
&\|N\| = \sup\{|a_n| \ : \ n = 0,1,\ldots\}, \\
&\sigma^{\mathrm{pp}}(N) = \emptyset, \\
&\sigma(N) = \{0\}.
\end{aligned}$$

16 Teoria zaburzeń

Jeśli $\Theta \subset \mathbf{C}$, to kładziemy $K(\Theta, \epsilon) := \{z \in \mathbf{C} \ : \ \mathrm{dist}(z, \Theta) < \epsilon\}$.

Twierdzenie 16.1 *Niech $A \in B(X)$. Wtedy istnieje funkcja malejąca $[0, \infty[\ni \delta \mapsto \epsilon(\delta) \in [0, \infty[$ taka, że $\lim_{\delta \to \infty} \epsilon(\delta) = \infty$ i $\epsilon(0) = 0$ i*

$$\sigma(A + B) \subset K(\sigma(A), \epsilon(\|B\|)).$$

Dowód. $\rho(A) \ni z \mapsto \|(z - A)^{-1}\|$ jest funkcją ciągłą i znikającą w nieskończoności i dążącą do nieskończoności w miarę zbliżania się do $\sigma(A)$. Zatem

$$\sup_{z \notin K(\sigma(A), \epsilon)} \|(z - A)^{-1}\| \tag{16.6}$$

maleje wraz ze zwiększaniem się ϵ od nieskończoności do zera. Połóżmy (16.6) równe $\delta(\epsilon)^{-1}$. Jako $\epsilon(\delta)$ bierzemy funkcję odwrotną. □

Twierdzenie 16.2 *Niech $A, B \in B(X)$, niech Ω_0 będzie izolowanym podzbiorem $\sigma(A)$, $\gamma := \frac{1}{2}\min(\mathrm{dist}(\Omega_0, \sigma(A) \backslash \Omega_0), 1)$. Połóżmy $\Omega_\lambda := \sigma(A + \lambda B)$. Wtedy istnieje Λ takie, że dla $|\lambda| < \Lambda$ Ω_λ jest izolowanym podzbiorem $\sigma(A + \lambda B)$. Niech*

$$P_\lambda := \mathbf{1}_{\Omega_\lambda}(A + \lambda B), \quad |\lambda| < \Lambda.$$

Wtedy P_λ zależy w sposób analityczny od λ. Poza tym, istnieje funkcja malejąca $[0, \infty[\ni \delta \mapsto \mu(\delta) \in [0, \infty[$ taka, że $\lim_{\delta \to \infty} \mu(\delta) = \infty$ i $\mu(0) = 0$ i

$$\sigma(A + B) \cap K(\Omega_0, \gamma) \subset K(\Omega_0, \mu(\|B\|)). \tag{16.7}$$

Twierdzenie 16.3 *Załóżmy dodatkowo, że $\Omega_0 = \{e_0\}$. Niech stopień nilpotentności wartości własnej e_0 będzie równy n. Wtedy istnieje C takie, że za funkcję $\mu(\delta)$ w (16.7) można wziąć $C\delta^{\frac{1}{n}}$.*

Przykład 16.4 *Niech operator A w $\mathbf{C}^n$ będzie zadany macierzą $A_{i,j}$, dla której $A_{i+1,i} = 1$, $i = 1, \ldots, n - 1$ i pozostałe wyrazy są zero, a B jest zadany macierzą taką że $B_{1,n} = 1$ a pozostałe wyrazy są zero. Wtedy $\det(A + \lambda B - z) = (-1)^n(z^n + \lambda)$ i spektrum $A + \lambda B$ składa się z pierwiastków ntego stopnia z λ.*

Twierdzenie 16.5 *W oznaczeniach Twierdzenia 16.2, przy założeniu, że $\Omega_0 = \{e_0\}$ i*

$$\dim P_0 = 1. \tag{16.8}$$

Wtedy $\Omega_\lambda = \{E_\lambda\}$ dla $|\lambda| < \Lambda$ dla pewnej analitycznej funkcji E_λ i

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} E_\lambda \Big|_{\lambda=0} \right) P_0 = P_0 B P_0.$$

Dowód. Oczywiście $\dim P_\lambda = 1$ dla $|\lambda| < \Lambda$. Więc $\Omega_\lambda = \{E_\lambda\}$ i zatem

$$(A + \lambda B)P_\lambda = E_\lambda P_\lambda.$$

Zatem

$$P_0(A + \lambda B)P_\lambda P_0 = E_\lambda P_0 P_\lambda P_0.$$

Na mocy Stwierdzenia 12.2

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} E_\lambda P_0 P_\lambda P_0 \Big|_{\lambda=0} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} E_\lambda \Big|_{\lambda=0} \right) P_0.$$

Poza tym

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} P_0(A + \lambda B)P_\lambda P_0 = P_0 B P_\lambda P_0 + P_0(A + \lambda B)\dot{P}_\lambda P_0. \tag{16.9}$$

Dla $\lambda = 0$ (16.9) jest równe

$$P_0 B P_0 + A P_0 \dot{P}_\lambda P_0 = P_0 B P_0.$$

□

Twierdzenie 16.6 *Niech spełnione są założenia twierdzenia 16.5 z wyjątkiem (16.8). Wtedy istnieje funkcja malejąca* $[0, \infty[\ni \lambda \mapsto \nu(\lambda) \in [0, \infty[$ *taka, że* $\lim_{\lambda \to \infty} \nu(\lambda) = \infty$ *i* $\nu(0) = 0$ *i*

$$\Omega_\lambda \subset K(E_0 + \lambda\sigma(P_0 B P_0), \lambda\nu(\lambda)).$$

Dowód. Jeśli $|\lambda|, \Lambda$, to

$$\sigma((A + \lambda B)^{00}) \subset K((\sigma \backslash \{e_0\}, \gamma).$$

Zatem dla $z \in K(e_0, \gamma)$ operator $(A + \lambda B)^{00}$ jest odwracalny i można zastosować do $A + \lambda B$ wzór Feshbacha. Zatem dla $\lambda| < \Lambda$ mamy $z \in \sigma(A + \lambda B) \cap B(e_0, \gamma)$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$0 \in \sigma((A + \lambda B)^{00} + \lambda^2 w_\lambda(z) \tag{16.10}$$

gdzie $w_\lambda(z) := B^{0\bar{0}}(z\mathbf{1}^{\bar{0}\bar{0}} - (A + \lambda B)^{\bar{0}\bar{0}})^{-1} B^{\bar{0}0}$. Ale $A^{00} = e_0$, więc (16.10) jest spełnione wtedy i tylko wtedy gdy

$$\lambda^{-1}(z - e_0) \in \sigma(B^{00} + \lambda w_\lambda(z)). \tag{16.11}$$

Wiemy, że na $K(e_0, \gamma)$ mamy $\|w_\lambda(z)\| \leq C$. Zatem z Twierdzenia 16.2 wynika, że istnieje funkcja malejąca $\nu(\lambda) \searrow 0$ taka, że (16.11) implikuje

$$\lambda^{-1}(z - e_0) \in K(\sigma(B^{00}), \nu(\lambda)).$$

17 Operatory nieograniczone na przestrzeni Banacha

Od tego momentu przez "operator" będziemy rozumieli "pseudooperator". Jeśli będziemy chcieli powiedzieć, że A jest prawdziwym operatorm, to powiemy, ,ze $\mathcal{D}(A) = X$.

Twierdzenie 17.1 *Następujące warunki są równoważne.*
1) $\Gamma(A)$ *jest domknięty.*
2) Jeśli $x_n \to x$, $x_n \in \mathcal{D}(A)$ *i* $Ax_n \to y$, *to* $x \in \mathcal{D}(A)$ *i* $y = Ax$.
3)dla pewnego $p \in [0, \infty]$, $\mathcal{D}(A)$ *jest przestrzenią Banacha z normą*

$$\|x\|_{A,p} := (\|Ax\|^p + \|x\|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Dowód. Równoważność 1), 2) i 3) jest oczywista, jeśli weżmiemy pod uwagę, że

$$\mathcal{D}(A) \ni x \mapsto (x, Ax) \in \Gamma(A)$$

jest bijekcją. □

Definicja 17.2 *Operator spełniający powyższe warunki nazywamy domkniętym.*

Definicja 17.3 *Mówimy, że* A *jest odwracalny, gdy* $A^{-1} \in B(Y, X)$.

Stwierdzenie 17.4 *1) Każdy operator ograniczony z dziedziną równą całej przestrzeni Banacha* X *jest domknięty.*
2) Jeśli A *jest domknięty i injektywny, wtedy* A^{-1} *jest domknięty.*

Twierdzenie 17.5 (Banacha) *Niech* A *będzie domknięty i* $\mathcal{D}(A) = X$. *Wtedy* A *jest ograniczony.*

Dowód pomijamy.

Twierdzenie 17.6 *Niech* A *będzie domknięty. Niech dla pewnego* $c > 0$

$$\|Ax\| \geq c\|x\|.$$

Wtedy $\mathrm{Ran}A$ *jest domknięty. Jeśli* $\mathrm{Ran}A = Y$, *to* A *jest odwracalny i*

$$\|A^{-1}\| \leq c^{-1}$$

Dowód. Niech $y_n \in \mathrm{Ran}A$ i $y_n \to y$. Niech $Ax_n = y_n$. Wtedy x_n jest ciągiem Cauchy'ego. Zatem istnieje $\lim_{n\to\infty} x_n := x$. Z domkniętości A wynika, że $Ax = y$. Czyli $\mathrm{Ran}A$ jest domknięty. □

Twierdzenie 17.7 *Niech A będzie operatorem. Następujące warunki są równoważne:*
1) Istnieje domkniecęty operator B taki, że $B \supset A$.
2) $\overline{\Gamma(A)}$ jest wykresem operatora, czyli $(0, y) \in \overline{\Gamma(A)} \ \Rightarrow \ y = 0$.

Definicja 17.8 *Operator A spełniający warunki twierdzenia 17.7 nazywamy operatorem domykalnym. Jeśli spełnione są warunki Twierdzenia 17.7, to operator, którego wykresem jest $\overline{\Gamma(A)}$ oznaczamy przez $\bar{A}$ i nazywamy dmknięciem operatora A.*

Dowód Twierdzenia 17.7 Aby pokazać 2)⇒1) wystarczy wziąć jako B operator $\bar{A}$.

Udowodnijmy 1)⇒2). Niech B będzie domkniętym operatorem takim, że $A \subset A$. Wtedy $\overline{\Gamma(A)} \subset \overline{\Gamma(B)} = \Gamma(B)$. Ponieważ $(0, y) \in \Gamma(B) \ \Rightarrow \ y = 0$, zatem $(0, y) \in \overline{\Gamma(A)} \ \Rightarrow \ y = 0$. Czyli $\overline{\Gamma(A)}$ jest wykresem operatora. □

Jako produkt uboczny powyższego dowodu dostajemy

Stwierdzenie 17.9 *Jeśli A jest domykalny, B domknięty i $A \subset B$, to $\bar{A} \subset B$.*

Stwierdzenie 17.10 *Niech A będzie ograniczony, tzn*

$$\|Ax\| \leq C\|x\|, \quad x \in \mathcal{D}(A). \tag{17.12}$$

Wtedy A jest domykalny, $\mathcal{D}(\bar{A}) = \overline{\mathcal{D}(A)}$ i $\bar{A}x = \lim_n Ax_n$ dla $xn \underset{n\to\infty}{\to} x$, $x_n \in \mathcal{D}(A)$. Poza tym, $\bar{A}$ spełnia też (17.12).

Niech A będzie operatorem domkniętym. Mówimy, że podprzestrzeń liniowa $\mathcal{D}$ jest dziedziną istotną dla A gdy $\mathcal{D}$ jest gęsta w $\mathcal{D}(A)$ w topologii wykresowej. Innymi słowy, $\mathcal{D}$ jest dziedziną istotną dla A, gdy

$$\overline{A\Big|_{\mathcal{D}}} = A.$$

Twierdzenie 17.11 *1) Jeśli $A \in B(X < y)$, to podprzestrzeń liniowa $\mathcal{D} \subset X$ jest dziedziną istotną dla $A \Leftrightarrow$ jest gęsta w X (w zwykłej topologii.*
2) Jeśli A jest domknięty, ma gęstą dziedzinę, i $\mathcal{D}$ jest jego dziedziną istotną, to $\mathcal{D}$ jest gęste w X.

Definicja 17.12 *Mówimy, że B jest ograniczony względem A gdy $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ i istnieją stałe a, b takie, że*

$$\|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\|, \quad x \in \mathcal{D}(A). \tag{17.13}$$

Infimum liczb a spełniających (17.13) nazywamy A-normą operatora B. Inaczej: A-norma operatora B jest równa

$$\inf_{c\geq 0} \sup_{x\in\mathcal{D}(A)\setminus\{0\}} \frac{\|Bx\|}{\|Ax\| + c\|x\|} := a.$$

W przypadku przestrzeni Hilberta wygodniejszy będzie następujący równoważny warunek pozwalający zdefiniować względną ograniczoność.

Twierdzenie 17.13 *B jest ograniczony względem A z A-normą a gdy $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$*

$$\inf_{c\geq 0} \sup_{x\in\mathcal{D}(A)\setminus\{0\}} \frac{\|Bx\|^2}{\|Ax\|^2 + c\|x\|^2} := a^2.$$

Dowód. Dla dowolnego $\epsilon > 0$ mamy

$$\begin{aligned}
&\left(\|Ax\|^2 + c^2\|x\|^2\right)^{1/2} \\
&\leq \|Ax\| + c\|x\| \\
&\leq \left((1+\epsilon^2)\|Ax\|^2 + c^2(1+\epsilon^{-2})\|x\|\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

□

Twierdzenie 17.14 *Niech A będzie domknięty i B będzie ograniczony względem A z A-normą mniejszą od 1. Wtedy*

$$A + B$$

jest domknięty na $\mathcal{D}(A)$.

Dowód. Wiemy, że

$$\|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\|$$

dla pewnych $a < 1$ i b. Zatem

$$\|(A+B)x\| + \|x\| \leq (1+a)\|Ax\| + (1+b)\|x\|$$

i

$$(1-a)\|Ax\| + \|x\| \leq \|Ax\| - \|Bx\| + (1+b)\|x\| \leq \|(A+B)x\| + (1+b)\|x\|.$$

Zatem normy $\|Ax\| + \|x\|$ i $\|(A+B)x\| + \|x\|$ są równoważne na $\mathcal{D}(A)$. □

W szczególności, jeśli B jest ograniczony, to jego A-norma jest równa 0. Jeśli A jest nieograniczony, to jego A-norma jest równa 1.

18 Spektrum operatorów nieograniczonych

Twierdzenie 18.1 *Niech A będzie odwracalny, $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A)$ i*

$$\|BA^{-1}\| < 1.$$

Wtedy B ma A-normę $\leq a < 1$, $A+B$ z dziedziną $\mathcal{D}(A)$ jest zatem operatorem domkniętym. Poza tym, jest odwracalny i

$$(A+B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A^{-1}(BA^{-1})^j.$$

Dowód. Z oszacowania
$$\|Bx\| \leq a\|Ax\|, \quad x \in \mathcal{D}(A),$$
wynika, że B ma A-normę $\leq a < 1$.

Niech
$$C_n := \sum_{j=0}^{n} (-1)^j A^{-1}(BA^{-1})^j.$$
Wtedy $\lim_{n\to\infty} C_n =: C$ istnieje. Więc $\lim_{n\to\infty} C_n y = y$. Poza tym, dla $y \in Y$
$$(A+B)C_n y = y + (-1)^n (BA^{-1})^{n+1} y \to y.$$
Z domkniętości $A+B$ wynika, że $Cy \in \mathcal{D}(A+B)$ i $(A+B)Cy = y$.

Jeśli $y \in \mathcal{D}(A+B)$, to
$$C_n(A+B)y = y + (-1)^n A^{-1}(BA^{-1})^n Ay \to y.$$
Zatem $C(A+B)y = y$. $\square$

Stwierdzenie 18.2 *Niech A i B będą odwracalne i $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$. Wtedy*
$$B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A-B)A^{-1}.$$

W przypadku operatorów nieograniczonych wygodnie jest używać zamiast zwykłego spektrum "spektrum rozszerzonego" będącego podzbiorem sfery Riemanna $\bar{\mathbf{C}}$.

Definicja 18.3 $\rho^{\mathrm{ext}}(A) := \rho(A) \cup \{\infty\}$ *jeśli A jest ograniczony i* $\rho^{\mathrm{ext}}(A) := \rho(A)$, *gdy A jest nieograniczony.*
$$\sigma^{\mathrm{ext}}(A) = \bar{\mathbf{C}} \backslash \rho^{\mathrm{ext}}(A).$$

Twierdzenie 18.4 *1)Jeśli $\rho(A) \neq \emptyset$, to A jest domknięty.*
2) Jeśli $\lambda, \mu \in \rho(A)$, to
$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}.$$

3) Jeśli $\|(\lambda - A)^{-1}\| = c$, to $\{z : \ |z - \lambda| < c^{-1}\} \subset \rho(A)$. Zatem $\sigma(A)$ jest zbiorem domkniętym.
4) $\|(z - A)^{-1}\| \geq (\mathrm{dist}(z, \sigma(A)))^{-1}$.
5) $\rho^{\mathrm{ext}}(A) \ni z \mapsto (z - A)^{-1}$ *jest funkcją analityczną.*
6) $\mathrm{Ran}(z - A)^{-1}$ *nie zależy od $z \in \rho(A)$ i jest równe $\mathcal{D}(A)$.*
7) $\mathrm{Ker}(z - A)^{-1} = \{0\}$.

Dowód. Udowodnijmy 1). Jeśli $\lambda \in \rho(A)$, to $\lambda - A$ jest odwracalny, więc domknięty. $\Box$

Łatwo zdefiniować rachunek funkcyjny dla operatorów nieograniczonych posiadających niepusty zbiór rezolwentowy. Definicję 14.1 możemy powtórzyć prawie bez zmian zastępując $\sigma(A)$ przez $\sigma^{\mathrm{ext}}(A)$. Również Twierdzenie 14.2 pozostaje w mocy, z tym, że punkt 2) trzeba zastąpić następującym punktem:
2') Jeśli $\lambda \in \rho(A)$ i $f(z) = (\lambda - z)^{-1}$, to $f(A) = (\lambda - A)^{-1}$.

Stwierdzenie 18.5 *Załóżmy, że $\rho(A)$ jest niepuste i $\mathcal{D}(A)$ jest gęste. Wtedy $\mathcal{D}(A^2)$ jest gęste.*

Dowód. Niech $z \in \rho(A)$. Wtedy $(z-A)^{-1}\mathcal{D}(A)$ jest gęste w X na mocy stwierdzenia 4.11 i $A(z-A)^{-1}\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A) + z(z-A)^{-1}\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A)$. Zatem $(z-A)^{-1}\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^2)$. $\Box$

Definicja 18.6 *Niech $\Omega \subset \mathbf{C}$ będzie otwarty. Wtedy funkcję ciągłą*

$$\Omega \mapsto R(z) \in B(X)$$

nazywamy pseudorezolwentą, gdy

$$R(z_1) - R(z_2) = (z_2 - z_1)R(z_1)R(z_2).$$

Oczywiście, każda rezolwenta jest pseudorezolwentą.

Stwierdzenie 18.7 *Niech $\Omega \mapsto R_n(z) \in B(X)$ będzie ciągiem pseudorezolwent i $R(z) :=$ $\mathrm{s-}\lim_{n\to\infty} R_n(z)$. Wtedy $R(z)$ jest pseudorezolwentą.*

Twierdzenie 18.8 *Niech $\Omega \mapsto R(z) \in B(X)$. Wtedy*
1) $\mathcal{R} := \mathrm{Ran}R(z)$ nie zależy od $z \in \Omega$.
2) $\mathcal{N} := \mathrm{Ker}R(z)$ nie zależy od $z \in \Omega$.
3) $R(z)$ jest funkcją analityczną i

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}R(z) = -R(z)^2.$$

4) $R(z)$ jest rezolwentą pewnego operatora wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{N} = \{0\}$. Operator ten ma dziedzinę $\mathcal{R}$.

Dowód. Udowodnijmy 4) $\Leftarrow$. Ustalmy $z_1 \in \Omega$. Jeśli $\mathcal{N} = \{0\}$, to każdy element $\mathcal{R}$ można jednoznacznie przedstawić jako $R(z_1)x$, $x \in X$. Definiujemy $HR(z_1)x := -x + z_1R(z_1)x$. Sprawdzamy, że ze wzoru () wynika, że definicja ta nie zależy od z_1. $\Box$

19 Przykłady operatorów nieograniczonych

Przykład 19.1 *Niech $(a_i)_{i\in I}$ będzie nieograniczonym ciągiem zespolonym a I zbiorem nieskończonym. Niech $\mathcal{D}_1$ będzie zbiorem ciągów o skończonej liczbie wyrazów niezerowych. Dla $p < \infty$ definiujemy operator*

$$L^p(I) \subset \mathcal{D}_1 \ni x \mapsto Ax \in L^p(I)$$

wzorem

$$(Ax)_i = a_i x_i.$$

($L^p(I)$ dla $p < \infty$ możemy zastąpić przez $C_\infty(I)$) Wtedy operator A jest nieograniczony i niedomknięty, poza tym

$$\sigma^{\mathrm{pp}}(A) = \{a_i \ : \ i \in I\},$$
$$\sigma(A) = \mathbf{C}.$$

Domknięciem jest operator $\bar{A}$ z dziedziną

$$\mathcal{D}_2 := \{(v_i)_{i\in I} \ : \ \sum_{i\in I} |a_i x_i|^p < \infty\}$$

Mamy wtedy

$$\sigma^{\mathrm{pp}}(A) = \{a_i \ : \ i \in I\},$$
$$\sigma(A) = \overline{\sigma^{\mathrm{pp}}(A)}.$$

Aby tego dowieść, niech $x \in \mathcal{D}_2$. Wtedy istnieje zbiór przeliczalny I_i taki, że $i \notin I_1$ implikuje $x_i = 0$. Numerujemy elementy I_1: $i_1, i_2, \ldots$. Definiujemy $x^n \in \mathcal{D}_1$ kładąc $x^n_{i_j} = x_{i_j}$ dla $j \leq n$ i $x^n_i = 0$ dla pozostałych indeksów. Wtedy $\lim_{n\to\infty} x^n = x$ i $Ax^n \to Ax$. Zatem $\{(x, Ax) \ : \ x \in \mathcal{D}_2\} \subset \overline{\Gamma(A)}$.

Jeśli $x^n \in \mathcal{D}_1$ i $(x^n, Ax^n) \to (x, y)$, to $x^n_i \to x_i$ i $a_i x^n_i = (Ax^n)_i \to y_i$. Zatem $y_i = a_i x_i$. Z tego, że $y \in L^p(I)$ wynika więc, że $x \in \mathcal{D}_2$.

Przykład 19.2 *Niech $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $1 < p \leq \infty$ i niech $(w_i)_{i\in I}$ będzie ciągiem nie należącym do $L^q(I)$. Niech $\mathcal{D}_1$ będzie zbiorem ciągów o skończonej liczbie wyrazów niezerowych. Definiujemy*

$$L^p(I) \supset \mathcal{D}_1 \ni x \mapsto \langle w|x\rangle := \sum_{i\in I} x_i w_i \in \mathbf{C}.$$

Wtedy $\langle w|$ jest operatorem niedomykalnym.

Wystarczy bowiem założyć, że $I = \mathbf{N}$ i zdefiniować $v^n_i := \frac{|w_i|^q}{w_i(\sum_{i=1}^n |w_i|^q)}$, $i \leq n$, $v^n_i = 0$, $i > n$. Wtedy $\langle w|v^n\rangle = 1$ i $\|v^n\|_p = (\sum_{i=1}^n |w_i|^q)^{-\frac{1}{q}} \to 0$. Zatem $(0,1)$ należy do domknięcia wkresu operatora

20 Model-zabawka renormalizacji multiplikatywnej

W przestrzeni Hilberta $L^2(\mathbf{R}_+)$ rozważamy $H_0 := x$ i $V := |v\rangle\langle\bar{v}|$ i

$$H := H_0 + \lambda V.$$

Rozróżniamy 3 przypadki:
1) $\int_0^\infty |v(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty$;
2) $\int_0^\infty |v(x)|^2 (1+x)^{-1} \mathrm{d}x < \infty$ ale $\int_0^\infty |v(x)|^2 \mathrm{d}x = \infty$;
3) $\int_0^\infty |v(x)|^2 (1+x)^{-2} \mathrm{d}x < \infty$ ale $\int_0^\infty |v(x)|^2 (1+x)^{-1} \mathrm{d}x = \infty$;

W przypadku 1) operator V ma sens operatora ograniczonego i rezolwenta H jest równa

$$R(z) := (z-H)^{-1} = (z-x)^{-1} - g(z)^{-1}(z-x)^{-1}|v\rangle\langle\bar{v}|(z-x)^{-1},$$

gdzie

$$g(z) := \lambda^{-1} + \int_0^\infty |v(x)|^2 (z-x)^{-1} \mathrm{d}x. \tag{20.14}$$

Zauważmy, że

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} g(z) = -\int_0^\infty |v(x)|^2 (z-x)^{-2} \mathrm{d}x, \tag{20.15}$$

i

$$g(z_1) - g(z_2) = \int_0^\infty |v(x)|^2 (z_2 - z_1)(z_1 - x)^{-1}(z_2 - x)^{-1} \mathrm{d}x_1. \tag{20.16}$$

Łatwo widać, że (20.16) jest konsekwencją (20.15).

W przypadku 2) V nie ma sensu jako operator, bo $v \notin L^2(\mathbf{R}_+)$. Ale $v(z-x)^{-1} \in L^2(\mathbf{R}_+)$ i wyrażenie definiujące $g(z)$ ma sens. Poza tym $g(z)$ spełnia (20.15), zatem również (20.16). Zatem $R(z)$ ma sens i można sprawdzić, że definiuje ono pseudorezolwentę o zerowym jądrze i gęstym obrazie. Więc $R(z)$ można użyć do definicji H.

W przypadku 3), V nie jest operatorem, wyrażenie definiujące $g(z)$ w (20.14) jest rozbieżne. Definiujemy $g(z)$ jako rozwiązanie równania (20.15). Możemy ustalić $z_0 \notin \mathbf{R}_+$ i zażądać by

$$g(z_0) = g_0, \tag{20.17}$$

i w ten sposób sprawić, że wybór $g(z)$ jest jednoznaczny. Z (20.15) wynika (20.16). Znow sprawdzamy, że $R(z)$ jest pseudorezolwentą o zerowym jądrze i gęstym obrazie. Na koniec używamy $R(z)$ do definicji H.

Do ostatniego przypadku można też odejść inaczej. Dla $k > 0$ definiujemy "obcięte v": $v_k(x) := v(x)$, $x < k$ i $v_k(x) = 0$, $x > k$. Wtedy $V_k := |v_k\rangle\langle\bar{v}_k|$ jest operatorem ograniczonym. Niech λ_k będzie zdefiniowane równaniem

$$\lambda_k^{-1} + \int_0^\infty |v_k(x)|^2 (z_0 - x)^{-1} \mathrm{d}x = g_0.$$

Niech

$$g_k(z) := \lambda_k^{-1} + \int_0^\infty |v_k(x)|^2 (z-x)^{-1} \mathrm{d}x.$$

Wtedy $\lambda_k \underset{k\to\infty}{\rightarrow} 0$ i

$$\lim_{k\to\infty} g_k(z) = g_0 + \int_0^\infty (z-z_0)(z-x)^{-1}(z_0-x)^{-1}\mathrm{d}x.$$

istnieje i pokrywa się z funkcją $g(z)$ zdefiniowaną warunkami (20.15) i (20.17). Poza tym, jeśli $H_k := H_0 + \lambda_k |v_k\rangle\langle\bar{v}|$ i $R_k(z) := (z - H_k)^{-1}$, to

$$\mathrm{s-}\lim_{k\to\infty} R_k(z) = R(z).$$

Operator H ma najwyżej jedną wartość własną, jest ona rzeczywista i jest rozwiązaniem równania $g(e) = 0$. Odpowiadający jej rzut jest równy

$$\langle\bar{v}|(e-x)^{-2}|v\rangle^{-1}(e-x)^{-1}|v\rangle\langle\bar{v}|(e-x)^{-1}.$$

21 Model-zabawka renormalizacji addytywnej

W przestrzeni Hilberta $\mathbf{C} \oplus L^2(\mathbf{R}_+)$ rozważamy

$$A := \begin{bmatrix} e_0 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}, \quad V := \begin{bmatrix} 0 & \langle\bar{v}| \\ |v\rangle & 0 \end{bmatrix},$$

$$H := A + V.$$

Rozróżniamy 3 przypadki:
1) $\int_0^\infty |v(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty$;
2) $\int_0^\infty |v(x)|^2 (1+x)^{-1} \mathrm{d}x < \infty$ ale $\int_0^\infty |v(x)|^2 \mathrm{d}x = \infty$;
3) $\int_0^\infty |v(x)|^2 (1+x)^{-2} \mathrm{d}x < \infty$ ale $\int_0^\infty |v(x)|^2 (1+x)^{-1} \mathrm{d}x = \infty$;

Chcemy odpowiedzieć na pytanie, czy można nadać sens H jako domkniętemu operatorowi.

W przypadku 1) operator V ma sens operatora ograniczonego i rezolwenta H jest równa

$$R(z) := (z-H)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (z-x)^{-1} \end{bmatrix} + g(z)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \langle\bar{v}|(z-x)^{-1} \\ (z-x)^{-1}|v\rangle & (z-x)|v\rangle\langle\bar{v}|(z-x)^{-1} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$g(z) := z - e - \int_0^\infty |v(x)|^2 (z-x)^{-1} \mathrm{d}x. \tag{21.18}$$

Zauważmy, że
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}g(z) = \int_0^\infty |v(x)|^2(z-x)^{-2}\mathrm{d}x, \tag{21.19}$$
i
$$g(z_1) - g(z_2) = z_1 - z_2 - \int_0^\infty |v(x)|^2(z_2-z_1)(z_1-x)^{-1}(z_2-x)^{-1}\mathrm{d}x_1. \tag{21.20}$$
Łatwo też widać, że (21.20) jest konsekwencją (21.19).

W przypadku 2) V nie ma sensu jako operator, bo $v \notin L^2(\mathbf{R}_+)$. Ale $v(z-x)^{-1} \in L^2(\mathbf{R}_+)$ i wyrażenie definiujące $g(z)$ ma sens. Poza tym $g(z)$ spełnia (21.19), zatem również (21.20). Zatem $R(z)$ ma sens i można sprawdzić, że definiuje ono pseudorezolwentę o zerowym jądrze i gęstym obrazie. Więc $R(z)$ można użyć do definicji H.

W przypadku 3), V nie jest operatorem, wyrażenie definiujące $g(z)$ w (21.18) jest rozbieżne. Definiujemy $g(z)$ jako rozwiązanie równania (21.19). Możemy ustalić $z_0 \notin \mathbf{R}_+$ i zażądać by
$$g(z_0) = g_0, \tag{21.21}$$
i w ten sposób sprawić, że wybór $g(z)$ jest jednoznaczny. Z (21.19) wynika (21.20). Znow sprawdzamy, że $R(z)$ jest pseudorezolwentą o zerowym jądrze i gęstym obrazie. Na koniec używamy $R(z)$ do definicji H

Do ostatniego przypadku można też odejść inaczej. Dla $k > 0$ definiujemy "obcięte v": $v_k(x) := v(x),\ x < k$ i $v_k(x) = 0,\ x > k$. Niech e_k będzie zadane przez
$$z_0 - e_k - \int_0^\infty |v_k(x)|^2(z_0-x)^{-1}\mathrm{d}x = g_0.$$
gdzie $z_0 \notin \mathbf{R}_+$. Połóżmy
$$V_k := \begin{bmatrix} 0 & \langle \bar{v}_k| \\ |v_k\rangle & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_k := \begin{bmatrix} e_k & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}.$$
Oczywiście, V_k jest operatorem ograniczonym. Wtedy $\lim_{k\to\infty} e_k = \infty$ i
$$\lim_{k\to\infty} g_k(z) = g_0 + z - z_0 + \int_0^\infty (z-z_0)(z-x)^{-1}(z_0-x)^{-1}\mathrm{d}x.$$
istnieje i pokrywa się z funkcją $g(z)$ zdefiniowną warunkami (21.19) i (21.21). Jeśli
$$H_k := A_k + V_k, \quad R_k(z) := (z - H_k)^{-1},$$
to
$$\mathrm{s-}\lim_{k\to\infty} R_k(z) = R(z).$$

Operator H ma najwyżej jedną wartość własną, jest ona rzeczywista i jest rozwiązaniem równania $g(e) = 0$. Odpowiadający jej rzut jest równy
$$(1 + \langle \bar{v}|(e-x)^{-2}|v\rangle)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \langle \bar{v}|(e-x)^{-1} \\ (e-x)^{-1}|v\rangle & (e-x)^{-1}|v\rangle\langle \bar{v}|(e-x)^{-1} \end{bmatrix},$$

22 Jednoparametrowe półgrupy

Definicja 22.1 $[0,\infty[\ni t \mapsto W(t) \in B(X)$ *nazywamy silnie ciągła jednoparametrową półgrupą jeśli*
1) $W(0) = \mathbf{1}$;
2) $W(t_1)W(t_2) = W(t_1+t_2)$, $t_1, t_2 \in [0,\infty[$;
3) $\lim_{t\downarrow 0} W(t)x = x$, $x \in X$.
4) dla pewnego $t_0 > 0$, $\|W(t)\| < M$, $0 \le t \le t_0$.

Uwaga 22.2 *Używając Twierdzenia Banacha-Steinhausa możemy pokazać, że punkt 4) wynika z 3).*

Twierdzenie 22.3 *Jeśli* $W(t)$ *silnie ciągła jednoparametrową półgrupą, to*

$$[0,\infty[\times X \ni (t,x) \mapsto W(t)x \in X$$

jest funkcją ciągła. Poza tym istnieją stałe M, β *takie, że*

$$\|W(t)\| \le M\mathrm{e}^{\beta t}. \tag{22.22}$$

Dowód. Z 4) wynika, że dla $t \le nt_0$ mamy $\|W(t)\| \le M^n$. Zatem $\|W(t)\| \le M\exp(\frac{t}{t_0}\log M)$. Czyli (22.22) jest spełnione.

Niech $t_n \to t$ i $x_n \to x$. Wtedy

$$\begin{aligned}\|W(t_n)x_n - W(t)x\| &\le \|W(t_n)x_n - W(t_n)x\| + \|W(t_n)x - W(t)x\| \\ &\le M\mathrm{e}^{\beta t_n}\|x_n - x\| + M\mathrm{e}^{\beta\min(t_n,t)}\|W(|t-t_n|)x - x\|.\end{aligned}$$

□

Mówimy, że półgrupa $W(t)$ jest typu (M,β), jeśli spełniony jest warunek (22.22).

Oczywiście, jeśli $W(t)$ jest typu (M,β), to $W(t)\mathrm{e}^{-\beta t}$ jest typu $(M,0)$. Ponieważ $W(0) = \mathbf{1}$, nie istnieją półgrupy typu $M,\beta)$ dla $M < 1$.

Twierdzenie 22.4 *Jeśli* $W(t)$ *jest silnie ciągła jednoparametrową półgrupą , definiujemy*

$$\mathcal{D}(A) := \{x \in X \ : \ \textit{istnieje} \ \lim_{t\to 0} t^{-1}(W(t)x - x)\}.$$

Definiujemy operator A *z dziedziną* $\mathcal{D}(A)$ *wzorem*

$$Ax := \lim_{t\to 0} t^{-1}(W(t)x - x).$$

Wtedy
1) A *jest domkniętym, gęsto określonym operatorem;*
2) $W(t)\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A)$ *i* $W(t)A = AW(t)$;
3) jeśli $W_1(t)$ *i* $W_2(t)$ *są różnymi półgrupami, to ich generatory są różne.*

Dowód Twierdzenia 22.4 2). Niech $x \in \mathcal{D}(A)$. Wtedy

$$\lim_{s\downarrow 0} s^{-1}(W(s)-\mathbf{1})W(t)x = W(t)\lim_{s\downarrow 0} s^{-1}(W(s)-\mathbf{1})x = W(t)Ax. \tag{22.23}$$

Zatem granica lewej strony (22.23) istnieje. Więc $W(t)x \in \mathcal{D}(A)$ i $AW(t)x = W(t)Ax$.
□

Lemat 22.5 *Dla $x \in X$ połóżmy*

$$B_t x := t^{-1}\int_0^t W(s)x.$$

Wtedy
1) $\mathrm{s}-\lim B_t = \mathbf{1}$*;*
2) $B_tW(s) = W(s)B_t$*;*
3) jeśli $x \in X$, to $B_t x \in \mathcal{D}(A)$,

$$AB_t x = t^{-1}(W(t)x - x), \tag{22.24}$$

4) dla $x \in \mathcal{D}(A)$, $AB_t x = B_t Ax$.

Dowód. 1) wynika z

$$B_t x - x = t^{-1}\int_0^t (W(s)x - x)\mathrm{d}s \underset{t\downarrow 0}{\to} 0.$$

2) jest oczywiste. 4) dowodzi się tak jak Twierdzenie 22.4 2). By dowieść 3) zauważamy, że

$$u^{-1}(W(u)-\mathbf{1})B_t = t^{-1}(W(t)-\mathbf{1})B_u x \underset{u\downarrow 0}{\to} t^{-1}(W(t)x - x).$$

□

Dowód Twierdzenia 22.4 1) Gęstość $\mathcal{D}(A)$ wynika z Lematu 22.5 1).

Udowodnijmy domkniętość A. Niech $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$ i $Ax_n \underset{n\to\infty}{\to} y$. Wtedy korzystając z ograniczoności $B_tA = AB_t$ dostajemy

$$B_t y = \lim_{n\to\infty} B_t A x_n = B_t A x.$$

Zatem

$$y = \lim_{t\downarrow 0} B_t y = \lim_{t\downarrow 0} B_t A x = Ax.$$

□

Stwierdzenie 22.6 *1) Niech $x \in \mathcal{D}(A)$. Wtedy $[0,\infty[\ni t \mapsto x(t) := W(t)x$ jest różniczkowalne (obustronnie dla $t > 0$) i spełnia $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W(t)x = AW(t)x$.*
2) Jeśli

$$[0, t_0] \ni t \mapsto x(t) \in \mathcal{D}(A), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = Ax(t), \tag{22.25}$$

to $W(t)x = x(t)$.

Dowód. Udowodnijmy 1). O prawostronnej pochodnej wiemy, że jest równa $Ax(t)$. Wystarczy to dowieść dla lewostronnej pochodnej. Dla $0 \leq u \leq t$ mamy

$$u^{-1}(W(t-u)x - W(t)x) = W(t-u)B_u Ax \underset{u\to 0}{\to} W(t)Ax = AW(t)x.$$

Udowodnijmy teraz 2). Niech $y(s) := W(t-s)x(s)$. Wtedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}y(s) = W(t-s)Ax(s) - AW(t-s)x(s) = 0$$

Zatem $y(s)$ nie zależy od s. W $s = t$ jest równe $x(t)$, zaś w $s = 0$ jest równe $W(t)x$. □

Dowód Twierdzenia 22.4 3) Ze Stwierdzenia 22.6 2) wynika, że $W(t)$ jest zdefiniowane na gęstym podzbiorze $\mathcal{D}(A)$. Ponieważ $W(t)$ jest ograniczony, więc jest jednoznacznie określony. □

Będziemy pisali $W(t) = \mathrm{e}^{tA}$.

Twierdzenie 22.7 *1) Jeśli $A \in B(X)$, to generuje on grupę $\mathbf{C} \ni z \mapsto \mathrm{e}^{zA}$ normowo ciągła*
2) Jeśli jednoparametrowa półgrupa $W(t)$ jest normowo ciągła, to jej generator jest ograniczony.

Dowód. 1) wynika z rachunku funkcyjnego.

Udowodnijmy 2). Ponieważ $W(t)$ jest normowo ciągłe, więc $\lim_{t\to 0} B_t = \mathbf{1}$. Zatem dla $0 < t < t_0$

$$\|B_t - \mathbf{1}\| < 1.$$

Zatem B_t jest wtedy odwracalny.

Wiemy, że dla $x \in \mathcal{D}(A)$

$$(W(t) - \mathbf{1})x = B_t Ax.$$

Dla $t < t_0$ możemy to zapisać jako

$$Ax = B_t^{-1}(W(t) - 1)x.$$

Czyli $\|Ax\| \leq C\|x\|$. □

Twierdzenie 22.8 *Niech $W(t)$ będzie silnie ciągła 1-parametrową półgrupą, A jej generatorem. Niech $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(A)$ będzie gęste w X i $W(t)\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$, $t > 0$. Wtedy $\mathcal{D}$ jest gęste w $\mathcal{D}(A)$.*

Lemat 22.9 *1) Dla $x \in X$, $\|B_t x\|_{\mathcal{D}(A)} \leq (Ct^{-1} + 1)\|x\|$;*
2) dla $x \in \mathcal{D}(A)$, $\lim_{t\downarrow 0} \|B_t x - x\|_{\mathcal{D}(A)} = 0$;
3) $W(t)$ jest silnie ciągłą półgrupą na $\mathcal{D}(A)$;
4) jeśli $\tilde{\mathcal{D}}$ jest domkniętą podprzestrzenią w $\mathcal{D}(A)$ niezmienniczą ze względu na $W(t)$, to jest ona niezmiennicza również ze względu na B_t.

Dowód. 1) wynika z Lematu 22.5 3).

2) wynika z Lematu 22.5 1) i z tego, że $B(t)$ komutuje z A.

3) wynika z tego, że $W(t)$ jest silnie ciągła półgrupą na X, zachowuje $\mathcal{D}(A)$ i komutuje z A.

4) żeby pokazać 4) zauważmy, że $B_t x$ jest zdefiniowane przez całkę z $W(s)x$. $W(s)x$ zależy w sposób ciągły od s w topologii $\mathcal{D}(A)$, jak wynika z 3). Zatem całka ta (w sensie całki Riemanna) jest poprawnie zdefiniowana. Poza tym, $B_t x$ należy do domknięcia przestrzeni rozpiętej przez $W(s)x$, $0 \leq s \leq t$.

Dowód Twierdzenia 22.8. Niech $x \in \mathcal{D}(A)$, $x_n \in \mathcal{D}$ i $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$ w X. Niech $\tilde{\mathcal{D}}$ będzie domknięciem $\mathcal{D}$ w $\mathcal{D}(A)$. Wtedy $B_t x_n \in \tilde{\mathcal{D}}$ na mocy Lematu 22.9 4). Na mocy Lematu 22.9 1) mamy

$$\|B_t x_n - B_t x\|_{\mathcal{D}(A)} \leq C_t \|x_n - x\|.$$

Zatem $B_t x \in \tilde{\mathcal{D}}$. Ponieważ na mocy Lematu 22.9 2)

$$\|B_t x - x\|_{\mathcal{D}(A)} \underset{t\downarrow 0}{\to} 0.$$

Zatem $x \in \tilde{\mathcal{D}}$. □

Twierdzenie 22.10 *Niech A będzie gęsto określonym operatorem. Wtedy następujące warunki są równoważne:*
1) $[\beta, \infty[\subset \rho(A)$ i

$$\|(x - A)^{-m}\| \leq M|x - \beta|^{-m}, \quad m = 1, 2, \ldots, \quad x \in [\beta, \infty[$$

2) $\{z \in \mathbf{C} \ : \ \mathrm{Re} z > \beta\} \subset \rho(A)$ i

$$\|(z - A)^{-m}\| \leq M|\mathrm{Re} z - \beta|^{-m}, \quad m = 1, 2, \ldots, \quad z \in \{z \in \mathbf{C} \ : \ \mathrm{Re} z > \beta\}.$$

Dowód. Niech 1) będzie spełnione. Wystarczy założyć, że $\beta = 0$. Niech $z = x + \subset y$. Wtedy dla $t > 0$

$$\begin{aligned}(z-A)^{-m} &= (x+t-A)^{m}(\mathbf{1} + (\subset y - t)(x+t-A)^{-1})^{-m} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}(x+t-A)^{-n-j}(iy-t)^{j}\left(\begin{array}{c}-m\\ j\end{array}\right).\end{aligned}$$

Korzystając z tego, że $\left(\begin{array}{c}-m\\ j\end{array}\right)$ jest na przemian dodatnie i ujemne dostajemy

$$\begin{aligned}\|(z-A)^{-m}\| &\leq \textstyle\sum_{j=0}^{\infty}|x+t|^{-n-j}(-1)^{j}|iy-t|^{j}\left(\begin{array}{c}-m\\ j\end{array}\right) \\ &= M|x+t|^{m}\left(1-\tfrac{|iy-t|}{x+t}\right)^{-m} \\ &= M(x+t-|iy-t|)^{-m} \underset{t\to\infty}{\to} Mx^{-m}.\end{aligned}$$

□

Definicja 22.11 *Mówimy, że operator A jest typu (M,β), jeśli spełnione są warunki Twierdzenia 22.10.*

Oczywiście, jeśli A jest typu (M,β), to $A-\beta$ jest typu $(M,0)$.

Twierdzenie 22.12 *Jeśli $W(t)$ jest półgrupą typu (M,β), to jej generator jest też typu (M,β). Mamy poza tym*

$$(z-A)^{-1} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{tz}W(t)\mathrm{d}t, \quad \mathrm{Im}z > \beta.$$

Dowód. Udowodnijmy. Połóżmy

$$R(z)x := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-zt}W(t)x.$$

Niech $y = R(z)x$. Wtedy

$$u^{-1}(W(u)-\mathbf{1})y = -u^{-1}\mathrm{e}^{zu}\int_0^u \mathrm{e}^{-zt}W(t)x\mathrm{d}t + u^{-1}(\mathrm{e}^{zu}-1)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-zt}W(t)x\mathrm{d}t \underset{u\downarrow 0}{\to} -x+zy.$$

Zatem $y \in \mathcal{D}(A)$ i $(z-A)R(z)x = \mathbf{1}$.

Załóżmy teraz, że $x \in \mathrm{Ker}(z-A)$. Wtedy $x_t := \mathrm{e}^{zt}x \in \mathcal{D}(A)$ spełnia $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_t = Ax_t$. Zatem $x_t = W(t)x$. Ale $\|x_t\| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}zt}\|x\|$, co jest niemożliwe.

Ze wzoru

$$(z-A)^{-m} = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \mathrm{e}^{-z(t_1+\cdots+t_m)} W(t_1+\cdots+t_m)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_m$$

wynika oszacowanie

$$\|(z-A)^{-m}\| \leq \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty M\mathrm{e}^{-(z-\beta)(t_1+\cdots+t_m)}\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_m = M|z-\beta|^{-m}.$$

□

Twierdzenie 22.13 *Jeśli A operatorem typu (M,β), to jest on generatorem pewnej półgrupy $W(t)$, która też jest typu (M,β). Mamy przy tym wzór (dla $\beta = 0$)*

$$W(t) = \mathrm{s}-\lim_{n\to\infty}\left(\mathbf{1} - \frac{t}{n}A\right)^{-n},$$

$$\left\|W(t)x - \left(\mathbf{1} - \frac{t}{n}A\right)^{-n} x\right\| \leq M\frac{t^2}{2}\|A^2x\|.$$

Dowód. Połóżmy

$$V_n(t) := \left(\mathbf{1} - \frac{t}{n}A\right)^{-n}.$$

Pokażemy najpierw, że

$$\mathrm{s}-\lim_{t\downarrow 0} V_n(t) = \mathbf{1}. \tag{22.26}$$

Do dowodu (22.26) wystarczy pokazać, że

$$\mathrm{s}-\lim_{s\downarrow 0}(\mathbf{1} - sA)^{-1} = \mathbf{1}. \tag{22.27}$$

Mamy $(\mathbf{1}-sA)^{-1} - \mathbf{1} = (s^{-1}-A)^{-1}A$. Więc dla $x \in \mathcal{D}(A)$

$$\|(\mathbf{1}-sA)^{-1}x - x\| \leq s^{-1}\|Ax\|,$$

co pokazuje (22.27).

Oto dalsze własności $V_n(t)$: dla $t > 0$, $V_n(t)$ jest holomorficzne, $\|V_n(t)\| \leq M$ i

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_n(t) = A\left(\mathbf{1} - \frac{t}{n}A\right)^{-n-1}.$$

Aby pokazać, że $V_n(t)x$ jest ciągiem Cauchy'ego dla $x \in \mathcal{D}(A^2)$ obliczamy

$$\begin{aligned} V_n(t)x - V_m(t)x &= \lim_{s\downarrow 0} V_n(t-s)V_m(s)x - \lim_{s\uparrow t} V_n(t-s)V_m(s)x \\ &= \lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_\epsilon^{t-\epsilon} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} V_n(t-s)V_m(s)x \\ &= \lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_\epsilon^{t-\epsilon} \Big(- V_n'(t-s)V_m(s) + V_n(t-s)V_m'(s)\Big) x \\ &= \lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_\epsilon^{t-\epsilon} \left(\tfrac{s}{n} - \tfrac{t-s}{m}\right) \left(\mathbf{1} - \tfrac{t-s}{n}A\right)^{-n-1} \left(\mathbf{1} - \tfrac{s}{n}A\right)^{-m-1} A^2 x. \end{aligned}$$

Zatem dla $x \in \mathcal{D}(A^2)$

$$\begin{aligned} \|V_n(t)x - V_m(t)x\| &\leq \|A^2 x\| \int_0^t |\tfrac{s}{m} - \tfrac{t-s}{n}| M^2 \mathrm{d}s \\ &= M^2(\tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{m})\tfrac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

Na mocy Stwierdzenia 18.5, $\mathcal{D}(A^2)$ jest gęste w X. Zatem istnieje jednostajna na $[0, t_0]$ granica $\mathrm{s}-\lim_{n\to\infty} V_n(t) =: V(t)$ i zależy w sposób silnie ciągły od t. Przekształca $\mathcal{D}(A)$ w siebie i komutuje z A.

Na koniec pokażemy, że $W(t)$ jest półgrupą z generatorem A. W tym celu wystarczy pokazać, że dla $x \in \mathcal{D}(A)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W(t)x = AW(t)x. \tag{22.28}$$

Ale $x \in \mathcal{D}(A)$

$$V_n(t+u)x = V_n(t)x + \int_t^{t+u} A\Big(\mathbf{1} - \frac{s}{n}A\Big)^{-1} V_n(s)x\mathrm{d}s$$

Więc przechodząc do granicy dostajemy

$$W(t+u)x = W(t)x + \int_t^{t+u} AW(s)x\mathrm{d}s.$$

To implikuje (22.28). □

23 Przestrzenie sprzężone

Działanie funkcjonału v liniowego na X zapisujemy jako

$$X \ni x \mapsto \langle v|x\rangle \in \mathbf{C}.$$

Przestrzenią sprzężoną X' nazywamy zbiór funkcjonałów liniowych ograniczonych. Innymi słowy, $X' := B(X, \mathbf{C})$. Mamy

$$\|v\| := \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle v|x\rangle| < \infty.$$

Jako szczególny przypadek twierdzenia o tym, że $B(X,Y)$ jest przestrzenią Banacha dostajemy

Twierdzenie 23.1 *Jeśli X jest unormowana, to X' jest przestrzenią Banacha.*

Twierdzenie 23.2 (Hahna-Banacha) *Niech W będzie domkniętą podprzestrzenią w przestrzeni Banacha X. Niech $v \in W'$ Wtedy istnieje $\tilde{v} \in X'$ taki, że $\|v\| = \|\tilde{v}\|$ i*

$$\tilde{v}\Big|_W = v.$$

Dowód pomijamy.

Wniosek 23.3 *Niech $x_0 \in X$. Wtedy*

$$\sup_{\|v\| \leq 1,\ v \in X'} |\langle v | x_0 \rangle| = \|x_0\|.$$

Zbiór

$$\{v \in X' \ : \ \langle v | x_0 \rangle = \|x_0\|\} \tag{23.29}$$

stanowi niepusty wypukły podzbiór X'.

Dowód. Nierówność $\leq$ jest oczywista. Rozważmy $W = \mathbf{C}x_0$ i $v_0 \in W'$ takie, że

$$\langle v_0 | \lambda x_0 \rangle := \lambda \|x_0\|.$$

Wtedy $\|v_0\| = 1$ Rozszerzamy v_0 do v na X tak, żeby $\|v\| = 1$ To dowodzi niepustości 23.29). $\square$

Definicja 23.4 *Zbiór (23.29) nazywamy zbiorem unormowanych funkcjonałow stycznych do x_0.*

Definiujemy odwzorowanie

$$X \ni x \mapsto \phi(x) \in (X')'$$

wzorem

$$\langle \phi(x) | v \rangle := \langle v | x \rangle.$$

ϕ jest izometrią, bo

$$\begin{aligned} &\|\phi(x)\| = \sup_{v \in X', \|v\| \leq 1} |\langle \phi(x) | v \rangle| \\ &= \sup_{v \in X', \|v\| \leq 1} |\langle v | x \rangle| = \|x\|. \end{aligned}$$

Będziemy utożsamiać X z podprzestrzenią $\phi(X)$ przestrzeni X''. Mówimy, że X jest refleksywna $\Leftrightarrow X = X''$.

Stwierdzenie 23.5 *X jest refleksywna $\Leftrightarrow$ X' jest refleksywna.*

Przykład 23.6

$$\begin{aligned} &L^p(I)' = L^q(I), \quad p^{-1}+q^{-1}=1,\ 1\le p<\infty,\\ &C_\infty(I)' = L^1(I). \end{aligned}$$

Czyli $C_\infty(I)$ i $L^\infty(I)$ są nierefleksywne dla nieskończonych zbiorów I.

Dowód. Niech $C_{\rm comp}(I)$ oznacza przestrzeń ciągów o skończonej liczbie niezerowych wyrazów. Niech $X := L^p(I)$ dla $p<\infty$ lub $X := C_\infty(I)$. Oczywiście, $C_{\rm comp}(I)$ jest gęste w X. Zatem jeśli funkcjonał v jest zadany na $C_{\rm comp}(I)$, to ma on jednoznaczne rozszerzenie do funkcjonału na X.

Wektory e_i rozpinają $C_{\rm comp}(I)$. Zatem funkcjonał v jest zadany przez ciąg $v_i := \langle v|e_i\rangle$ i jego działanie na wektor $x\in X$ zadane jest wzorem

$$\langle v|x\rangle = \sum_{i\in I} v_i x_i.$$

Z nierówności Höldera

$$\Big|\sum_i v_i x_i\Big| \le \Big(\sum_i |v_i|^q\Big)^{\frac1q}\Big(\sum_i |x_i|^q\Big)^{\frac1p}$$

wynika, że $X'\supset L^q(I)$. Załóżmy, że $v\in X'\backslash L^q(I)$. Możemy założyć, że $I=\mathbf{N}$ i $p>1$. Definiujemy ciąg wektorów $x^n\in X$

$$x_i^n := \begin{cases} \bar v_i|v_i|^{q-2}\Big(\sum_{i=1}^n |v_i|^q\Big)^{-\frac1p}, & i\le n\\ 0, & i>n. \end{cases}$$

Wtedy

$$\langle v|x^n\rangle = \Big(\sum_{i=1}^n |v_i|^q\Big)^{1-\frac1p} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$
$$\|x^n\|_p = 1.$$

□

Opiszemy teraz kiedy $v\in L^q(I)$ jest unormowanym stycznym wektorem dla $x\in L^p(I)$: jeśli $1<p<\infty$

$$v_i = \bar x_i|x_i|^{p-2}\Big(\sum_i |x_i|^p\Big)^{-\frac1p},$$

jeśli $p=1$

$$v_i = \bar x_i|x_i|^{-1}, \quad x_i\ne 0, \qquad |v_i|\le 1, x_i=0.$$

Dla $L^\infty(I)$ unormowane wektory styczne mogą zatem tworzyć zbiór wieloelementowy.

24 Anihilator

Definicja 24.1 *Niech $F \subset X$. Wtedy definiujemy anihilator zbioru F wzorem*

$$F^{\mathrm{an}} := \{v \in X' \ : \ \forall_{x\in F}\langle v|x\rangle = 0\}$$

Definicja 24.2 *Niech $G \subset X'$ Wtedy definiujemy anihilator zbioru G wzorem*

$$^{\mathrm{an}}G := \{x \in X \ : \ \forall_{v\in G}\langle v|x\rangle = 0\}$$

Twierdzenie 24.3 *F^{an} i $^{\mathrm{an}}G$ są domkniętymi podprzestrzeniami liniowymi.*

Dowód. Są one przecięciami

$$F^{\mathrm{an}} = \cap_{x\in F}\mathrm{Ker}\phi(x)$$
$$^{\mathrm{an}}G = \cap_{v\in G}\mathrm{Ker}v.$$

□

Oczywiście

$$^{\mathrm{an}}(F^{\mathrm{an}}) \supset F, \quad (^{\mathrm{an}}G)^{\mathrm{an}} \supset G.$$
$$(F_1+F_2)^{\mathrm{an}} = F_1^{\mathrm{an}} \cap F_1^{\mathrm{an}}, \qquad ^{\mathrm{an}}(G_1+G_2) = {}^{\mathrm{an}}G_1 \cap {}^{\mathrm{an}}G_2.$$

Twierdzenie 24.4 *Niech $V \subset X$ będzie domkniętą podprzestrzenią. Wtedy*

$$^{\mathrm{an}}(V^{\mathrm{an}}) = V$$

Dowód. Oczywiście, $^{\mathrm{an}}(V^{\mathrm{an}})$ jest domknętą podprzestrzenią.

Niech $x_0 \notin V$. Oczywiście, $^{\mathrm{an}}(V^{\mathrm{an}})$ jest domknętą podprzestrzenią.

$$\inf_{v\in V}\|v - x_0\| = d > 0$$

(bo V jest domknięta). Zatem,

$$\|v + \lambda x_0\| = |\lambda|\|v/\lambda + x_0\| \geq |\lambda| d.$$

Niech $\tilde{V}$ będzie przestrzenią rozpiętą przez x_0 i V. Wtedy na $\tilde{V}$ definiujemy funkcjonał w równy 0 na V i 1 na x_0. Oczywiście

$$\langle w|v + \lambda x_0\rangle = \lambda.$$

Stąd

$$|\langle w|v + \lambda x_0\rangle| = |\lambda| \leq \frac{1}{d}\|v + \lambda x_0\|.$$

Więc $w \in \tilde{V}'$

Rozszerzamy funkcjonał w do ciągłego funkcjonału na X. Oczywiście $w \in V^{\mathrm{an}}$. Zatem $x_0 \notin (V^{\mathrm{an}})^{\mathrm{an}}$. □

Kontrprzykład do analogu Twierdzenia 24.4 dla X'. Niech $X = V'$, gdzie V jest nierefleksywna. Weźmy $V \subset_{\neq} V'' = X'$. Wtedy $^{\mathrm{an}}V = \{0\}$ i $(^{\mathrm{an}}V)^{\mathrm{an}} = V''$.

25 Zbieżność słaba i $*$-słaba

Do tej pory używaliśmy tylko jednego typu zbieżności, mianowicie zbieżności normowej:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Oprócz tego w X można zdefiniować zbieżność słabą

$$\mathrm{w} - \lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall_{v\in X'} \lim_{n\to\infty} \langle v|x_n\rangle = \langle v|x\rangle,$$

a w X' zbieżność $*$-słabą

$$\mathrm{w} - \lim_{n\to\infty} v_n = v \Leftrightarrow \forall_{x\in X} \lim_{n\to\infty} \langle v_n|x\rangle = \langle v|x\rangle.$$

W przestrzeniach refleksywnych, słaba jest równoważna $*-$słabej.

Twierdzenie 25.1 *1) Jeśli*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

to

$$*\mathrm{w}- \lim_{n\to\infty} x_n = x, \qquad \|x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

2) Jeśli

$$\mathrm{w} - \lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

to

$$*\mathrm{w}- \lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad |x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

3) Jeśli

$$*\mathrm{w} - \lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

to

$$\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Przykład 25.2 *Rozważmy*

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots), \ \textit{1 na i-tym miejscu.}$$

Wtedy $e_i \in L^p(\mathbf{N})$ dla $1 \le p \le \infty$ a także $e_i \in C_\infty(\mathbf{N})$ Oczywiście, ciąg (e_i) nie jest zbieżny normowo. Również w przestrzeni $L^1(\mathbf{N})$ ciąg (e_i) jest rozbieżny słabo.

W przestrzeniach $L^p(\mathbf{N})$ dla $1 < p \le \infty$ i $C_\infty(\mathbf{N})$ ciąg ten jest zbieżny słabo do zera. W przestrzeniach $L^p(\mathbf{N})$ dla $1 < p \le \infty$ ciąg (e_i) jest również zbieżny $*$-słabo do 0, jeśli przestrzenie te traktujemy jako przestrzenie dualne w oczywisty sposób. (W $C_\infty(\mathbf{N})$ nie ma sensu mówić o $*$-słabej zbieżności, bo przestrzeń ta nie jest przestrzenią dualną do żednej przestrzeni Banacha).

Przykład 25.3 *Rozważmy*

$$f_i = (0, \dots, 0, 1, 1, \dots), \text{ 1 od } i\text{-tego miejsca.}$$

Wtedy $f_i \in L^\infty(\mathbf{N})$. *Oczywiście, ciąg* (f_i) *nie jest zbieżny normowo. Jest on natomiast zbieżny* $*$*-słabo do zera. Nie jest on jednak zbieżny słabo.*

Aby to zobaczyć, załóżmy, że ciąg (f_n) *jest słabo zbieżny. Wtedy musi być zbieżny do swej* $*$*-słabej granicy, czyli do* 0. *Zdefiniujmy*

$$\tilde{C}_\infty(\mathbf{N}) := \{(v^i) \in L^\infty(\mathbf{N}) \ : \ \lim_{n\to\infty} v^n \text{ istnieje } \}.$$

Wtedy na $\tilde{C}_\infty(\mathbf{N})$ *możemy wprowadzić funkcjonał*

$$\langle \tilde{w} | v \rangle := \lim_{n\to\infty} v^n.$$

Możemy rozszerzyć ten funkcjonał do funkcjonału $w \in (L^\infty(\mathbf{N}))'$. *Mamy wtedy*

$$\langle w | f_i \rangle = 1.$$

Zatem (f_n) *nie może być zbieżny słabo do zera.*

26 Operatory sprzężone

Definicja 26.1 *Niech* $A \in B(X, Y)$. *Definiujemy*

$$A' : Y' \to X'$$

następująco:

$$\langle v | Ax \rangle = \langle A'v | x \rangle.$$

Definicję tę można rozssszerzyć.

Definicja 26.2 *Niech* $A : X \to Y$ *ma gęstą dziedzinę. Wtedy definiujemy*

$$A' : Y' \to X'$$

następująco: $v \in \mathcal{D}(A')$ *gdy funkcjonał*

$$\mathcal{D}(A) \ni x \mapsto \langle v | Ax \rangle$$

jest ograniczony. Wtedy istnieje $w \in X'$ *takie, że*

$$\langle v | Ax \rangle = \langle w | x \rangle.$$

Kładziemy

$$A'v := w.$$

Podobnie, niech $B : Y' \to X'$ ma gęstą dziedzinę. Wtedy definiujemy

$${}'B : X \to Y$$

następująco: $x \in \mathcal{D}({}'B)$ gdy istnieje $y \in Y$ taki, że

$$\langle Bv|x\rangle = \langle v|y\rangle.$$

Kładziemy

$${}'Bx = y.$$

Twierdzenie 26.3 *Niech $A : X \to Y$ będzie domkniętym operatorem z gęstą dziedziną. Wtedy:*
1) $A \in B(X,Y) \Leftrightarrow A' \in B(Y',X')$ i $\|A'\| = \|A\|$.
2) A' jest domknięty i ma gęstą dziedzinę,
3) $(\mathrm{Ran}A)^{\mathrm{an}} = \mathrm{Ker}A'$,
4) ${}^{\mathrm{an}}(\mathrm{Ran}A') = \mathrm{Ker}A$
5) ${}'(A') = A$
6) Jeśli A lub B są ograniczone, to $(AB)' = B'A'$,
7) A jest odwracalny $\Leftrightarrow$ A' jest odwracalny $\Leftrightarrow$ $\|Ax\| \geq C\|x\|$ i $\|A'v\| \geq C\|v\|$; zachodzi wtedy $(A^{-1})' = (A')^{-1}$
8) $\sigma(A) = \sigma(A')$.

Dowód. 1) wynika z następującego rachunku:

$$\begin{aligned}
\|A\| &= \sup_{\|x\|\leq 1,\ x\in X} \|Ax\| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1,\ x\in X,\ \|v\|\leq 1,\ v\in X'} |\langle v|Ax\rangle| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1,\ x\in X,\ \|v\|\leq 1,\ v\in X'} |\langle A'v|x\rangle| \\
&= \sup_{\|v\|\leq 1,\ v\in X'} \|A'v\| \qquad = \|A'\|
\end{aligned}$$

2)-5) wynikają z następnego twierdzenia. □

Twierdzenie 26.4 *Niech A ma gęstą dziedzinę. Wtedy*
1) A' jest domknięty
2) $(\mathrm{Ran}A)^{\mathrm{an}} = \mathrm{Ker}A'$,
3) $\mathcal{D}(A) \cap {}^{\mathrm{an}}(\mathrm{Ran}A') \supset \mathrm{Ker}A$.
4) $\mathcal{D}(A')$ jest gęsty w Y' wtedy i tylko wtedy, gdy A jest domykalny.
5) Załóżmy, że A jest domykalny. Wtedy

$${}'(A') = \bar{A} \quad i \quad \bar{A}' = A'.$$

Dowód. Niech $j : X \oplus Y \to Y \oplus X$, $j(x,y) := (-y, x)$. Tym samym symbolem będziemy oznaczać odwzorowanie $j : X' \oplus Y' \to Y' \oplus X'$ analogicznie zdefiniowane. Zauważmy, że jeśli $W \subset X \oplus Y$, to $j(W^{\mathrm{an}}) = (jW)^{\mathrm{an}}$.

Mamy

$$j\Gamma(A)^{\mathrm{an}} = \Gamma(A').$$

Zatem $\Gamma(A')$ jest domknięte. To dowodzi 1). Przy okazji zauważmy, że

$$\overline{\Gamma(A)} = {}^{\mathrm{an}}(\Gamma(A)^{\mathrm{an}}) = j^{-1\mathrm{an}}(j\Gamma(A)^{\mathrm{an}}) = j^{-1\mathrm{an}}(\Gamma(A').$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}A' \times \{0\} &= \Gamma(A') \cap Y' \times \{0\} \\
&= j\Gamma(A)^{\mathrm{an}} \cap j(X \times \{0\})^{\mathrm{an}} \\
&= j(\Gamma(A) + X \times \{0\})^{\mathrm{an}} \\
&= j(X \times \mathrm{Ran}A)^{\mathrm{an}} \qquad\qquad = (\mathrm{Ran}A)^{\mathrm{an}} \times \{0\}
\end{aligned}$$

To dowodzi $(\mathrm{Ran}A)^{\mathrm{an}} = \mathrm{Ker}A'$, czyli 2).

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}A \times \{0\} &\subset \overline{\Gamma(A)} \cap X \times \{0\} \\
&= j^{-1\mathrm{an}}\Gamma(A') \cap j^{-1\mathrm{an}}(Y' \times \{0\}) \\
&= j^{-1\mathrm{an}}(\Gamma(A') + Y' \times \{0\}) \\
&= j^{-1\mathrm{an}}(Y' \times \mathrm{Ran}A') \qquad\qquad = {}^{\mathrm{an}}(\mathrm{Ran}A') \times \{0\}
\end{aligned}$$

To dowodzi $(\mathrm{Ran}A,)^{\mathrm{an}} \supset \mathrm{Ker}A$, czyli 3).

Dowiedźmy teraz 4). Mamy

$$A \text{ jest domykalny } \Leftrightarrow \quad \overline{\Gamma(A)} \cap \{0\} \times Y = \{0\}\{0\},$$

$$\mathcal{D}(A') \quad \text{jest gęsta} \Leftrightarrow \quad {}^{\mathrm{an}}(\mathcal{D}(A') \times Y') = \{0\} \times \{0\}.$$

Ale

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma(A)} \cap \{0\} \times Y &= j^{-1\mathrm{an}}\Gamma(A') \cap j^{-1\mathrm{an}}\{0\} \times X' \\
&= j^{-1\mathrm{an}}(\Gamma(A') + \{0\} \times X') \qquad = j^{-1\mathrm{an}}(\mathcal{D}(A') \times Y').
\end{aligned}$$

To dowodzi 4).

Równość $\bar{A}' = A'$ wynika z

$$\Gamma(A') = j(\Gamma(A))^{\mathrm{an}} = j\overline{(\Gamma(A))}^{\mathrm{an}} = j\Gamma(\bar{A}').$$

□

27 Półgrupy kontrakcji i operatory dyssypatywne

Twierdzenie 27.1 *Niech A będzie operatorem domkniętym. Wtedy następujące warunki są równoważne*
1) A jest generatorem pólgrupy kontrakcji, czyli $\|e^{tA}\| \leq 1$
2) Operator A jest typu $(1,0)$.
3) $]0,\infty[\subset \rho(A)$ *i*

$$\|(x-A)^{-1}\| \leq |x|^{-1}, \quad x \in \mathbf{R},\ x > 0,$$

4) $\{z \in \mathbf{C}\ :\ \mathrm{Re} z > 0\} \subset \rho(A)$ *i*

$$\|(z-A)^{-1}\| \leq |\mathrm{Re} z|^{-1}, \quad z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re} z > 0.$$

5) Jeśli $\mathrm{Re} z > 0$, *to* $\mathrm{Ran}(z-A) = X$, *poza tym* $\forall x \in \mathcal{D}(A)$ $\forall v \in X'$ *jeśli* $\|v\| = 1,$, $\langle v|x\rangle = \|x\|$, *to*

$$\mathrm{Re}\langle v|Ax\rangle \leq 0.$$

6) Istnieje Jeśli $\mathrm{Re} z > 0$, *taki, że* $\mathrm{Ran}(z-A) = X$, *poza tym* $\forall x \in \mathcal{D}(A)$ $\exists v \in X'$ *jeśli* $\|v\| = 1,$, $\langle v|x\rangle = \|x\|$, *to*

$$\mathrm{Re}\langle v|Ax\rangle \leq 0.$$

Dowód. Równoważnośc 1) i 2) jest szczególnym przypadkiem Twierdzeń 22.12 i 22.13. Implikacje 2)⇒3) i 2)⇒4) są oczywiste, implikacje przeciwne są łatwe.

Udowodnijmy 1),3)⇒5). Mamy

$$\mathrm{Re}\langle v|x\rangle = \langle v|x\rangle = \|x\|,$$

$$\mathrm{Re}\langle v|e^{tA}x\rangle \leq |\langle v|e^{tA}x\rangle| \leq \|x\|.$$

Czyli

$$\mathrm{Re}\langle v|Ax\rangle = \lim_{t\downarrow 0} \mathrm{Re} t^{-1}(\langle v|e^{tA}x\rangle - \langle v|x\rangle) \leq 0.$$

Wiemy, że jeśli $\mathrm{Re} z > 0$, to $z \in \rho(A)$. Zatem $\mathrm{Ran}(z-A) = X$.

Implikacja 5)⇒6) jest oczywista.

Udowodnijmy 6)⇒3).

$$\begin{aligned}\|(z-A)x\| &\geq |\langle v|(z-A)x\rangle| \\ &\geq \mathrm{Re}\langle v|(z-A)x\rangle \ \geq \mathrm{Re} z\langle v|x\rangle = \|x\|\mathrm{Re} z.\end{aligned}$$

Korzystając z tego, że $\mathrm{Ran}(z-A)^{-1} = X$ wnioskujemy, że $(z-A)^{-1}$ istnieje i $\|(z-A)^{-1}\| \leq |\mathrm{Re} z|^{-1}$. □

28 Przestrzenie z iloczynem skalarnym

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią wektorową. Funkcję

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (v, y) \mapsto (v|y) \in \mathbf{C}$$

nazywamy iloczynem skalarnym, gdy

$$\begin{aligned}
&(v|y + z) = (v|y) + (v|z), \qquad (v|\lambda y) = \lambda(v|y),\\
&(v + y|z) = (v|y) + (y|z), \qquad (\lambda v|y) = \bar{\lambda}(v|y),\\
&(v|v) \geq 0,\\
&(v|v) = 0 \Rightarrow v = 0.
\end{aligned}$$

Twierdzenie 28.1 (Hermitowskość.)

$$(v|y) = \overline{(y|v)}.$$

Dowód. Korzystamy z tożsamości polaryzacyjnej:

$$\begin{aligned}
(v|y) &= \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{n=0}^{3}(-\subset)^n(v+\subset^n y|v+\subset^n y),\\
(y|v) &= \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{n=0}^{3}\subset^n (v+\subset^n y|v+\subset^n y).
\end{aligned}$$

□

Definiujemy

$$\|v\| := \sqrt{(v|v)}$$

Twierdzenie 28.2 (Tożsamość równoległoboku.)

$$2(\|v\|^2 + \|y\|^2) = \|v + y\|^2 + \|v - y\|^2.$$

Twierdzenie 28.3 (Nierówność Schwarza.)

$$|(v|y)| \leq \|v\|\|y\|$$

Dowód.

$$0 \quad \leq (v + ty|v + ty) = \|v\|^2 + t(v|y) + \overline{t(v|y)} + \|y\|^2|t|^2.$$

Podstawiamy $t = -\frac{\overline{(v|y)}}{\|y\|^2}$ i dostajemy

$$0 \leq \|v\|^2 - \frac{|(v|y)|^2}{\|y\|^2}.$$

□

Twierdzenie 28.4 (Nierówność trójkąta.)

$$\|v + y\| \leq \|v\| + \|y\|$$

Dowód.

$$\|v + y\|^2 = \|v\|^2 + (v|y) + (y|v) + \|y\|^2 \leq (\|v\| + \|y\|)^2.$$

□

Zatem $\|\cdot\|$ jest normą.

29 Definicja i przykłady przestrzeni Hilberta

Definicja 29.1 *Przestrzeń z iloczynem skalarnym nazywamy przestrzenią Hilberta, jeśli jest zupełna, tzn jeśli* $v_n \in \mathcal{H}$ *i*

$$\forall_\epsilon \exists_N \forall_{n,m>N} \|v_n - v_m\| < \epsilon,$$

to istnieje $v \in \mathcal{H}$ *taki, że* $\lim_{n\to\infty} v_n = v$.

Przykład 29.2 *Niech* I *będzie dowolnym zbiorem. Wtedy* $L^2(I)$ *oznacza przestrzeń ciągów* $(v^i)_{i\in I}$ *o wartościach w* $\mathbf{C}$ *indeksowanych przez* I *takich, że*

$$\sum_{i\in I} |v^i|^2 < \infty$$

z iloczynem skalarnym

$$(v|w) = \sum_{i\in I} \overline{v^i} w^i.$$

Nierówność Schwartza gwarantuje dobrą określoność iloczynu skalarnego.

Przykład 29.3 *Niech* $a < b$ *(gdzie* a *może być* $-\infty$ *i* b *może być* ∞*). Niech* $\rho(x)$ *będzie funkcją dodatnią mierzalną na* $[a, b]$. *Wtedy* $L^2([a, b], \rho)$ *oznacza zbiór funkcji na* $[a, b]$ *o wartościach zespolonych spełniających*

$$\int_a^b |f(x)|^2 \rho(x) \mathrm{d}x < \infty.$$

Iloczyn skalarny jest zdefiniowany jako

$$(f|g) := \int_a^b \overline{f(x)} g(x) \rho(x) \mathrm{d}x.$$

30 Podprzestrzenie dopełniające

Niech na razie $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią z iloczynem skalarnym (niekoniecznie zupełną).

Jeśli $A \subset \mathcal{H}$, to $\mathrm{Span}(A)$ oznacza zbiór skończonych kombinacji liniowych elementów z A i

$$A^\perp := \{v \in \mathcal{H} \;:\; (v|z) = 0, \quad z \in A\}.$$

Stwierdzenie 30.1 *(1)* $\mathrm{Span}(A)$ *jest podprzestrzenią.*
(2) $A^\perp$ *podprzestrzenią domkniętą.*
(3) $A \subset B \;\Rightarrow A^\perp \supset B^\perp$
(4) $(A^\perp)^\perp \supset \overline{\mathrm{Span}(A)}$

Dowód. (1), (2) i (3) są oczywiste. Żeby pokazać (4) zauważamy, że $(A^\perp)^\perp \supset A$. Ale $(A^\perp)^\perp$ jest przestrzenią domkniętą na mocy (2). Więc zawiera najmniejszą podprzestrzeń domkniętą zawierającą A, czyli $\overline{\mathrm{Span}(A)}$. □

Załóżmy teraz, że $\mathcal{H}$ jest przestrzenią Hilberta.

Twierdzenie 30.2 *Niech $\mathcal{K}$ będzie podprzestrzenią domkniętą w $\mathcal{H}$. Wtedy $\mathcal{K}^\perp$ jest podprzestrzenią domkniętą i*

$$\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp = \mathcal{H}, \quad (\mathcal{K}^\perp)^\perp = \mathcal{K}.$$

Dowód. Niech

$$\inf_{w\in\mathcal{K}} \|v - w\| =: d.$$

Wtedy istnieje ciąg $y_n \in \mathcal{K}$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} \|v - y_n\| = d.$$

Wtedy korzystając najpierw z tożsamości równoległoboku a potem z tego, że $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in \mathcal{K}$ dostajemy

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= 2\|y_n - v\|^2 + 2\|y_m - v\|^2 - 4\|v - \tfrac{1}{2}(y_n + y_m)\|^2 \\ &\leq 2\|y_n - v\|^2 + 2\|y_m - v\|^2 - 4d^2 \to 0. \end{aligned}$$

Czyli (y_n) jest ciągiem Cauchy'ego i istnieje

$$\lim_{n\to\infty} y_n =: y.$$

Oczywiście, $y \in \mathcal{K}$ i jest to element najbliższy x. Kładziemy $z := v - y$. Pokażemy, że $z \in \mathcal{K}^\perp$. Niech $w \in \mathcal{K}$. Wtedy

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &= \|v - y\|^2 \leq \|v - (y + tw)\|^2 \\ &= \|z - tw\|^2 = \|z\|^2 - \bar{t}(w|z) - t(\overline{(w|z)} + |t|^2\|w\|^2. \end{aligned}$$

Podstawiamy $t = \frac{\overline{(w|z)}}{\|w\|^2}$. Dostajemy

$$0 \leq -\frac{|(w|z)|^2}{\|w\|^2}.$$

Czyli $\mathrm{Re}(w|z) = 0$.. To pokazuje, że $\mathrm{Span}(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}^\perp) = \mathcal{H}$.

$\mathcal{K} \cap \mathcal{K}^\perp = \{0\}$ jest oczywiste. Z tego wynika jednoznaczność pary $y \in \mathcal{K}$, $z \in \mathcal{K}^\perp$. To kończy dowód (2).

Pokażemy teraz, że $(\mathcal{K}^{\perp})^{\perp} \subset \mathcal{K}$. Niech $(v \in \mathcal{K}^{\perp})^{\perp}$. Wtedy $v = y + z$, gdzie $y \in \mathcal{K}$, $z \in \mathcal{K}^{\perp}$. Ale $(z|v) = 0$, $(z|y) = 0$. Mamy

$$(z|v) = \|y\|^2 + (y|z).$$

Stąd $(z|z) = 0$, czyli $z = 0$ a więc $v \in \mathcal{K}$ □

Wniosek 30.3

$$A^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Span}(A)}$$

Dowód.

$$\overline{\mathrm{Span}(A)}^{\perp\perp} \supset A^{\perp\perp} \supset \overline{\mathrm{Span}(A)}$$

wynika ze Stwierdzenia 30.1.

$$\overline{\mathrm{Span}(A)}^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Span}(A)}$$

wynika z Twierdzenia 30.2. □

31 Bazy ortonormalne

Załóżmy na razie, że $\mathcal{H}$ jest przestrzenią z iloczynem skalarnym. $A \subset \mathcal{H}$ jest układem ortogonalnym, gdy $e_1, e_2 \in A$, i $e_1 \neq e_2$ implikuje $(e_1|e_2) = 0$. $A \subset \mathcal{H}$ jest układem ortonormalnym, gdy jest on układem ortogonalnym oraz jeśli $e \in A$, to $\|e\| = 1$.

Twierdzenie 31.1 *Niech $(e_1, \ldots, e_N)$ będzie układem ortonormalnym. Zachodzi wtedy* **tw. Pitagorasa**

$$\|v\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |(v|e_n)|^2 + \|v - \sum_{n=1}^{N} (e_n|v)e_n\|^2$$

oraz **nierówność Bessela***:*

$$\|v\|^2 \geq \sum_{n=1}^{N} |(v|e_n)|^2.$$

Zakładamy teraz, że $\mathcal{H}$ jest przestrzenią Hilberta.

Definicja 31.2 *Układ ortonormalny maksymalny nazywamy bazą ortonormalną.*

Twierdzenie 31.3 *Niech $\{e_i\}_{i\in I}$ będzie układem ortonormalnym. Jest to baza ortonormalna, gdy zachodzi jeden z poniższych warunków:*
(1) $(\{e_i\}_{i\in I})^{\perp} = \{0\}$.
(2) $\overline{\mathrm{Span}(\{v_i\}_{i\in I})} = \mathcal{H}$

Twierdzenie 31.4 *Każdy układ ortonormalny można uzupełnić do bazy ortonormalnej.*

Dowód. Niech $\mathcal{B}$ oznacza zbiór układów ortonormalnych uporządkowanych przez inkluzję. Niech $\{A_i \ : \ i \in I\} \subset \mathcal{B}$ będzie podzbiorem liniowo uporządkowanym. Wtedy

$$\cup_{i\in I} A_i$$

jest też układem ortonormalnym. Jest to jednocześnie górne ograniczenie zbioru $\{A_i \ : \ i \in I\}$. Zatem możemy zastosować lemat Kuratowskiego-Zorna. □

Podobnie definiujemy bazę ortogonalną. Z każdej bazy ortogonalnej $(w_i)_{i\in I}$ można utworzyć bazę ortonormalną $(\|w_i\|^{-\frac{1}{2}} w_i)_{i\in I}$.

Twierdzenie 31.5 *Niech $(e_i)_{i\in I}$ będzie bazą ortonormalną i $v \in \mathcal{H}$.*
(1)

$$v = \sum_{i\in I} (e_i|v) e_i, \tag{31.30}$$

oraz

$$\|v\|^2 = \sum_{i\in I} |(v|e_i)|^2.$$

(2) Jeśli

$$v = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i,$$

to $\lambda_i = (e_i|v)$.

Dowód. Z nierówńsci Bessela wynika, że jest skończenie wiele współczynników $> \epsilon > 0$. Zatem przeliczalnie wiele współczynników jest różna od zera. Ponumerujmy niezerowe wyrazy $(e_{i_n}|v)$, $n = 1, 2, \ldots$ Z nierówności Bessela dostajemy

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(e_i|v)|^2 \leq \|v\|^2.$$

Połóżmy

$$v_N := \sum_{n=1}^{N} (e_i|v) e_i,$$

Wtedy dla $N < M$

$$\|v_M - v_M\|^2 = \sum_{i=N+1}^{M} |(e_i|v)|^2.$$

Zatem z zupełności $\mathcal{H}$ wynika zbieżnośc v_N czyli zbieżność szeregujest zbieżna. Poza tym wektor

$$v - \sum_{i\in I} e_i (e_i|v)$$

jest ortogonalny do bazy. Zatem równy jest zero. To dowodzi (1) □

Twierdzenie 31.6 *Niech B_1 i B_2 będą bazami ortonormalnymi w X. Wtedy są one równoliczne.*

Dowód. Jeśli B_1 lub B_2 jest skończone, to tak jak na Algebrze I.

Dla każdego $y \in B_1$ istnieje przeliczalnie wiele $x \in B_2$ takich, że $(x|y) \neq 0$. Dla każdego $x \in B_2$ znajdziemy $y \in B_1$ taki, że $(x|y) \neq 0$. Zatem istnieje funkcja $f : B_2 \to B_1$ taka, że przeciwobraz każdego zbioru jest przeliczalny. Zatem

$$|B_2| \leq |B_1 \times \mathbf{N}| = \max(|B_1|, \aleph_0).$$

Podobnie sprawdzamy, że

$$|B_1| \leq \max(|B_2|, \aleph_0).$$

□

Definicja 31.7 *Moc bazy nazywamy wymiarem przestrzeni.*

Definicja 31.8 *Operator liniowy $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ nazywamy unitarnym, gdy jest bijekcją i*

$$(Uw|Uv) = (w|v)$$

Przestrzenie $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ nazywamy izomorficznymi, gdy istnieje operator unitarny z $\mathcal{H}_1$ na H_2.

Twierdzenie 31.9 *Dwie przestrzenie Hilberta są izomorficzne, $\Leftrightarrow$ mają ten sam wymiar.*

Dowód. Niech $\{x_i \,:\, i \in I\}$ będzie bazą ortonormalną $\mathcal{H}$. Wystarczy pokazać, że $\mathcal{H}$ jest izomorficzna z $L^2(I)$. Definiujemy operator unitarny

$$(Uv)_i := (x_i|v).$$

□

32 Przestrzeń sprzężona do przestrzeni Hilberta

Twierdzenie 32.1 (Lemat Riesza) *Wzór*

$$\langle C_{\mathcal{H}}(v)|x\rangle := (v|x)$$

definiuje antyliniową bijektywną izometrię $\mathcal{H}$ na $\mathcal{H}'$.

Dowód. Izometryczność:

$$\|C(v)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |(v|x)| \leq \|v\|.$$

Wystarczy wziąć $x = \frac{v}{\|v\|}$ by dostać równość.

Surjektywność: Niech $w \in \mathcal{H}'$ i $\mathcal{K} := \mathrm{Ker} w$. Jeśli $\mathcal{K} = \mathcal{H}$, to $w = C(0)$. Jeśli nie, to niech $x_0 \in \mathcal{K}^\perp$, $\|x_0\| = 1$. Połóżmy

$$v := x_0 \overline{\langle w|x_0\rangle}.$$

Pokażemy, że $w = C(v)$.

Dowolny wektor y można przedstawić jako

$$y = \left(y - \frac{\langle w|y\rangle}{\langle w|x_0\rangle} x_0\right) + \frac{\langle w|y\rangle}{\langle w|x_0\rangle} x_0$$

Pierwszy wyraz należy do $\mathcal{K}$. Zatem

$$\begin{aligned} (v|y) &= \left(x_0 \overline{\langle w|x_0\rangle} | \tfrac{\langle w|y\rangle}{\langle w|x_0\rangle} x_0\right) \\ &= \tfrac{\langle w|y\rangle \langle w|x_0\rangle}{\langle w|x_0\rangle} = \langle w|y\rangle. \end{aligned}$$

□

Przestrzeń sprzężona do przestrzeni Hilberta sama jest przestrzenią Hilberta:

$$(v|w) := (C_{\mathcal{H}}^{-1} w | C_{\mathcal{H}}^{-1} v), \quad v, w \in \mathcal{H}'.$$

Twierdzenie 32.2 *Przestrzeń Hilberta jest refleksywna i* $C_{\mathcal{H}'} C_{\mathcal{H}} = \mathbf{1}$.

Dowód. Niech $y \in \mathcal{H}$, $v \in \mathcal{H}'$. Wtedy

$$\langle C_{\mathcal{H}'} C_{\mathcal{H}} y | v\rangle = (C_{\mathcal{H}} y | v) = (C_{\mathcal{H}}^{-1} v | y) = \langle v|y\rangle = \langle \phi y | v\rangle.$$

Czyli $C_{\mathcal{H}'} C_{\mathcal{H}} = \phi$. Ale $C_{\mathcal{H}'}$ i $C_{\mathcal{H}}$ cą bijektywne, czyli ϕ też jest bijekcją, (którą utożsamiamy z identycznością). □

Mówiąc o przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ mamy na myśli pewien zbiór wyposażony w strukturę. Na ogół oznaczamy ten zbiór tą samą literą $\mathcal{H}$. Dla większej precyzji oznaczmy ten zbiór chwilowo inaczej, np. $\mathcal{H}_{\mathrm{set}}$. Czyli $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_{\mathrm{set}}, 0, \cdot, (\cdot|\cdot)\}$. Możemy również wyposażyć $\mathcal{H}_{\mathrm{set}}$ w inną strukturę, którą będziemy oznaczać przez $\bar{\mathcal{H}} = \{\mathcal{H}_{\mathrm{set}}, 0, \cdot_{\bar{\mathcal{H}}}, (\cdot|\cdot)_{\bar{\mathcal{H}}}\}$, gdzie

$$\lambda \cdot_{\bar{\mathcal{H}}} \phi = \bar{\lambda} \cdot \phi, \quad \lambda \in \mathbf{C}, \quad \phi \in \mathcal{H}_{\mathrm{set}},$$

$$(\phi|\psi)_{\bar{\mathcal{H}}} := \overline{(\phi|\psi)}.$$

Przestrzeń $\bar{\mathcal{H}}$ nazywamy przestrzenią zespolenie sprzężoną do $\mathcal{H}$. Zauważmy, że $\overline{\bar{\mathcal{H}}} = \mathcal{H}$. Odwzorowanie tożsamościowe z $\mathcal{H}$ w $\bar{\mathcal{H}}$ jest antyliniowe Odwzorowania antyliniowe z $\mathcal{H}$ w $\mathcal{K}$ odpowiadają odwzorowaniom liniowym z $\bar{\mathcal{H}}$ w $\mathcal{K}$.

Lemat Riesza można też sformułować jak następuje

Twierdzenie 32.3 (Lemat Riesza)' *Wzór*

$$\langle C(v)|x\rangle := (v|x)$$

definiuje operator unitarny z $\bar{\mathcal{H}}$ *na* $\mathcal{H}'$.

Formą półtoraliniową na $\mathcal{K} \times \mathcal{H}$ nazywamy odwzorowanie

$$\mathcal{K} \times \mathcal{H} \ni (\phi, \psi) \mapsto a(\phi, \psi) \in \mathbf{C}$$

antyliniowe ze względu na pierwszy argument i liniowe ze względu na drugi argument. Mówimy, że forma a jest ograniczona, gdy

$$|a(\phi, \psi)| \leq C\|\phi\|\|\psi\|.$$

Stwierdzenie 32.4 *1) Niech a będzie ograniczoną formą półtoraliniową na $\mathcal{K}\times\mathcal{H}$. Wtedy istnieje dokładnie jeden operator $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ taki, że*

$$a(\phi, \psi) = (\phi|A\psi).$$

2) Jeśli $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, to $(\phi|A\psi)$ jest ograniczoną formą półtoraliniową na $\mathcal{K} \times \mathcal{H}$.

Dowód. 2) jest oczywiste. Żeby pokazać 1) zauważmy, że $\phi \mapsto a(\phi|\psi)$ jest formą antyliniową na $\mathcal{K}$. Zatem istnieje $\eta \in \mathcal{K}$ taki, że $a(\phi, \psi) = (\phi|\eta)$. Kładziemy $A\psi := \eta$.

33 Operatory ograniczone w przestrzeni Hilberta

Definicja 33.1 *Niech $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ będą przestrzeniami Hilberta i $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Wtedy operator A^* zadany (jednoznacznie) wzorem*

$$(A^*\psi|\phi) := (\psi, A\phi)$$

Nazywamy operatorem (hilbertowsko) sprzężonym do A.

Uwaga: definicja jest poprawna, bo $(\psi|A\phi)$ jest ograniczoną formą półtoraliniową.

Oczywiście, hilbertowska i banachowska sprzężoność związane są następującą relacją:

$$A^* = C_{\mathcal{H}}^{-1} A' C_{\mathcal{K}}. \tag{33.31}$$

Twierdzenie 33.2 *Sprzężenie hilbertowskie ma następujące własności:*

1) $\|A^*\| = \|A\|$

2) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A$

3) $(A+B)^* = A^* + B^*$,

4) $(AB)^* = B^* A^*$,

5) $A^{**} = A$,

6) $(\mathrm{Ran}A)^\perp = \mathrm{Ker}A^*$,

7) $(\mathrm{Ran}A^*)^\perp = \mathrm{Ker}A$,

8) A *jest odwracalny* $\Leftrightarrow A^*$ *jest odwracalny* $\Leftrightarrow \|A\phi\| \geq C\|\phi\|$ *i* $\|A^*\phi\| \geq C\|\phi\|$, *i wtedy* $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

9) $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$.

Dowód. Stosujemy tożsamość 33.31 i twierdzenie o operatorach sprzężonych banachowsko. □

Definicja 33.3 *Operator $A \in B(\mathcal{H})$ nazywamy samosprzężonym, gdy*

$$A = A^*$$

czyli

$$(A\psi|\phi) = (\psi|A\phi), \ \ \psi, \phi \in \mathcal{H}.$$

Twierdzenie 33.4 *Następujące warunki są równoważne Niech $A \in B(\mathcal{H})$*

1) $A = A^*$,

2) $(A\psi|\phi) = (\psi|A\phi), \ \ \psi, \phi \in \mathcal{H}.$,

3) $(\psi|A\phi) = \overline{(\psi|A\phi)}, \ \ \psi, \phi \in \mathcal{H}$,

4) $(\phi|A\phi) \in \mathbf{R}$.

Dowód. 1)⇒2)⇒3)⇒4)⇒1) jest oczywiste. Żeby pokazaż 4)⇒2) stosujemy tożsamość polaryzacyjną

$$\begin{aligned}
(\psi|A\phi) &= \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{j=0}^{3}(-i)^j(\psi + i^j\phi|A(\psi + i^j\phi)), \\
\overline{(\phi|A\psi)} &= \tfrac{1}{4}\overline{\textstyle\sum_{j=0}^{3}(-i)^j(\phi + i^j\psi|A(\phi + i^j\psi))} \\
&= \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{j=0}^{3}(-i)^j(\psi + i^j\phi|A(\psi + i^j\phi))
\end{aligned}$$

□

Definicja 33.5 *Operator $A \in B(\mathcal{H})$ spełniający warunki twierdzenia 33.4 nazywamy operatorem samosprzężonym.*

Operator $A \in B(\mathcal{H})$ taki, że

$$(\phi|A\phi) \geq 0$$

to A nazywamy operatorem dodatnim.

Jak wynika z Twierdzenia **??**, operatory dodatnie s samosprzężone.

Twierdzenie 33.6 *Niech A będzie samosprzężony. Wtedy $\sigma(A) \subset \mathbf{R}$.*

Dowód. Niech $\mu \neq 0$, $\mu, \lambda \in \mathbf{R}$. Mamy

$$\|(A-(\lambda+i\mu))\phi\|^2 = \|(A-\lambda)\phi\|^2 + \mu^2\|\phi\|^2 \geq \mu^2\|\phi\|^2.$$

Poza tym, $(A-(\lambda+i\mu))^* = A-(\lambda-i\mu)$. Zatem

$$\|(A-(\lambda+i\mu))^*\phi\|^2 = \|(A-\lambda)\phi\|^2 + \mu^2\|\phi\|^2 \geq \mu^2\|\phi\|^2.$$

Czyli $A-(\lambda+i\mu)$ jest odwracalny. $\square$.

Lemat 33.7 *Niech A będzie samosprzężony. Wtedy*

$$\|A\| = \sup_{\|\phi\|\leq 1} |(\phi|A\phi)|.$$

Dowód. Niech $\psi, \phi \in \mathcal{H}$. Pokażemy najpierw, że

$$|(\psi|A\phi)| \leq (\|\psi\|^2 + \|\phi\|^2) \sup_{\|\eta\|\leq 1} (\eta|A\eta).$$

Zastępując ψ przez $\mathrm{e}^{i\alpha}\psi$ można założyć, że $(\psi|A\phi)$ jest liczbą dodatnią. Wtedy

$$\begin{aligned}
&(\psi|A\phi) = \tfrac{1}{2}((\psi|A\phi) + (\phi|A\psi)) \\
&= \tfrac{1}{4}\left((\psi+\phi|A(\psi+\phi) - (\psi-\phi|A(\psi-\phi))\right) \\
&\leq \tfrac{1}{4}\left(\|\phi+\psi\|^2 + \|\phi-\psi\|^2\right) \sup\nolimits_{\|\eta\|=1} |(\eta|A\eta)| \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\|\phi\|^2 + \|\psi\|^2\right) \sup\nolimits_{\|\eta\|=1} |(\eta|A\eta)|
\end{aligned}$$

Zatem jeśli $\|\psi\| = \|\phi\| = 1$, to

$$|(\psi|A\phi)| \leq \sup_{\|\eta\|=1} |(\eta|A\eta)|.$$

Ale

$$\|A\| = \sup_{\|\phi\|=\|\psi\|=1} |(\psi|A\phi).$$

$\square$

Twierdzenie 33.8 *Operator A^*A jest dodatni i*

$$\|A^*A\| = \|A\|^2.$$

Dowód. A^*A jest dodatni, bo

$$(\phi|A^*A\phi) = \|A\phi\|^2.$$

Zatem A^*A jest samosprzężony i możemy zastosować Lemat 33.7:

$$\|A^*A\| = \sup_{\|\phi\|=1} (\phi|A^*A\phi) = \sup_{\|\phi\|=1} (A\phi|A\phi) = \|A\|^2.$$

□

Twierdzenie 33.9 *Jeśli A jest samosprzężony, to*

$$\|A\| = r(A).$$

Dowód. Korzystając z tego, że $\|A\|^2 = \|A^*A\| = \|A^2\|$ dostajemy

$$\|A^{2^n}\|^{1/2^n} = \|A\|.$$

Zatem

$$r(A) = \lim_{m\to\infty} \|A^m\|^{1/m} = \|A\|.$$

□

Definicja 33.10 *Dla I borelowskiego podzbioru $\mathbf{R}$ oznaczamy przez $\mathcal{L}^\infty(I)$ zbiór funkcji borelowskich ograniczonych na I.*

Twierdzenie 33.11 Twierdzenie spektralne dla operatorw samosprzonych. *Niech A będzie operatorem samosprzężonym. Wtedy istnieje jedyne odwzorowanie*

$$\mathcal{L}^\infty(\sigma(A)) \ni f \mapsto f(A) \in B(\mathcal{H}),$$

które pokrywa się na $\mathcal{A}(\sigma)$ z odwzorowaniem zdefiniowanym poprzednio i spenia
0) $f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(A) \geq 0$,

Ma ono poza tym następujące własności

1) $f = 1 \Rightarrow f(A) = 1,$

2) $f(x) = x \Rightarrow f(A) = A,$

3) $fg(A) = f(A)g(A),$

4) $(\lambda f)(A) = \lambda f(A),$

5) $f(A)^* = \bar{f}(A),$

6) $\|f(A)\| \leq \sup |f|,$ *jjeśli* $f \in C(\sigma(A),$ *to* $\|f(A)\| = \sup |f|.$

7) $A\psi = \lambda\psi \Rightarrow f(A)\psi = f(\lambda)\psi,$

8) $B \in B(\mathcal{H}),\ [B, A] = 0 \Rightarrow [B, f(A)] = 0,$

9) $\sigma(f(A)) \subset f(\sigma(A)),$ *jeśli* $f \in C(\sigma(A),$ *to* $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)),$

10) $g \in \mathcal{L}^\infty(f(\sigma(A)) \Rightarrow g \circ f(A) = g(f(A)).$

Dowód. Niech $f \in \mathcal{A}(\sigma(A))$ Określamy $f(A)$ przy użyciu całek konturowych. Wiemy, że

$$\sigma(f(A) = f(\sigma(A)).$$

Poza tym

$$\begin{aligned} \|f(A)\|^2 &= \|f(A)^* f(A)\| \\ &= \|(\bar{f}f)(A)\| \\ &= \sup_{\lambda \in \sigma(\bar{f}f)(A))} |\lambda| \\ &= \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |(\bar{f})(\lambda)| \\ &= \left(\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda)|\right)^2 = \|f\|_\infty^2. \end{aligned}$$

Zatem odwzorowanie $\mathcal{A}(\sigma(A) \ni f \mapsto f(A) \in B(\mathcal{H})$ jest izometrią. Ponieważ $\mathcal{A}(\sigma(A))$ jest gęste w $C(\sigma(A))$, zatem odwzorowanie to można rozszerzyć na całe $C(\sigma(A))$ z zachowaniem normy. Własności 1)-5), 7)-9) wynikają przez ciągłość z analogicznych własności dla holomorficznego rachunku funkcyjnego.

Pokażmy 0). Niech $f \geq 0$. Wtedy istnieje rzeczywista funkcja $g \in C(\sigma(A))$ taka, że $f = g^2$. Wtedy $g(A)$ jest samosprzężony i

$$f(A) = g^2(A)$$

jest dodatni.

Następnie przy pomocy Twierdzenia Riesza-Markowa rozszerzamy definicję $F(A)$ z $C(\sigma(A)$ na $\mathcal{L}^\infty(\sigma(A))$. □

Mówimy, że $A_1, \ldots, A_n$ wzajemnie komutują, gdy

$$[A_i, A_j] = 0,\ i, j = 1, \ldots, n.$$

Jesli $A_1, \ldots, A_n$ są w dodatku samosprzężone, to wtedy z twierdzenia spektralnego 8) wynika, że $[f(A_i), f(A_j)] = 0$.

Definicja 33.12 *Wspólne spektrum rodziny wzajemnie komutujących operatorów samosprzężonych $A_1, \ldots, A_n$ zdefiniowane jest natępującym warunkiem. $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \notin \sigma(A_1, \ldots, A_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\epsilon > 0$ taki, że dla każdej funkcji $f_1 \in C(\sigma(A_1)), \ldots, f_n \in C(\sigma(A_n))$ gdzie $\mathrm{supp} f_i \in [\lambda_i - \epsilon, \lambda_i + \epsilon]$ mamy*

$$f_1(A_1) \ldots f_n(A_n) = 0.$$

Twierdzenie 33.13 *(Twierdzenie spektralne dla komutującej rodziny operatorów samosprzężonych). Niech $(A_1, \ldots, A_n)$ będzie rodziną wzajemnie komutujących operatorów samosprzężonych.*

$$\mathcal{L}^\infty(\sigma(A_1, \ldots, A_n)) \ni f \mapsto f(A_1, \ldots, A_n) \in B(\mathcal{H}),$$

takie, że jeśli $f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)\Big|_{\sigma(A_1,\ldots,A_n)}$, to

$$f(A_1, \ldots, A_n) = f_1(A_1) \cdots f_n(A_n)$$

i spenia
0) $f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(A_1, \ldots, A_n) \geq 0$,
Ma ono poza tym następujące własności

1) $f = 1 \Rightarrow f(A_1, \ldots, A_n) = 1$,
2) $f(x_1, \ldots, x_n) = x_j \Rightarrow f(A_1, \ldots, A_n) = A_j$,
3) $fg(A_1, \ldots, A_n) = f(A_1, \ldots, A_n) g(A_1, \ldots, A_n)$,
4) $(\lambda f)(A_1, \ldots, A_n) = \lambda f(A_1, \ldots, A_n)$,
5) $f(A_1, \ldots, A_n)^* = \bar{f}(A_1, \ldots, A_n)$,
6) $\|f(A_1, \ldots, A_n)\| \leq \sup |f|$,
   jeśli $f \in C(\sigma(A_1, \ldots, A_n))$, *to* $\|f(A_1, \ldots, A_n)\| = \sup |f|$.
7) $A_i \psi = \lambda_i \psi,\ i = 1, \ldots, n \Rightarrow f(A_1, \ldots, A_n)\psi = f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\psi$,
8) $B \in B(\mathcal{H}),\ [B, A_i] = 0,\ i = 1, \ldots, n, \Rightarrow [B, f(A_1, \ldots, A_n)] = 0$,
9) $\sigma(f(A_1, \ldots, A_n)) \subset f(\sigma(A_1, \ldots, A_n))$,
   jeśli $f \in C(\sigma(A_1, \ldots, A_n)$, *to* $\sigma(f(A_1, \ldots, A_n)) = f(\sigma(A_1, \ldots, A_n))$,
10) $g \in \mathcal{L}^\infty(f(\sigma(A_1, \ldots, A_n)) \Rightarrow g \circ f(A_1, \ldots, A_n) \supset g(f(A_1, \ldots, A_n))$.

Definicja 33.14 *Operator A nazywamy normalnym, gdy*

$$A^* A = A A^*.$$

Każdy operator A można przedstawić jednoznacznie jako

$$A = A_R + iA_I,$$

gdzie A_R i A_I są samosprzężone. W rzeczy samej, kładziemy

$$A_R := \frac{A + A^*}{2}, \ A_I := \frac{A - A^*}{2i}.$$

A jest normalny $\Leftrightarrow [A_R, A_I] = 0$.

Twierdzenie spektralne jest prawdziwe również dla opewratorów normalnych. Jedyną różnicą jest punkt 5), w którym w przypadku operatorów normalnych powinno być

$$f(A)^* = \bar{f}(A^*).$$

Dowód twierdzenia spektralnego dla operatorów normalnych Niech A będzie normalny i $A = A_R + iA_I$, gdzie A_R, A_I są samosprzężone. Stosujemy twierdzenie spektralne dla rodziny A_R, A_I, zauważając, że

$$\sigma(A) = \{x + iy \ : \ (x, y) \in \sigma(A_R, A_I)\}.$$

□

Definicja 33.15 *Operator U nazywamy częściową izometrią, gdy U^*U i UU^* są rzutami,*

Twierdzenie 33.16 *Niech $W \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Następujące własności są równoważne:*
1) $U^*U = \mathbf{1}$,
2) $(U\phi|U\psi) = (\phi|\psi), \ \ \phi, \psi \in \mathcal{H}$,
3) U jest izometrią czyli $\|U\phi\| = \|\phi\|$.

Definicja 33.17 *Operator U spełniający własności Twierdzenia 33.16 nazywamy liniową izometrią.*

Dowód. 1)⇔2) jest oczywiste, 2)⇒3) też. 3)⇒2) wynika z tożsamości polaryzacyjnej:

$$\begin{aligned}(U\psi|U\phi) &= \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{j=0}^{3}(-i)^j(U\psi + i^jU\phi|U\psi + i^jU\phi),\\ (\psi|\phi) &= \textstyle\sum_{j=0}^{3}(-i)^j(\phi + i^j\psi|\phi + i^j\psi).\end{aligned}$$

□

Stwierdzenie 33.18 *Jeśli U jest liniową izometrią, to U^*U jest rzutem na* $\mathrm{Ran}U$.

Dowód. Sprawdzamy najpierw, że U^*U jest rzutem ortogonalnym. Ze wzoru $UU^*U = U$ wynika, że $\mathrm{Ran}UU^* \supset \mathrm{Ran}U$. $\mathrm{Ran}UU^* \subset \mathrm{Ran}U$ jest oczywiste. □

Twierdzenie 33.19 *Niech $W \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Następujące własności są równoważne: temu, że U jest unitarny:*
1) $U^*U = UU^* = \mathbf{1}$,
2) U jest izometrią i surjekcją,
3) U jest bijekcją i $U^* = U^{-1}$.

Twierdzenie 33.20 *1) Operator U jest unitarny $\Leftrightarrow$ U jest normalny i jego spektrum jest zawarte w $\{z \ : \ |z| = 1\}$.*
2) Operator A jest samosprzężony $\Leftrightarrow$ U jest normalny i jego spektrum jest zawarte w $\mathbf{R}$.
3) Operator A jest dodatni $\Leftrightarrow$ U jest normalny i jego spektrum jest zawarte w $\mathbf{R}_+$.

Dowód. Udowodnijmy 1), $\Rightarrow$. Niech U będzie unitarny. Zauważmy najpierw, że $\|U\| = 1$. Poza tym, ani U, ani U^* nie mają wartości własnych poza okręgiem jednostkowym.

Niech $|\lambda| \neq 1$

$$\begin{aligned}
&((U-\lambda)\phi|(U-\lambda)\phi) \\
&= (1+|\lambda|^2)\|\phi\|^2 - \lambda(U\phi|\phi) - \bar{\lambda}(\phi|U\phi) \\
&\geq (1+|\lambda|^2 - 2|\lambda|)\|\phi\|^2 \\
&= (1-|\lambda|)^2\|\phi\|^2
\end{aligned}$$

Jeśli $\phi \perp \mathrm{Ran}(U-\lambda)$, to $U^*\phi = \bar{\lambda}\phi$, co jest niemożliwe. Zatem $U - \lambda$ jest odwracalny. □

Twierdzenie 33.21 *Niech A będzie operatorem. Wtedy istnieją i są określone jednoznacznie operator dodatni $|A|$ i częściowa izometria U takie, że $\mathrm{Ker}U = \mathrm{Ker}A$ i*

$$A = U|A|.$$

Poza tym $\mathrm{Ran}U = \overline{\mathrm{Ran}A}$.

Dowód. Operator A^*A jest dodatni. Można więc zdefiniować

$$|A| := \sqrt{A^*A}.$$

Operator U definiujemy najpierw na $\mathrm{Ran}|A|$ warunkiem

$$U(|A|\phi) = A\phi.$$

Jest on izometryczny, bo

$$\||A|\phi\|^2 = (\phi||A|^2\phi) = (\phi|A^*A\phi) = \|A\phi\|^2$$

i prawidłowo określony. Można go przedłużyć do izometrii na $\overline{\mathrm{Ran}A}$. Na $\mathrm{Ker}|A| = \mathrm{Ran}|A|^\perp$ przedłużamy U kładąc $U\phi = 0$. □

34 Operatory nieograniczone w przestrzeni Hilberta

Definicja 34.1 *Niech $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ będą przestrzeniami Hilberta i niech $A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ będzie gęsto określony. Wtedy $\psi \in \mathcal{D}(A^*)$, gdy funkcjonał*

$$\mathcal{D}(A) \ni \phi \mapsto (\psi|A\phi)$$

jest ograniczony. Zatem istnieje $\eta \in \mathcal{H}$ taki, że

$$(\psi|A\phi) = (\eta|\phi).$$

Kładziemy

$$A^*\psi = \eta.$$

Mamy związek

$$A^* = C_{\mathcal{H}}^{-1} A' C_{\mathcal{K}}.$$

Twierdzenie 34.2 *Niech $A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ będzie domkniętym operatorem z gęstą dziedziną. Wtedy:*
1) $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}) \Leftrightarrow A^* \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ i $\|A*\| = \|A\|$.
2) A^* jest domknięty i ma gęstą dziedzinę,
3) $(\mathrm{Ran}\,A)^\perp = \mathrm{Ker}\,A^*$,
4) $(\mathrm{Ran}\,A^*) \perp = \mathrm{Ker}\,A$
5) $(A^*)^* = A$
6) Jeśli A lub B są ograniczone, to $(AB)^* = B^*A^*$,
7) A jest $\underline{\text{odwracalny}} \Leftrightarrow$, to A^* jest odwracalny i zachodzi $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$
8) $\sigma(A) = \overline{\sigma(A^*)}$, (gdzie kreska oznacza sprzężenie zespolone).

Twierdzenie 34.3 *Niech A ma gęstą dziedzinę. Wtedy*
1) A^* jest domknięty
2) $(\mathrm{Ran}\,A)^\perp = \mathrm{Ker}\,A^*$,
3) $\mathcal{D}(A) \cap (\mathrm{Ran}\,A^*)^\perp \supset \mathrm{Ker}\,A$.
4) $\mathcal{D}(A^*)$ jest gęsty w $\mathcal{K}$ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest domykalny.
5) Załóżmy, że A jest domykalny. Wtedy

$$(A^*)^* = \bar{A} \quad i \quad \bar{A}^* = A^*.$$

Definicja 34.4 *T jest symetryczny, gdy $T^* \supset T$, czyli*

$$(T\psi|\phi) = (\psi|T\phi), \ \psi, \phi \in \mathcal{D}(T).$$

T jest samosprzężony, gdy $T^* = T$, czyli jeśli dla $\psi \in \mathcal{K}$ istnieje $\eta \in \mathcal{H}$ takie, że

$$(\eta|\phi) = (\psi|T\phi), \ \phi \in \mathcal{D}(T),$$

to $\psi \in \mathcal{D}(T)$ i $T\psi = \eta$.

Twierdzenie 34.5 *Każdy operator samosprzężony jest symetryczny. Każdy samosprzężony jest domknięty. Każdy symetryczny jest domykalny. Jeśli A jest ograniczony, to jest samosprzężony $\Leftrightarrow$ jest symetryczny.*

Lemat 34.6 *Niech A będzie symetryczny. Wtedy zachodzi jedna z następujących możliwości*

$$1)\ \sigma(A) \subset \mathbf{R},$$
$$2)\ \sigma(A) = \overline{\mathbf{C}}_+,$$
$$3)\ \sigma(A) = \overline{\mathbf{C}}_-$$
$$4)\ \sigma(A) = \mathbf{C}.$$

Dowód. Niech $\lambda = \mu + i\nu$, $\mu, \nu \in \mathbf{R}$. Załóżmy, że $\lambda \in \rho(A)$. Niech $\phi \in \mathcal{D}(A) = \mathrm{Ran}(\lambda - A)^{-1}$. Wtedy

$$\|(\lambda - A)\phi\|^2 = \|(\mu - A)\phi\|^2 + \nu^2\|\phi\|^2 \geq \nu^2\|\phi\|^2.$$

Zatem

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq |\nu|^{-1}.$$

Stąd

$$\{z\ :\ |z - \lambda| < |\nu|\} \subset \rho(A).$$

Prosty geometryczny argument pokazuje, że jedynymi otwartymi podzbiorami $\mathbf{C}$ o powyższej wlasności są $\emptyset$, $\mathbf{C}_\pm$ i dopełnienie domkniętego podzbioru $\mathbf{R}$. $\square$

Twierdzenie 34.7 *Niech A będzie symetryczny. Wtedy następujące warunki są równoważne*

1) A jest samosprzężony.
2) A jest domknięty i $\mathrm{Ker}(A^* \pm i) = \{0\}$.
3) $\mathrm{Ran}(A \pm i) = \mathcal{H}$.
4) $\sigma(A) \subset \mathbf{R}$.
5) $\pm i \notin \sigma(A)$
5') Istnieją $\lambda_\pm \in \mathbf{C}_\pm$ takie, że $\lambda_\pm \notin \sigma(A)$.
Poza tym, jeśli
6) $\lambda \in \mathbf{R}$ i $\lambda \notin \sigma(A)$, to A jest samosprzężony.

Dowód. 1) $\Rightarrow$ 2). Oczywiście A jest domknięty. Jeśli $\phi \in \mathrm{Ker}(A^* \pm i) = \mathrm{Ker}(A \pm i)$, to

$$0 = \|(A \pm i)\phi\|^2 = \|A\phi\|^2 + \|\phi\|^2.$$

Czyli $\phi = 0$.

2 $\Rightarrow$ 3).

$$\overline{\mathrm{Ran}(A \pm i)} = (\mathrm{Ker}(A \pm i)^*)^\perp = \mathrm{Ker}(A^* \mp i)^\perp = \mathcal{H}.$$

Trzeba pokazać, że $\mathrm{Ran}(A \pm i)$ jest domknięty. Ale

$$\|(A \pm i)\phi\|^2 = \|A\phi\|^2 + \|\phi\|^2 \geq \|\phi\|^2.$$

$3 \Rightarrow 1$). Niech $\phi \in \mathcal{D}(A^*)$. Ponieważ $\mathrm{Ran}(A - i) = \mathcal{H}$, zatem istnieje $\eta \in \mathcal{D}(A)$ takie, że

$$(A - i)\eta = (A^* - i)\phi.$$

Ale

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^*).$$

Zatem $\phi - \eta \in \mathcal{D}(A^*)$ i $(A^* - i)(\phi - \eta) = 0$. Ale $\mathrm{Ran}(A + i) = \mathcal{H}$. Stąd $\mathrm{Ker}(A^* - i) = \{0\}$. Więc $\phi = \eta$. Zatem $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$.

$1, 2, 3) \Rightarrow 5$). 2) i 3) świadczą o tym, że $A \pm i$ są bijekcjami $\mathcal{D}(A)$ na $\mathcal{H}$. Nierówność

$$\|(A \pm i)\phi\|^2 \geq \|\phi\|^2$$

pokazuje, że $(A \pm i)^{-1}$ są ograniczone. Zatem $\pm i \notin \sigma(A)$

5) $\Rightarrow$ 3) jest oczywiste.

Równoważność 4), 5) i 5') i wynikanie 6) $\Rightarrow$ 4) wynika z Lematu 34.6. $\square$

Definicja 34.8 *Operator $(A, \mathcal{D})$ jest istotnie samosprzężony, gdy jego domknięcie jest samosprzężone.*

Twierdzenie 34.9 *Niech A będzie symetryczny. Wtedy następujące warunki są równoważne.*

1) A jest istotnie samosprzężony.

2) A^* jest samosprzężony.

3) $\mathrm{Ker}(A^* \pm i) = \{0\}$

4) $\overline{\mathrm{Ran}(A \pm i)} = \mathcal{H}$.

Dowód. 1) $\Rightarrow$ 2)

$$A^{**} = \bar{A} = \bar{A}^* = A^*.$$

Równoważność 3) i 4) wynika z tego, że

$$\mathrm{Ker}(A^* \pm i)^{\perp} = \overline{\mathrm{Ran}(A \mp i)}.$$

Twierdzenie 34.10 *(Twierdzenie spektralne) Niech A będzie samosprzężony. Wtedy istnieje jeden i tylko jeden dodatni $*-$homomorfizm*

$$\mathcal{L}^{\infty}(\sigma(A)) \ni f \mapsto f(A) \mapsto B(\mathcal{H})$$

taki, że jeśli $\lambda \notin \sigma(A)$ i $f(x) = (\lambda - x)^{-1}$, to

$$f(A) = (\lambda - A)^{-1}.$$

Dowód. Niech $\lambda \notin \sigma(A)$ i $f(x) = (\lambda - x)^{-1}$. Jest to operator normalny i ograniczony. Możemy dla niego zatem zastosować twierdzenie spektralne. □

Twierdzenie 34.11 *W przestrzeni Hilberta względna ograniczoność z A-normą c jest równoważna warunkowi*

$$\inf_{c>0} \|B(A^*A+c)^{-1/2}\| = a. \tag{34.32}$$

Jeśli A jest samosprzężony, to

$$\inf_{z\notin\sigma(A)} \|B(A-z)^{-1}\| = a. \tag{34.33}$$

Dowód. Równoważność (34.32) i

$$\inf_{c\geq 0}\sup_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|^2}{\|Ax\|^2 + c\|x\|^2} := a^2$$

jest oczywista.

Równoważność (34.32) i (34.33) dla operatorów samosprzężonych jest konsekwencją unitarności

$$B(A^2+c)^{-1/2}(A-i\sqrt{c}).$$

□

Twierdzenie 34.12 *(Kato-Rellich) Niech A będzie samosprzężony i B symetryczny z A−normą* < 1. *Wtedy* $A + B$ *jest samosprzężony na* $\mathcal{D}(A)$.

Twierdzenie 34.13 *Niech A będzie domknięty symetryczny. Wtedy*

$$n_\pm := \dim \mathrm{Ker}(\lambda - A^*),\ \ \lambda \in \mathbf{C}_\pm$$

nie zależy od λ. *Zachodzi jedna z następujących możliwości*

$$\begin{aligned}
&1)\ \sigma(A)\subset\mathbf{R}, && n_\pm = 0,\ \ A \textit{ jest samosprzężony}\\
&2)\ \sigma(A)=\overline{\mathbf{C}}_+, && n_+\neq 0, n_-=0,\ \ A \textit{ nie jest samosprzężony},\\
&3)\ \sigma(A)=\overline{\mathbf{C}}_- && n_+=0, n_-\neq 0,\ \ A \textit{ nie jest samosprzężony},\\
&4)\ \sigma(A)=\mathbf{C} && n_+\neq 0, n_-\neq 0,\ \ A \textit{ nie jest samosprzężony},
\end{aligned}$$

Dowód. Niech $\lambda = \mu + i\nu$. Pokażmy, że

$$\mathrm{Ker}(\lambda+\alpha-A^*)\cap\mathrm{Ker}(\lambda-A^*)^\perp = \emptyset,\ \ |\alpha|\leq|\nu|. \tag{34.34}$$

Mamy

$$\|(\bar\lambda - A)\phi\|^2 = \|(\mu-A)\phi\|^2 + nu^2\|\phi\|^2.$$

Zatem $\mathrm{Ran}(\bar{\lambda} - A)$ jest domknięty i $(\bar{\lambda} - A)^{-1}$ jako operator $\mathrm{Ran}(\bar{\lambda} - A) \to \mathcal{H}$ ma normę ν^{-1}.

Z domkniętości $\bar{\lambda} - A$ wynika i $\mathrm{Ran}(\bar{\lambda} - A)$ wynika

$$\mathrm{Ran}(\bar{\lambda} - A) = \mathrm{Ker}(\lambda - A^*)^{\perp}.$$

Więc jeśli $\psi \in \mathrm{Ker}(\lambda - A^*)^{\perp}$, to istnieje $\phi \in \mathcal{D}(A)$ takie, że

$$\psi = (\bar{\lambda} - A)\phi$$

i $\|\phi\| \leq \frac{\|\psi\|}{|\nu|}$. Jeśli poza tym $\psi \in \mathrm{Ker}(\lambda + \alpha - A^*)$, to

$$\begin{aligned} 0 &= ((\lambda + \alpha - A^*)\psi|\phi) \\ &= (\psi|(\bar{\lambda} - A)\phi) + \bar{\alpha}(\psi|\phi) \\ &= \|\psi\|^2 + \bar{\alpha}(\psi|\phi). \end{aligned}$$

Ale

$$|\|\psi\|^2 + \bar{\alpha}(\psi|\phi)| > (1 - |\alpha|/|\nu|)\|\psi\|^2 > 0,$$

co jest sprzecznością i kończy dowód (34.34).

Z (34.34) wynika, że

$$\dim\left(\mathrm{Ker}(\lambda + \alpha - A^*)\right) \leq \dim\left(\mathrm{Ker}(\lambda - A^*)\right)$$

$\square$

Twierdzenie 34.14 *Jeśli dla pewnego $M \in \mathbf{R}$ $A > M$, to*

$$\dim \mathrm{Ker}(\lambda - A^*)$$

jest stały dla $\lambda \in \mathbf{C} \backslash [M, \infty[$.

Dowód. Można przyjąć, że $M = 0$. Niech $\lambda = \mu + i\nu$ i $\mu < 0$.

$$\begin{aligned} &\|(\lambda - A)\phi\|^2 \\ &= \|A\phi\|^2 + \mu^2\|\phi\|^2 + \nu^2\|\phi\|^2 - 2\mu(\phi|A\phi) \\ &\geq \mu^2\|\phi\|^2 + \nu^2\|\phi\|^2. \end{aligned}$$

Dalej rozumujemy tak jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia. $\square$

Definicja 34.15 *Niech A będzie symetryczny i domknięty. Zdefiniujmy na $\mathcal{D}(A^*)$ następujący iloczyn skalarny:*

$$(\phi|\psi)_A := (\phi|\psi) + (A^*\phi|A^*\psi)$$

i formę antysymetryczną

$$[\phi|\psi]_A := (A^*\phi|\psi) - (\phi|A^*\psi).$$

Będziemy mówili o $A-$domkniętości i $A-$ortogonalności mając na myśli iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot)_A$. Przestrzeń jest $A-$symetryczna, gdy $[\cdot|\cdot]_A$ się zeruje na tej podprzestrzeni.

Twierdzenie 34.16 *Niech A będzie domknięty symetryczny.*
1) Każde domknięte rozszerzenie A jest obcięciem A^* na $A-$domkniętą podprzestrzeń w $\mathcal{D}(A^*)$ zawierającą $\mathcal{D}(A)$.
2)

$$\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A^* + i) \oplus \mathrm{Ker}(A^* - i)$$

składniki w powyższej sumie prostej są $A-$ortogonalne i

$$[\psi \oplus \psi_+ \oplus \psi_-|\phi \oplus \phi_+ \oplus \phi_-]_A = 2i(\psi_+|\phi_+) - 2i(\psi_-|\phi_-).$$

Dowód. 1) jest oczywiste. W 2) łatwe są $A-$ortogonalność i $A-$domkniętość.

Niech $\psi \in \mathcal{D}(A^*)$ i

$$\psi \perp \mathcal{D}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A^* - i) \oplus \mathrm{Ker}(A^* - i)$$

Czyli dla $\phi \in \mathcal{D}(A)$ mamy

$$0 = (A^*\psi|A^*\phi) + (\psi|\phi) = (A^*\psi|A\phi) + (\psi|\phi).$$

Zatem $A^*\psi \in \mathcal{D}(A^*)$ i

$$A^*A^*\psi = -\psi.$$

Zatem

$$(A^* + i)(A^* - i)\psi = 0.$$

Więc

$$(A^* - i)\psi \in \mathrm{Ker}(A^* + i).$$

Jeśli $\phi \in \mathrm{Ker}(A^* + i)$, to

$$i(\phi|(A^* - i)\psi) = (A^*\phi|(A^*)\psi) + (\phi|\psi) = (\phi|\psi)_A = 0$$

W szczególności, podstawiając $\phi = (A^* - i)\psi$, dostajemy

$$\psi \in \mathrm{Ker}(A^* - i).$$

Ponieważ $\psi \perp \mathrm{Ker}(A^* - i)$, więc $\psi = 0$. $\square$

Każda podprzestrzeń $A-$domknięta zawierająca $\mathcal{D}(A)$ jest postaci $\mathcal{D}(A) \oplus W$, gdzie

$$W \subset \mathrm{Ker}(A^* - i) \oplus \mathrm{Ker}(A^* - i).$$

Jeśli

$$A \subset B \subset A^*,$$

to podprzestrzeń W odpowiadającą B oznaczmy przez W_B. Będziemy pisali

$$W\check{} := \{v \in \mathrm{Ker}(A^* - i) \oplus \mathrm{Ker}(A^* - i) \ : \ [w, v]_A, \ w \in W\}.$$

Przestrzeń W jest $A-$symetryczna, gdy

$$W\check{} \supset W.$$

Twierdzenie 34.17 *Mamy*

$$W_{B^*} = (W_B)\check{}.$$

W szczególności B jest symetryczny, gdy W jest $A-$symetryczna. Każda podprzestrzeń $A-$symetryczna odpowiada częściowej izometrii $U : \mathrm{Ker}(A^* + i) \to \mathrm{Ker}(A^* - i)$. Wtedy

$$W := \{w \oplus Uw \ : \ w \in \mathrm{Ran} U^* U\}.$$

B jest samosprzężony, gdy U jest unitarny.

35 Przykłady

35.1 Różniczkowanie na prostej

Przykład 35.1

$$\mathcal{D}(D) = \{\phi \in L^2(\mathbf{R}) \ : \ \phi' \in L^2(\mathbf{R})\} \subset L^2(\mathbf{R}).$$

$$D\phi(x) := \frac{1}{i}\partial_x \phi(x),$$

$$\sigma^{\mathrm{pp}}(D) = \emptyset,$$

$$\sigma(D) = \overline{\mathbf{R}},$$

$$R(z, x, y) = \begin{cases} i\theta(x-y)\mathrm{e}^{iz(x-y)}, \ \mathrm{Im} z > 0, \\ -i\theta(y-x)\mathrm{e}^{iz(x-y)}, \ \mathrm{Im} z < 0. \end{cases}$$

$$\mathrm{e}^{\subset tD}\phi(x) = \phi(x+t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

35.2 Różniczkowanie na półprostej

Przykład 35.2

$$\mathcal{D}(D_{\max}) = \{\phi \in L^2(\mathbf{R}_+) \ : \ \phi' \in L^2(\mathbf{R}_+)\} \subset L^2(\mathbf{R}_+).$$

$$D_{\max}\phi(x) := \frac{1}{i}\partial_x \phi(x),$$

$$\sigma^{\mathrm{pp}}(D_{\max}) = \mathbf{C}_+,$$

$$\sigma(D_{\max}) = \overline{\mathbf{C}_+},$$

$$D_{\max}\mathrm{e}^{izx} = z\mathrm{e}^{izx}, \ \mathrm{Im}z > 0,$$

$$R(z,x,y) = -i\theta(y-x)\mathrm{e}^{iz(x-y)}, \ \mathrm{Im}z < 0.$$

$$\mathrm{e}^{\subset tD_{\max}}\phi(x) = \phi(x+t), \quad t \geq 0.$$

Przykład 35.3

$$\mathcal{D}(D_{\min}) = \{\phi \in L^2(\mathbf{R}_+) \ : \ \phi' \in L^2(\mathbf{R}_+), \ \phi(0) = 0\} \subset L^2(\mathbf{R}_+).$$

$$D_{\min}\phi(x) := \frac{1}{i}\partial_x \phi(x),$$

$$\sigma^{\mathrm{pp}}(D_{\min}) = \emptyset,$$

$$\sigma(D_{\min}) = \overline{\mathbf{C}_-},$$

$$R(z,x,y) = i\theta(x-y)\mathrm{e}^{iz(x-y)}, \ \mathrm{Im}z > 0.$$

$$D_{\min} \subset D_{\max}, \ D_{\min}^* = D_{\max}$$

$$\mathrm{e}^{\subset tD_{\min}}\phi(x) = \phi(x+t), \quad t \leq 0.$$

Mamy bowiem:

$$\begin{array}{l} (\psi|D_{\min}\phi) = \frac{1}{i}\int_0^\infty \bar{\psi}(x)\partial_x\phi(x)\mathrm{d}x \\ = -\frac{1}{i}\bar{\psi}(0)\phi(0) - \frac{1}{i}\int_0^\infty \partial_x\bar{\psi}(x)\phi(x)\mathrm{d}x \\ = -\frac{1}{i}\int_0^\infty \partial_x\bar{\psi}(x)\phi(x)\mathrm{d}x = (D_{\max}\psi|\phi). \end{array}$$

35.3 Różniczkowanie na odcinku

Przykład 35.4

$$\mathcal{D}(D_{\max}) = \{\phi \in L^2([0,1]) \ : \ \phi' \in L^2([0,1])\} \subset L^2([0,1]).$$

$$D_{\max}\phi(x) := \frac{1}{i}\partial_x\phi(x),$$

$$\sigma^{\mathrm{pp}}(D_{\max}) = \mathbf{C},$$

$$\sigma(D_{\max}) = \overline{\mathbf{C}},$$

$$D_{\max}\mathrm{e}^{izx} = z\mathrm{e}^{izx}, \ z \in \mathbf{C}.$$

Przykład 35.5 *Niech* $\kappa \in \mathbf{C}$.

$$\mathcal{D}(D_\kappa) = \{\phi \in L^2([0,1]) \ : \ \phi' \in L^2([0,1]), \ \kappa\phi(0) = \phi(1)\} \subset L^2([0,1]).$$

(Jeśli $\kappa = \infty$, *to* $\phi(0) = 0$*)*

$$D_\kappa\phi(x) := \frac{1}{i}\partial_x\phi(x),$$

$$\sigma^{\mathrm{pp}}(D_\kappa) = \{z : \ \mathrm{e}^{iz} = \kappa\},$$

$$\sigma(D_\kappa) = \overline{\{z : \ \mathrm{e}^{iz} = \kappa\}},$$

(Jeśli $\kappa = 0, \infty$, *to* $\sigma^{\mathrm{pp}}(D_\kappa) = \emptyset$ *i* $\sigma(D_\kappa) = \{\infty\}$*).*

$$R_\kappa(z,x,y) = \frac{i\mathrm{e}^{iz}}{\mathrm{e}^{iz} - \kappa}\theta(x-y)\mathrm{e}^{iz(x-y)} - \frac{i\kappa}{\mathrm{e}^{iz} - \kappa}\theta(y-x)\mathrm{e}^{iz(x-y)},$$

$$D_\kappa^* = D_{(\bar{\kappa})^{-1}},$$

w szczególności jeśli $|\kappa| = 1$, *to*

$$D_\kappa^* = D_\kappa.$$

$$\mathrm{e}^{\complement t D_\kappa}\phi(x) = \begin{cases} \kappa^n\phi(x+t), & n \leq t < n+1, \quad 0 \leq x \leq t-n \\ \kappa^{n-1}\phi(x+t-1), & n \leq t < n+1, \quad t-n \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Mamy bowiem:

$$\begin{aligned}
&(\psi|D_\kappa\phi) = \tfrac{1}{i}\textstyle\int_0^1 \bar{\psi}(x)\partial_x\phi(x)\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{i}(-\bar{\psi}(0)\phi(0) + \bar{\psi}(1)\phi(1)) - \tfrac{1}{i}\textstyle\int_0^1 \partial_x\bar{\psi}(x)\phi(x)\mathrm{d}x \\
&= -\tfrac{1}{i}\textstyle\int_0^1 \partial_x\bar{\psi}(x)\phi(x)\mathrm{d}x = (D_{(\bar{\kappa})^{-1}}\psi|\phi).
\end{aligned}$$

Przykład 35.6

$$\mathcal{D}(D_{\min}) = \{\phi \in L^2([0,1]) \ : \ \phi' \in L^2([0,1]), \ \phi(0) = \phi(1) = 0\} \subset L^2([0,1]).$$

$$D_{\min}\phi(x) := \frac{1}{i}\partial_x\phi(x),$$

$$\sigma^{\mathrm{pp}}(D_{\min}) = \emptyset,$$

$$\sigma(D_{\min}) = \overline{\mathbf{C}},$$

$$D_{\min}^* = D_{\max}, \ D_{\min} \subset D_\kappa \subset D_{\max}.$$

35.4 Laplasjan na prostej

Przykład 35.7

$$\mathcal{D}(-\Delta) = \{\phi \in L^2(\mathbf{R}) \ : \ \phi'' \in L^2(\mathbf{R})\} \subset L^2(\mathbf{R}).$$

$$-\Delta\phi(x) := -\partial_x^2\phi(x),$$

$$\sigma^{\mathrm{pp}}(-\Delta) = \emptyset,$$

$$\sigma(-\Delta) = \overline{\mathbf{R}_+},$$

$$R(z,x,y) = -\frac{i}{2\sqrt{z}}\mathrm{e}^{i\sqrt{z}|x-y|}, \ z \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_+, \ \mathrm{Im}\sqrt{z} > 0.$$

35.5 Laplasjan na półprostej

Przykład 35.8

$$\mathcal{D}(-\Delta_{\max}) = \{\phi \in L^2(\mathbf{R}_+) \ : \ \phi'' \in L^2(\mathbf{R}_+)\} \subset L^2(\mathbf{R}_+).$$

$$-\Delta_{\max}\phi(x) := -\partial_x^2\phi(x),$$

$$\sigma^{\mathrm{pp}}(-\Delta_{\max}) = \mathbf{C},$$

$$\sigma(-\Delta_{\max}) = \overline{\mathbf{C}},$$

$$-\Delta_{\max}\mathrm{e}^{ikx} = k^2\mathrm{e}^{izx}, \ \mathrm{Im}k > 0.$$

Przykład 35.9 *Niech $\kappa \in \bar{\mathbf{C}}$.*

$$\mathcal{D}(-\Delta_\kappa) = \{\phi \in L^2(\mathbf{R}_+) \ : \ \phi'' \in L^2(\mathbf{R}_+), \ \kappa\phi(0) = \phi'(0)\} \subset L^2(\mathbf{R}_+).$$

(Jeśli $\kappa = \infty$, to są to warunki brzegowe Dirichleta, czyli $\phi(0) = 0$, jeśli $\kappa = 0$, to są to warunki brzegowe Neumanna, czyli $\phi'(0) = 0$).

$$-\Delta_\kappa\phi(x) := -\partial_x^2\phi(x),$$

$$\sigma^{\mathrm{pp}}(-\Delta_\kappa) = \begin{cases} \kappa^2, & \mathrm{Im}\kappa > 0 \\ \emptyset, & \textit{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

$$\sigma(-\Delta_\kappa) = \begin{cases} \mathbf{R}_+ \cup \kappa^2, & \mathrm{Im}\kappa > 0 \\ \mathbf{R}_+, & \textit{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

$$-\Delta_\kappa\mathrm{e}^{i\kappa x} = \kappa^2\mathrm{e}^{i\kappa x}, \ \mathrm{Im}\kappa > 0,$$

$$R_\kappa(z,x,y) = -\frac{i}{2\sqrt{z}}\mathrm{e}^{i\sqrt{z}|x-y|} + -\frac{i}{2\sqrt{z}}\frac{(i\kappa - \sqrt{z})}{(i\kappa + \sqrt{z})}\mathrm{e}^{i\sqrt{z}(x+y)},$$

$$-\Delta_\kappa^* = -\Delta_{\bar{\kappa}},$$

W szczególności, jeśli $\kappa \in \mathbf{R}$, to

$$-\Delta_\kappa^* = -\Delta_\kappa,$$

Mamy bowiem:

$$\begin{aligned}
&-(\psi|\Delta_\kappa\phi) = -\int_0^\infty \bar{\psi}(x)\partial_x^2\phi(x)\mathrm{d}x \\
&= (\bar{\psi}(0)\partial_x\phi(0) + \partial_x\bar{\psi}(0)\phi(0)) - \int_0^\infty \partial_x^2\bar{\psi}(x)\phi(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^\infty \partial_x^2\bar{\psi}(x)\phi(x)\mathrm{d}x = -(\Delta_{\bar{\kappa}}\psi|\phi).
\end{aligned}$$

Przykład 35.10

$$\mathcal{D}(-\Delta_{\min}) = \{\phi \in L^2(\mathbf{R}_+) \ : \ \phi'' \in L^2(\mathbf{R}_+)\}, \ \phi(0) = \phi'(0) = 0\} \subset L^2(\mathbf{R}_+).$$

$$-\Delta_{\min}\phi(x) := -\partial_x^2\phi(x),$$

$$\sigma^{\mathrm{pp}}(-\Delta_{\min}) = \emptyset,$$

$$\sigma(-\Delta_{\min}) = \overline{\mathbf{C}},$$

$$-\Delta_{\min} \subset -\Delta_\kappa \subset -\Delta_{\max}, \ -\Delta_{\min}^* = -\Delta_{\max}.$$