Teoria grup

Jan Dereziński

Katedra Metod Matematycznych Fizyki
Uniwersytet Warszawski
Hoża 74, 00-682, Warszawa
e-mail jan.derezinski@fuw.edu.pl

28 czerwca 2016

rok 2010/11

Spis treści

1 Podstawowe własności grup

1.1 Definicja

Grupa to niepusty zbiór G wyposażony w

(1) działanie $G \times G \ni (g,h) \mapsto g \cdot h \in G$ mające własność *łączności*

$$(gh)k = g(hk), \quad g,h,k \in G.$$

(2) wyróżniony element $e \in G$, zwany elementem neutralnym, spełniający

$$eg = ge = g, \quad g \in G.$$

(3) odwzorowanie $G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$, zwane odwrotnością spełniające

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e, \quad g \in G.$$

Czyli grupa jest czwórką $(G, \cdot, e, ^{-1})$. Notacja powyższa nosi nazwę *multiplikatywnej*.

Mówimy, że grupa jest *nietrywialna*, gdy jest różna od grupy składającej się jedynie z elementu neutralnego.

Element neutralny w notacji multiplikatywnej jest często oznaczany przez 1 lub $\mathbb{1}$.

Możliwe jest też sformułowanie słabszych aksjomatów, w ktorych grupa jest zbiorem wyposażonym jedynie w łączne działanie i dwa warunki zapewniające istnienie elementu neutralnego i odwrotności.

Mówimy, że grupa jest *przemienna* lub *abelowa*, gdy

$$gh = hg, \quad g,h \in G.$$

Dla grup abelowych stosujemy często notację *addytywną*, w której grupa to $(G, +, 0, -)$.

1.2 Podgrupy

Niech G będzie grupą. Niepusty podzbiór $H \subset G$ nazywamy *podgrupą* gdy jest zamknięty ze względu na mnożenie i branie odwrotności. Zawiera wtedy element neutralny i ze względu na mnożenie i odwrotność dziedziczone z G jest grupą.

Mówimy, że podgrupa jest *nietrywialna*, gdy jest różna od grupy składającej się jedynie z elementu neutralnego, jak również od grupy G.

Jeśli rodzina $H_\alpha \subset G$ składa się z podgrup, to $\cap_\alpha H_\alpha$ jest też podgrupą. Dlatego, dla dowolnego podzbioru $X \subset G$ istnieje najmniejsza podgrupa zawierająca X. Oznaczamy ją przez $\mathrm{Gr}(X)$ i nazywamy *podgrupą generowaną przez X*.

Grupę generowaną przez jeden element nazywamy *grupą cykliczną*. Są to grupy $\mathbb{Z}_n$, $n \in \mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$.

Liczbę elementów zbioru X oznaczamy przez $\#X$. Liczbę elementów grupy nazywamy *rzędem grupy*.

Mówimy, że $g \in G$ ma *rząd* $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, gdy $n = \#\mathrm{Gr}(g)$. Jeśli rząd g jest równy $n \in \mathbb{N}$, to $\mathrm{Gr}(g) = \{e, g, \ldots, g^{n-1}\}$ jest podgrupą w G izomorficzną z $\mathbb{Z}_n$. Jeśli rząd g jest równy ∞, to $\mathrm{Gr}(g) = \{\ldots, g^{-1}, e, g, g^2, \ldots\}$ jest podgrupą izomorficzną z $\mathbb{Z}$.

Jeśli H jest podgrupą i $g \in G$, to $gHg^{-1} := \{ghg^{-1} \ : \ h \in H\}$ jest też podgrupą zwaną *podgrupą sprzężoną do H*.

1.3 Homomorfizmy

Niech G, H będą grupami. Odwzorowanie $\phi : G \to H$ jest *homomorfizmem*, gdy

$$\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2), \quad g_1, g_2 \in G.$$

Stwierdzenie 1.1 *Jeśli ϕ jest homomorfizmem, to*

$$\phi(e_G) = e_H, \quad \phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}.$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \phi(e_G)e_H &= \phi(e_G)\phi(e_G)\phi(e_G)^{-1} \\ = \phi(e_G^2)\phi(e_G)^{-1} &= \phi(e_G)\phi(e_G)^{-1} = e_H. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(g^{-1}) &= \phi(g^{-1})\phi(g)\phi(g)^{-1} = \phi(g^{-1}g)\phi(g)^{-1} \\ = \phi(e_G)\phi(g)^{-1} &= e_H\phi(g)^{-1} = \phi(g)^{-1}. \end{aligned}$$

□

Bijektywny homomorfizm nazywamy *izomorfizmem*.

Jeśli $G = H$, to homomorfizm nazywamy *endomorfizmem* a izomorfizm *automorfizmem*. Automorfizmy grupy G tworzą grupę oznaczaną $\mathrm{Aut}(G)$.

1.4 Działanie

Niech X będzie zbiorem. Przez $S(X)$ oznaczamy zbiór bijekcji na zbiorze X. Wtedy $S(X)$ jest grupą ze składaniem i elementem neutralnym równym id, gdzie $\mathrm{id}(x) = x$, $x \in X$.

Niech G będzie grupą. Homomorfizm $G \to S(X)$ nazywamy *działaniem grupy G na zbiorze X*.

Innymi słowy, odwzorowanie

$$G \times X \ni (g, x) \mapsto \tau_g(x) \in X \tag{1.1}$$

jest działaniem, gdy

$$\tau_g(\tau_h(x)) = \tau_{gh}(x), \quad g, h \in G.$$

Stosujemy też często notację uproszczoną:

$$G \times X \ni (g, x) \mapsto gx \in X.$$

W tej notacji własności homomorficzności i łączności naturalnie się zapisują:

$$g(hx) = (gh)x, \quad ((gh)k)x = (g(hk))x, \quad g, h, k \in G, \ x \in X.$$

Dlatego też, zbyteczne jest pisanie nawiasów.

Jeśli $x \in X$, to

$$G^x := \{g \in G \ : \ \tau_g(x) = x\}$$

jest podgrupą w G zwaną *grupą izotropii elementu x*.

Niech $\tau : G \times X \to X$, $\tilde{\tau} : G \times \tilde{X} \to \tilde{X}$, będą działaniami. Mówimy, że bijekcja $\phi : X \to \tilde{X}$ jest *izomorfizmem działań τ i $\tilde{\tau}$*, gdy

$$\tilde{\tau}_g(\phi(x)) = \phi\left(\tau_g(x)\right), \quad g \in G, \ x \in X. \tag{1.2}$$

W notacji uproszczonej (1.2) ma postać

$$g\phi(x) = \phi(gx), \quad g \in G, \quad x \in X.$$

1.5 Orbity

Niech $\tau : G \to S(X)$ będzie działaniem. Definiujemy relację

$$x \sim_\tau y \ \Leftrightarrow \exists_{g \in G} \tau_g(x) = y.$$

Stwierdzenie 1.2 *$\sim_\tau$ jest relacją równoważności.*

Klasy abstrakcji tej relacji nazywamy *orbitami działania τ*. Klasę abstrakcji dla elementu $x \in X$ nazywamy *orbitą elementu x* i oznaczamy $\tau_G(x)$. Zbiór orbit czasem oznaczamy przez $G \backslash X$.

Jeśli x, y należą do tej samej orbity, to grupy izotropii G^x i G^y są do siebie *sprzężone*, to znaczy istnieje $g \in G$ takie, że $G^x = gG^y g^{-1}$.

Mówimy, że działanie τ jest *tranzytywne*, gdy posiada dokładnie jedną orbitę. Mówimy też wtedy, że X jest *przestrzenią jednorodną* dla grupy G.

1.6 Warstwy

Niech H będzie podgrupą grupy G. Wtedy H działa na G przez *lewe mnożenie*

$$\lambda_h(g) := hg, \quad g \in G, \ h \in H.$$

Orbity tego działania mają postać

$$Hg := \{hg \ : \ h \in H\}, \ g \in G,$$

i są nazywane *lewymi warstwami podgrupy H*. Zbiór lewych warstw jest oznaczany przez $H \backslash G$.

H działa na G również przez *prawe mnożenie*

$$\rho_h(g) := gh^{-1}, \quad g \in G, \ h \in H.$$

Orbity tego działania mają postać

$$gH := \{gh \ : \ h \in H\}, \ g \in G,$$

i są nazywane *prawymi warstwami podgrupy H*. Zbiór prawych warstw jest oznaczany przez G/H.

$G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$ jest izomorfizmem dla tych działań.

Lewe i prawe mnożenie jest bijekcją, tak samo odwrotność. Dlatego też wszystkie lewe (jak również prawe) warstwy mają tę samą liczbę elementów równą rzędowi H. Jako wniosek dostajemy

Twierdzenie 1.3 (Lagrange) *Jeśli G jest grupą skończoną i H jej podgrupą, to*

$$\#G = (\#H)(\#G/H).$$

Dowód. Wybieramy w każdej warstwie po jednym elemencie. Innymi słowy, ustalamy odwzorowanie $\theta : G/H \to G$ o własności $\theta(W) \in W$, $W \in G/H$. Sprawdzamy, że $G/H \times H \ni (W, h) \to \theta(W)h \in G$ jest bijekcją. $\square$.

Liczbę $\#G/H$ nazywamy *indeksem podgrupy H*.

W szczególności, G działa na sobie samej. Jest to działanie tranzytywne. Każdemu elementowi $g \in G$ odpowiada inna bijekcja na G. Dlatego też dostajemy

Twierdzenie 1.4 (Cayley) *Każda grupa jest izomorficzna z podgrupą w $S(G)$.*

1.7 Klasy sprzężoności

Niech $g \in G$. Kładziemy

$$\mathrm{Ad}(g)(h) := ghg^{-1}, \quad h \in G.$$

Wtedy $\mathrm{Ad}(g)$ jest automorfizmem grupy G nazywanym *automorfizmem wewnętrznym* lub *automorfizmem dołączonym zadanym przez g*.

$$G \ni g \mapsto \mathrm{Ad}(g) \in \mathrm{Aut}(G)$$

jest homomorfizmem. Jego obraz oznaczamy przez $\mathrm{Inn}(G)$.

Grupa G działa na sobie samej przez automorfizmy wewnętrzne. Orbity względem tego działania nazywają się *klasami sprzężoności*.

Niech $\mathrm{Sub}(G)$ oznacza zbiór podgrup grupy G. Jeśli $H \in \mathrm{Sub}(G)$, to gHg^{-1} też jest podgrupą. $\mathrm{Sub}(G) \ni H \mapsto gHg^{-1} \in \mathrm{Sub}(G)$ jest działaniem grupy G na $\mathrm{Sub}(G)$. Mówimy, że dwie podgrupy są *sprzężone*, jeśli należą do tej samej orbity.

1.8 Klasyfikacja działań grupy

Następujący wzór definiuje działanie grupy G na G/H:

$$g(kH) := (gk)H, \quad g, k \in G.$$

Działanie to jest tranzytywne. Grupą izotropii elementu jednostkowego jest H. Poniższe twierdzenie mówi, że każde działanie tranzytywne jest izomorficzne z takim działaniem.

Twierdzenie 1.5 (Podstawowe twierdzenie o przestrzeniach jednorodnych) *Niech $\tau : G \times X \to X$ będzie działaniem tranzytywnym i $x \in X$. Wtedy wzór*

$$\phi(gG^x) := \tau_g(x)$$

definiuje izomorfizm działania G na przestrzeni warstw G/G^x i τ. Jeśli X jest zbiorem skończonym, to $\#G = \#X\ \#G^x$.

Dowód. Dobra określoność. Niech $g, k \in G$.

$$\begin{aligned} gG^x = kG^x \quad &\Rightarrow \quad k^{-1}gG^x = G^x \\ \Rightarrow \quad k^{-1}g \in G^x \quad &\Rightarrow \quad x = \tau_{k^{-1}g}(x) \\ \Rightarrow \quad \tau_k^{-1}\tau_g(x) = x \quad &\Rightarrow \quad \tau_k(x) = \tau_g(x). \end{aligned}$$

Injektywność Rozumowanie w stronę przeciwną do poprzedniej: pokazuje, że

$$\tau_k(x) = \tau_g(x) \ \Rightarrow\ gG^x = kG^x.$$

Surjektywność wynika z tranzytywności.
Izomorficzność działań:

$$\phi(gkG^x) = \tau_{gk}(x) = \tau_g(\tau_k x)) = \tau_g(\phi(kG^x)).$$

Liczba elementów: X jest bijektywny zbiorowi G/G_x, możemy więc zastosować Twierdzenie Lagrange'a. $\square$

Twierdzenie 1.6 *Niech H i K będą podgrupami. Wtedy działania G na G/H i G/K są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy H jest sprzężona do K.*

Dowód. $\Leftarrow$ Niech $K = mHm^{-1}$. Definiujemy

$$\phi(gH) = gm^{-1}K = gHm^{-1}.$$

Trywialnie sprawdzamy, że ϕ jest dobrze określone, bijektywne i splata działania.

$\Rightarrow$ Niech $\phi : G/H \to G/K$ będzie izomorfizmem. Wtedy istnieje $m \in G$ takie, że $\phi(H) = m^{-1}K$. Dla $h \in H$

$$hm^{-1}K = h\phi(H) = \phi(hH) = \phi(H) = m^{-1}K.$$

Czyli $mhm^{-1}K = K$. Zatem, $mHm^{-1} \subset K$. Odwracając role dostajemy $mHm^{-1} = K$ $\square$

Załóżmy teraz, że grupa G działa na zbiorze X (niekoniecznie tranzytywnie). Przez $G\backslash X$ będziemy oznaczać zbiór orbit tego działania. Niech X^g oznacza zbiór punktów stałych $g \in G$.

Twierdzenie 1.7 *Niech*

$$X = X_1 \cup \cdots \cup X_k$$

będzie rozbiciem X na orbity. Z każdej orbity wybieramy reprezentanta $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, k$. Wtedy

$$\sum_{i=1}^{k} \#G\Big(1 - \frac{1}{\#G^{x_i}}\Big) = \sum_{g \neq e} \#X^g. \tag{1.3}$$

Dowód. Niech

$$P := \{(g, x) \in (G \setminus \{e\}) \times X \ : \ gx = x\}.$$

Obliczymy liczbę elementów P dwoma sposobami.

Mamy

$$P = \bigcup_{x \in X} (G^x \setminus \{e\}) \times \{x\} = \bigcup_{j=1}^{k} \bigcup_{x \in X_j} (G^x \setminus \{e\}) \times \{x\}.$$

Dla $x \in X_j$ mamy $\#X_j = \frac{\#G}{\#G^x}$. Zatem $\#P$ jest równe lewej stronie (1.3).

Z drugiej strony,

$$P = \bigcup_{g \neq e} \{g\} \times X^g.$$

Zatem $\#P$ jest równe prawej stronie (1.3). $\square$

Poniższy podobny wzór bywa przypisywany Burnside'owi.

Twierdzenie 1.8 *Niech*

$$G = G_1 \cup \cdots \cup G_l$$

będzie rozkładem grupy na klasy sprzężoności. Z każdej klasy sprzężoności wybieramy reprezentanta $g_i \in G_i$, $i = 1, \ldots, l$. Wtedy

$$(\#G)(\#G\backslash X) = \sum_{j=1}^{l} (\#G_j)(\#X^{g_j}). \tag{1.4}$$

Dowód. Niech
$$Z := \{(g, x) \in G \times X \ : \ gx = x\}.$$
Obliczymy liczbę elementów Z dwoma sposobami.

Mamy
$$Z = \bigcup_{x \in X} G^x \times \{x\} = \bigcup_{j=1}^{k} \bigcup_{x \in X_j} G^x \times \{x\}.$$
Dla $x \in X_j$ mamy $(\#G^x)(\#X_j) = \#G$. Zatem $\#Z$ jest równe lewej stronie (1.4).

Z drugiej strony,
$$Z = \bigcup_{g \in G} \{g\} \times X^g.$$
Zauważmy, że $X^{hgh^{-1}} = hX^g$, dlatego $\#X^g$ jest stałe na klasach sprzężoności. Stąd $\#Z$ jest równe prawej stronie (1.4). □

1.9 Iloczyn prosty

Niech K, H będą grupami. Wtedy $K \times H$ jest grupą z iloczynem
$$(k_1, h_1)(k_2, h_2) := (k_1 k_2, h_1 h_2).$$
$K \times H$ z takim iloczynem nazywamy *iloczynem (zewnętrznym) grupy K i H*. Zauważmy, że $K \times \{e_H\}$, $\{e_K\} \times H$ są podgrupami, które komutują, ich przecięcie to $\{(e_K, e_H)\}$ i generują razem $K \times H$.

Latwo sprawdzamy, że dla $n \in \mathbb{N}$ przestrzeń klas $\mathcal{Z}/n\mathbb{Z}$ jest grupą abelową. Jej elementy są postaci $[0], \dots, [n-1]$.

Stwierdzenie 1.9 *Jeśli n, m są liczbami względnie pierwszymi, to*
$$\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \ni ([i], [j]) \mapsto [in + jm] \in \mathbb{Z}_{mn}$$
jest izomorfizmem.

Dowód. Najpierw sprawdzamy, że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ powyższe odwzorowanie jest dobrze określone i jest homomorfizmem. Aby dowieść, że jest on surjektywny korzystamy z faktu, że dla względnie pierwszych m, n istnieją $i, j \in \mathbb{Z}$ takie, że $in + jm = 1$. □

Można pokazać, że każda skończona grupa abelowa jest iloczynem grup postaci $\mathbb{Z}_{p^k}$, gdzie p są liczbami pierwszymi.

1.10 Podgrupy normalne

Niech N będzie podgrupą w G. Mówimy, że N jest *podgrupą normalną*, gdy
$$g \in G, \ n \in N \ \Rightarrow \ gng^{-1} \in N.$$

Równoważny warunek:
$$gN = Ng, \quad g \in G$$
Czyli nie ma wtedy potrzeby rozróżniać lewych i prawych warstw.

Grupę która nie posiada nietrywialnych podgrup normalnych nazywamy *grupą prostą*. Przykładami grup prostych są $\mathbb{Z}_p$ dla pierwszych p i A_n dla $n \geq 5$.

Wszystkie grupy proste skończone zostały sklasyfikowane. Dowód prostoty A_5 jako pierwszy podał Galois w 1831 r. Pełna lista jest znana od 1981 r., kiedy skonstruowano *Grupę Monstrum*. Dowód kompletności tej klasyfikacji ogłoszono w 1983 r. Za datę, kiedy powszechnie zgodzono się z tym, że dowód ten został ukończony uznaje się 2004.

Jeśli $\phi : G \to H$ jest homomorfizmem, to $\phi(G)$ jest podgrupą w H i
$$\mathrm{Ker}\phi = \{g \in G \ : \ \phi(g) = e_H\}$$
jest podgrupą normalną.

Wzór
$$(g_1N)(g_2N) := g_1g_2N$$
definiuje w G/N strukturę grupy. Odwzorowanie
$$G \ni g \mapsto gN \in G/N$$
jest homomorfizmem, którego jądrem jest N.

Jeśli $\phi : G \to H$ jest surjektywnym homomorfizmem, którego jądrem jest też N, to
$$\psi(gN) := \phi(g)$$
definiuje izomorfizm $\psi : G/N \to H$.

Sytuację, gdy $\phi : G \to H$ jest surjektywnym homomorfizmem, dla którego N jest jądrem, często zapisujemy w skrócie
$$1 \to N \to G \to H \to 1. \tag{1.5}$$
Mówimy wtedy, że G *jest rozszerzeniem* N *przez* H, albo że mamy *krótki ciąg dokładny (1.5).*

1.11 Iloczyn półprosty

Niech H, N będą grupami i homomorfizm $H \ni h \mapsto \alpha_h \in \mathrm{Aut}(N)$. Definiujemy *(zewnętrzny) iloczyn półprosty* $N \rtimes_\alpha H$ jako $N \times H$ wyposażone w działanie
$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) := (n_1\alpha_{h_1}(n_2), h_1h_2),$$
element neutralny (e_N, e_H), i odwrotność
$$(n, h)^{-1} = (\alpha_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1}).$$
Zauważmy, że $N \times e_H$ jest podgrupą normalną, zaś $e_N \times H$ jest podgrupą, ich przecięcie jest równe $\{(e_N, e_H)\}$ oraz $\mathrm{Gr}(N \cup H) = N \rtimes_\alpha H$.

Odwzorowanie
$$N \rtimes_\alpha H \ni (n, h) \mapsto h \in H$$

jest surjektywnym homomorfizmem, którego jądrem jest N.

Załóżmy, że mamy krótki ciąg dokładny

$$1 \to N \to G \to H \to 1. \tag{1.6}$$

Zachodzi pytanie, kiedy G jest izomorficzne iloczynowi półprostemu N i H? Ma to miejsce wtedy, gdy istnieje homomorfizm injektywny $\psi : H \to G$ taki, że $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$, $\psi(H)$ i N generują G i $\psi(H) \cap N = e_G$. Mówimy wtedy, że ciąg *się rozszczepia*. Nie zawsze to ma miejsce: Weźmy

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \to 0.$$

2 Przykłady grup

2.1 Permutacje

Jeśli X jest zbiorem skończonym, bijekcję na X często nazywamy *permutacją*. Pamiętamy, że przez $S(X)$ oznaczamy grupę bijekcji na X. Piszemy $S_n := S(\{1, 2, \ldots, n\})$. Oczywiście, jeśli X ma n elementów, to $S(X)$ jest izomorficzne z S_n.

Permutację $\pi \in S_n$ nazywamy *cyklem k-elementowym*, gdy istnieją parami różne $x_1, \ldots, x_k \in \{1, \ldots, n\}$ takie, że

$$\pi x_i = x_{i+1}, \; i = 1, \ldots, k,$$

(rozumiejąc, że $k + 1 = 1$). Cykl oznaczamy przez $(x_1, \ldots, x_k)$. Dwa cykle $(x_1, \ldots, x_k)$ i $(y_1, \ldots, y_m)$ nazywamy *rozłącznymi* jeśli zbiory $\{x_1, \ldots, x_k\}$, $\{y_1, \ldots, y_m\}$ są rozłączne.

Każdą permutację możemy przedstawić jako iloczyn cykli rozłącznych. Rozkład ten jest jednoznaczny (z dokładnością do kolejności). W szczególności, wyznacza on ciąg $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ liczb z $\{0, 1, \ldots\}$ takich, że $\sum_j j\lambda_j = n$ i w rozkładzie na cykle rozłączne występuje λ_j cykli j-elementowych.

Wielomian Vandermonda stopnia n definiujemy jako

$$V(x_1, \ldots, x_n) := \prod_{i<j} (x_i - x_j).$$

Latwo sprawdzić, że dla $\pi \in S_n$,

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \pm V(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}).$$

Definiujemy

$$\mathrm{sgn}\pi := \frac{V(x_1, \ldots, x_n)}{V(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})}.$$

$\mathrm{sgn} : S_n \to \{1, -1\}$. jest homomorfizmem. Jądro tego homomorfizmu nazywamy *grupą alternującą* i oznaczamy przez A_n.

2.2 Iloczyn półprosty z grupą $\mathbb{Z}_2$

Niech K będzie grupą abelową z zapisem addytywnym. Odwzorowanie $K \ni k \mapsto \beta(k) := -k \in K$ jest automorfizmem grupy K.

Dla grup $\mathbb{Z}_2^n$ jest to automorfizm identycznościowy. Jeśli nie wszystkie elementy grupy K są rzędu 2 lub 1, to jest to automorfizm nietrywialny. Możemy zdefiniować grupę $K \rtimes_\beta \mathbb{Z}_2$. W szczególności, grupa

$$D_n := \mathbb{Z}_n \rtimes_\beta \mathbb{Z}_2$$

nosi nazwę *grupy dwuściennej (dihedralnej)*. Jest ona nieabelowa dla $n \geq 3$.

2.3 Grupa permutacji 3 elementów

Mamy izomorfizm $A_3 \simeq \mathbb{Z}_3$:

$$A_3 = \{\mathrm{id},\ (123),\ (132)\}.$$

Mamy też izomorfizm $S_3 \simeq D_3 = \mathbb{Z}_3 \rtimes_\beta \mathbb{Z}_2$

S_3 posiada następujące nietrywialne podgrupy: jedną podgrupę (normalną) $\mathbb{Z}_3$ i 3 sprzężone do siebie podgrupy $\mathbb{Z}_2$. Mamy zatem 4 nieizomorficzne tranzytywne działania S_3: na zbiorze 6-, 3-, 2- i 1-elementowym

2.4 Grupa permutacji 4 elementów

Elementy grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ można oznaczyć jako $\{e, a, b, ab\}$. Automorfizmy tej grupy polegają na permutacjach $\{a, b, ab\}$. Czyli

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \simeq S_3.$$

Grupę $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ można włożyć w $A_4 \subset S_4$

$$\{\mathrm{id},\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\}.$$

Jest ona normalna w A_4 i w S_4. Mamy izomorfizmy

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes A_3 &\simeq A_4, \\ (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes S_3 &\simeq S_4. \end{aligned}$$

W szczególności, A_4 nie jest prosta. To, że A_5 jest prosta pokazał Galois.

2.5 Grupa obrotów $SO(3)$

Przez $SO(3)$ będziemy oznaczać grupę obrotów (właściwych) przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Lemat 2.1 *Dla każdego $A \in SO(3)\backslash\{\mathbb{1}\}$ istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez* 0 *i $\theta \in [0, 2\pi[$ takie, że A jest obrotem wokół A o kąt θ. A jest skończonego rzędu, gdy $\theta = \frac{2\pi j}{n}$, $j = 1, \dots, n-1$.*

Prostą opisaną w powyższym lemacie nazywamy *osią obrotu A*. Jeśli wybierzemy zwrot tej prostej, będziemy mówili o *osi skierowanej*.

Następnie opiszemy wszystkie skończone podgrupy grupy obrotów.

Lemat 2.2 *Niech G będzie skończoną podgrupą $SO(3)$. Niech α będzie osią pewnego obrotu z G. Wtedy obroty wokół osi α należące do G stanowią grupę izomorficzną z $\mathbb{Z}_n$.*

Oś taką jak w powyższym lemacie nazywamy *osią n-krotną*.

Przez $O(3)$ będziemy oznaczać grupę obrotów niewłaściwych przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Mamy $O(3) = SO(3) \times \mathbb{Z}_2$, gdzie generatorem $\mathbb{Z}_2$ jest symetria środkowa.

2.6 Grupa obrotów właściwych wielokąta foremnego $C_n \simeq \mathbb{Z}_n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{2\pi j}{n} & \sin\frac{2\pi j}{n} \\ 0 & -\sin\frac{2\pi j}{n} & \cos\frac{2\pi j}{n} \end{bmatrix}, \quad j = 0, \ldots, n-1. \tag{2.7}$$

2.7 Grupa dihedralna $D_n \simeq \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$

Do (2.7) dołączamy

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\frac{\pi j}{n} & \sin\frac{\pi j}{n} \\ 0 & \sin\frac{\pi j}{n} & \cos\frac{\pi j}{n} \end{bmatrix}, \quad j = 0, \ldots, n-1. \tag{2.8}$$

2.8 Grupa czworościanu $T \simeq A_4$

Grupa symetrii czworościanu. Permutuje

(1) 4 wierzchołki,

(2) 4 ściany,

(3) 6 krawędzi.

Ma

(1) 4 osie 3-krotne, między wierzchołkiem a przeciwległą ścianą,

(2) 3 osie 2-krotne, między środkami przeciwległych krawędzi.

2.9 Grupa sześcianu/ośmiościanu $O \simeq S_4$

Grupa symetrii sześcianu. Permutuje

(1) 8 wierzchołków/ścian,

(2) 6 ścian/wierzchołków,

(3) 12 krawędzi.

Ma

(1) 4 osie 3-krotne, między przeciwległymi wierzchołkami/ścianami,

(2) 3 osie 4-krotne, między środkami przeciwległych ścian/wierzchołków,

(3) 6 osi 2-krotnych, między środkami przeciwległych krawędzi.

2.10 Grupa dwudziestościanu/dwunastościanu) $I \simeq A_5$

Grupa symetrii dwudziestościanu. Permutuje

(1) 10 wierzchołków/ścian,

(2) 20 ścian/wierzchołków,

(3) 30 krawędzi.

Ma

(1) 6 osi 5-krotnych, między przeciwległymi wierzchołkami/ścianami,

(2) 10 osi 3-krotnych, między środkami przeciwległych ścian/wierzchołków,

(3) 15 osie 2-krotne, między środkami przeciwległych krawędzi.

2.11 Skończone podgrupy grupy obrotów

Twierdzenie 2.3 *Lista powyższa zawiera wszystkie skończone podgrupy obrotów.*

Dowód. Niech G będzie skończoną podgrupą grupy obrotów. Niech X będzie zbiorem osi skierowanych elementów z G, czyli

$$X = \{\alpha \in S^2 \ : \ g\alpha = \alpha \text{ dla pewnego } g \in G\}$$

$$G \times X \ni (g, \alpha) \mapsto g\alpha \in X$$

jest działaniem grupy G na X. Działanie zachowuje krotność. Niech $X_1, \dots, X_k$ będzie rozbiciem X na orbity. Niech n_i będzie krotnością elementów orbity X_i. Zakładamy, że $n_1 \leq \cdots \leq n_k$.

Zachodzi wzór

$$\sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\#G}\right). \tag{2.9}$$

Jest to przykład zastosowania Tw. 1.7. Dla wygody czytelnika przytaczamy niezależny dowód.

Rozważmy

$$P := \{(g, \alpha) \in (G \backslash \{\mathbb{1}\}) \times X \ : \ g\alpha = \alpha\}.$$

Dla każdego $g \in G \backslash \{\mathbb{1}\}$ mamy dwa przecięcia osi obrotu i sfery. Dlatego

$$\#P = 2(\#G - 1). \tag{2.10}$$

Dla każdego $\alpha \in X_j$ jest $n_j - 1$ obrotów $g \in G \backslash \{\mathbb{1}\}$ takich, że $g\alpha = \alpha$. Dlatego

$$\#P = \sum_{i=1}^{k} \#X_i(n_i - 1). \tag{2.11}$$

Ale grupa izotropii $\alpha \in X_i$ jest izomorficzna z $\mathbb{Z}_{n_i}$. Dlatego

$$\#X_i = \frac{\#G}{n_i}. \tag{2.12}$$

(2.10), (2.11) i (2.12) dają razem (2.9).

Rozwiązujemy więc równanie (2.9).

$\#G \geq 2$ implikuje $2\left(1 - \frac{1}{\#G}\right) \in [1, 2[$.

$n_i \geq 2$ implikuje $1 - \frac{1}{n_i} \in [\frac{1}{2}, 1[$. Dla $k = 1$ lewa strona (2.9) < 1. Dla $k \geq 4$ lewa strona (2.9) ≥ 2. Dlatego $k = 2, 3$.

Rozważmy $k = 2$. Możemy przepisać (2.9) jako

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} = \frac{2}{\#G}. \tag{2.13}$$

Wiemy, że $n_i \leq \#G$. Więc jedyne rozwiązania (2.13) to $n_1 = n_2 = \#G \in \mathbb{N}$

Rozważmy $k = 3$. Możemy przepisać (2.9) jako

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1 + \frac{2}{\#G}. \tag{2.14}$$

Jeśli $n_1 \geq 3$, to lewa strona (2.14) ≤ 1, co jest niemożliwe. Więc $n_1 = 2$.

Jeśli $n_2 \geq 4$, to znów lewa strona (2.14) ≤ 1, co jest niemożliwe. Więc $n_2 = 2$ lub $n_2 = 3$.

Jeśli $n_2 = 2$, to

$$n_1 = n_2 = 2, \quad n_3 = \frac{\#G}{2}.$$

Jeśli $n_2 = 3$, to dla $n_3 \geq 6$ lewa strona (2.14) ≤ 1. Dlatego $n_3 = 3$, $n_3 = 4$ lub $n_3 = 5$.

Następnie identyfikujemy powstałe możliwości z poszczególnymi grupami

- $n_1 = n_2 = n = \#G$.

  Mamy $\frac{\#G}{n_1} = \frac{\#G}{n_2} = 1$. Zatem mamy tylko jedną oś. Jest ona n-krotna. Zatem $G = C_n$.

- $n_1 = n_2 = 2$, $n_3 = n$, $\#G = 2n$.

  Mamy $\frac{\#G}{n_1} = \frac{\#G}{n_2} = n$, $\frac{\#G}{n_3} = 2$. Zatem mamy tylko jedną oś n-krotną. Zatem G zawiera C_n. Osie 2-krotne muszą być prostopadłe do niej. Jedyna możliwość to D_n.

- $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 3$, $\#G = 12$. Mamy $\frac{\#G}{n_1} = 6$, $\frac{\#G}{n_2} = 4$, $\frac{\#G}{n_3} = 4$. Wybierzmy oś 3-krotną. Musi ona przecinać sferę w dwóch różnych orbitach. Pozostałe punkty 3-krotne tworzą dwa trójkąty równoboczne w płaszczyznach prostopadłych do tej osi.

- $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$, $\#G = 24$.

  Mamy $\frac{\#G}{n_1} = 12$, $\frac{\#G}{n_2} = 8$, $\frac{\#G}{n_3} = 6$. Wybierzmy oś 4-krotną. Przecina ona sferę w dwóch elementach orbity X_3. Pozostałe punkty 4-krotne tworzą kwadrat w płaszczyznie prostopadłej do tej osi.

- $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$, $\#G = 60$.

  Mamy $\frac{\#G}{n_1} = 30$, $\frac{\#G}{n_2} = 20$, $\frac{\#G}{n_3} = 12$. Wybierzmy oś 5-krotną. Przecina ona sferę w dwóch elementach orbity X_3. Pozostałe punkty 5-krotne tworzą dwa pięciokąty foremne w dwóch płaszczyznach prostopadłych do tej osi.

3 Grupy macierzowe

3.1 Ciała

Mówimy, że $(\mathbb{K}, +, \cdot, 1, 0\}$ jest *ciałem*, gdy $(\mathbb{K}, +, 0, -\}$ i $(\mathbb{K}^\times, \cdot, 1, ^{-1})$ są grupami abelowymi spełniającymi

$$x(y + z) = xy + xz,$$

gdzie $\mathbb{K}^\times := \mathbb{K}\backslash\{0\}$.

Definiujemy homomorfizmy, izomorfizmy, etc. ciał w oczywisty sposób.

Najważniejszymi ciałami dla nas są $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$. $\mathbb{R}$ ma jedynie automorfizm trywialny. $\mathbb{C}$ ma jeden nietrywialny automorfizm: *sprzężenie zespolone* $\mathbb{C} \ni z \mapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$.

3.2 Przestrzenie wektorowe

Mówimy, że $(\mathcal{V}, +, 0, -)$ jest *przestrzenią wektorową nad ciałem* $\mathbb{K}$, gdy jest to grupa abelowa wyposażona w działanie $\mathbb{K} \times \mathcal{V} \ni (x, v) \mapsto xv \in \mathcal{V}$ takie, że

$$(x + y)v = xv + yv, \quad (xy)v = x(yv), \quad x, y \in \mathbb{K}, \quad v \in \mathcal{V},$$

$$x(u + v) = xu + xv, \quad x \in \mathbb{K}, \quad u, v \in \mathcal{V}.$$

Przykładem przestrzeni nad $\mathbb{K}$ są $\mathbb{K}^n$. Przestrzenie wektorowe izomorficzne z $\mathbb{K}^n$ nazywamy *przestrzeniami wymiaru n*

3.3 Odwzorowania liniowe

Homomorfizmy przestrzeni wektorowych nazywamy *odwzorowaniami liniowymi.*

Jeśli $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ są przestrzeniami, to $L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ będzie oznaczało zbiór odwzorowań liniowych z $\mathcal{V}$ do $\mathcal{W}$. Będziemy pisać $L(\mathcal{V}) := L(\mathcal{V}, \mathcal{V})$.

$L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ będziemy utożsamić z macierzami o n wierszach i m kolumnach. Dla $A \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ przez A^*, $\overline{A}$ i $A^\#$ będziemy oznaczać macierz *hermitowsko sprzężoną, zespolenie sprzężoną i transponowaną do* A.

3.4 Ogólna grupa liniowa

Niech $A \in L(\mathbb{K}^n)$. Wzór

$$\det A := \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}\pi A_{1,\pi(1)} \cdots A_{n,\pi(n)} \in \mathbb{K}$$

definiuje *wyznacznik* spełniający

$$\det AB = \det A \det B.$$

$GL(\mathbb{K}^n)$ definiujemy jako

$$GL(\mathbb{K}^n) := \{A \in L(\mathbb{K}^n) \ : \ \det A \neq 0\}.$$

Jest to grupa. Piszemy też

$$GL(\mathbb{K}^n) = GL(n, \mathbb{K}).$$

Wyznacznik definiuje homomorfizm

$$\det GL(\mathbb{K}^n) \to \mathbb{K}^\times.$$

Definiujemy

$$SL(\mathbb{K}^n) = SL(n, \mathbb{K}) := \{A \in GL(\mathbb{K}^n) \ : \ \det A = 1\}.$$

Można też podejść do grupy GL bardziej abstrakcyjnie. Niech $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{K}$. Zbiór bijekcji liniowych z $\mathcal{V}$ w $\mathcal{W}$ oznaczamy przez $Gl(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. W szczególności $GL(\mathcal{V}) := GL(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ jest grupą. Dla $\mathcal{V} = \mathbb{K}^n$ pokrywa się to z poprzednią definicją.

3.5 Grupa ortogonalna w skończonym wymiarze

$O(\mathbb{K}^n)$ definiujemy jako

$$O(\mathbb{K}^n) := \{A \in L(\mathbb{K}^n) \ : \ A^\# A = \mathbb{1}\}.$$

(Automatycznie elementy $O(\mathbb{K}^n)$ spełniają $AA^\# = \mathbb{1}$). Jest to podgrupa w $GL(\mathbb{K}^n)$. Piszemy też

$$O(\mathbb{R}^n) = O(n).$$

Macierze ortogonalne zachowują standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{K}^n$.

Latwo pokazać, że wyznacznik macierzy ortogonalnych może mieć wartość ± 1, Definiujemy

$$SO(\mathbb{K}^n) := SL(\mathbb{K}^n) \cap O(\mathbb{K}^n).$$

W przypadku zespolonym piszemy też $O(n, \mathbb{C}) = O(\mathbb{C}^n)$, $SO(n, \mathbb{C}) = SO(\mathbb{C}^n)$.

W przypadku rzeczywistym piszemy też $O(n) = O(\mathbb{R}^n)$, $SO(n) = SO(\mathbb{R}^n)$. Grupa $O(n)$ ma dwie składowe spójne. Składowa spójna zawierająca jedność pokrywa się z $SO(n)$.

3.6 Grupa pseudo-ortogonalna

Rozważmy dalej przypadek rzeczywisty. Niech $q, p \in 0, 1, \ldots$. Przez $\mathbb{R}^{q,p}$ będziemy rozumieć przestrzeń $\mathbb{R}^{q+p} = \mathbb{R}^q \oplus \mathbb{R}^p$ z iloczynem zadanym przez tensor $I_{q,p} := \begin{bmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}$. To znaczy,

$$vI_{q,p}v' = -\sum_{i=1}^{q} v_i v_i' + \sum_{j=q+1}^{q+p} v_j v_j'. \tag{3.15}$$

$O(\mathbb{R}^{q,p})$ definiujemy jako zbiór macierzy spełniających

$$A^\# I_{q,p} A = I_{q,p}.$$

(Automatycznie spełniają one $AI_{q,p}A^\# = I_{q,p}$). Jest to grupa. Piszemy też

$$O(\mathbb{R}^{q,p}) = O(q, p).$$

Macierze pseudoortogonalne zachowują iloczyn pseudoskalarny w $\mathbb{R}^{q,p}$.

Wyznacznik macierzy pseudo-ortogonalnych może mieć wartość ± 1, Definiujemy

$$SO(\mathbb{R}^{q,p}) = SO(q,p) := \{A \in O(\mathbb{R}^{q,p}) \ : \ \det A = 1\}.$$

Grupę $O(\mathbb{R}^{1,p})$ nazywamy grupą Lorentza. Ma ona cztery składowe spójne. Spójna składowa jedności jest nazywana ortoczasową grupą Lorentza i jest oznaczana $SO^{\uparrow}(\mathbb{R}^{1,p})$ lub $SO_0(\mathbb{R}^{1,p})$.

3.7 Abstrakcyjne podejście do grup (pseudo-)ortogonalnych

Można też podejść bardziej abstrakcyjnie. Niech $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ będą przestrzeniami wektorowymi z formą symetryczną, którą dla $v, v' \in \mathcal{V}$ oznaczamy $v \cdot v'$. Zbiór bijekcji liniowych z $\mathcal{V}$ w $\mathcal{W}$ spełniających

$$Av \cdot Av' = v \cdot v'$$

oznaczamy przez $O(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. W szczególności $O(\mathcal{V}) := O(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ jest grupą.

Dla $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ każdą niezdegenerowaną formę symetryczną można sprowadzić do postaci (3.15), i wtedy $\mathcal{V}$ nazywamy $\mathbb{R}^{q,p}$. Więc obie definicje sie w tym wypadku pokrywają.

Dla $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$ każdą niezdegenerowaną formę można sprowadzić do postaci (3.15) z $q = 0$.

Dla przestrzenie nieskończenie wymiarowych z reguły zakładamy, że forma symetryczna jest dodatnio określona i nazywamy ją iloczynem skalarnym. Zakładamy też z reguły, że przestrzenie są zupełne, czyli że są *rzeczywistymi przestrzeniami Hilberta.*

3.8 Grupa unitarna w skończonym wymiarze

$U(\mathbb{C}^n)$ definiujemy jako

$$U(\mathbb{C}^n) := \{A \in L(\mathbb{C}^n) \ : \ A^*A = \mathbb{1}\}.$$

(Automatycznie elementy $U(\mathbb{C}^n)$ spełniają $AA^* = \mathbb{1}$). Jest to podgrupa w $GL(\mathbb{C}^n)$. Piszemy też

$$U(\mathbb{C}^n) = U(n).$$

Macierze unitarne zachowują standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{C}^n$.

Latwo pokazać, że wyznacznik macierzy unitarnych ma moduł 1. Definiujemy

$$SU(\mathbb{C}^n) := SL(\mathbb{C}^n) \cap U(\mathbb{C}^n).$$

3.9 Grupa pseudo-unitarna

Niech $q, p \in 0, 1, \ldots$. Przez $\mathbb{C}^{q,p}$ będziemy rozumieć przestrzeń $\mathbb{C}^{q+p} = \mathbb{C}^q \oplus \mathbb{C}^p$ z iloczynem zadanym przez tensor $I_{q,p} := \begin{bmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}$. To znaczy,

$$\overline{v} I_{q,p} v' = -\sum_{i=1}^{q} \overline{v}_i v'_i + \sum_{j=q+1}^{q+p} \overline{v}_j v'_j. \tag{3.16}$$

$U(\mathbb{C}^{q,p})$ definiujemy jako zbiór macierzy spełniających

$$A^* I_{q,p} A = I_{q,p}.$$

(Automatycznie spełniają one $AI_{q,p}A^* = I_{q,p}$). Jest to grupa. Piszemy też

$$U(\mathbb{C}^{q,p}) = U(q,p).$$

Macierze pseudo-unitarne zachowują iloczyn pseudoskalarny w $\mathbb{C}^{q,p}$.

Wyznacznik macierzy pseudo-unitarnych ma moduł 1. Definiujemy

$$SU(\mathbb{C}^{q,p}) = SU(q,p) := \{A \in U(\mathbb{C}^{q,p}) \ : \ \det A = 1\}.$$

3.10 Abstrakcyjne podejście do grup (pseudo-)unitarnych

Można też podejść bardziej abstrakcyjnie. Niech $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ będą zespolonymi przestrzeniami wektorowymi z wyróżnioną formą hermiowską, którą dla $v, v' \in \mathcal{V}$ oznaczamy $\overline{v} \cdot v'$. Zbiór bijekcji liniowych z $\mathcal{V}$ w $\mathcal{W}$ spełniających

$$\overline{Av} \cdot Av' = \overline{v} \cdot v'$$

oznaczamy przez $U(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. W szczególności $U(\mathcal{V}) := U(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ jest grupą.

Dla $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$ każdą niezdegenerowaną formę hermitowską można sprowadzić do postaci (3.16), i wtedy $\mathcal{V}$ nazywamy $\mathbb{C}^{q,p}$. Więc obie definicje sie w tym wypadku pokrywają.

Dla przestrzenie nieskończenie wymiarowych z reguły zakładamy, że forma hermitowska jest dodatnio określona i nazywamy ją iloczynem skalarnym. Zakładamy też z reguły, że przestrzenie są zupełne, czyli że są *(zespolonymi) przestreniami Hilberta*

3.11 Grupa symplektyczna w skończonym wymiarze

W przestrzeni $\mathbb{K}^{2n} = \mathbb{K}^n \oplus \mathbb{K}^n$ wprowadzamy macierz $J = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix}$. Grupa $Sp(\mathbb{K}^n) = Sp(n, \mathbb{K})$ jest zdefiniowana jako

$$Sp(\mathbb{K}) := \{A \in L(\mathbb{K}^n) \ : \ A^{\#} J A = J\}$$

(Automatycznie elementy $Sp(\mathbb{K}^n)$ spełniają $AJA^{\#} = J$). Jest to podgrupa w $GL(\mathbb{K}^n)$. Macierze symplektyczne zachowują standardową formę symplektyczną w $\mathbb{K}^n$.

$$\omega(v, v') = \sum_{i=1}^{n} (v_i v'_{i+n} - v_{i+n} v'_i) = v \cdot Jv'. \tag{3.17}$$

Możemy też zapisać

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} y_i \wedge y_{n+i},$$

gdzie $y_1, \dots, y_{2n}$ jest bazą dualną do $v_1, \dots, v_{2n}$. Mamy $\omega(Av, Av') = \omega(v, v')$ dla $v, v' \in \mathbb{K}^{2n}$ Dlatego

$$\omega \wedge \cdots \wedge \omega(Av_1, \dots, Av_{2n}) = \omega \wedge \cdots \wedge \omega(v_1, \dots, v_{2n}).$$

$$\omega \wedge \cdots \wedge \omega(v_1, \dots, v_{2n}) = \det[v_1, \dots, v_{2n}].$$

Dlatego $Sp(\mathbb{K}^n)$ jest podgrupą w $SL(\mathbb{K}^n)$.

3.12 Abstrakcyjne podejście do grup symplektycznych

Można też podejść bardziej abstrakcyjnie. Niech $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ będą przestrzeniami wektorowymi z formą symetryczną, którą np. dla $v, v' \in \mathcal{V}$ oznaczamy $v\omega v'$. Zbiór bijekcji liniowych z $\mathcal{V}$ w $\mathcal{W}$ spełniających

$$Av\omega\, Av' = v\omega v'$$

oznaczamy przez $Sp(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. W szczególności $Sp(\mathcal{V}) := Sp(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ jest grupą.

Każdą niezdegenerowaną formę symetryczną można sprowadzić do postaci (3.17). Więc obie definicje się w tym wypadku pokrywają.

3.13 Grupy afiniczne

Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią wektorową. Odwzorowaniem afinicznym na $\mathcal{V}$ nazywamy odwzorowanie postaci

$$\mathcal{V} \ni v \mapsto w + Av \in \mathcal{V}$$

gdzie $w \in \mathcal{V}$ i $A \in L(\mathcal{V})$. Odwzorowania afiniczne dla których $A \in GL(\mathcal{V})$ tworzą grupę z działaniem

$$(w_1, A_1)(w_2, A_2) := (w_1 + A_1 w_2, A_1 A_2)$$

elementem neutralnym $(0, \mathbb{1})$ i odwrotnością $(w, A)^{-1} = (A^{-1}w, A^{-1})$. Grupę tę nazywamy *afinicznym rozszerzeniem grupy $GL(\mathcal{V})$*.

Grupa $GL(\mathcal{V})$ działa na elementy z $\mathcal{V}$ w oczywisty sposób. Czyli dostajemy homomorfizm

$$GL(\mathcal{V}) \ni A \mapsto A \in \mathrm{Aut}(\mathcal{V}),$$

gdzie z prawej $\mathcal{V}$ jest traktowana jako grupa z dodawaniem. Latwo widzimy, że grupa afiniczna jest iloczynem półprostym $\mathcal{V} \rtimes GL(\mathcal{V})$.

Często w zastosowaniach spotykamy grupy w których $GL(\mathcal{V})$ jest zastąpione jej podgrupą. Na przykład, grupa Poincarego jest afinicznym rozszerzeniem grupy Lorentza $\mathbb{R}^{1,3} \rtimes O(1,3)$.

3.14 Grupy Liego

Mówimy, że G jest *grupą Liego*, jeśli jest to grupa będąca rozmaitością (gładką) i odwzorowania

$$\begin{aligned} G \times G \ni (g, h) &\mapsto gh \in G \\ G \ni g &\mapsto g^{-1} \in G \end{aligned}$$

są gładkie.

Wszystkie rozważane w tej sekcji grupy dla skończenie wymiarowych $\mathcal{V}$ nad ciałem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ są grupami Liego.

Oto wymiary wybranyh grup Liego

(1) $\dim SL(\mathbb{R}^n) = \dim SU(\mathbb{C}^n) = n^2 - 1$,

(2) $\dim SO(\mathbb{R}^n) = \frac{n(n-1)}{2}$,

(3) $\dim Sp(\mathbb{R}^{2n} = \frac{2n(2n+1)}{2}$.

4 Koincydencje wśród grup macierzowych

4.1 $SL(2,\mathbb{K}) \simeq Sp(2,\mathbb{K})$

Niech
$$J := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że dla $A \in L(\mathbb{K}^2)$ mamy
$$AJA^{\#} = (\det A)J.$$

4.2 $SU(2)/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(3)$

Utożsamiamy $\mathbb{R}^3$ z macierzami hermitowskimi 2×2 o śladzie 0:
$$\mathbb{R}^3 \ni (x,y,x) \mapsto X = \begin{bmatrix} z & x+\mathrm{i}y \\ x-\mathrm{i}y & -z \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że
$$-\det X = x^2 + y^2 + z^2,$$
czyli wyznacznik zadaje standardowy iloczyn skalarny.

Dla $A \in SU(2)$ kładziemy
$$\rho_A X := AXA^*.$$
Wtedy
$$\det \rho_A X = \det X.$$
Zatem ρ_A zachowuje iloczyn skalarny.
$$SU(2) \ni A \mapsto \rho_A \in SO(3).$$
jest surjektywnym homomorfizmem. Jego jądrem jest $\pm\mathbb{1}$.

4.3 $SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2 \simeq SO_0(1,2)$, $SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(3,\mathbb{C})$,

Utożsamiamy $\mathbb{K}^3$ z macierzami 2×2 o śladzie 0:
$$\mathbb{K}^3 \ni (x,y,x) \mapsto X = \begin{bmatrix} z & x+y \\ -x+y & -z \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że
$$-\det X = -x^2 + y^2 + z^2.$$
Dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wyznacznik zadaje iloczyn pseudoskalarny o sygnaturze $(1,2)$. Dla $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ jest to zwykły iloczyn skalarny.

Dla $A \in SL(2,\mathbb{K})$ kładziemy
$$\rho_A X := AXA^{-1}.$$

Wtedy

$$\det \rho_A X = \det X.$$

Zatem ρ_A zachowuje iloczyn (pseudo-)skalarny.

$$SL(2,\mathbb{R}) \ni A \mapsto \rho_A \in SO_0(1,2),$$
$$SL(2,\mathbb{C}) \ni A \mapsto \rho_A \in SO(3,\mathbb{C}),$$

są surjektywnymi homomorfizmami. Ich jądrem jest $\pm\mathbb{1}$.

4.4 $SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 \simeq SO_0(1,3)$

Utożsamiamy $\mathbb{R}^4$ z macierzami 2×2 hermitowskimi

$$\mathbb{R}^3 \ni (t,x,y,x) \mapsto X = \begin{bmatrix} t+z & x+\mathrm{i}y \\ x-\mathrm{i}y & t-z \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$-\det X = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2,$$

czyli wyznacznik zadaje iloczyn pseudo-skalarny.

Dla $A \in SL(2,\mathbb{C})$ kładziemy

$$\rho_A X := AXA^*.$$

Wtedy

$$\det \rho_A X = \det X.$$

Zatem ρ_A zachowuje iloczyn pseudo-skalarny.

$$SL(2,\mathbb{C}) \ni A \mapsto \rho_A \in SO_0(1,3).$$

jest surjektywnym homomorfizmem. Jego jądrem jest $\pm\mathbb{1}$.

4.5 $(SL(2,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R}))/\mathbb{Z}_2 \simeq SO_0(2,2)$, $(SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{C}))/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(4,\mathbb{C})$,

Utożsamiamy $\mathbb{K}^4$ z macierzami 2×2:

$$\mathbb{K}^3 \ni (t,x,y,x) \mapsto X = \begin{bmatrix} t+z & x+y \\ x-y & t-z \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$-\det X = -t^2 - x^2 + y^2 + z^2.$$

Dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wyznacznik zadaje iloczyn pseudoskalarny o sygnaturze $(2,2)$. Dla $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ jest to zwykły iloczyn skalarny.

Dla $(A,B) \in SL(2,\mathbb{K})$ kładziemy

$$\rho_{(A,B)} X := AXB^{-1}.$$

Wtedy

$$\det \rho_{(A,B)} X = \det X.$$

Zatem $\rho_{(A,B)}$ zachowuje iloczyn (pseudo-)skalarny.

$$SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R}) \ni (A,B) \mapsto \rho_{(A,B)} \in SO_0(2,2),$$
$$SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{R}) \ni (A,B) \mapsto \rho_A \in SO(4,\mathbb{C}),$$

są surjektywnymi homomorfizmami. Ich jądrem jest $\pm\mathbb{1}$.

4.6 $(SU(2) \times SU(2))/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(4)$

Niech $J := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Utożsamiamy $\mathbb{R}^4$ z macierzami zespolonymi 2×2 spełniającymi $\overline{X} = JXJ$ (czyli kwaternionami)w następujący sposób:

$$\mathbb{R}^4 \ni (t,x,y,x) \mapsto X = \begin{bmatrix} t + \mathrm{i}z & \mathrm{i}x + y \\ \mathrm{i}x - y & t - \mathrm{i}z \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$\det X = t^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

Czyli zadaje standardowy iloczyn skalarny.

Dla $(A,B) \in SU(2) \times SU(2)$ kładziemy

$$\rho_{(A,B)} X := AXB^{-1}.$$

Wtedy

$$\det \rho_{(A,B)} X = \det X.$$

Zatem $\rho_{(A,B)}$ zachowuje iloczyn skalarny.

$$SU(2) \times SU(2) \ni (A,B) \mapsto \rho_{(A,B)} \in SO(4).$$

jest surjektywnym homomorfizmem. Jego jądrem jest $\pm\mathbb{1}$.

5 Reprezentacje grup

5.1 Definicja

Niech G będzie grupą a $\mathcal{V}$ przestrzenią liniową. *Reprezentacją grupy G na przestrzeni $\mathcal{V}$* nazywamy homomorfizm $\pi : G \to Gl(\mathcal{V})$. Będziemy też często pisać, że para $(\pi, \mathcal{V})$ jest reprezentacją grupy G.

Innymi słowy, $G \ni g \mapsto \pi(g) \in L(\mathcal{V})$ jest reprezentacją, gdy

$$\pi(g_1 g_2) = \pi(g_1)\pi(g_2), \quad g_1, g_2 \in G.$$

Jeśli $\mathcal{V}$ jest przestrzenią Hilberta, to *reprezentacją unitarną grupy G na przestrzeni $\mathcal{V}$* nazywamy homomorfizm $\pi : G \to U(\mathcal{V})$.

W szczególności, $G \ni g \mapsto \mathbb{1}_{\mathcal{V}} \in L(\mathcal{V})$ jst reprezentacją. Nazywamy ją *reprezentacją trywialną*.

5.2 Suma prosta

Niech $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ będą przestrzeniami liniowymi. Wtedy $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ ma strukturę przestrzeni wektorowej, oznaczanej przez $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$ i nazywanej *sumą prostą przestrzeni $\mathcal{V}_1$ i $\mathcal{V}_2$*.

Jeśli $A_i \in L(\mathcal{V}_i)$, to $A_1 \oplus A_2 \in L(\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2)$ jest zdefiniowany jako

$$(A_1 \oplus A_2)(v_1, v_2) := (A_1 v_1, A_2 v_2).$$

Niech $(\pi_i, \mathcal{V}_i)$ będą reprezentacjami na przestrzeniach $\mathcal{V}_i$. Wtedy

$$\pi_1 \oplus \pi_2(g) := \pi_1(g) \oplus \pi_2(g)$$

definiuje reprezentację na przestrzeni $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$ zwaną *sumą prostą reprezentacji π_1 i π_2*. Będziemy pisać

$$m\pi = \underbrace{\pi \oplus \cdots \oplus \pi}_{m \text{ razy}}.$$

5.3 Równoważność

Niech $(\pi, \mathcal{V}_\pi)$, $(\rho, \mathcal{V}_\rho)$ będą reprezentacjami G. Mówimy, że operator U *splata* π i ρ, jeśli

$$U\pi(g) = \rho(g)U, \quad g \in G. \tag{5.18}$$

Mówimy, że π, ρ są reprezentacjami *równoważnymi*, gdy istnieje $U \in Gl(\mathcal{V}_\pi, \mathcal{V}_\rho)$ splatający π i ρ. Piszemy wtedy $\pi \simeq \rho$.

Jeśli dodatkowo przestrzenie te są przestrzeniami Hilberta, mówimy, że π, ρ są *unitarnie równoważne*, gdy istnieje $U \in U(\mathcal{V}_\pi, \mathcal{V}_\rho)$ splatający π i ρ.

Twierdzenie 5.1 *Niech $\mathcal{V}_\pi$, $\mathcal{V}_\rho$ będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami Hilberta. Niech $(\pi, \mathcal{V}_\pi)$, $(\rho, \mathcal{V}_\rho)$ będą reprezentacjami unitarnymi. Wtedy ich równoważność jest równoważna unitarnej równoważności.*

Dowód. Niech $A \in GL(\mathcal{V}_\pi, \mathcal{V}_\rho)$ splata π i ρ. Wtedy $A^* \in GL(\mathcal{V}_\rho, \mathcal{V}_\pi)$ splata ρ i π. Zatem $A^*A \in GL(\mathcal{V}_\pi)$ splata π z sobą. To samo jest prawdą dla $(A^*A)^{-1/2}$. Zatem operator unitarny $(AA^*)^{-1/2}A$ splata π z ρ. □

5.4 Nieprzywiedlność

Niech $(\pi, \mathcal{V})$ będzie reprezentacją G. Mówimy, że podprzestrzeń $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$ jest *niezmiennicza dla* $(\pi, \mathcal{V})$, gdy jest niezmiennicza względem $\pi(g)$, $g \in G$. Połóżmy $\pi_1 := \pi\Big|_{\mathcal{V}_1}$. Wtedy $(\pi_1, \mathcal{V}_1)$ jest też reprezentacją. Mówimy, że $(\pi_1, \mathcal{V}_1)$ jest *podreprezentacją* reprezentacji $(\pi, \mathcal{V})$.

Twierdzenie 5.2 *Jeśli $(\pi, \mathcal{V})$ jest unitarna i $\mathcal{V}_1$ jest niezmiennicza dla $(\pi, \mathcal{V})$, to $\mathcal{V}_1^\perp$ jest też niezmiennicza dla $(\pi, \mathcal{V})$.*

Mówimy, że $(\pi, \mathcal{V})$ jest *nieprzywiedlna*, gdy nie istnieje nietrywialna podprzestrzeń w $\mathcal{V}$ niezmiennicza względem π.

Mówimy, że $(\rho, \mathcal{V})$ jest *całkowicie rozkładalna*, gdy $\rho \simeq \oplus_{i=1}^n \pi_i$, gdzie π_i są nieprzywiedlne.

Twierdzenie 5.3 *Niech $(\pi, \mathcal{V})$ będzie reprezentacją unitarną w skończenie wymiarowej przestrzeni. Wtedy $(\pi, \mathcal{V})$ jest całkowicie rozkładalna.*

Dowód. Załóżmy, że $\mathcal{V}$ jest przywiedlna. Wtedy posiada nietrywialną podprzestrzeń niezmienniczą $\mathcal{V}_1$. $\mathcal{V}_2 := \mathcal{V}_1^\perp$ jest też niezmiennicza. Kontynuując dostaniemy rozkład. $\square$

Jeśli weźmiemy reprezentację $\mathbb{R} \ni t \mapsto \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in L(\mathbb{C}^2)$, to $\mathbb{C} \oplus \{0\}$ jest przestrzenią niezmienniczą, która nie posiada dopełniającej niezmienniczej. Dlatego jest to reprezentacja przywiedlna, ale nie jest całkowicie rozkładalna. Nie jest natomiast unitarna dla jakiegokolwiek iloczynu skalarnego.

Unitarna równoważność reprezentacji jest relacją równoważności. Przez $\hat{G}$ będziemy oznaczali zbiór klas abstrakcji reprezentacji nieprzywiedlnych względem tej relacji.

5.5 Reprezentacje jednowymiarowe

Rozważmy reprezentacje w jednowymiarowej przestrzeni zespolonej. Takie reprezentacje mają wartości w grupie $GL(\mathbb{C})$, która pokrywa się z multiplikatywną grupą liczb zespolonych $\mathbb{C}^\times$. W $\mathbb{C}$ mamy z dokładnością do proporcjonalności tylko jeden iloczyn skalarny. Reprezentacja jest unitarna (bądź unitaryzowalna) gdy ma wartości w $U(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$.

Każda reprezentacja jednowymiarowa jest nieprzywiedlna. Jeśli $G \ni g \mapsto \chi(g) \in \mathbb{C}^\times$ jest jednowymiarową reprezentacją zaś $G \ni g \mapsto \pi(g)$ jest dowolną reprezentacją, to

$$\chi\pi(g) := \chi(g)\pi(g)$$

jest też reprezentacją. Jeśli π jest nieprzywiedlne, to $\chi\pi$ też. W szczególności, reprezentacje jednowymiarowe dowolnej grupy tworzą grupę ze względu na mnożenie.

Dla grupy $\mathbb{Z}_n$, dla $m = 0, \ldots, n-1$,

$$\mathbb{Z}_n \ni k \mapsto \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi km}{n}} \in \mathbb{C}^\times$$

jest reprezentacją. Jest ona zawsze unitarna. Ogólniej, niech $(m_1, \ldots, m_p) \in \mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_p}$. Wtedy

$$\mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_p} \ni (k_1, \ldots, k_p) \mapsto \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi k_1 m_1}{n_1}} \cdots \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi k_p m_p}{n_p}} \in \mathbb{C}^\times$$

jest reprezentacją unitarną. Latwo się przekonać, że wszystkie nieprzywiedlne reprezentacje grupy $\mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_p}$ są tej postaci. Możemy zapisać symbolicznie

$$(\mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_p})\hat{} = \mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_p}.$$

Dla grupy $\mathbb{Z}$, dla dowolnego $\mu \in \mathbb{C}$

$$\mathbb{Z} \ni k \mapsto \mathrm{e}^{k\mathrm{i}\mu} \in \mathbb{C}^\times$$

jest reprezentacją. Jest ona unitarna wtedy i tylko wtedy gdy μ jest rzeczywiste. W szczególności, nie wszystkie reprezentacje $\mathbb{Z}$ są unitaryzowalne.

5.6 Reprezentacje permutacyjne

Niech grupa G działa na zbiorze X. Niech δ_x będzie bazą kanoniczną w $l^2(X)$. Wtedy

$$\pi(g)\delta_x := \delta_{gx}, \quad g \in G,\ x \in X,$$

lub równoważnie

$$\pi(g)f(x) := f(g^{-1}x), \quad g \in G,\ x \in X,$$

definiuje reprezentację unitarną na $l^2(X)$.

Jeśli X jest skończone, to reprezentacja ta jest przywiedlna, bo przestrzeń rozpięta na wektorze $\sum_x \delta_x$ jest niezmiennicza.

5.7 Podstawowe reprezentacje grupy permutacji

Rozważmy powyższą konstrukcję dla grupy S_n działającej na $\{1, \ldots, n\}$. Zatem rozważamy S_n działającą na $\mathbb{C}^n$,

$$\pi\delta_i := \delta_{\pi i}.$$

Niech $\mathcal{V}_n = \{f \in \mathbb{C}^n \ :\ f_1 + \ldots + f_n = 0\} = \{(1, \ldots, 1)\}^\perp$. Reprezentacja π obcięta do $\mathcal{V}$ bywa nazywana *reprezentacją standardową grupy S_n*.

Twierdzenie 5.4 *Reprezentacja standardowa jest nieprzywiedlna dla $n \geq 2$*

Dowód. Twierdzenie jest oczywiste dla grupy S_2, dla której wymiar reprezentacji jest równy 1.

Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n-1$. Bazą przestrzeni $\mathcal{V}_n$ jest $e_1 = \delta_1 - \delta_n, \ldots, e_{n-1} := \delta_{n-1} - \delta_n$. Rozważmy grupę $S_{n-1} \subset S_n$. Działa one na bazę $e_1, \ldots, e_{n-1}$ jak reprezentacja permutacyjna. Dlatego też, z założenia indukcyjnego, jej jedyne nietrywialne podprzestrzenie niezmiennicze są rozpięte przez $e_1 + \ldots + e_{n-1} = \delta_1 + \ldots + \delta_{n-1} - (n-1)\delta_n$ oraz jej dopełnienie ortogonalne. Latwo się przekonać, że jakikolwiek element $S_n \backslash S_{n-1}$ nie zachowuje obu podprzestrzeni. $\square$

Zauważmy, że dla grupy A_3, reprezentacja standardowe na $\mathcal{V}_3$ jest przywiedlna. Dla A_4, reprezentacja standardowa jest nieprzywiedlna na $\mathcal{V}_3$. Dlatego też, Twierdzenie 5.4 jest słuszne jeśli zastąpimy S_n przez A_n i $n \geq 4$ (z takim samym dowodem).

Zatem dla dowolnej grupy permutacji znamy już 4 reprezentacje nieprzywiedlne.

(1) trywialna, (1-wymiarowa),

(2) sgn, (1-wymiarowa),

(3) standardowa, ($d-1$-wymiarowa),

(4) sgn$\times$standardowa, ($d-1$-wymiarowa).

Dla małych n niektóre z nich się pokrywają: Dla S_2, (1)=(4), (2)=(3). Dla S_3, (3)=(4).

Począwszy od S_4, wszystkie cztery reprezentacje są różne.

5.8 Lematy Schura

Twierdzenie 5.5 (Pierwszy Lemat Schura) *Niech $(\pi, \mathcal{V})$ będzie nieprzywiedlną unitarną reprezentacją G. Niech $A \in B(\mathcal{V})$ splata $(\pi, \mathcal{V})$ z samą sobą. Wtedy $A = c\mathbb{1}$ dla pewnego $c \in \mathbb{C}$.*

Dowód. Niech A będzie niezerowym operatorem splatającym $(\pi, \mathcal{V})$ z sobą. A^* też splata. Jeden z operatorów $A + A^*$ i $\mathrm{i}(A - A^*)$ jest niezerowy i oba splatają. Zatem można założyć, że A jest samosprzężony. Jeśli A nie jest równy $\lambda\mathbb{1}$, to znaczy istnieją $\lambda_1 \neq \lambda_2$ w spektrum A. Załóżmy dla uproszczenia, że $\dim \mathcal{V} < \infty$. Wtedy $\mathrm{Ker}(A - \lambda_1)$ jest nietrywialną podprzestrzenią niezmienniczą, co jest sprzecznością. □

Twierdzenie 5.6 (Drugi Lemat Schura) *Niech $(\pi, \mathcal{V}_\pi)$, $(\rho, \mathcal{V}_\rho)$ będą nieprzywiedlnymi unitarnymi reprezentacjami G. Jeśli istnieje $A \in B(\mathcal{V})$, $A \neq 0$ splatający $(\pi, \mathcal{V}_\pi)$ z $(\rho, \mathcal{V}_\rho)$, to $(\pi, \mathcal{V}_\pi)$ jest unitarnie równoważna $(\rho, \mathcal{V}_\rho)$.*

Dowód. Niech $A \neq 0$. $A^*A \neq 0$ splata $(\pi, \mathcal{V}_\pi)$ z sobą. Dlatego $A^*A = \lambda_1\mathbb{1}$, $\lambda_1 \neq 0$. Podobnie, AA^* splata $(\rho, \mathcal{V}_\rho)$ z sobą. Dlatego $AA^* = \lambda_2\mathbb{1}$. Mamy $\lambda_1^2\mathbb{1} = A^*AA^*A = \lambda_2 A^*A = \lambda_2\lambda_1\mathbb{1}$. Zatem $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$. Więc $U := \lambda^{-\frac{1}{2}}A$ jest unitarny. □

5.9 Iloczyn tensorowy I

Najpierw wprawadźmy iloczyn tensorowy w "naiwny" sposób.

Oznaczmy bazę kanoniczną $\mathbb{C}^n$ przez e_i, $i = 1, \ldots, n$, zaś bazę kanoniczną $\mathbb{C}^m$ przez f_j, $j = 1, \ldots, m$. Przestrzeń $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ można zdefiniować jako $\mathbb{C}^{nm}$ z bazą $e_i \otimes f_j$, $i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$. Czyli elementy $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ są postaci $\sum_{i,j=1}^n t_{ij} e_i \otimes f_j$.

Jeśli $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$, $w = \sum_{j=1}^m w_j f_j$, to kładziemy

$$v \otimes w := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m v_i w_j e_i \otimes f_j.$$

Niech A będzie operatorem na $\mathbb{C}^n$ a B operatorem na $\mathbb{C}^m$. Przez $A \otimes B$ rozumiemy operator na $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$, którego macierz jest równa

$$(A \otimes B)_{ij,kl} = A_{ik} B_{jl}.$$

Jeśli A i B są unitarne/hermitowskie, to $A \otimes B$ też.

5.10 Iloczyn tensorowy II

Wprowadźmy teraz iloczyn tensorowy w sposób niezależny od bazy. Niech $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ będą przestrzeniami. Dla uproszczenia, będziemy zakładać, że są skończenie wymiarowe.

Niech $\mathcal{Z}$ będzie przestrzenią skończonych kombinacji liniowych wektorów (v, w), $v \in \mathcal{V}$, $w \in \mathcal{W}$. W przestrzeni tej wyróżniamy podprzestrzeń $\mathcal{Z}_0$ rozpiętą na wektorach

$$\begin{aligned} &(\lambda v, w) - \lambda(v, w), \qquad &&(v, \lambda w) - \lambda(v, w), \\ &(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w), \qquad &&(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2). \end{aligned}$$

Definiujemy $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} := \mathcal{Z}/\mathcal{Z}_0$. Jeśli $v \in \mathcal{V}$, $w \in \mathcal{W}$, to definiujemy $v \otimes w := (v, w) + \mathcal{Z}_0$.

$\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ jest przestrzenią wektorową. $\otimes$ jest działaniem spełniającym warunki

$$\begin{aligned} (\lambda v) \otimes w = \lambda v \otimes w, &\qquad v \otimes (\lambda w) = \lambda v \otimes w, \\ (v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w, &\qquad v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2. \end{aligned}$$

Wektory postaci $v \otimes w$ nazywają się *tensorami prostymi*. Nie są to wszystkie wektory w $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$, ale rozpinają $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$.

Pokażmy, że powyższa definicja jest równoważna definicji "naiwnej".

Twierdzenie 5.7 *Jeśli e_i, $i = 1, \dots, n$ jest bazą w $\mathcal{V}$, zaś f_j, $j = 1, \dots, m$ bazą w $\mathcal{W}$, to $e_i \otimes f_j$, $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$. jest bazą w $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$.*

Dowód. Latwo sprawdzamy, że $e_i \otimes f_j$ rozpinają $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$. Trzeba pokazać ich liniową niezależność. Niech

$$\sum_{i,j} t^{ij} e_i \otimes f_j = 0. \tag{5.19}$$

Niech $e^1, \dots, e^n$ będzie bazą dualną do $e_1, \dots, e_n$, tzn

$$\langle e^i | e_j \rangle = \delta^i_j.$$

Podobnie, niech $f^1, \dots, f^m$ będzie bazą dualną do $f_1, \dots, f_m$. Zdefiniujmy funkcjonał p^{ij} na $\mathcal{Z}$ wzorem

$$\langle p^{ij} | (v, w) \rangle = \langle e^i | v \rangle \langle f^j | w \rangle.$$

Sprawdzamy, że $p^{ij} = 0$ na $\mathcal{Z}_0$. Zatem p^{ij} jest dobrze określony na $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} = \mathcal{Z}/\mathcal{Z}_0$. Stosując p^{ij} do (5.19) dostajemy $t^{ij} = 0$. $\square$

Twierdzenie 5.8 *Jeśli $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ są przestrzeniami Hilberta, to $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ posiada jedyny iloczyn skalarny taki, że*

$$(v_1 \otimes w_1 | v_2 \otimes w_2) = (v_1 | v_2)(w_1 | w_2). \tag{5.20}$$

Jeśli e_i, $i = 1, \dots, n$ jest bazą ortonormalną w $\mathcal{V}$, zaś f_j, $j = 1, \dots, m$ bazą ortonormalną w $\mathcal{W}$, to $e_i \otimes f_j$, $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$. jest bazą ortonormalną w $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$.

Dowód. Najpierw sprawdzamy, że jeśli iloczyn skalarny o własności (5.20) istnieje, to część twierdzenia o bazach ortonormalnych musi być prawdziwa. $\square$

Twierdzenie 5.9 *Niech A będzie operatorem na $\mathcal{V}$ i B operatorem na $\mathcal{W}$. Wtedy istnieje dokładnie jeden operator $A \otimes B$ na $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ taki, że*

$$(A \otimes B) v \otimes w := (Av) \otimes (Bw).$$

Dowód. Wystarczy zdefiniować $A \otimes B$ w bazie:

$$(A \otimes B)e_i \otimes f_j := (Ae_i) \otimes (Bf_j).$$

□

Niech $(\pi, \mathcal{V})$, $(\rho, \mathcal{W})$ będą reprezentacjami. *Iloczynem tensorowym tych reprezentacji* nazywamy reprezentację $\pi \otimes \rho$ w przestrzeni $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$

$$(\pi \otimes \rho)(g) = \pi(g) \otimes \rho(g).$$

Zauważmy, że $m\pi$ jest równoważne $\pi \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{C}^m}$.

5.11 Reprezentacja grupy permutacji

Twierdzenie 5.10 *Dla $\sigma \in S_n$ istnieje dokładnie jeden operator $\Theta(\sigma) \in L(\otimes^n \mathcal{V})$, dla którego*

$$\Theta(\sigma) v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = v_{\sigma^{-1}1} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}n}.$$

$$S_n \ni \sigma \mapsto \Theta(\sigma) \in L(\mathcal{V}^{\otimes n})$$

jest reprezentacją.

Dowód. Wystarczy wybrać bazę $e_1, \ldots, e_m$ w $\mathcal{V}$ i położyć

$$\Theta(\sigma) e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} = e_{i_{\sigma^{-1}1}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma^{-1}n}}$$

To definiuje jednoznacznie operator $\Theta(\sigma)$.

Pokażmy, że $\Theta(\pi)\Theta(\sigma) = \Theta(\pi\sigma)$. Niech $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{V}$ i $w_i := v_{\sigma^{-1}i}$. Wtedy

$$\begin{aligned} \Theta(\pi)\Theta(\sigma) v_1 \otimes \cdots \otimes v_n &= \Theta(\pi) w_1 \otimes \cdots \otimes w_n \\ &= w_{\pi^{-1}1} \otimes \cdots \otimes w_{\pi^{-1}n} \\ &= v_{\sigma^{-1}\pi^{-1}1} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}\pi^{-1}n} \\ &= v_{(\pi\sigma)^{-1}1} \otimes \cdots \otimes v_{(\pi\sigma)^{-1}n}. \end{aligned}$$

Jeśli $\mathcal{V}$ jest przestrzenią Hilberta, jest to reprezentacja unitarna.

Jest to reprezentacja przywiedlna. W szczególności, można podać rzuty ortogonalne na podprzestrzenie na których reprezentacja jest trywialna i znakową:

$$\begin{aligned} \Theta^n_{\mathrm{s}} &:= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \Theta(\sigma), \\ \Theta^n_{\mathrm{a}} &:= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\sigma \Theta(\sigma). \end{aligned}$$

Kładziemy $\otimes^n_{\mathrm{s/a}} \mathcal{V} := \Theta^n_{\mathrm{s/a}} \otimes^n \mathcal{V}$.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\Theta_{\mathrm{s}}^2 &:= \frac{1}{2}(\mathbb{1}+\Theta(\tau)),\\ \Theta_{\mathrm{a}}^2 &:= \frac{1}{2}(\mathbb{1}-\Theta(\tau)).\end{aligned}$$

Zatem $\mathbb{1} = \Theta_{\mathrm{s}}^2 + \Theta_{\mathrm{a}}^2$. Czyli każdy 2-tensor można rozłożyć na część symetryczną i antysymetryczną: $\otimes^2\mathcal{V} = \otimes_{\mathrm{s}}^2\mathcal{V} \oplus \otimes_{\mathrm{a}}^2\mathcal{V}$.

Jeśli $t \in \otimes^n\mathcal{V}$, to

$$t = \sum t_{i_1,\dots,i_n} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned}\Theta_{\mathrm{s}} t &= \sum t_{(i_1,\dots,i_n)} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n},\\ \Theta_{\mathrm{a}} t &= \sum t_{[i_1,\dots,i_n]} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n},\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}t_{(i_1,\dots,i_n)} &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} t_{i_{\sigma i},\dots,i_{\sigma n}},\\ t_{[i_1,\dots,i_n]} &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}\sigma\, t_{i_{\sigma i},\dots,i_{\sigma n}}.\end{aligned}$$

Mamy

$$\dim \otimes_{\mathrm{s}}^n \mathbb{C}^d = \frac{(d+n-1)!}{(d-1)!n!}, \quad \dim \otimes_{\mathrm{s}}^n \mathbb{C}^d = \frac{n!}{d!(n-d)!}.$$

5.12 Charaktery

Załóżmy, że π jest reprezentacją na skończenie wymiarowej przestrzeni $\mathcal{V}$. Charakterem reprezentacji π nazywamy funkcję na G równą

$$\chi_\pi(g) := \mathrm{Tr}\pi(g).$$

Mamy $\dim\mathcal{V} = \chi_\pi(e)$,

$$\begin{aligned}\chi_\pi(g) &= \chi_\pi(hgh^{-1}), \quad g,h \in G;\\ \chi_{\pi\oplus\rho} &= \chi_\pi + \chi_\rho,\\ \chi_{n\pi} &= n\chi_\pi,\\ \chi_{\pi\otimes\rho} &= \chi_\pi\chi_\rho,\\ \chi_{\overline{\pi}} &= \overline{\chi}_\pi,\\ \chi_{\otimes_{\mathrm{s}}^2\pi} &= \frac{1}{2}\left(\chi_\pi(g)^2 + \chi_\pi(g^2)\right);\\ \chi_{\otimes_{\mathrm{a}}^2\pi} &= \frac{1}{2}\left(\chi_\pi(g)^2 - \chi_\pi(g^2)\right).\end{aligned}$$

6 Reprezentacje grup skończonych

W tej sekcji wszystkie grupy są skończone.

6.1 Unitaryzowalność

Twierdzenie 6.1 *Niech G będzie grupą skończoną a $(\rho, \mathcal{V}_\rho)$ jej reprezentacją. Wtedy istnieje iloczyn skalarny na $\mathcal{V}_\rho$ taki, że ρ jest reprezentacją unitarną.*

Dowód. Wybierzmy dowolny iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot)_0$ w $\mathcal{V}_\rho$. Wtedy

$$(v|w) := \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}(\rho(g)v|\rho(g)w)_0$$

jest też iloczynem skalarnym. Mamy

$$(\rho(h)v|\rho(h)w) = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}(\rho(gh)v|\rho(gh)w)_0 = (v|w).$$

Zatem ρ jest reprezentacją unitarną. $\square$

Stąd wniosek, że każda reprezentacja grupy skończonej w skończenie wymiarowej przestrzeni jest całkowici rozkładalna.

6.2 Relacje ortogonalności

Unitarna równoważność reprezentacji jest relacją równoważności. Przez $\hat{G}$ będziemy oznaczali zbiór klas abstrakcji reprezentacji nieprzywiedlnych względem tej relacji. W praktyce dla każdego elementu $\hat{G}$ wybierzemy reprezentanta $(\pi, \mathcal{V}_\pi)$. Wybierzemy również bazę ortonormalną $e_{\pi,1}, \ldots, e_{\pi,d_\pi}$, gdzie $d_\pi := \dim \mathcal{V}_\pi$. Możemy wtedy zapisać π jako macierz

$$[\pi_{ij}(g)]_{i,j=1,\ldots,d_\pi}, \quad g \in G.$$

Czyli

$$\pi_{ij}(g) = (e_{\pi,i}|\pi(g)e_{\pi,j})\,.$$

Mamy też charaktery nieprzywiedlne

$$\chi_\pi(g) := \sum_{i=1}^{d_\pi} \pi_{ii}(g) = \mathrm{Tr}\pi(g)$$

W $l^2(G)$ będziemy używać iloczynu skalarnego

$$(f|f') := \frac{1}{\#G}\sum \overline{f(g)}f'(g).$$

Twierdzenie 6.2 *Niech $\pi, \pi' \in \hat{G}$.*

$$(\pi_{ij}|\pi'_{km}) = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\overline{\pi_{ij}(g)}\pi'_{km}(g) \quad = \quad \frac{1}{d_\pi}\delta_{\pi,\pi'}\delta_{ik}\delta_{jm}, \tag{6.21}$$

$$(\chi_\pi|\chi_{\pi'}) = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\overline{\chi_\pi(g)}\chi_{\pi'}(g) \quad = \quad \delta_{\pi,\pi'}. \tag{6.22}$$

Lemat 6.3 *Niech π, π' będą reprezentacjami. Niech H będzie operatorem z $\mathcal{V}_{\pi'}$ do $\mathcal{V}_\pi$. Zdefiniujmy*

$$\langle H\rangle := \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\pi(g^{-1})H\pi'(g).$$

Wtedy $\langle H\rangle$ splata π' i π. W szczególności, jeśli π, π' są nieprzywiedlne, to $\langle H\rangle$ jest niezerowe jedynie, gdy są one równoważne i wtedy (przyjmując, że $(\pi, \mathcal{V}_\pi) = (\pi', \mathcal{V}_{\pi'})$) mamy

$$\langle H\rangle = \frac{\mathrm{Tr}H}{d_\pi}\mathbb{1}_{\mathcal{V}_\pi}. \tag{6.23}$$

Dowód.

$$\begin{aligned}\pi(h)\langle H\rangle &= \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\pi(hg^{-1})H\pi'(g)\\ &= \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\pi((gh^{-1})^{-1})H\pi'(gh^{-1})\pi'(h) \;=\; \langle H\rangle\pi'(h).\end{aligned}$$

Następnie stosujemy Lemat Schura. Pokażmy na koniec (6.23). Wiemy, że $\langle H\rangle = c\mathbb{1}_{\mathcal{V}_\pi}$. Zatem

$$cd_\pi = \mathrm{Tr}\langle H\rangle = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}\pi(g^{-1})H\pi(g) = \mathrm{Tr}H.$$

□

Dowód Twierdzenia 6.2 Stosujemy Lemat 6.3 do $H = |e_{\pi,j})(e_{\pi',m}|$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\pi(g^{-1})|e_{\pi,j})(e_{\pi',m}|\pi'(g) &= \frac{1}{d_\pi}\mathbb{1}_{\mathcal{V}_\pi}\delta_{\pi,\pi'}\mathrm{Tr}|e_{\pi j})(e_{\pi,m}|\\ &= \frac{1}{d_\pi}\mathbb{1}_{\mathcal{V}_\pi}\delta_{\pi,\pi'}\delta_{jm}.\end{aligned}$$

Następnie obkładamy obie strony przez $(e_{\pi,i}|\cdots|e_{\pi',k})$, dostając (6.21). Aby pokazać (6.22), liczymy:

$$(\chi_\pi|\chi_{\pi'}) \;=\; \sum_{i=1}^{d_\pi}\sum_{j=1}^{d_{\pi'}}(\pi_{ii}|\pi'_{jj}) = \delta_{\pi\pi'}\sum_{i=1}^{d_\pi}(\pi_{ii}|\pi_{ii}) = \delta_{\pi\pi'}\frac{d_\pi}{d_\pi}.$$

□

6.3 Rozkład reprezentacji

Niech $(\rho, \mathcal{W})$ będzie reprezentacją grupy G na przestrzeni wymiaru d_ρ. Możemy ją zawsze rozłożyć na składniki jednorodne:

$$\rho \simeq \bigoplus_{\pi\in\hat{G}} m_\pi \pi. \tag{6.24}$$

Zatem

$$d_\rho = \sum_{\pi\in\hat{G}} m_\pi d_\pi. \tag{6.25}$$

Jeśli ρ jest reprezentacją unitarną, to można założyć, że suma (6.24) jest ortogonalna. Mamy też rozkład przestrzeni $\mathcal{W}$ na sumę prostą ortogonalną $\mathcal{W} = \bigoplus_{\pi\in\hat{G}} \mathcal{W}_\pi$ taki, że $\rho\Big|_{\mathcal{W}_\pi}$ jest równoważna $m_\pi \pi$, oraz rzuty ortogonalne Q_π na $\mathcal{W}_\pi$. Oczywiście, $\mathcal{W}_\pi = \mathrm{Ran} Q_\pi$,

$$\sum_{\pi\in\hat{G}} Q_\pi \;=\; \mathbb{1}, \quad Q_\pi^* = Q_\pi, \quad Q_\pi Q_{\pi'} = Q_\pi \delta_{\pi\pi'}.$$

Pokażemy, że liczby m_π, podprzestrzenie $\mathcal{W}_\pi$ i rzuty Q_π są wyznaczone jednoznacznie. Pokażemy, jak je łatwo znajdować.

Pamiętamy, że charakter ρ jest zdefiniowany jako $\chi_\rho(g) := \mathrm{Tr}\rho(g)$, $g \in G$.

Twierdzenie 6.4 *Dla* $\pi \in \hat{G}$

$$\begin{aligned} m_\pi &= \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G} \overline{\chi_\pi(g)}\chi_\rho(g) && (6.26)\\ &= (\chi_\pi|\chi_\rho), && (6.27)\\ Q_\pi &= \frac{d_\pi}{\#G}\sum_{g\in G} \overline{\chi_\pi(g)}\rho(g). && (6.28) \end{aligned}$$

Dowód. Niech ρ spełnia (6.24). Wtedy

$$\rho = \sum m_\pi \rho_\pi.$$

Następnie relacja ortogonalności charakterów implikuje (6.26).

Możemy znaleźć bazę ortonormalną w $\mathcal{W}_\pi$ $e_{\pi,i,p}$, $i = 1, \ldots, d_\pi$, $p = 1, \ldots, m_\pi$ taką, że

$$\rho(g)e_{\pi,i,p} = \sum_{j=1}^{d_\pi} \pi_{ji}(g) e_{\pi,j,p}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{d_\pi}{\#G}\sum_{g\in G} \overline{\chi_{\pi'}(g)}\rho(g)e_{\pi,i,p} &= \frac{d_\pi}{\#G}\sum_{g\in G}\sum_{k=1}^{d_{\pi'}}\sum_{j=1}^{d_\pi} \overline{\pi'_{kk}(g)}\pi_{ji}(g)e_{\pi,j,p}\\ &= \delta_{\pi,\pi'}\sum_{k,j=1}^{d_\pi}\delta_{kj}\delta_{ki}e_{\pi,j,p} \;=\; \delta_{\pi,\pi'}e_{\pi,i,p}. \end{aligned}$$

6.4 Reprezentacja regularna

Jeśli grupa G działa na zbiorze X, to wiąże się z tym unitarna reprezentacja grupy G na przestrzeni $l^2(X)$ zadana przez

$$\lambda(g)f(x) := f(g^{-1}x), \quad g \in G, \ x \in X.$$

W szczególności, rozważmy $X = G$. Iloczyn skalarny w $l^2(G)$ normalizujemy

$$(f|f') := \frac{1}{\#G} \sum \overline{f(g)} f'(g).$$

Dostajemy reprezentację na $l^2(G)$ zwaną *(lewą) reprezentacją regularną*:

$$\lambda(g)f(h) := f(g^{-1}h), \quad g, h \in G.$$

Mamy też *prawą reprezentację regularną*:

$$\rho(g)f(h) := f(hg), \quad g, h \in G.$$

Reprezentacje te komutują ze sobą.

Twierdzenie 6.5 (1) $\lambda \simeq \underset{\pi \in \hat{G}}{\oplus} d_\pi \pi$.

(2) $\#G = \sum\limits_{\pi \in \hat{G}} d_\pi^2$. *Funkcje* $\sqrt{d_\pi}\pi_{ij}$ *stanowią bazę ortonormalną w* $l^2(G)$.

Dowód. Charakter reprezentacji regularnej jest równy

$$\chi_\lambda(g) = \#G \ \delta_e(g).$$

Stąd

$$m_\pi = (\chi_\lambda|\chi_\pi) = \chi_\pi(e) = d_\pi.$$

To pokazuje (1), z którego na mocy (6.25) wynika (2).

Wiemy, że

$$\{\sqrt{d_\pi}\pi_{ij} \ : \ \pi \in \hat{G}, \ i, j = 1, \dots, d_\pi\} \tag{6.29}$$

stanowią układ ortonormalny. (2) oznacza, że liczba jego elementów równa jest wymiarowi $l^2(G) = \#G$. Zatem jest to baza ortonormalna. □

Rozważmy teraz jak działa ρ i λ w bazie (6.29). Mamy

$$\Big(\lambda(g)\sqrt{d_\pi}\pi_{ij}\Big)(h) \ = \ \sqrt{d_\pi}\pi_{ij}(g^{-1}h) \ = \ \sum_k \overline{\pi_{ki}(g)}\sqrt{d_\pi}\pi_{kj}(h), \tag{6.30}$$

$$\Big(\rho(g)\sqrt{d_\pi}\pi_{ij}\Big)(h) \ = \ \sqrt{d_\pi}\pi_{ij}(hg) \ = \ \sum_k \sqrt{d_\pi}\pi_{ik}(h)\pi_{kj}(g). \tag{6.31}$$

Wprowadźmy utożsamienie

$$l^2(G) \simeq \underset{\pi \in \hat{G}}{\oplus} \mathbb{C}^{d_\pi} \otimes \mathbb{C}^{d_\pi}, \tag{6.32}$$

gdzie $\mathbb{C}^{d_\pi}$ ma bazę

$$\{e_{\pi,i} \;:\; i = 1, \ldots, d_\pi\} \tag{6.33}$$

i $\sqrt{d_\pi}\pi_{ij}$ utożsamiamy z $e_{\pi,j} \otimes e_{\pi,i}$ (zauważmy zamianę kolejności!), to

$$\lambda \;\simeq\; \bigoplus_{\pi\in\hat{G}} 1\!\!1_{\mathbb{C}^{d_\pi}} \otimes \overline{\pi}, \tag{6.34}$$

$$\rho \;\simeq\; \bigoplus_{\pi\in\hat{G}} \pi \otimes 1\!\!1_{\mathbb{C}^{d_\pi}}. \tag{6.35}$$

Zamianę kolejności uzasadniamy prawą stroną poniższej tożsamości:

$$\pi_{ij}(g) = (e_{\pi,i}|\pi(g)e_{\pi,j}) = \mathrm{Tr}\Big(\pi(g)\ |e_{\pi,j})(e_{\pi,i}|\Big). \tag{6.36}$$

(6.33) jest oczywiście bazą $\mathcal{V}_\pi$ (przestrzenie reprezentacji π). Czy można napisać więc $\mathcal{V}_\pi$ zamiast $\mathbb{C}^{d_\pi}$ w (6.32)? Dla lewego $\mathbb{C}^{d_\pi}$ (gdzie działa prawa regularna) odpowiedź brzmi tak. W przypadku prawego $\mathbb{C}^{d_\pi}$ (gdzie działa lewa regularna), utożsamienie to jest antyliniowe! Piszemy wtedy zatem w tym przypadku $\overline{\mathcal{V}}_\pi$ zamiast $\mathcal{V}_\pi$. Reasumując, dostajemy następujące utożsamienia:

$$l^2(G) \;\simeq\; \bigoplus_{\pi\in\hat{G}} \mathcal{V}_\pi \otimes \overline{\mathcal{V}_\pi}, \tag{6.37}$$

$$\lambda \;\simeq\; \bigoplus_{\pi\in\hat{G}} 1\!\!1_{\mathcal{V}_\pi} \otimes \overline{\pi}, \tag{6.38}$$

$$\rho \;\simeq\; \bigoplus_{\pi\in\hat{G}} \pi \otimes 1\!\!1_{\overline{\mathcal{V}_\pi}}. \tag{6.39}$$

6.5 Liczba reprezentacji nieprzywiedlnych

Twierdzenie 6.6 *Liczba klas sprzężoności jest równa liczbie reprezentacji nieprzywiedlnych.*

Dowód. Niech $l^2_{\mathrm{cent}}(G)$ będzie podprzesterzenią $l^2(G)$ składającą się z funkcji stałych na klasach sprzężoności. Wiemy, że χ_π, $\pi \in \hat{G}$, stanowią układ ortonormalny w $l^2_{\mathrm{cent}}(G)$. Pokażemy, że jest to baza ortonormalna.

Najpierw zauważmy, że z Lematu 6.3 wynika, że

$$\langle \pi(g)\rangle = \frac{\chi_\pi(g)}{d_\pi} 1\!\!1_{\mathcal{V}_\pi}. \tag{6.40}$$

Niech $f \in l^2_{\mathrm{cent}}(G)$.

$$\begin{aligned} f(g) &= \sum_{\pi\in\hat{G}} \sum_{i,j}^{d_\pi} f_{\pi,ij}\pi_{ij}(g) \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{h\in G} \sum_{\pi\in\hat{G}} \sum_{i,j}^{d_\pi} f_{\pi,ij}\pi_{ij}(hgh^{-1}) \\ &= \sum_{\pi\in\hat{G}} \sum_{i,j}^{d_\pi} f_{\pi,ij}(e_{\pi,i}|\langle\pi(g)\rangle e_{\pi,j}) \\ &= \sum_{\pi\in\hat{G}} \sum_{i}^{d_\pi} f_{\pi,ii}\frac{\chi_\pi(g)}{d_\pi}, \end{aligned}$$

gdzie w ostatnim kroku skorzystaliśmy z (6.40). Zatem $l^2_{\mathrm{cent}}(G)$ jest rozpięte przez χ_π, $\pi \in \hat{G}$. □

7 Algebry łączne

7.1 Definicja

Niech $\mathfrak{A}$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$. Mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest *algebrą* jeśli jest wyposażona w działanie

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \ni (A, B) \mapsto AB \in \mathfrak{A}$$

spełniające

$$\begin{aligned}&A(B + C) = AB + AC, \quad (B + C)A = BA + CA,\\&(\alpha\beta)(AB) = (\alpha A)(\beta B).\end{aligned}$$

Jeśli w dodatku

$$A(BC) = (AB)C,$$

to mówimy, że jest to *algebra łączna*. (W praktyce, skracamy nazwę, przez *algebrę* rozumiejąc algebrę łączną).

Mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest *algebrą przemienną* gdy $A, B \in \mathfrak{A}$ implikuje $AB = BA$.

Centrum algebry $\mathfrak{A}$ jest zdefiniowane jako

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{A}) = \{A \in \mathfrak{A} \ : \ AB = BA, \ B \in \mathfrak{A}\}.$$

7.2 Podalgebry

Ustalmy algebrę $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ nazywmy *podalgebrą* gdy jest to podprzestrzeń liniowa i $A, B \in \mathfrak{B} \Rightarrow AB \in \mathfrak{B}$. Oczywiście, podalgebra jest również algebrą.

Jeśli rodzina $\mathfrak{B}_\alpha \subset \mathfrak{A}$ składa się z podalgebr, to $\cap_\alpha \mathfrak{B}_\alpha$ jest też podalgebrą. Dlatego, dla dowolnego podzbioru $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ istnieje najmniejsza podalgebra zawierająca $\mathfrak{B}$. Oznaczamy ją przez $\mathrm{Alg}(\mathfrak{B})$ i nazywamy *podalgebrą generowaną przez* $\mathfrak{B}$.

Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$. Oczywiście, zbiór liniowych odwzorowań w $\mathcal{V}$, oznaczany przez $L(\mathcal{V})$, jest algebrą.

Podalgebry w $L(\mathcal{V})$ nazywane są *konkretnymi algebrami.*

7.3 Identyczność

Identyczność algebry $\mathfrak{A}$ to element $\mathbb{1} \in \mathfrak{A}$ taki, że

$$A = \mathbb{1}A = A\mathbb{1}, \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Każda algebra ma najwyżej jedną identyczność. W rzeczy samej, jeśli $\mathbb{1}_1, \mathbb{1}_2$ są identycznościami, to

$$\mathbb{1}_1 = \mathbb{1}_1\mathbb{1}_2 = \mathbb{1}_2.$$

Mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest *unitalna* albo *z jedynką*, jeśli posiada identyczność. W dalszym ciągu, dla $\lambda \in \mathbb{C}$ będziemy po prostu pisać λ zamiast $\lambda\mathbb{1}$.

Zawsze można do algebry $\mathfrak{A}$ dołączyć jedynkę. Dostajemy wtedy algebrę $\mathfrak{A}_{\mathbf{1}}$, jako przestrzeń wektorow równą $\mathfrak{A} \oplus \mathbb{C}$ z działaniem

$$(A, \lambda)(B, \mu) := (AB + \lambda B + \mu A, \lambda\mu).$$

7.4 Idempotenty

$P \in \mathfrak{A}$ nazywa się *idempotentem* gdy $P^2 = P$. $P\mathfrak{A}P$ jest podalgebrą zwaną *algebrą zredukowaną*.

Identyczność jest idempotentem.

Idempotent P nazywa się *minimalnym* gdy $P\mathfrak{A}P$ jest jednowymiarowa.

7.5 Sumy proste

Jeśli $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ są algebrami, możemy zdefiniować $\mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_2$.

Jeśli $\mathfrak{A}$ jest algebrą i $P \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$ jest idempotentem, to oczywiście $P\mathfrak{A} = P\mathfrak{A}P$ jest podalgebrą. $\mathfrak{A}$ jest naturalnie izomorficzna z $P\mathfrak{A} \oplus (1 - P)\mathfrak{A}$.

7.6 Homomorfizmy

Niech $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ będą algebrami. Odwzorowanie $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ nazywa się *homomorfizmem* gdy jest liniowe i zachowuje mnożenie, to znaczy

(1) $\phi(\lambda A) = \lambda\phi(A)$;

(2) $\phi(A + B) = \phi(A) + \phi(B)$;

(3) $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$.

Jeśli ϕ jest homomorfizmem i P jest idempotentem, to $\phi(P)$ jest idempotentem.

Homomorfizm $\mathfrak{A}$ w $L(\mathcal{V})$ jest nazywany *reprezentacją* $\mathfrak{A}$ *na* $\mathcal{V}$.

Jeśli $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ są algebrami unitalnymi i $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ jest homomorfizmem, mówimy, że ϕ jest *unitalny* gdy

$$\phi(\mathbb{1}_{\mathfrak{A}}) = \mathbb{1}_{\mathfrak{B}}.$$

7.7 Lewa regularna reprezentacja

Regularna reprezentacja

$$\mathfrak{A} \ni A \mapsto \lambda(A) \in L(\mathfrak{A})$$

jest zdefiniowana przez

$$\lambda(A)B := AB, \quad A, B \in \mathfrak{A}.$$

Jeśli $\mathfrak{A}$ jest unitalna, to λ jest injektywna. Jeśli $\mathfrak{A}$ nie jest unitalna, to λ może być rozszerzona do reprezentacji

$$\mathfrak{A} \ni A \mapsto \lambda_{\mathbf{1}}(A) \in L(\mathfrak{A}_{\mathbf{1}})$$

w oczywisty sposób. $\lambda_{\mathbf{1}}$ jest injektywna.

W obu przypadkach widzimy, że każda algebra jest izomorficzna z konkretną algebrą.

7.8 Ideały

$\mathfrak{B}$ jest *lewym ideałem* algebry $\mathfrak{A}$ jeśli jest liniową podprzestrzenią w $\mathfrak{A}$ i $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B} \Rightarrow AB \in \mathfrak{B}$. Podobnie definiujemy prawy ideał.

Jeśli $A \in \mathfrak{A}$, to $\mathfrak{A}A$ jest lewym ideałem

$\mathfrak{B}$ nazywa się *ideałem dwustronnym*, lub po prostu *ideałem*, gdy jest lewym i prawym ideałem.

Mówimy, że ideał $\mathfrak{I}$ jest *właściwy* gdy $\mathfrak{I} \neq \mathfrak{A}$. Mówimy, że ideał $\mathfrak{I}$ jest *nietrywialny* gdy $\mathfrak{I} \neq \mathfrak{A}$ i $\mathfrak{I} \neq \{0\}$.

Twierdzenie 7.1 *Jądro homomorfizmu jest ideałem. Jeśli $\mathfrak{I}$ jest ideałem w $\mathfrak{A}$, to $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ ma naturalną strukturę algebry. Odwzorowanie*

$$\mathfrak{A} \ni A \mapsto A + \mathfrak{I} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{I}$$

jest homomorfizmem, którego jądro jest równe $\mathfrak{I}$.

Algebra, która nie posiada nietrywialnych ideałów i jest różna od $\mathbb{K}$ z zerowym iloczynem nazywa się algebrą prostą.

7.9 Przykłady podalgebr w $L(\mathbb{K}^n)$

(1) Algebra górnotrójkątna.

(2) Algebra nil-górnotrójkątna.

(3) Algebra blokowa $L(\mathbb{K}^{p_1}) \oplus \cdots \oplus L(\mathbb{K}^{p_k})$, $n = p_1 + \cdots p_k$.

(4) Algebra $L(\mathbb{K}^p) \otimes \mathbb{1}_q$, $n = pq$.

(5) Lewa regularna reprezentacja $L(\mathbb{K}^{d_1}) \oplus \cdots \oplus L(\mathbb{K}^{d_k})$ działa w $L(\mathbb{K}^n)$ dla $n = d_1^2 + \cdots d_k^2$.

7.10 $*$-algebry

Załóżmy, że $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definicja 7.2 *Mówimy, że algebra $\mathfrak{A}$ jest* $*$-algebrą *gdy jest wyposażona w antyliniowe odwzorowanie $\mathfrak{A} \ni A \mapsto A^* \in \mathfrak{A}$ takie, że $(AB)^* = B^*A^*$, $A^{**} = A$ i $A \neq 0$ implikuje $A^*A \neq 0$. $*$ nazywa się* inwolucją *lub* gwiazdką.

Mówimy, że ideał $\mathfrak{I}$ jest $*$-ideałem, *gdy jest $*$-niezmienniczy.*

Definicja 7.3 *Jeśli $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ są $*$-algebrami, to homomorfizm $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ spełniający $\pi(A^*) = \pi(A)^*$ nazywa się* $*$-homomorfizmem. *(Również definiujemy* $*$-izomorfizmy, $*$-automorfizmy,, *etc.)*

Mówimy, że $P \in \mathfrak{A}$ jest rzutem ortogonalnym, jeśli $P = P^2$ i $P = P^*$. Mówimy, że U jest częściową izometrią, jeśli $UU^*UU^* = UU^*$ i $U^*UU^*U = U^*U$. Wtedy rzuty ortogonalne U^*U i UU^* nazywamy rzutem początkowym i końcowym.

Twierdzenie 7.4 *Każda przemienna skończenie wymiarowa $*$-algebra jest $*$-izomorficzna z $C(X)$ dla skończonego zbioru X.*

Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią Hilberta. Zbiór operatorów ograniczonych na $\mathcal{V}$, oznaczany $B(\mathcal{V})$ ze sprzężeniem hermitowskim tworzy $*$-algebrę. Każda podalgebra w $B(\mathcal{V})$ niezmiennicza względem $*$ jest też $*$-algebrą.

Definicja 7.5 *$*$-Algebry takie są zwane* konkretnymi $*$-algebrami.

Twierdzenie 7.6 *Niech $\mathfrak{A}$ będzie skończenie wymiarową $*$-algebrą. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *Centrum $\mathfrak{A}$ jest równe $\mathbb{C}\mathbb{1}$.*

(2) *$\mathfrak{A}$ jest prosta.*

(3) *$\mathfrak{A}$ jest $*$-izomorficzna z $B(\mathbb{C}^p)$ dla pewnego p.*

Twierdzenie 7.7 *Każda skończenie wymiarowa $*$-algebra $\mathfrak{N}$ jest $*$-izomorficzna z*

$$\bigoplus_{i=1}^{k} B(\mathbb{C}^{p_i}). \tag{7.41}$$

Dowód. Niech $\mathcal{Z}$ będzie centrum $\mathfrak{N}$. Mamy $\mathcal{Z} \simeq C(\{0,\ldots,k\}$. Niech P_i odpowiada funkcji $\delta_i \in C(\{0,\ldots,k\})$. Oczywiście, $P_i = P_i^*$ i $P_iP_j = P_j$ i $\sum_i P_i = \mathbb{1}$.

Mamy $\mathfrak{A} = \oplus_{j=1}^k P_j\mathfrak{A}$. Centrum $P_j\mathfrak{A}$ jest równe $\mathbb{C}P_j$. Zastosować więc możemy Tw. 7.6. □

P_i skonstruowane w dowodzie są nazywane *minimalnymi rzutami centralnymi.* Dla $\mathfrak{N}$ takiej jak w (7.41) zdefinujmy $\dim(\mathfrak{N}) = [p_1,\ldots,p_k]$.

7.11 Reprezentacje skończenie wymiarowych $*$-algebr

Lemat 7.8 *Niech $U \in L(\mathbb{C}^n)$ będzie częściową izometrią. Wtedy U jest unitarne z* $\mathrm{Ran}U^*U$ *do* $\mathrm{Ran}UU^*$*.*

Lemat 7.9 *Niech $\phi : L(\mathbb{C}^p) \to L(\mathbb{C}^n)$ będzie unitalnym $*$- homomorfizmem. Wtedy $n = qp$, $q \in \mathbb{N}$, i ϕ jest unitarnie równoważny homomorfizmowi*

$$L(\mathbb{C}^p) \ni A \mapsto A \otimes \mathbb{1}_q \in L(\mathbb{C}^p \otimes \mathbb{C}^q).$$

Dowód. Niech $e_1,\ldots,e_p$ będzie bazą w $\mathbb{C}^p$. $L(\mathbb{C}^p)$ jest rozpięta przez częściowe izometrie $|e_i)(e_j|$. Niech $q := \mathrm{Tr}\phi\,(|e_1)(e_1|)$ i niech $f_{11},\ldots,f_{1q}$ będzie bazą w $\mathrm{Ran}\phi\,(|e_1)(e_1|)$. Niech $f_{ij} := \phi\,(|e_i)(e_1|)\, f_{1j}$. Wtedy $f_{i1},\ldots,f_{iq}$ stanowią bazę w $\mathrm{Ran}\phi\,(|e_i)(e_i|)$. Mamy

$$|e_1)(e_1| + \cdots + |e_p)(e_p| = \mathbb{1}_p.$$

Zatem

$$\phi\,(|e_1)(e_1|) + \cdots + \phi\,(|e_p)(e_p|) = \mathbb{1}_n.$$

Więc f_{ij}, $i = 1,\ldots,p$, $j = 1,\ldots,q$ stanowią bazę w $\mathbb{R}^n$. Oczywiście

$$\phi\,(|e_i)(e_j|)\, f_{kl} = \delta_{jk} f_{il}.$$

□

Twierdzenie 7.10 *Każda unitalna reprezentacja algebry* $\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} L(\mathbb{C}^{p_i})$ *na* $\mathbb{C}^n$ *jest unitarnie równoważna reprezentacji w* $\oplus_{i=1}^k \mathbb{C}^{p_i} \otimes \mathbb{C}^{q_i}$

$$\phi(A_1, \ldots, A_k) := \oplus_{i=1}^k A_i \otimes \mathbb{1}_{q_i}.$$

Mamy $n = \sum_{i=1}^k p_i q_i$ *oraz* $q_i = \frac{1}{p_i}\mathrm{Tr}\phi(P_i)$.

Dla reprezentacji regularnej mamy $p_i = q_i$. W szczególności, w tym wypadku

$$n = \sum_i p_i^2.$$

7.12 $*$-homomorfizmy skończenie wymiarowych $*$-algebr

Niech $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$ będą skończenie wymiarowymi $*$-algebrami. Niech $P_1, \ldots, P_p$, $Q_1, \ldots, Q_q$ będą minimalnymi rzutami centralnymi $\mathfrak{N}$ i odpowiednio $\mathfrak{M}$.

Każdy homomorfizm $\alpha : \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$, gdzie $\dim \mathfrak{N} = [n_1, \ldots, n_p]$, $\dim \mathfrak{M} = [m_1, \ldots, m_q]$, określony jest przez macierz $[t_{ij}]$, gdzie $i = 1, \ldots, q$, $j = 1, \ldots, p$ i

$$\sum_j t_{ij} n_j \leq m_i.$$

Mamy $=$ zamiast $\leq$ jeśli α jest unitalna. Będziemy pisać $\mathrm{Mat}(\alpha) = [t_{ij}]$. Mamy $t_{ij} = \mathrm{Tr} Q_i \phi(P_j)$.

8 Algebra grupowa

8.1 Algebra grupowa

Niech G będzie skończoną grupą. Przez $C(G)$ będziemy oznaczali zbiór funkcji zespolonych na G. Jest on rozpięty przez funkcje δ_g, $g \in G$,

$$\delta_g(h) := \begin{cases} 1, & g = h, \\ 0, & g \neq h. \end{cases}$$

Czasami zamiast δ_g pisze się po prostu g.

$C(G)$ jest wyposażone w dwa łączne iloczyny: mnożenie punktowe i splot:

$$\begin{aligned} FG(g) &:= F(g)G(g), \\ F * G(g) &:= \sum_h F(gh^{-1})G(h). \end{aligned}$$

Mamy również inwolucję

$$F^*(g) := \overline{F(g^{-1})}. \tag{8.42}$$

Twierdzenie 8.1 *$C(G)$ ze splotem i sprzężeniem (8.42) jest $*$-algebrą.*

Dowód. Niech $F \in C(G)$ będzie różne od zera. Liczymy

$$F^* * F(g) = \sum_{h \in G} \overline{F(hg^{-1})} F(h).$$

W szczególności,

$$F^* * F(e) = \sum_{h \in G} |F(h)|^2 \neq 0.$$

Zatem $F^* F \neq 0$. $\square$

Mamy naturalne zanurzenie $G \in g \mapsto \delta_g \in C(G)$, przy czym mnożenie przechodzi na splot:

$$\delta_g * \delta_h \quad := \quad \delta_{gh}.$$

Niech $\psi : K \to G$ będzie homomorfizmem grup. Wtedy

$$\psi'(\delta_k) := \delta_{\psi(k)}$$

definiuje $*$-homomorfizm algebr $\psi' : C(K) \to C(G)$. Mamy przemienny diagram

$$\begin{array}{ccc} K & \to & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(K) & \to & C(G) \end{array}$$

Jeśli $\phi : G \to H$ jest również homomorfizmem grup, to $(\psi \circ \phi)' = \psi' \circ \phi'$.

8.2 Rozszerzanie reprezentacji do algebry splotowej

Niech ρ będzie reprezentacją G na $\mathcal{W}$. Wtedy istnieje dokładnie jedna reprezentacja $\tilde{\rho} : C(G) \to L(\mathcal{W})$ spełniająca

$$\tilde{\rho}(\delta_g) := \rho(g).$$

Jeśli reprezentacja jest unitarna, to $\tilde{\rho}$ jest $*$-reprezentacją. Mamy przemienny diagram

$$\begin{array}{ccc} G & \to & GL(\mathcal{W}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(G) & \to & L(\mathcal{W}) \end{array}$$

Niech $\psi : K \to G$ będzie homomorfizmem. Wtedy $\rho \circ \psi$ jest reprezentacją grupy K. Mamy też

$$\widetilde{\rho \circ \psi} = \tilde{\rho} \circ \psi'.$$

W przyszłości będziemy opuszczać tyldy i primy w powyższych oznaczeniach.

Wiemy, że $\mathcal{W} = \underset{\pi \in \hat{G}}{\oplus} \mathcal{W}_\pi$, gdzie na $\mathcal{W}_\pi$ reprezentacja ρ jest równoważna m_π krotnej reprezentacji π. Pamiętamy, że rzut ortogonalny na $\mathcal{W}_\pi$ oznaczamy przez Q_π. Możemy zatem przedstawić $\mathcal{W}_\pi$ jako $\mathcal{V}_\pi \otimes \tilde{\mathcal{V}}_\pi$, tak że

$$\mathcal{W} = \underset{\pi \in \hat{G}}{\oplus} \mathcal{V}_\pi \otimes \tilde{\mathcal{V}}_\pi, \tag{8.43}$$

i reprezentacja ρ działa jak

$$\rho = \underset{\pi \in \hat{G}}{\oplus} \pi \otimes \mathbb{1}_{\tilde{\mathcal{V}}_\pi}. \tag{8.44}$$

Twierdzenie 8.2 *Oznaczmy rozszerzenie ρ do $C(G)$ tym samym symbolem. Wtedy*

$$\rho\Big(C(G)\Big) = \underset{\pi\in\hat{G}}{\oplus} L(\mathcal{V}_\pi)\otimes \mathbb{1}_{\tilde{\mathcal{V}}_\pi}, \tag{8.45}$$

$$\rho(Q_\pi) = \rho\left(\frac{d_\pi}{\#G}\sum_{g\in G}\overline{\chi_\pi(g)}\delta_g\right). \tag{8.46}$$

Dowód. Oczywista jest inkluzja $\subset$ w (8.45). Trzeba pokazać surjektywność. Rozważmy

$$\pi_{ij} = \sum_{g\in G}\pi_{ij}\delta_g, \tag{8.47}$$

które stanowią bazę $C(G)$. Mamy

$$\rho(\pi_{ij}) = \sum_{g\in G}\pi_{ij}(g)\rho(g) \tag{8.48}$$

$$= \sum_{g\in G}\pi_{ij}(g)\underset{\pi'\in\hat{G}}{\oplus}\pi'(g)\otimes\mathbb{1}_{\tilde{\mathcal{V}}_{\pi'}} \tag{8.49}$$

$$= \sum_{g\in G}\pi_{ij}(g)\underset{\pi'\in\hat{G}}{\oplus}\pi'_{km}(g)|e_{\pi',k})(e_{\pi',m}|\otimes\mathbb{1}_{\tilde{\mathcal{V}}_{\pi'}} \tag{8.50}$$

$$= \frac{\#G}{d_\pi}|e_{\pi,j})(e_{\pi,i}|\otimes\mathbb{1}_{\tilde{\mathcal{V}}_\pi}, \tag{8.51}$$

gdzie na koniec skorzystaliśmy z ortogonalności elementów macierzowych reprezentacji nieprzywiedlnych. Jeśli $m_\pi = \dim\tilde{\mathcal{V}}_\pi = 0$, to (8.51) jet równa 0. Natomiast jeśli ograniczymy się do π dla których $m_\pi \neq 0$, to operatory (8.51) stanowią bazę w algebrze z prawej strony (8.45).

Wiemy z (6.28), że

$$Q_\pi = \frac{d_\pi}{\#G}\sum_{g\in G}\overline{\chi_\pi(g)}\rho(g).$$

$\rho(g)$ możemy zastąpić przez $\rho(\delta_g)$ a następnie wyciągnąć ρ przed całe wyrażenie. □

8.3 Postać algebry splotowej

W szczególności, w Twierdzeniu 8.2 możemy rozważyć reprezentację ρ dla której $m_\pi = 1$ dla każdego $\pi\in\hat{G}$. Dostajemy wtedy izomorfizm

$$C(G) \simeq \underset{\pi\in\hat{G}}{\oplus} L(\mathcal{V}_\pi). \tag{8.52}$$

Niech

$$C_{\mathrm{cent}}(G) := \{F\in C(G)\ :\ F(ghg^{-1}) = F(h),\quad h,g\in G\}$$

Innymi słowy, $C_{\mathrm{cent}}(G)$ składa się z funkcji stałych na klasach sprzężoności grupy G.

Twierdzenie 8.3 *$C_{\mathrm{cent}}(G)$ jest centrum algebry splotowej $C(G)$. Jest rozpięte przez*

$$\frac{d_\pi}{\#G}\sum_{g\in G}\overline{\chi_\pi(g)}\delta_g.$$

Dowód. Niech $F=\sum\limits_{h\in G}F_h\delta_h$ należy do centrum $C(G)$. Wtedy

$$\delta_g F = F\delta_g.$$

Zatem

$$\delta_g F\delta_{g^{-1}} = F.$$

To oznacza, że

$$\sum_{h\in G}F_{g^{-1}hg}\delta_h=\sum_h F_h\delta_h,$$

czyli F jest stałe na klasach sprzężoności. □

8.4 Przykłady

Grupa $\mathbb{Z}_n$ ma reprezentacje z charakterami

$$\chi_m(k)=\mathrm{e}^{\frac{ikm2\pi}{n}},\quad k\in\mathbb{Z}_n,\ m\in\hat{\mathbb{Z}}_n\simeq\mathbb{Z}_n.$$

Odpowiadające im rzuty centralne to

$$1\!\!1_m=\frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}_n}\mathrm{e}^{-\frac{ikm2\pi}{n}}\delta_k.$$

Grupa S_n ma reprezentację trywialną/znakową z charakterem $\chi_{\mathrm{s}}(\sigma)=1/\chi_{\mathrm{a}}=\mathrm{sgn}\sigma$ i rzutem centralnym

$$\begin{aligned}1\!\!1_{\mathrm{s}} &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\delta_\sigma,\\ 1\!\!1_{\mathrm{a}} &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}\sigma\delta_\sigma.\end{aligned}$$

Ma również reprezentacje standardową, dla której $\chi_{\mathrm{st}}(\sigma)$ jest równe liczbie punktów stałych -1 oraz znakową×standardową z rzutami centralnymi

$$\begin{aligned}&\frac{n-1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\chi_{\mathrm{st}}(\sigma)\delta_\sigma,\\ &\frac{n-1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}\sigma\chi_{\mathrm{st}}(\sigma)\delta_\sigma.\end{aligned}$$

8.5 Reprezentacja regularna

Pamiętamy, że mamy utożsamienie

$$l^2(G) \quad \simeq \quad \bigoplus_{\pi\in\hat{G}} \mathcal{V}_\pi \otimes \overline{\mathcal{V}_\pi}, \tag{8.53}$$

Korzystając z własności lewej i prawej reprezentacji regularnej (6.38) i (6.39), możemy podać, jak wygląda obraz algebry splotowej w rozszerzeniach tych reprezentacji:

$$\lambda(C(G)) \quad \simeq \quad \bigoplus_{\pi\in\hat{G}} 1\!\!1_{\mathcal{V}_\pi} \otimes L(\overline{\mathcal{V}}_\pi), \tag{8.54}$$

$$\rho(C(G)) \quad \simeq \quad \bigoplus_{\pi\in\hat{G}} L(\mathcal{V}_\pi) \otimes 1\!\!1_{\overline{\mathcal{V}_\pi}}. \tag{8.55}$$

Twierdzenie 8.4 *W poniższym wzorze z lewej F, F' są traktowane jako elementy $l^2(G)$, z prawej, jako elementy algebry $C(G)$:*

$$(F|F') \quad = \tfrac{1}{(\#G)^2}\mathrm{Tr}\lambda\left((F^* * F')\delta_e\right).$$

Dowód. Mamy $(\delta_g^* * \delta_{g'})\delta_e = \delta_{g^{-1}g'}\delta_e = \delta_{g,g'}\delta_e$. Dlatego też

$$\begin{aligned}
(F|F') \quad &= \quad \sum_{\pi\in\hat{G}} \frac{d_\pi}{\#G}(F|F')\mathrm{Tr}\pi(\delta_e) \\
&= \quad \sum_{\pi\in\hat{G}} \frac{d_\pi}{(\#G)^2} \sum_{g,g'\in G} \overline{F(g)}F'(g')\mathrm{Tr}\pi\left((\delta_g^* * \delta_{g'})\delta_e\right) \\
&= \quad \sum_{\pi\in\hat{G}} \frac{d_\pi}{(\#G)^2}\mathrm{Tr}\pi\left((F^* * F')\delta_e\right) \\
&= \quad \frac{1}{(\#G)^2}\mathrm{Tr}\lambda\left((F^* * F')\delta_e\right).
\end{aligned}$$

9 Kwaterniony

9.1 Definicje

Algebra nad $\mathbb{R}$ oznaczana przez $\mathbb{H}$ z bazą $1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ spełniająca relacje

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1, \quad \mathrm{ij} = \mathrm{k}, \quad \mathrm{jk} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{ki} = \mathrm{j},$$

nazywa się algerą *kwaternionów*. Jest wyposażona w $*$ działającą jako

$$1^* = 1, \quad \mathrm{i}^* = -\mathrm{i}, \quad \mathrm{j}^* = -\mathrm{j}, \quad \mathrm{k}^* = -\mathrm{k}.$$

$*$ jest *inwolucją*: $x^{**} = x$, $(xy)^* = y^*x^*$, $x, y \in \mathbb{H}$.

Dla $x \in \mathbb{H}$ kładziemy

$$\mathrm{Re}x := \frac{1}{2}(x + x^*), \quad |x| := \sqrt{x^*x}.$$

(Zauważmy, że x^*x jest zawsze dodatnie rzeczywiste)

Jeśli $x = x_1 + x_\mathrm{i}\mathrm{i} + x_\mathrm{j}\mathrm{j} + x_\mathrm{k}\mathrm{k}$, gdzie $x_1, x_\mathrm{i}, x_\mathrm{j}, x_\mathrm{k} \in \mathbb{R}$, to

$$\mathrm{Re}x = x_1, \qquad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_\mathrm{i}^2 + x_\mathrm{j}^2 + x_\mathrm{k}^2}.$$

Zauważmy, że $|\cdot|$ jest normą na $\mathbb{H}$. Jeśli $x, y \in \mathbb{H}$, to $|xy| = |x||y|$.

$\mathbb{H}$ posiada kwaternionowy iloczyn skalarny x^*y i rzeczywisty iloczyn skalarny

$$\langle x|y\rangle := \mathrm{Re}x^*y = x_1y_1 + x_\mathrm{i}y_\mathrm{i} + x_\mathrm{j}y_j + x_\mathrm{k}y_\mathrm{k}, \quad x, y \in \mathbb{H}.$$

$\mathbb{H}$ ma tę własność, że wszystkie niezerowe elementy są odwracalne. Algebry z tą własnością są zwane *algebrami z dzieleniem.*

Kwaterniony jednostkowe, czyli $\{x \in \mathbb{H} \ : \ |x| = 1\}$ tworzą grupę izomorficzną z $SU(2)$. Grupa automorfizmów kwaternionów jest izomorficzna z $SO(3)$. Każdy automorfizm jest postaci

$$\mathbb{H} \ni x \mapsto uxu^{-1} \in \mathbb{H}, \tag{9.56}$$

gdzie u jest jednostkowym kwaternionem.

9.2 Zanurzanie liczb zespolonych w kwaternionach

Oczywiście, istnieje dokładnie jeden ciągły injektywny homomorfizm $\mathbb{R} \to \mathbb{H}$. Jego obrazem jest centrum algebry $\mathbb{H}$, które identyfikujemy z $\mathbb{R}$.

Ale istnieje wiele ciągłych injektywnych homomorfizmów $\mathbb{C} \to \mathbb{H}$. Aby go ustalić, trzeba wybrać $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ w $\mathbb{H}$. Też go nazywamy i.

Ustalmy homomorfzm $\mathbb{C} \to \mathbb{H}$. $\mathbb{H}$ staje się przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{C}$ o wymiarze 2. Odwzorowanie

$$\mathbb{H} \ni x \mapsto \frac{1}{2}(x - \mathrm{i}x\mathrm{i}) \in \mathbb{C} \tag{9.57}$$

jest rzutem. $\mathbb{H}$ ma zespolony półtoraliniowy iloczyn skalarny

$$(x|y) := \frac{1}{2}(yx^* - \mathrm{i}yx^*\mathrm{i}) \tag{9.58}$$

(W rzeczy samej, na mocy (9.57), wartości tego iloczynu skalarnego są w $\mathbb{C}$. Rachunek

$$\begin{aligned}
(x|zy) &= \frac{1}{2}(zyx^* - \mathrm{i}zyx^*\mathrm{i}) = z(x|y), \\
(zx|y) &= \frac{1}{2}(yx^*\overline{z} - \mathrm{i}yx^*\overline{z}\mathrm{i}) = (x|y)\overline{z}, \quad z \in \mathbb{C},
\end{aligned}$$

pokazuje, że (9.57) jest półtoraliniowy.

$1, \mathrm{j}$ jest przykładem bazy ortonormalnej w $\mathbb{H}$ ze względu na (9.58).

9.3 Macierzowa reprezentacja kwaternionów

Kwaterniony mogą być reprezentowane przez macierze Pauliego pomnożone przez i:

$$\pi(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \pi(\mathrm{i}) = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix}, \quad \pi(\mathrm{j}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pi(\mathrm{k}) = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}.$$

W ten sposób dostajemy reprezentację kwaternionów w przestrzeni Hilberta $\mathbb{C}^2$

$$\pi : \mathbb{H} \to B(\mathbb{C}^2). \tag{9.59}$$

W tej reprezentacji,

$$\pi(x^*) = \pi(x)^*, \quad |x| = \sqrt{\det \pi(x)}. \tag{9.60}$$

Mamy

$$\pi(\mathbb{H}) = \{\lambda U \ : \ U \in SU(2), \quad \lambda \in [0, \infty[\}.$$

Inną użyteczną relacją, która zależy od powyższej reprezentacji jest

$$\pi(\mathbb{H}) = \{A \in B(\mathbb{C}^2) \ : \ A = R\overline{A}R^{-1}\}, \tag{9.61}$$

gdzie $\overline{A}$ oznacza zwykłe zespolone sprzężenie macierzy A i $R = \pi(\mathrm{j})$. Zauważmy, że $R\overline{R} = -\mathbb{1}$.

Zastępując (9.59) przez $W\pi(\cdot)W^*$ dla jakiegoś unitarnego W, zastępujemy R przez $R_W := WR\overline{W}^*$. Zauważmy, że mamy też $R_W\overline{R}_W = -\mathbb{1}$.

Jeśli $A \in L(\mathbb{H}^n)$, to możemy zdefiniować *wyznacznik kwaternionowy* jako

$$\det A := \det \pi(A),$$

gdzie z prawej strony mamy zwykły wyznacznik (w sensie macierzy zespolonej). Zauważmy, że $\det AB = \det A \det B$. $\det A$ nie zależy od zanurzenia $\mathbb{C}$ w $\mathbb{H}$ i ma zawsze wartość rzeczywistą ≥ 0.

9.4 Rzeczywiste proste algebry

Dobrze wiadomo, że można sklasyfikować wszystkie proste skończenie wymiarowe algebry nad $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$. Przypadek zespolony jest szczególnie łatwy:

Twierdzenie 9.1 *Niech $\mathfrak{A}$ będzie zespoloną skończenie wymiarową algebrą prostą. Wtedy istnieje $n \in \mathbb{N}$ taki, że $\mathfrak{A}$ jest izomorficzny do $L(\mathbb{C}^n)$.*

Odpowiadająca temu klasyfikacja rzeczywista jest bardziej skomplikowana:

Twierdzenie 9.2 *Niech $\mathfrak{A}$ będzie rzeczywistę skończenie wymiarową algebrą prostą. Wtedy istnieje $n \in \mathbb{N}$ taki, że $\mathfrak{A}$ jest izomorficzna z $L(\mathbb{C}^n)$, $L(\mathbb{R}^n)$ lub $L(\mathbb{H}^n)$.*

W szczególności, można zanurzyć $L(\mathbb{R}^n)$ w $L(\mathbb{C}^n)$:

$$L(\mathbb{R}^n) = \{A \in L(\mathbb{C}^n) \ : \ A = \overline{A}\}.$$

$L(\mathbb{H}^n)$ można zanurzyć w $L^2(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^n)$. wtedy

$$L(\mathbb{H}^n) = \{A \in L(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^n) \ : \ RA = \overline{A}R\},$$

gdzie $R = \pi(\mathrm{j}) \otimes \mathbb{1}$.

9.5 Kwaternionowe przestrzenie wektorowe

Mówimy, że $(\mathcal{V}, +, 0, -)$ jest *kwaternionową przestrzenią wektorową*, gdy jest to grupa abelowa wyposażona w działania

$$\mathbb{H} \times \mathcal{V} \ni (x, v) \mapsto xv \in \mathcal{V}, \quad \mathcal{V} \times \mathbb{H} \ni (v, x) \mapsto vx \in \mathcal{V},$$

takie, że

$$(x + y)v = xv + yv, \quad (xy)v = x(yv), \quad x, y \in \mathbb{H}, \quad v \in \mathcal{V}.$$

$$v(x + y) = vx + vy, \quad v(xy) = (vx)y, \quad x, y \in \mathbb{H}, \quad v \in \mathcal{V}.$$

Przykładem kwaternionowych przestrzeni są $\mathbb{H}^n$. Kwaternionowe przestrzenie wektorowe izomorficzne z $\mathbb{H}^n$ nazywamy *przestrzeniami wymiaru* n

Transformacje $\mathbb{H}$*-liniowe z prawej/z lewej* na kwaternionowej przestrzeni wektorowej mają oczywistą definicję. Zbiór transformacji $\mathbb{H}$-liniowych z prawej z $\mathcal{V}$ do $\mathcal{W}$ oznaczamy przez $L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Jak zwykle $L(\mathcal{V}) := L(\mathcal{V}, \mathcal{V})$.

Transformacje z $L(\mathbb{H}^n, \mathbb{H}^m)$ można w oczywisty sposób reprezentować macierzami $m \times n$ o elementach kwaternionowych.

Niech $\mathcal{V}$ będzie kwaternionową przestrzenią wektorową. $\mathbb{R}$-liniowe odwzorowanie

$$\mathcal{V} \ni v \mapsto f(v) \in \mathbb{H}$$

jest antyliniowe z prawej/z lewej gdy

$$f(v\lambda) = f(v)\lambda^* \ / \ f(\lambda w) = \lambda^* f(v), \quad v \in \mathcal{V}, \quad \lambda \in \mathbb{H}.$$

Mówimy, że

$$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \ni (v, w) \mapsto (v|w) \in \mathbb{H}$$

jest *kwaternionową formą hermitowską* jeśli jest ono anty-liniowe z prawej ze względu na pierwszy argument i liniowe ze względu na drugi argument i

$$(v|w) = (w|v)^* \tag{9.62}$$

Jeśli zamiast (9.62) mamy

$$(v|w) = -(w|v)^* \tag{9.63}$$

Mówimy, że jest ona *antyhermitowska.*

Formę hermitowską spełniającą $(v|v) \geq 0$ nazywamy *dodatnio określoną.* Jeśli jest w dodatku niezdegenerowana, nazywamy ją *kwaternionowym iloczynem skalarnym.* Każda skończenie wymiarowa przestrzeń kwaternionowa z kwaternionowym iloczynem skalarnym jest izomorficzna z $\mathbb{H}^n$ i

$$(v|w) := \sum v_i^* w_i, \quad v, w \in \mathbb{H}^n.$$

Jeśli ustalimy zanurzenie (9.57), wtedy kwaternionowe przestrzenie wektorowe można zreinterpretować jako zespolone przestrzenie wektorowe, zaś kwaternionowe przestrzenie Hilberta jako zespolone przestrzenie Hilberta

Jeśli $\mathcal{V}$ jest kwaternionową przestrzenią wektorową, to $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ będzie oznaczało $\mathcal{V}$ rozumianą jako zespoloną przestrzeń. Będzie ona zwana *zespoloną formą przestrzeni* $\mathcal{V}$.

10 Reprezentacje zespolone, rzeczywiste i kwaternionowe

10.1 Reprezentacja zespolenie sprzężona

Załóżmy, że mamy reprezentację π na przestrzeni $\mathbb{C}^n$. Reprezentację sprzężoną do π nazywamy reprezentację $\overline{\pi}$ zadaną przez

$$\overline{\pi}(g) := \overline{\pi(g)}.$$

Niewątpliwie, definicja ta zależy od wyboru bazy. Zależność ta nie jest jednak zbyt istotna. Jeśli zmienimy bazę, dostaniemy reprezentację równoważną.

10.2 Przestrzeń zespolenie sprzężona

Można do zagadnienia reprezentacji sprzężonej podejść w bardziej abstrakcyjny sposób, który jest jawnie niezależny od bazy.

Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią zespoloną. *Przestrzeń zespolenie sprzężona do* $\mathcal{V}$ jest oznaczona przez $\overline{\mathcal{V}}$ i jest to jakakolwiek ustalona przestrzeń zespolona wyposażona w odwzorowanie antyliniowe

$$\mathcal{V} \ni v \mapsto \overline{v} \in \overline{\mathcal{V}}. \tag{10.64}$$

Odwzorowanie odwrotne również oznaczamy przez kreskę, tak że mamy $\overline{\overline{v}} = v$. Odwzorowanie (10.64) nazywamy *sprzężeniem zespolonym.*

Jeśli $A \in L(\mathcal{V})$, to $\overline{A} \in L(\overline{\mathcal{V}})$ jest zdefiniowany przez

$$\overline{A} := \overline{A\overline{v}} \tag{10.65}$$

Jeśli $\mathcal{V}$ ma iloczyn skalarny, to $\overline{\mathcal{V}}$ też:

$$(\overline{v}|\overline{w}) := \overline{(v|w)}.$$

W praktyce, przestrzeń $\overline{\mathcal{V}}$ realizujemy na różne sposoby. Kanonicznym sposobem jest konstrukcja następująca. Jako grupa abelowa $\overline{\mathcal{V}}$ pokrywa się z $\mathcal{V}$. Odwzorowanie identycznościowe jest oznaczone przez

$$\mathcal{V} \ni v \mapsto \overline{v} \in \overline{\mathcal{V}}. \tag{10.66}$$

Jedyna różnica między $\mathcal{V}$ i $\overline{\mathcal{V}}$ to mnożenie przez $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\overline{\lambda}\overline{v} := \overline{\lambda v}.$$

Powyższa konstrukcja jest dość abstrakcyjna i dlatego w praktyce nie jest zbyt często używana. Często wolimy bardziej konkretne podejście. W podejściu tym punktem wyjściowym jest odwzorowanie antyliniowe κ na $\mathcal{V}$ spełniające $\kappa^2 = \mathbb{1}$. Takie odwzorowanie nazywamy *sprzężeniem zespolonym wewnętrznym.* Wtedy $\overline{\mathcal{V}}$ i $\mathcal{V}$ pokrywają się jako przestrzenie zespolone, natomiast $\overline{v}$ utożsamiamy z κv.

W szczególności, załóżmy, że $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$. Wtedy mamy oczywiste sprzężenie zespolone, $\overline{v} := \overline{v}_1, \dots, \overline{v}_n$. Jeśli operator na $\mathbb{C}^n$ reprezentujemy macierzą, to sprzężenie zespolone w sensie (10.65) daje macierz zespolenie sprzężoną w naiwnym sensie.

Jeśli $(\pi, \mathcal{V})$ jest reprezentacją grupy G, to *reprezentacją sprzężoną* nazywamy reprezentację $(\overline{\pi}, \overline{\mathcal{V}})$

$$\overline{\pi}(g) := \overline{\pi(g)}.$$

10.3 Reprezentacje zespolone

Jak dotychczas, G jest grupą skończoną a $\mathcal{V}$ zespoloną przestrzenią Hilberta.

Mówimy, że κ jest operatorem antyunitarnym, jeżeli jest antyliniowy, odwracalny i

$$\overline{(v|w)} = (\kappa v|\kappa w).$$

Oczywiście, jeśli $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$, to operatory antyunitarne pokrywają się z operatorami postaci $\kappa v = U\overline{v}$, gdzie U jest unitarny.

Niech $\pi : G \to \mathcal{V}$ będzie unitarną reprezentacją nieprzywiedlną. Mówimy, że jest ona zespolona, jeśli reprezentacja $\overline{\pi}$ nie jest unitarnie równoważna reprezentacji π. Równoważna definicja: nie istnieje operator antyunitarny κ taki, że $g \mapsto \kappa\pi(g)\kappa^{-1}$ jest równoważna z π.

Załóżmy, że π nie jest zespolona. Niech κ będzie operatorem antyunitarnym takim, że $\kappa\pi\kappa^{-1} \sim \pi$. Wtedy κ^2 jest unitarny i splata π z sobą. Zatem z Lematu Schura, $\kappa^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathbb{1}$. Mamy

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\kappa = \kappa\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \kappa^3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\kappa.$$

Zatem $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} = 1$. Mówimy, że π jest rzeczywista, jeśli $\kappa^2 = \mathbb{1}$ i kwaternionowa, jeśli $\kappa^2 = -\mathbb{1}$

Jeśli reprezentacja jest rzeczywista, reprezentację można obciąć do przestrzeni $\mathcal{V}^\kappa := \{v \in \mathcal{V} : \kappa v = v\}$ dostając reprezentację nieprzywiedlną na rzeczywistej przestrzeni. Jeśli reprezentacja jest kwaternionowa lub zespolona, nie posiada żadnej nietrywialnej rzeczywistej podprzestrzeni niezmienniczej.

Jeśli reprezentacja jest kwaternionowa, możemy nadać przestrzeni strukturę prawej przestrzeni kwaternionowej kładąc $\mathrm{j} := \kappa$ i $\mathrm{k} := \mathrm{i}\kappa$. Dostajemy reprezentację na przestrzeni kwaternionowej. Jest to niemożliwe w przypadku rzeczywistym i zespolonym.

Twierdzenie 10.1 (Twierdzenie Frobeniusa i Schura) *Niech π będzie reprezentacją nieprzywiedlną grupy skończonej G. Wtedy*

$$\frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\chi_\pi(g^2) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \pi \text{ jest rzeczywiste,} \\ 0 & \text{jeśli } \pi \text{ jest zespolone,} \\ -1 & \text{jeśli } \pi \text{ jest kwaternionowe.} \end{cases}$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\chi_\pi(g^2) &= \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\sum_{i=1}^{d_\pi}\pi_{ii}(g^2) \\ &= \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\sum_{i,j=1}^{d_\pi}\pi_{ij}(g)\pi_{ji}(g) \\ &= \sum_{i,j=1}^{d_\pi}(\overline{\pi}_{ij}|\pi_{ji}). \end{aligned} \qquad (10.67)$$

Dla zespolonej reprezentacji jest to równe zero z relacji ortogonalności.

W przypadku rzeczywistym bądź kwaternionowym niech $[r_{ij}]$ będzie unitarną macierzą transformacji κ. Wtedy

$$(\kappa v)_i = \sum_{j=1}^{d_\pi} r_{ij}\overline{v}_j, \quad (\kappa^{-1}v)_i = \sum_{j=1}^{d_\pi} r_{ji}\overline{v}_j,$$

$$\pi_{ij} = \sum_{p,q=1}^{d_\pi} r_{ip}\overline{\pi}_{pq}\overline{r}_{jq}.$$

Zatem, (10.67) jest równe

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j,p,q=1}^{d_\pi} r_{jp}\overline{r}_{iq}(\overline{\pi}_{ij}|\overline{\pi}_{pq}) \\ = \ &\frac{1}{d_\pi}\sum_{i,j,p,q=1}^{d_\pi} r_{jp}\overline{r}_{iq}\delta_{ip}\delta_{jq} \ = \ \frac{1}{d_\pi}\sum_{i,j=1}^{d_\pi} r_{ji}\overline{r}_{ij} \ = \ \frac{\mathrm{Tr}\kappa^2}{d_\pi} \ = \ \pm 1. \end{aligned}$$

□

Dla grupy $\mathbb{Z}_n$ wszystkie reprezentacje są zespolone z wyjątkiem reprezentacji odpowiadającej 0 oraz $n/2$ jeśli n jest parzyste.

Reprezentacja grupy kwaternionowej $\{\pm 1, \pm \mathrm{i}, \pm \mathrm{j}, \pm \mathrm{k}\}$, w $\mathbb{C}^2$ jest kwaternionowa.

10.4 Splatacze w iloczynach tensorowych

Niech $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi. Jeśli $A \in L(\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2, \mathbb{K})$, możemy zdefiniować $A_{1\to 2} \in L(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2^{\#})$ spełniający

$$Av_1 \otimes v_2 = \langle v_2 | A_{1\to 2} v_1 \rangle, \quad v_1 \in \mathcal{V}, \ v_2 \in \mathcal{V}_2.$$

Załóżmy, że $(\pi_i, \mathcal{V}_i)$, $i = 1, 2$ są reprezentacjami grupy G. Jeśli A splata $\pi_1 \otimes \pi_2$ z reprezentacją trywialną, to $A_{1\to 2}$ splata π_1 z reprezentacją π_2^{ct}, (Reprezentaca kontragradientna względem reprezentacji ρ jest zdefiniowana przez $\rho^{\mathrm{ct}}(g) = \rho(g)^{-1\#}$.)

Rozważmy na przykład $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}$, $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}^{\#}$. Wtedy mamy naturalny element $\mathrm{Tr} \in L(\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^{\#}, \mathbb{K})$. Używając notacji powyższej mamy wtedy

$$\mathrm{Tr}_{1\to 2} = \mathbb{1}_{\mathcal{V}} \in L(\mathcal{V}, \mathcal{V}).$$

Drugi Lemat Schura mówi wtedy, że jeśli π jest nieprzywiedlna to operatory splatające $\pi \otimes \pi^{\mathrm{ct}}$ z reprezentacją trywialną są proporcjonalne do Tr.

11 Elementy krystalografii

11.1 Grupy punktowe

Grupą punktową nazywamy skończoną podgrupę $O(n)$. Mówimy, że jest ona chiralna, jeśli jest podgrupą $SO(n)$.

Poniżej klasyfikujemy grupy punktowe w wymiarze 2 i 3 z dokładnością do sprzężenia.

W wymiarze 2 mamy

(1) grupy cykliczne C_n, $n = 1, 2, \dots$ (chiralne) abstrakcyjnie izomorficzne z $\mathbb{Z}_n$,

(2) dihedralne D_n, $n = 1, 2, \dots$, abstrakcyjnie izomorficzne z $\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$. ($\mathbb{Z}_2$ jest generowane przez symetrię osiową wokół dowolnie wybranej osi).

W wymiarze 3 mamy 7 serii grup punktowych i 7 grup puktowych dodatkowych.

Każda z grup 7 serii posiada maksymalną podgrupę obrotów względem ustalonej osi C_n. Jest to podgrupa normalna. Po podzieleniu grupy przez C_n dostajem skończoną grupę ilorazową. Tą grupą może być C_1, $D_{1\mathrm{v}}$, $D_{1\mathrm{h}}$, C_2 i D_2. Dostajemy zatem 5 rodzin. 3 rodziny składają się z jednej serii–są to iloczyny półproste. 2 rodziny mają po 2 serie, z których jedna to iloczyny półproste.

$D_{1\mathrm{v}}$ oznacza grupę D_1 wertykalną, generowaną przez odbicie względem płaszczyzny prostopadłej do płaszczyzny obrotu. $D_{1\mathrm{h}}$ oznacza grupę D_1 horyzontalną, generowaną przez odbicie względem płaszczyzny obrotu.

Serie grup punktowych są analogiczne do 7 grup fryzowych, w których rolę C_n odgrywa $\mathbb{Z}$.

(1) C_1 (chiralna)

- grupa cykliczna C_n, $n = 1, 2, \dots$, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z}_n$,

(2) $D_{1\mathrm{h}}$

- $C_{n\mathrm{h}} = C_n \times D_{1\mathrm{h}}$, $n = 1, 2, \dots$, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$.
- S_{2n}, $n = 1, 2, \dots$, grupa generowana przez obrót z odbiciem, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z}_{2n}$,

(3) $D_{1\mathrm{v}}$

- grupa piramidalna lub biradialna $C_{n\mathrm{v}} = C_n \rtimes D_{1\mathrm{v}}$, $n = 2, 3, \dots$, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$,

(4) C_2 (chiralna)

- grupa dihedralna $D_n = C_n \rtimes C_2$, $n = 2, 3, \dots$, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$

(5) D_2

- grupa pryzmatyczna $D_{n\mathrm{h}} = C_n \rtimes D_2 \simeq D_n \times D_{1\mathrm{h}}$, $n = 2, 3, \dots$, abstrakcyjnie izomorficzna z $(\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2$.
- grupa antypryzmatyczna $D_{n\mathrm{d}} = S_{2n} \times D_{1\mathrm{v}}$, $n = 2, 3, \dots$, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z}_{2n} \rtimes \mathbb{Z}_2$.

Na szczególną uwagę zasługują następujące grupy punktowe:

S_2 jest grupą składającą się z identyczności i symetrii środkowej (inwersji). Bywa czasem oznaczana C_{i}. Izomorficzna z $\mathbb{Z}_2$

$C_{1\mathrm{h}}(=C_{1\mathrm{v}})$ jest grupą składającą się z identyczności i odbicia. Izomorficzna z $\mathbb{Z}_2$.

$C_2(=D_1)$ jest grupą składającą się z identyczności i obrotu o 180°. Bywa czasem oznaczana C_{s}. Izomorficzna z $\mathbb{Z}_2$.

$C_{2\mathrm{h}}(=D_{1\mathrm{d}})$, izomorficzna z $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Zawiera odbicie, obrót o 180° w osi prostopadłej i inwersję.

$C_{2\mathrm{v}}(=D_{1\mathrm{h}})$, izomorficzna z $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Zawiera 2 odbicia w dwóch prostopadłych płaszczyznach i obrót o 180°.

$D_{2\mathrm{h}}$, izomorficzna z $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, generowana przez odbicia w 3 prostopadłych płaszczyznach

S_{4n+2} jest generowana przez C_{2n+1} i symetrię środkową. Bywa oznaczana przez $C_{2n+1,i}$

Oprócz tego mamy 7 dodatkowych grup punktowych:

(1) chiralna grupa tetraedralna T, izomorficzna z A_4,

(2) pełna grupa tetraedralna T_{d}, izomorficzna z S_4,

(3) grupa pirytoedralna $T_{\mathrm{h}} = T \times S_2$, izomorficzna z $A_4 \times \mathbb{Z}_2$,

(4) chiralna grupa oktaedralna O, izomorficzna z S_4

(5) pełna grupa oktaedralna $O_{\mathrm{h}} = O \times S_2$, izomorficzna z $S_4 \times \mathbb{Z}_2$

(6) chiralna grupa ikosaedralna I, izomorficzna z A_5

(7) pełna grupa ikosaedralna $I_{\mathrm{h}} \simeq I \times S_2$, izomorficzna z $A_5 \times \mathbb{Z}_2$

T jest podgrupą O.

T_{d} i T_{h} są podgrupami O_{h}.

11.2 Sieci

Siecią nazywamy dyskretną podgrupę $\mathbb{R}^n$. Jeśli dla sieci $\mathcal{L}$ istnieje zwarty podzbiór $K \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $\mathcal{L} + K = \mathbb{R}^n$, to mówimy, że jest to sieć krystalograficzna.

Twierdzenie 11.1 *Niech $\mathcal{L}$ będzie siecią w $\mathbb{R}^n$. Wtedy istnieją liniowo niezależne wektory $e_1, \ldots, e_d$, $d \leq n$, takie, że $\mathcal{L} = \{m_1 e_1 + \cdots + m_d e_d \;:\; (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{Z}^d\}$. Sieć jest krystalograficzna wtedy i tylko wtedy gdy $d = n$.*

Grupa automorfizmów sieci $\mathbb{Z}^d$ jest izomorficzna z $GL(\mathbb{Z}^d)$, czyli macierzami o elementach całkowitych i wyznaczniku ± 1. Jest to oczywiste – macierz musi być odwracalna, mieć wyznacznik całkowitoliczbowy i jej odwrotność musi być macierzą tego samego typu.

W szczególności, $SL(\mathbb{Z}^d)$ jest podgrupą w $GL(\mathbb{Z}^d)$ o indeksie 2.

11.3 Grupa ruchów euklidesowych

W grupie ruchów euklidesowych $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$ wyróżniamy podgrupę translacji $\mathbb{R}^n$ i podgrupę obrotów niewłaściwych $O(n)$. Mamy kanoniczny homomorfizm $\phi : \mathbb{R}^n \rtimes O(n) \to O(n)$. Czyli mamy krótki ciąg dokładny

$$\{0\} \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \rtimes O(n) \to O(n) \to \{1\}$$

Niech G będzie podgrupą w $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$. Wtedy $\phi(G) =: H$ jest podgrupą w $O(n)$. Jądro homomorfizmu kanonicznego ϕ obciętego do G, czyli podgrupa translacji zawartych w G, jest równa $\mathcal{L} := \mathbb{R}^n \cap G$. Mamy krótki ciąg dokładny

$$\{0\} \to \mathcal{L} \to G \to H \to \{1\}. \tag{11.68}$$

Stwierdzenie 11.2 *Dla $h \in H$ i $\phi(g) = h$, wzór*

$$\mathcal{L} \ni t \mapsto ht := gtg^{-1} \in \mathcal{L}.$$

definiuje działanie grupy H przez automorfizmy na $\mathcal{L}$.

Dowód. Wystarczy pokazać jednoznaczność definicji. Niech $\phi(g_1) = \phi(g_2)$. Wtedy $g_2^{-1}g_1 \in \mathcal{L}$. Z abelowości $\mathcal{L}$ wynika

$$g_2^{-1}g_1 t = tg_2^{-1}g_1.$$

Zatem $g_1tg_1^{-1} = g_2tg_2^{-1}$. □

Latwo zauważyć, że $G \cap O(n)$ jest zawarta w H. Jeśli $G \cap O(n) = H$, mówimy, że G jest *symmorficzna*. Mamy wtedy $G = \mathcal{L} \rtimes H$. G jest wtedy generowana przez translacje i elementy $O(n)$.

11.4 Grupy fryzowe

Grupą fryzową nazywamy dyskretną podgrupę grupy $\mathbb{R}^2 \rtimes O(2)$, której podgrupa translacji jest izomorficzna z $\mathbb{Z}$. Iloraz grupy fryzowej przez jej podgrupę translacji jest skończoną podgrupą grupy obrotów. Działa ona na jednowymiarową sieć $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$. Latwo widzieć, że mamy dokładnie pięć podgrup $O(2)$, które zachowują $\mathbb{Z}$: C_1, $D_{1\mathrm{h}}$ (horyzontalna, działająca na $\mathbb{Z}$ trywialnie), $D_{1\mathrm{v}}$ (wertykalna, działająca na $\mathbb{Z}$ przez odbicia), C_2 i D_2. Odpowiada im siedem serii grup fryzowych pogrupowanych w pięć rodzin. W każdej rodzinie mamy jedną serię symmorficzną, w dwóch dodatkowo jest seria niesymmorficzna:

(1) C_1

- "hop" C_∞, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z}$,

(2) $D_{1\mathrm{h}}$

- "jump" $C_{\infty\mathrm{h}} = C_\infty \times D_{1\mathrm{h}}$, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$,
- "step" S_∞, grupa generowana przez translację z poślizgiem, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z}$,

(3) $D_{1\mathrm{v}}$

- "sidle" $C_{\infty\mathrm{v}} = C_\infty \rtimes D_{1\mathrm{v}}$, , abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$,

(4) C_2

- "spinning hop" $D_\infty = C_\infty \rtimes C_2$, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$,

(5) D_2

- "spinning jump" $D_{\infty\mathrm{h}} = C_\infty \rtimes D_2$, abstrakcyjnie izomorficzna z $(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2$,
- "spinning sidle"$D_{\infty\mathrm{d}}$, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$.

Każda grupa fryzowa jest odpowiednikiem jednej serii grup punktowych w 3 wymiarach.

11.5 Punktowe grupy krystalograficzne

Mówimy, że grupa punktowa jest krystalograficzna, jeśli istnieje sieć krystalograficzna niezmiennicza względem tej grupy. Twierdzenie o ograniczeniu krystalograficznym mówi, że punktowe grupy krystalograficzne w wymiarze 2 i 3 to te grupy punktowe, które posiadają osie 1,2,3,4 lub 6-krotne.

W wymiarze 2 mamy 10 punktowych grup krystalograficznych:

(1) C_1, C_2, C_3, C_4, C_6,

(2) D_1, D_2, D_3, D_4, D_6.

W wymiarze 3 mamy 32 punktowych grup krystalograficznych:

$$\begin{array}{ccccc}
C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_6, \\
C_{1\mathrm{h}} & C_{2\mathrm{h}} & C_{3\mathrm{h}} & C_{4\mathrm{h}} & C_{6\mathrm{h}} \\
 & S_2 & & S_4 & S_6 \\
 & C_{2\mathrm{v}} & C_{3\mathrm{v}} & C_{4\mathrm{v}} & C_{6\mathrm{v}} \\
 & D_2 & D_3 & D_4 & D_6 \\
 & D_{2\mathrm{h}} & D_{3\mathrm{h}} & D_{4\mathrm{h}} & D_{6\mathrm{h}} \\
 & & & D_{2\mathrm{d}} & D_{3\mathrm{d}},
\end{array}$$

T, T_d, T_h, O, O_h.

11.6 Sieci Bravais'go

Każda sieć krystalograficzna $\mathcal{L} \simeq \mathbb{Z}^n$ w przestrzeni euklidesowej w $\mathbb{R}^n$ wyznacza grupę punktową $H \subset O(n)$, która ją zachowuje, jej maksymalną grupę symetrii. Nie każda grupa punktowa jest maksymalną grupą symetrii pewnej sieci: w szczególności musi zawierać ona inwersję. Sieci posiadające tę samą grupę należą do tego samego *systemu sieciowego*.

Grupa symetrii sieci na nią działa. Rozważmy dwie sieci posiadające takie same maksymalne grupy symetrii. Mówimy, że mają one izomorficzne działania grupy symetrii, jeśli jedno działanie możemy przekształcić na drugie przez zamianę bazy w sieci. Każda zamiana bazy jest zadana przez macierz z $GL(\mathbb{Z}^n)$. Klasę abstrakcji względem izomorficzności działania nazywamy siecią Bravais'go.

W wymiarze 2 mamy 5 systemów Bravais'go zgrupowanych w 4 systemy:

(1) sieć skośna C_2,

(2) system prostokątny D_2

   (i) sieć prostokątna (prostokątna prosta),

   (ii) sieć rombowa (prostokątna centrowana),

(3) sieć kwadratowa D_4,

(4) sieć heksagonalna D_6.

W szczególności, rozważmy grupę D_2. Jest ona generowana przez dwie prostopadłe do siebie odbicia

$$r_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{11.69}$$

W sieci prostokątnej możemy wybrać bazę w $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, tak że r_1, r_2 są zadane poprzez (11.69). W sieci rombowej, bazę wybierzmy jako $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Wtedy działanie D_2 jest zadane przez

$$r_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{11.70}$$

W wymiarze 3 mamy 14 sieci Bravais'go zgrupowanych w 7 systemów. Litery oznaczają rodzaj centrowania.

(1) trójskośna S_2,

(2) jednoskośna $C_{2\mathrm{h}}$,

   (i) P

   (ii) C

(3) rombowa (ortorombiczna) $D_{2\mathrm{h}}$,

   (i) P,

   (ii) C,

   (iii) I,

   (iv) F,

(4) tetragonalna $D_{4\mathrm{h}}$,

   (i) P,

   (ii) I,

(5) romboedralna (trygonalna) $D_{3\mathrm{d}}$

(6) heksagonalna $D_{6\mathrm{h}}$.

(7) regularna (kubiczna) O_{h},

   (i) P,

   (ii) I,

   (iii) F,

11.7 Grupy krystalograficzne

Grupą krystalograficzną nazywamy dyskretną podgrupę grupy $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$, dla której istnieje zwarty zbiór $K \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $\bigcup_{g\in G} gK = \mathbb{R}^n$.

Można pokazać, że równoważną definicję: grupa krystalograficzna to podgrupa grupy $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$, której podgrupa translacji jest siecią krystalograficzną, i podgrupa ta ma skończony indeks.

Można rozważać kilka różnych pojęć równoważności grup krystalograficznych.

(1) Mówimy, że dwie grupy krystalograficzne są sobie równoważne bez zachowania orientacji, gdy istnieje macierz w $GL(n)$ względem której te grupy są sprzężone.

(2) Mówimy, że z zachowaniem orientacji, gdy istnieje macierz w $GL(n)$ o dodatnim wyznaczniku, względem której te grupy są sprzężone.

Możemy klasyfikować grupy krystalograficzne ze względu na

(1) Grupę obrotów będącą grupą ilorazową przez podgrupę translacji.

(2) Sieć Bravais'go.

11.8 Grupy tapetowe

Grupy krystalograficzne w wymiarze 2 zwane są tapetowymi. Na poniższej liscie podajemy postać grupy w przypadkach symmorficznych. Grupa obrotów determinuje sieć Bravais'go. Równoważność z zachowaniem i bez zachowania orientacji w wymiarze 2 się pokrywają.

(1) system skośny,

 (i) grupa punktowa C_1
 - $p1 = \mathbb{Z}^2$,

 (ii) grupa punktowa C_2
 - $p2 = \mathbb{Z}^2 \rtimes C_2$,

(2) system prostokątny,

 (i) grupa punktowa D_1,
 - sieć prostokątna: $pm = \mathbb{Z}^2_{\text{rect}} \rtimes D_1$, pg,
 - sieć rombowa: $cm = \mathbb{Z}^2_{\text{romb}} \rtimes D_1$,

 (i) grupa punktowa D_2
 - sieć prostokątna, $pmm = \mathbb{Z}^2_{\text{rect}} \rtimes D_2$, pmg, pgg,
 - sieć rombowa, $cmm = \mathbb{Z}^2_{\text{romb}} \rtimes D_2$,

(3) system regularny,

 (i) grupa punktowa C_4
 - $p4 = \mathbb{Z}^2_{\text{reg}} \rtimes C_4$,

 (ii) grupa punktowa D_4
 - $p4m = \mathbb{Z}^2_{\text{reg}} \rtimes D_4$, $p4g$,

(4) system heksagonalny,

 (i) grupa punktowa C_3
 - $p3 = \mathbb{Z}^2_{\text{hex}} \rtimes C_3$,

 (ii) grupa punktowa D_3
 - $p3m1 = \mathbb{Z}^2_{\text{hex}} \rtimes D_3$, $p31m$,

 (iii) grupa punktowa C_6
 - $p6 = \mathbb{Z}^2_{\text{hex}} \rtimes C_6$,

 (iv) grupa punktowa D_6
 - $p6m = \mathbb{Z}^2_{\text{hex}} \rtimes D_6$,

11.9 Grupy przestrzenne

Grupy krystalograficzne w wymiarze 3 zwane są przestrzennymi. Jeśli dopuścimy równoważność zmieniającą orientację, to jest ich 219, w tym 54 chiralnych. Jeśli rozróżniamy orientację, to jest ich 230, w tym 65 chiralnych.

Grupy te są poklasyfikowane na klasy krystaliczne zgodnie z ich grupami punktowymi. Klasy te są pogrupowane w systemy krystaliczne.

W większości wypadków, przynależność do systemu krystalicznego determinuje system sieciowy Bravais'go, o tej samej nazwie. Wyjątkiem jest system trygonalny, w której każdej grupie punktowej odpowiadają zarówno grupy krystalograficzne z siecią romboedryczną, jak i z siecią heksagonalną.

(1) trójskośny

- (i) C_1: P,
- (ii) S_2: P,

(2) jednoskośny

- (i) C_2: P, C,
- (ii) $C_{1\mathrm{h}}$: P, C,
- (iii) $C_{2\mathrm{h}}$: P, C,

(3) rombowy (ortorombiczny)

- (i) D_2: P, C, F, I,
- (ii) $C_{2\mathrm{v}}$: P, C, A, F, I,
- (iii) $D_{2\mathrm{h}}$: P, C, F, I,

(4) tetragonalny

- (i) C_4: P, I,
- (ii) S_4: P, I,
- (iii) $C_{4\mathrm{h}}$: P, I,
- (iv) D_4: P, I,
- (v) $C_{4\mathrm{v}}$: P, I,
- (vi) $D_{2\mathrm{d}}$: P, I,
- (vii) $D_{4\mathrm{h}}$: P, I,

(5) trygonalny

- (i) C_3: P, R,
- (ii) S_6: P, R,
- (iii) D_3: P, R,
- (iv) $C_{3\mathrm{v}}$: P, R,
- (v) $D_{3\mathrm{d}}$: P, R, :

(6) heksagonalny

(i) C_6: P,
(ii) $C_{3\mathrm{h}}$: P,
(iii) $C_{6\mathrm{h}}$: P,
(iv) D_6: P,
(v) $C_{6\mathrm{v}}$: P,
(vi) $D_{3\mathrm{h}}$: P,
(vii) $D_{6\mathrm{h}}$, P,

(7) regularny (kubiczny)

(i) O_h: P, F, I,
(ii) T: P, F, I,
(iii) T_h: P, F, I,
(iv) O: P, F, I,
(v) T_d: P, F, I,
(vi) O_h: P, F, I.

Nazwa systemu krystalicznego pokrywa się z nazwą systemu sieci Bravais'go, z wyjątkiem systemu trygonalnego. W tym systemie, grupy oznaczone przez P odpowiadają heksagonalnej sieci Bravais'go, zaś oznaczone przez R odpowiadają trygonalnej sieci Bravais'go.

12 Macierzowe algebry Liego

12.1 Rozmaitości zanurzone

Mówimy, że $M \subset \mathbb{R}^n$ jest *powierzchnią (=rozmaitością) zanurzoną w* $\mathbb{R}^n$ wymiaru k jeśli lokalnie jest ona miejscem zerowym rzeczywistych funkcji gładkich $f_1, \dots, f_{n-k}$ takich, że $f_1', \dots, f_{n-k}'$ są w każdym punkcie liniowo niezależne. Wtedy dla $m \in M$ przestrzeń $\mathrm{Ker} f_1'(m) \cap \dots \cap \mathrm{Ker} f_{n-k}'(m)$ nazywa się *przestrzenią styczną w punkcie* m i jest oznaczana przez $\mathrm{T}_m M$.

Dla każdego wektora $X \in \mathrm{T}_m M$ istnieje krzywa gładka $]-\epsilon, \epsilon[\ni t \mapsto \gamma(t) \in M$ taka, że $\gamma(0) = m$ i $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)|_{t=0} = X$. I na odwrót, jeśli $]-\epsilon, \epsilon[\ni t \mapsto \gamma(t) \in M$ jest krzywą gładką (właściwie, wystarczy klasy C^1) taką, że $\gamma(0) = m$ to $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)|_{t=0} \in \mathrm{T}_m M$.

Nie każda rozmaitość zanurzona jest domknięta. Ale dla każdego punktu $m \in M$ istnieje $r > 0$ takie, że $M \cap K(m, r)^{\mathrm{cl}}$ jest zbiorem domkniętym.

Pojęcie rozmaitości zanurzonej można uogólnić na przypadek zespolony. Aby nie mnożyć oznaczeń, będziemy używali tych samych liter co dla przypadku rzeczywistego, choć będziemy mieli na myśli inne obiekty.

Mówimy, że $M \subset \mathbb{C}^n$ jest *powierzchnią (=rozmaitością) (zespoloną) zanurzoną w* $\mathbb{C}^n$ wymiaru k jeśli lokalnie jest ona miejscem zerowym funkcji holomorficznych $f_1, \dots, f_{n-k}$ takich, że $f_1', \dots, f_{n-k}'$ są w każdym punkcie liniowo niezależne. (Pochodne są rozumiane w sensie zespolonym). Wtedy dla $m \in M$ przestrzeń $\mathrm{Ker} f_1'(m) \cap \dots \cap \mathrm{Ker} f_{n-k}'(m)$ nazywa się *(zespoloną) przestrzenią styczną w punkcie* m i jest oznaczana przez $\mathrm{T}_m M$.

Dla każdego wektora $X \in \mathrm{T}_m M$ istnieje odwzorowanie holomorficzne ("krzywa zespolona") $\{t \in \mathbb{C} \ : \ |t| < \epsilon\} =: D(\epsilon) \ni t \mapsto \gamma(t) \in M$ takie, że $\gamma(0) = m$ i $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)|_{t=0} = X$. I na odwrót, jeśli $D(\epsilon) \ni t \mapsto \gamma(t) \in M$ jest odwzorowaniem holomorficznym takim, że $\gamma(0) = m$ to $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)|_{t=0} \in \mathrm{T}_m M$.

12.2 Funkcje macierzowe

Rozważmy przestrzeń $\mathbb{K}^n$, gdzie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wprowadźmy w tej przestrzeni normę (jakąkolwiek). Mamy wtedy również normę na $L(\mathbb{K}^n)$. Spełnia one warunki

$$\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|, \quad \|A + B\| \le \|A\| + \|B\|, \quad \|AB\| \le \|A\| \|B\|.$$

Niech $z \mapsto f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ będzie funkcją holomorficzną zadaną przez szereg zbieżny w kole $|z| < R$. Pamiętamy, że oznacza to, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n| |z|^n$ jest zbieżny dla $|z| < R$.

Możemy wtedy dla $\|A\| < R$ zdefiniować funkcję macierzową

$$f(A) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n A^n.$$

Przykładami takich funkcji są

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^A &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n, \quad A \in L(\mathbb{C}^n) \\ \log(1 + A) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} A^n, \quad \|A\| < 1. \end{aligned}$$

Mamy tożsamości

$$e^{\log B} = B, \quad \|B - \mathbb{1}\| < 1.$$
$$AB = BA \;\Rightarrow\; e^A e^B = e^{A+B}.$$

12.3 Macierzowe algebry Liego

Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$. Jak pamiętamy, $L(\mathcal{V})$ oznacza algebrę łączną odwzorowań liniowych na $\mathcal{V}$ (wyposażoną w mnożenie operatorów). Przez $gl(\mathcal{V})$ oznaczamy $L(\mathcal{V})$, gdzie mnożenie zastępujemy przez komutator

$$[A, B] := AB - BA.$$

Mówimy, że $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ jest (konkretną) algebrą Liego, gdy jest to podprzestrzeń liniowa zamknięta ze względu na komutator. Jeśli $\mathcal{W}$ jest przestrzenią wektorową, mówimy, że $\pi : \mathfrak{g} \to gl(\mathcal{W})$ jest reprezentacją algebry Liego $\mathfrak{g}$, jeśli

$$[\pi(X), \pi(Y)] = \pi([X, Y]).$$

Przypomnijmy sobie, że $GL(\mathcal{V})$ oznacza grupę odwzorowań odwracalnych na $\mathcal{V}$. Mówimy, że $G \subset GL(\mathcal{V})$ jest konkretną grupą Liego, gdy jest to rozmaitość zanurzona w przestrzeni wektorowej $L(\mathcal{V})$, która jest jednocześnie podgrupą $GL(\mathcal{V})$.

Twierdzenie 12.1 *Niech $\mathcal{V}$ będzie skończenie wymiarowa. Niech $G \subset L(\mathcal{V})$ będzie konkretną grupą Liego. Niech $\mathfrak{g}$ oznacza $\mathrm{T}_{\mathbb{1}}(G)$ (przestrzeń styczną do G w jedynce). Wtedy*

(1) *$X \in \mathfrak{g}$ implikuje $e^X \in G$.*

(2) *$X, Y \in \mathfrak{g}$ implikuje $[X, Y] \in \mathfrak{g}$, czyli $\mathfrak{g}$ jest konkretną algebrą Liego.*

(3) *Niech $\pi : G \to GL(\mathcal{W})$ będzie gładką reprezentacją. Wtedy pochodna odwzorowania π w jedynce*

$$\pi'(\mathbb{1}) : \mathfrak{g} \to gl(\mathcal{W}) = \mathrm{T}_{\mathbb{1}}(GL(\mathcal{W}))$$

jest reprezentacją algebry Liego $\mathfrak{g}$.

Dowód. (1) Niech $X \in \mathfrak{g}$. Załóżmy najpierw, że $G \cap K(\mathbb{1}, R)^{\mathrm{cl}}$ dla $R = 2\|e^X\|$ jest zbiorem domkniętym. Istnieje krzywa gładka $[0, 1] \ni t \mapsto g(t)$ taka,że $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t)\Big|_{t=0} = X$. Mamy

$$g\Big(\frac{1}{n}\Big) = \mathbb{1} + \frac{X}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Zatem

$$g\Big(\frac{1}{n}\Big)^n = \Big(\mathbb{1} + \frac{X}{n}\Big)^n + O\Big(\frac{1}{n}\Big) \to e^X.$$

Dla dostatecznie dużych n, $\|g\Big(\frac{1}{n}\Big)^n\| \le 2\|e^X\|$. Zatem z domkniętości $G \cap K(\mathbb{1}, R)^{\mathrm{cl}}$ wynika, że $e^X \in G$.

Jeśli X jest dowolne, to znajdziemy N takie, że możemy powtórzyć powyższe rozumowanie dla $\frac{1}{N} X$ i pokazać, że $e^{\frac{1}{N} X} \in G$. Ale $e^X = (e^{\frac{1}{N} X})^N$. Więc $e^X \in G$.

Aby pokazać (2), obliczamy

$$\begin{aligned}
& \mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{tY}\mathrm{e}^{-tX}\mathrm{e}^{-tY} \\
= & \left(1\!\!1 + tX + \frac{t^2}{2}X^2\right)\left(1\!\!1 + tY + \frac{t^2}{2}Y^2\right)\left(1\!\!1 - tX + \frac{t^2}{2}X^2\right)\left(1\!\!1 - tX + \frac{t^2}{2}X^2\right) + O(t^3) \\
= & 1\!\!1 + tX + tY - tX - tY + \frac{t^2}{2}X^2 + \frac{t^2}{2}Y^2 + + \frac{t^2}{2}X^2 + \frac{t^2}{2}Y^2 \\
& -t^2X^2 - t^2Y^2 + t^2XY + t^2XY - t^2XY - t^2YX + O(t^3) \\
= & 1\!\!1 + t^2[X, Y] + O(t^3).
\end{aligned}$$

Zatem krzywa

$$[0, \infty[\ni s \mapsto \gamma(s) := \mathrm{e}^{\sqrt{s}X}\mathrm{e}^{\sqrt{s}Y}\mathrm{e}^{-\sqrt{s}X}\mathrm{e}^{-\sqrt{s}Y} \in G$$

jest różniczkowalna w zerze i $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\gamma(s)\Big|_{s=0} = [X, Y]$. Więc $[X, Y] \in \mathrm{T}_{1\!\!1}G = \mathfrak{g}$.

Aby dowieść (3) powtarzamy powyższe rachunki dostając

$$\begin{aligned}
& \pi(\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{tY}\mathrm{e}^{-tX}\mathrm{e}^{-tY}) \\
= & \pi(1\!\!1) + \pi'(1\!\!1)t^2[X, Y] + O(t^3);
\end{aligned} \tag{12.71}$$

Zatem (12.71) jest równe

$$\begin{aligned}
& \pi(\mathrm{e}^{tX})\pi(\mathrm{e}^{tY})\pi(\mathrm{e}^{-tX})\pi(\mathrm{e}^{-tY}) \\
= & \pi(1\!\!1) + t^2[\pi'(1\!\!1)X, \pi'(1\!\!1)Y] + O(t^3).
\end{aligned}$$

Stąd,

$$\pi'(1\!\!1)[X, Y] = [\pi'(1\!\!1)X, \pi'(1\!\!1)Y].$$

□

Mówimy, że $\mathfrak{g} := \mathrm{T}_{1\!\!1}G$ jest *algebrą Liego grupy Liego G.*

Droga od algebry Liego do grupy Liego jest też możliwa ale trudniejsza.

Twierdzenie 12.2 *Niech $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego pewnej konkretnej gupy Liego $G \subset GL(\mathcal{V})$. Wtedy*

$$\mathfrak{g} \ni X \mapsto \mathrm{e}^X \in G \tag{12.72}$$

jest dyfeomorfizmem otoczenia zera na otoczenie jedynki. W szczególności, $\exp(\mathfrak{g})$ *jest spójny, otwarty w G i zawiera otoczenie $1\!\!1 \in G$.* $\exp(\mathfrak{g})$ *nie musi być całą grupą G. Niemniej, grupa generowana przez* $\exp(\mathfrak{g})$ *jest całą spójną składową jedynki grupy G.*

Dowód. Oczywiste jest, że (12.72) jest różniczkowalne. Odwzorowanie odwrotne jest zdefiniowane dla $\|g - 1\!\!1\| < 1$ jako $g \mapsto \log g$. Zatem (12.72) jest dyfeomorfizmem w otoczeniu $0 \in \mathfrak{g}$.
□

12.4 Przemienne grupy i algebry Liego

Jednowymiarowe macierze postaci e^t i $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, gdzie $t \in \mathbb{R}$ stanowią przemienne grupy Liego. Ich algebry Liego są izomorficzne z $\mathbb{R}$.

Jeśli $\mathfrak{g} \in gl(\mathcal{V})$ jest jakąkolwiek algebrą Liego, to $\exp(\mathfrak{g})$ nie musi być konkretną grupą Liego. Ilustruje poniższy przykład:

Rozważmy 1-wymiarową algebrę Liego w $gl(\mathbb{C}^2)$. rozpiętą na $X := \begin{bmatrix} \mathrm{i}\alpha & 0 \\ 0 & \mathrm{i}\beta \end{bmatrix}$, gdzie $\frac{\alpha}{\beta}$ jest niewymierne. Wtedy $\{\mathrm{e}^{tX} \ : \ t \in \mathbb{R}\}$ jest gęsta w macierzach diagonalnych. Wynika to z tego, że $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta}{\alpha}n}$ jest gęste w okręgu jednostkowym.

12.5 Algebra Liego macierzy bezśladowych

Niech $A \in L(\mathbb{K}^n)$. Wzór

$$\mathrm{Tr}A := \sum_{i=1}^{n} A_{ii} \in \mathbb{K}$$

definiuje *ślad* spełniający

$$\mathrm{Tr}AB = \mathrm{Tr}BA, \quad \det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}A}.$$

Zauważmy, że $\mathrm{Tr}[A, B] = 0$.

Pamiętamy, że

$$SL(\mathbb{K}^n) = SL(n, \mathbb{K}) := \{A \in GL(\mathbb{K}^n) \ : \ \det A = 1\}.$$

$sl(\mathbb{K}^n)$ definiujemy jako

$$sl(\mathbb{K}^n) := \{A \in gl(\mathbb{K}^n) \ : \ \mathrm{Tr}A = 0\}.$$

Jest to algebra Liego. Piszemy też

$$sl(\mathbb{K}^n) = sl(n, \mathbb{K}).$$

Oczywiście, $A \in sl(n, \mathbb{K})$ implikuje $\mathrm{e}^A \in SL(n, \mathbb{K})$.

Każdą $B \in SL(\mathbb{C}^n)$ można przedstawić w postaci $B = \mathrm{e}^A$ dla $A \in sl(\mathbb{C}^n)$.

Są jednak takie elementy $SL(\mathbb{R}^n)$, których nie można przedstawić jako e^A dla $A \in sl(\mathbb{R}^n)$. Przykładem takim jest $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

12.6 Formy niezmiennicze

Niech $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \ni (v, w) \mapsto \langle v|w\rangle \in \mathbb{K}$ będzie formą dwuliniową. Pamiętamy, że grupa $G \subset GL(\mathcal{V})$ *zachowuje* $\langle\cdot|\cdot\rangle$ gdy

$$\langle gv|gw\rangle = \langle v|w\rangle, \quad g \in G.$$

Oczywiste jest, że odwzorowania odwracalne zachowujące pewną formę stanowią grupę.

Mówimy, że algebra Liego $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ *(infinitezymalnie) zachowuje* $\langle\cdot|\cdot\rangle$ gdy

$$\langle v|Xw\rangle + \langle Xv|w\rangle = 0, \quad X \in \mathfrak{g}. \tag{12.73}$$

Stwierdzenie 12.3 *Odwzorowania infinitezymalnie zachowujące formę stanowią algebrę Liego.*

Dowód.

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v|XYw\rangle + \langle Xv|Yw\rangle - \langle v|YXw\rangle - \langle Yv|Xw\rangle \\ &\quad +\langle XYv|w\rangle + \langle Yv|Xw\rangle - \langle YXv|w\rangle - \langle Xv|Yw\rangle \\ &= \langle v|[X,Y]w\rangle + \langle [X,Y]v|w\rangle. \end{aligned}$$

□

Jeśli grupa G zachowuje formę $\langle\cdot|\cdot\rangle$, to jej algebra Liego infinitezymalnie zachowuje formę $\langle\cdot|\cdot\rangle$. W rzeczy samej,

$$\langle \mathrm{e}^{tX}v|\mathrm{e}^{tX}w\rangle = \langle v|w\rangle, \quad X \in \mathfrak{g} \tag{12.74}$$

implikuje

$$t\langle v|Xw\rangle + t\langle Xv|w\rangle + O(t^2) = 0, \quad X \in \mathfrak{g}. \tag{12.75}$$

12.7 Ortogonalne i pseudoortogonalne algebry Liego

12.7.1 Abstrakcyjne podejście

Załóżmy, że w $\mathcal{V}$ mamy niezdegenerowaną symetryczną formę dwuliniową –iloczyn skalarny. Pamiętamy, że

$$O(\mathcal{V}) = \{B \in GL(\mathcal{V}) \ : \ \langle Bv|Bw\rangle = \langle v|w\rangle\}.$$

$A \in gl(\mathcal{V})$ należy do $so(\mathcal{V})$ gdy infinitezymalnie zachowuje iloczyn skalarny czyli $\langle Av|w\rangle + \langle v|Aw\rangle = 0$.

12.7.2 Kanoniczna forma

W szczególności, niech $\mathcal{V} = \mathbb{K}^n$ i forma będzie kanoniczna

$$\langle v|w\rangle = v_1w_1 + \cdots + v_nw_n.$$

Wtedy $B \in O(\mathbb{K}^n)$ gdy $B^\# B = \mathbb{1}$. $B \in O(\mathbb{K}^n)$ implikuje $\det B = \pm 1$. Kładziemy $SO(\mathbb{K}^n) := O(\mathbb{K}^n) \cap SL(\mathbb{K}^n)$.

Dla formy kanonicznej, $A \in o(\mathbb{K}^n)$ gdy $A^\# + A = 0$. Jest to podalgebra Liego w $sl(\mathbb{K}^n)$. Jest ona algebrą Liego grupy Liego $SO(\mathbb{K}^n)$. Piszemy też

$$so(\mathbb{R}^n) = so(n).$$

W przypadku zespolonym piszemy też $so(n,\mathbb{C}) = so(\mathbb{C}^n)$.

Każdą $B \in SO(\mathbb{K}^n)$ można przedstawić w postaci $B = \mathrm{e}^A$ dla $A \in so(\mathbb{K}^n)$.

12.7.3 Forma o sygnaturze (q,p)

Wyposażmy $\mathbb{R}^n$ w formę o sygnaturze (q,p):

$$\langle v|w\rangle_{q,p} = -v_1w_1 - \cdots - v_qw_q + v_{q+1}w_{q+1} + \cdots + v_{q+p}w_{q+p} = \langle v|I_{q,p}w\rangle.$$

$B \in O(q,p)$ kiedy

$$B^{\#}I_{q,p}B = I_{q,p}.$$

$B \in O(q,p)$ implikuje $\det B = \pm 1$. Piszemy $SO(q,p) := SL(q+p) \cap O(q,p)$.

$A \in so(\mathbb{R}^{q,p})$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$A^{\#}I_{q,p} + I_{q,p}A = 0.$$

Jest to podalgebra Liego w $sl(\mathbb{R}^{q+p})$. Jest to algebra Liego grupy Liego $SO(\mathbb{R}^{q,p})$. Piszemy też

$$so(\mathbb{R}^{q,p}) = so(q,p).$$

12.8 Unitarne i pseudounitarne algebry Liego

12.8.1 Abstrakcyjne podejście

Załóżmy, że w zespolonej przestrzeni $\mathcal{V}$ mamy niezdegenerowaną hermitowską formę dwuliniową. Pamiętamy, że

$$U(\mathcal{V}) = \{B \in GL(\mathcal{V}) \ : \ (Bv|Bw) = (v|w)\}.$$

$A \in gl(\mathcal{V})$ należy do $u(\mathcal{V})$ gdy infinitezymalnie zachowuje iloczyn skalarny czyli $(Av|w) + (v|Aw) = 0$.

12.8.2 Kanoniczna forma

W szczególności, niech $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$ i forma będzie kanoniczna

$$(v|w) = \overline{v}_1w_1 + \cdots + \overline{v}_nw_n.$$

Wtedy $B \in U(n)$ gdy $B^*B = \mathbb{1}$. $B \in U(n)$ implikuje $|\det B| = 1$. Kładziemy $SU(n) := O(n) \cap SL(^n)$.

Dla formy kanonicznej, $A \in u(n)$ gdy $A^* + A = 0$. Jest ona algebrą Liego grupy Liego $U(\mathbb{C}^n)$.

Kładziemy też $su(n) := u(n) \cap sl(\mathbb{C}^n)$. Jest to algebra Liego grupy $SU(n)$.

Każdą $B \in SU(\mathbb{C}^n)$ można przedstawić w postaci $B = \mathrm{e}^A$ dla $A \in su(\mathbb{C}^n)$.

12.8.3 Forma o sygnaturze (q,p)

Wyposażmy $\mathbb{C}^n$ w formę hermitowską o sygnaturze (q,p):

$$(v|w)_{q,p} = -\overline{v}_1w_1 - \cdots - \overline{v}_qw_q + \overline{v}_{q+1}w_{q+1} + \cdots + \overline{v}_{q+p}w_{q+p} = (v|I_{q,p}w).$$

$B \in U(q,p)$ kiedy

$$B^*I_{q,p}B = I_{q,p}.$$

$B \in U(q,p)$ implikuje $|\det B| = 1$. Piszemy $SU(q,p) := SL(\mathbb{C}^{q+p}) \cap U(q,p)$.

$A \in u(q,p)$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$A^* I_{q,p} + I_{q,p} A = 0.$$

Mamy też $su(q,p) := u(q,p) \cap sl(\mathbb{C}^{q+p})$.

12.9 Symplektyczna algebra Liego

Niech $\langle v|Jw\rangle$ będzie formą antysymetryczną na $\mathbb{K}^n$. Pamiętamy, że

$$Sp(\mathcal{V}) = \{B \in GL(\mathcal{V}) \ : \ \langle Bv|JBw\rangle = \langle v|Jw\rangle\}.$$

Można pokazać, że $Sp(\mathbb{K}^n) \subset SL(\mathbb{K}^n)$.

Definiujemy

$$sp(\mathbb{K}^{2n}) := \{A \in L(\mathbb{K}^{2n}) \ : \ A^{\#} J + JA = 0\}$$

Latwo pokazać, że ślad macierzy symplektycznych jest równy 0. Dlatego $sp(\mathbb{K}^{2n})$ jest podalgebrą Liego w $sl(\mathbb{K}^{2n})$. $sp(\mathbb{K}^{2n})$ jest algebrą Liego grupy $SP(\mathbb{K}^n)$.

13 Abstrakcyjne algebry Liego

13.1 Definicja

Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą nad ciałem $\mathbb{K}$ z działaniem oznaczanym przez

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (A,B) \mapsto [A,B] \in \mathfrak{g}.$$

Mówimy, że $\mathfrak{g}$ jest *algebrą Liego* jeśli jej działnie jest *antysymetryczne*, czyli

$$[A,B] = -[A,B], \quad A,B \in \mathfrak{g},$$

i spełnia *tożsamość Jacobiego*

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0.$$

Działanie w algebrze Liego często nazywamy *nawiasem*.

Każda przestrzeń wektorowa z zerowym nawiasem jest algebrą Liego. O takich algebrach Liego mówimy, że są *przemienne*.

Centrum algebry Liego $\mathfrak{g}$ jest zdefiniowane jako

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{A \in \mathfrak{g} \ : \ [A,B] = 0, \ B \in \mathfrak{g}\}.$$

13.2 Algebry łączne a algebry Liego

Niech $\mathfrak{A}$ będzie algebrą nad $\mathbb{K}$. Mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest algebrą łączną, gdy

$$(AB)C = A(BC), \quad A, B, C \in \mathfrak{A}.$$

Mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest przemienna gdy $AB = BA$, $A, B \in \mathfrak{A}$. *Centrum* algebry łącznej $\mathfrak{A}$ jest zdefiniowane jako

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{A}) = \{A \in \mathfrak{A} \ : \ [A, B] = 0, \ B \in \mathfrak{A}\}.$$

Każda algebra łączna $\mathfrak{A}$ ma naturalną strukturę algebry Liego zadaną przez komutator

$$[A, B] := AB - BA.$$

W szczególności, jeśli $\mathcal{V}$ jest przestrzenią wektorową to zbiór liniowych odwzorowań w $\mathcal{V}$, czyli $L(\mathcal{V})$, jest algebrą Liego. $L(\mathcal{V})$ wyposażone w komutator oznaczamy przez $gl(\mathcal{V})$.

13.3 Homomorfizmy

Odwzorowanie między algebrami nazywamy homomorfizmem, jeśli zachowuje wszystkie działania. W szczególności, niech $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$ będzie algebrami Liego. Odwzorowanie $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{b}$ nazywa się *homomorfizmem* gdy jest liniowe i zachowuje nawias, to znaczy

(1) $\phi(\lambda A) = \lambda \phi(A)$;

(2) $\phi(A + B) = \phi(A) + \phi(B)$;

(3) $\phi([A, B]) = [\phi(A), \phi(B)]$.

Zbiór automorfizmów algebry $\mathfrak{g}$ oznaczamy przez $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Jest to grupa.

Homomorfizm $\mathfrak{g}$ w $gl(\mathcal{V})$ jest nazywany *reprezentacją* $\mathfrak{g}$ *na* $\mathcal{V}$.

13.4 Reprezentacja dołączona

Reprezentacja dołączona

$$\mathfrak{g} \ni A \mapsto \mathrm{ad}(A) \in gl(\mathfrak{g})$$

jest zdefiniowana przez

$$\mathrm{ad}(A)B := [A, B], \quad A, B \in \mathfrak{g}.$$

Żeby sprawdzić, że jest to reprezentacja, czyli

$$\mathrm{ad}([A, B]) = [\mathrm{ad}(A), \mathrm{ad}(B)]$$

korzystamy z tożsamości Jacobiego.

13.5 Różniczkowania

Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Odwzorowanie liniowe $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ nazywamy *różniczkowaniem* jeśli spełnia *tożsamość Leibniza*:

$$\mathcal{D}[A, B] = [\mathcal{D}A, B] + [A, \mathcal{D}B].$$

Przykładem różniczkowania jest $\mathrm{ad}(C)$ zdefinowany jako

$$\mathrm{ad}(C)A := [C, A].$$

Wynika to z tożsamości Jacobiego. Mówimy, że jest to *różniczkowanie wewnętrzne*.

Oznaczmy przez $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ zbiór różniczkowań algebry $\mathfrak{g}$. Jeśli $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, to $[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2] \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Zatem $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ jest algebrą Liego. $\mathfrak{g} \ni A \mapsto \mathrm{ad}(A) \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ jest homomorfizmem, którego jądrem jest $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Jeśli $\mathcal{D} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ i $A \in \mathfrak{g}$, to $[\mathcal{D}, \mathrm{ad}(A)] = \mathrm{ad}(\mathcal{D}A)$.

Jeśli $\mathbb{R} \ni t \mapsto \sigma_t \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ jest różniczkowalnym homomorfizmem (*jednoparametrową grupą*), to

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma_t(B)\Big|_{t=0} =: \mathcal{D}B \tag{13.76}$$

definiuje różniczkowanie. I na odwrót, jeśli $\mathcal{D}$ jest różniczkowaniem, to

$$\sigma_t(B) := \exp(t\mathcal{D})B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathcal{D}^n B$$

jest jednoparametrową grupą spełniającą (13.76).

Jako przykład rozważmy algebrę przemienną $\mathbb{K}^n$. Wszystkie odwzorowania liniowe $\mathbb{K}^n$ są różniczkowaniami. Nie są one wewnętrzne, poza zerowym. Wszystkie automorfizmy są zadane przez elementy $GL(\mathbb{K}^n)$.

Można pokazać, że w algebrze $gl(\mathbb{K}^n)$ wszystkie różniczkowania są wewnętrzne. Podobnie, wszystkie automorfizmy są postaci $B \mapsto CBC^{-1}$ dla pewnego $C \in GL(\mathbb{K}^n)$.

13.6 Ideały

$\mathfrak{b}$ jest *ideałem* algebry Liego $\mathfrak{g}$, jeśli jest liniową podprzestrzenią w $\mathfrak{g}$ i $A \in \mathfrak{g}$, $B \in \mathfrak{b} \Rightarrow [A, B] \in \mathfrak{b}$.

Mówimy, że ideał $\mathfrak{b}$ jest *właściwy* gdy $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{g}$. Mówimy, że ideał $\mathfrak{b}$ jest *nietrywialny* gdy $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{g}$ i $\mathfrak{b} \neq \{0\}$.

Twierdzenie 13.1 *Jądro homomorfizmu jest ideałem. Jeśli $\mathfrak{b}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$, to $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ ma naturalną strukturę algebry Liego. Odwzorowanie*

$$\mathfrak{g} \ni A \mapsto A + \mathfrak{b} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{b}$$

jest surjektywnym homomorfizmem, którego jądro jest równe $\mathfrak{b}$. Jeśli $\mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ jest innym surjektywnym homomorfizmem, którego jądro też jest równe $\mathfrak{b}$, to $\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{b}$.

Mówiąc, że

$$\mathfrak{b} \xrightarrow{\phi} \mathfrak{g} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{h}$$

jest ciągiem dokładnym mamy na myśli, że $\mathrm{Ker}\psi = \mathrm{Ran}\phi$.

W szczególności

$$0 \to \mathfrak{b} \xrightarrow{\phi} \mathfrak{g} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{h} \to 0 \tag{13.77}$$

oznacza, że ϕ jest injektywny, ψ jest surjektywny i $\mathrm{Ker}\psi = \mathrm{Ran}\phi$. Wtedy ψ generuje izomorfizm $\mathfrak{g}/\phi(\mathfrak{b})$ z $\mathfrak{h}$. (13.77) nazywamy *krótkim ciągiem dokładnym.* Mówimy, że $\mathfrak{g}$ jest *rozszerzeniem* $\mathfrak{b}$ *poprzez* $\mathfrak{h}$.

13.7 Ideały charakterystyczne

Mówimy, że $\mathfrak{b}$ jest *ideałem charakterystycznym*, gdy dla każdego $\mathcal{D} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, $\mathcal{D}$ przekształca $\mathfrak{b}$ w siebie.

Twierdzenie 13.2 (1) *Jeśli* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *są ideałami, to* $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ *i* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ *też.*

(2) *Jeśli* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *są ideałami charakterystycznymi, to* $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ *i* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ *też.*

(3) *Jeśli* $\mathfrak{a}$ *jest ideałem w* $\mathfrak{g}$ *a* $\mathfrak{b}$ *jest ideałem charakterystycznym w* $\mathfrak{a}$*, to* $\mathfrak{b}$ *jest ideałem w* $\mathfrak{g}$.

(4) *Jeśli* $\mathfrak{a}$ *jest ideałem charakterystycznym w* $\mathfrak{g}$ *a* $\mathfrak{b}$ *jest ideałem charakterystycznym w* $\mathfrak{a}$*, to* $\mathfrak{b}$ *jest ideałem charakterystycznym w* $\mathfrak{g}$.

(5) *Jeśli* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *są ideałami, to* $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ *też.*

(6) *Jeśli* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *są ideałami charakterystycznymi, to* $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ *też.*

(7) *Jeśli* $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *jest surjektywnym homomorfizmem, to* $\mathfrak{a} \mapsto \phi(\mathfrak{a})$ *zadaje bijekcję między ideałami algebry* $\mathfrak{g}$ *zawierającymi* $\mathrm{Ker}\phi$ *a ideałami algebry* $\mathfrak{h}$.

(8) *Jeśli* $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *jest surjektywnym homomorfizmem i* $\mathrm{Ker}\phi$ *jest ideałem charakterystycznym, to* $\mathfrak{a} \mapsto \phi(\mathfrak{a})$ *zadaje bijekcję między ideałami charakterystycznymi algebry* $\mathfrak{g}$ *zawierającymi* $\mathrm{Ker}\phi$ *a ideałami charakterystycznymi algebry* $\mathfrak{h}$.

Twierdzenie 13.3 *Centrum jest ideałem charakterystycznym.*

Dowód. Dla $Z \in \mathfrak{z}$, $A \in \mathfrak{g}$ mamy $0 = [A, Z]$. Dlatego

$$0 = [\mathcal{D}A, Z] + [A, \mathcal{D}Z].$$

Stąd $\mathcal{D}Z \in \mathfrak{z}$. □

W przemiennej algebrze Liego $\mathbb{K}^n$ wszystkie podprzestrzenie liniowe są ideałami, ale tylko ideały trywialne są charakterystyczne.

Stwierdzenie 13.4 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ *jest ideałem w* $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

Dowód. Niech $\mathcal{D} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, $A, B \in \mathfrak{g}$. Wtedy

$$\mathcal{D}\mathrm{ad}(A) - \mathrm{ad}(A)\mathcal{D} = \mathrm{ad}(\mathcal{D}A).$$

□

Stwierdzenie 13.5 *Niech* $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *będzie homomorfizmem. Wtedy* $\mathrm{Ker}\phi$ *jest ideałem. Poza tym, następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mathrm{Ker}\phi$ *jest ideałem charakterystycznym*

(2) *Jeśli* $\mathcal{D} \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}$, *to* $\phi(A) = \phi(A') \Leftrightarrow \phi(\mathcal{D}A) = \phi(\mathcal{D}A')$.

Dlatego też można wtedy zdefiniować $\phi(\mathcal{D}) \in \mathrm{Der}\mathfrak{h}$ *wzorem* $\phi(\mathcal{D})\phi(A) := \phi(\mathcal{D}A)$. *Mamy homomorfizm algebr Liego* $\phi : \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Der}(\mathfrak{h})$.

13.8 Iloczyn półprosty

Niech $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{h}$ będą algebrami Liego.

Niech $\mathfrak{h} \ni H \mapsto \alpha_H \in \mathrm{Der}(\mathfrak{a})$ będzie homomorfizmem algebr Liego. Wtedy iloczyn półprosty $\mathfrak{a} \rtimes_\alpha \mathfrak{h}$ jest zdefiniowany jako $\mathfrak{a} \times \mathfrak{h}$ z nawiasem

$$[(A_1, H_1), (A_2, H_2)] = ([A_1, A_2] + \alpha_{H_1}(A_2) - \alpha_{H_2}(A_1), [H_1, H_2])\,.$$

$\mathfrak{a} \rtimes_\alpha \mathfrak{h}$ jest algebrą Liego. $\{0\} \times \mathfrak{h}$ jest jej podalgebrą Liego, $\mathfrak{a} \times \{0\}$ jest jej ideałem.

Jeśli $\mathfrak{g}$ zawiera podalgebrę $\mathfrak{a}$ i ideał $\mathfrak{h}$ takie, że $\mathfrak{g}$ jest sumą prostą $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{h}$ w sensie przestrzeni wektorowych, to mamy wtedy homomorfizm $\mathfrak{h} \ni H \mapsto [H, \cdot] =: \alpha_H \in \mathrm{Der}(\mathfrak{a})$ i $\mathfrak{g}$ jest izomorficzna z iloczynem półprostym $\mathfrak{a} \rtimes_\alpha \mathfrak{h}$.

Oznaczmy przez $t(\mathbb{K}^n)$ macierze górnotrójkątne, przez $n(\mathbb{K}^n)$ macierze ściśle górnotrójkątne, a przez $d(\mathbb{K}^n)$ macierze diagonalne. Wtedy $n(\mathbb{K}^n)$ jest ideałem charakterystycznym w $t(\mathbb{K}^n)$. $t(\mathbb{K}^n)$ jest iloczynem półprostym $n(\mathbb{K}^n) \rtimes d(\mathbb{K}^n)$. Jeśli $t(\mathbb{K}^n) \supset \mathfrak{a} \supset n(\mathbb{K}^n)$ jest dowolną podprzestrzenią, to jest to też ideał w $t(\mathbb{K}^n)$ (zresztą, charakterystyczny).

13.9 Afiniczne algebry Liego

Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią wektorową. Odwzorowania afiniczne na $\mathcal{V}$ tworzą algebrę Liego z działaniem

$$[(w_1, A_1), (w_2, A_2)] := (A_1 w_2 - A_2 w_1, [A_1, A_2])$$

Tę algebrę Liego nazywamy *afinicznym rozszerzeniem* $gl(\mathcal{V})$.

$\mathcal{V}$ można traktować jako przemienną algebrę Liego. Każde odwzorowanie liniowe na $\mathcal{V}$ jest różniczkowaniem, czyli $\mathrm{Der}(\mathcal{V}) = L(\mathcal{V}) = gl(\mathcal{V})$. Latwo widzimy, że afiniczne rozszerzenie $gl(\mathcal{V})$ jest iloczynem półprostym $\mathcal{V} \rtimes gl(\mathcal{V})$.

Często w zastosowaniach spotykamy grupy w których $gl(\mathcal{V})$ jest zastąpione jej podgrupą. Na przykład, algebra Liego grupy Poincarego jest afinicznym rozszerzeniem algebry Liego grupy Lorentza $\mathbb{R}^{1,3} \rtimes so(1,3)$.

13.10 Związek zespolonych i rzeczywistych przestrzeni wektorowych

(1) Niech $\mathcal{V}$ będzie zespoloną przestrzenią wektorową. Jak zrobić z niej przestrzeń rzeczywistą?

   (i) $\mathbb{R}$ jest podciałem w $\mathbb{C}$. Można "zapomnieć" o mnożeniu przez nierzeczywiste liczby. Dostajemy przestrzeń $\mathcal{V}$ – *realifikację przestrzeni* $\mathcal{V}$.

(ii) Niech κ będzie *sprzężeniem*, tzn. antyliniową inwolucją. Wtedy

$$\mathcal{V}^\kappa := \{v \in \mathcal{V} \ : \ \kappa v = v\}$$

jest rzeczywistą podprzestrzenią zwaną *formą rzeczywistą przestrzeni* $\mathcal{V}$. Zauważmy, że

$$\mathrm{i}\mathcal{V}^\kappa = \{v \in \mathcal{V} \ : \ \kappa v = -v\}, \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}^\kappa \oplus \mathrm{i}\mathcal{V}^\kappa.$$

(2) Niech $\mathcal{X}$ będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową. Jak zrobić z niej przestrzeń zespoloną?

(i) Przestrzeń $\mathbb{C}\mathcal{X} := \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ wyposażamy w mnożenie

$$(\lambda + \mathrm{i}\mu)(x_\mathrm{R}, x_\mathrm{I}) := (\lambda x_\mathrm{R} - \mu x_\mathrm{I}, \lambda x_\mathrm{I} + \mu x_\mathrm{R}).$$

Zamiast $(x_\mathrm{R}, x_\mathrm{I})$ będziemy pisali $x_\mathrm{R} + \mathrm{i}x_\mathrm{I}$. Nazywamy tę przestrzeń *kompleksyfikacją przestrzeni* $\mathcal{X}$.

(ii) Niech $j \in L(\mathcal{X})$ będzie *antyinwolucją* (albo *strukturą zespoloną*), czyli niech spełnia $j^2 = -\mathbb{1}$. Wyposażamy $\mathcal{X}$ w mnożenie

$$(\lambda + \mathrm{i}\mu)x := (\lambda + \mu j)x.$$

Tak uzyskaną przestrzeń zespoloną oznaczamy przez $\mathcal{X}^\mathbb{C}$ i czasami nazywamy *formą zespoloną przestrzeni* $\mathcal{X}$.

W kompleksyfikacji rzeczywistej przestrzeni $\mathcal{X}$ mamy naturalne sprzężenie:

$$\kappa(x_\mathrm{R} + \mathrm{i}x_\mathrm{I}) = \overline{x_\mathrm{R} + \mathrm{i}x_\mathrm{I}} = x_\mathrm{R} - \mathrm{i}x_\mathrm{I}.$$

Oczywiście, $(\mathbb{C}\mathcal{X})^\kappa = \mathcal{X}$.

Jeśli zrealifikujemy zespoloną przestrzeń $\mathcal{V}$ dostając $\mathcal{V}_\mathbb{R}$, to w $\mathcal{V}_\mathbb{R}$ mamy naturalną antyinwolucję zadaną przez i. Mamy $(\mathcal{V}_\mathbb{R})^\mathbb{C} = \mathcal{V}$.

Jeśli skompleksyfikujemy rzeczywistą przestrzeń $\mathcal{X}$, a potem ją zrealifikujemy, dostajemy $(\mathbb{C}\mathcal{X})_\mathbb{R} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$.

Jeśli zrealifikujemy zespoloną przestrzeń $\mathcal{V}$, a potem ją skompleksyfikujemy, dostajemy $\mathbb{C}(\mathcal{V}_\mathbb{R}) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$.

13.11 Związek zespolonych i rzeczywistych algebr Liego

(1) Niech $\mathfrak{g}$ będzie zespoloną algebrą Liego.

(i) $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ jest rzeczywistą algebrą Liego.

(ii) Niech κ będzie *sprzężeniem*, które jest jednocześnie homomorfizmem. Wtedy $\mathfrak{g}^\kappa$ jest rzeczywistą algebrą Liego.

(2) Niech $\mathfrak{h}$ będzie rzeczywistą algebrą Liego.

(i) $\mathbb{C}\mathfrak{h}$ jest zespoloną algebrą Liego.

(ii) Niech j antyinwolutywnym automorfizmem algebry $\mathfrak{h}$. Wtedy $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ jest zespoloną algebrą Liego.

Stwierdzenie 13.6 *Niech $\mathfrak{h}$ będzie rzeczywistą algebrą Liego.*

(1) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$ *jest ideałem (charakterystycznym)* $\Leftrightarrow \mathbb{C}\mathfrak{a} \subset \mathbb{C}\mathfrak{h}$ *jest ideałem (charakterystycznym).*

(2) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \mathfrak{h}$ *implikuje* $[\mathbb{C}\mathfrak{a}, \mathbb{C}\mathfrak{b}] = \mathbb{C}[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$.

Przykład 13.7 (1) *$sl(n, \mathbb{C})$ ma formy rzeczywiste $sl(n, \mathbb{R})$ ze sprzężeniem zespolonym i $su(n)$ ze sprzężeniem hermitowskim razy minus.*

(2) *$so(n, \mathbb{C})$ ma formy rzeczywiste $so(q, p)$ dla $n = q + p$ ze sprzężeniem $A \mapsto K\overline{A}K$, gdzie $K^2 = I_{q,p}$.*

(3) *$sp(2m, \mathbb{C})$ ma formę rzeczywistą $sp(2m, \mathbb{R})$.*

13.12 Formy niezmiennicze na algebrze Liego

Przypomnijmy, że jeśli $\pi : \mathfrak{g} \to gl(\mathcal{V})$ jest reprezentacją, i $\langle\cdot|\cdot\rangle$ jest formą dwuliniową na $\mathcal{V}$, to mówimy, że $\mathfrak{g}$ *(infinitezymalnie) zachowuje* $\langle\cdot|\cdot\rangle$ gdy

$$\langle v|\pi(X)w\rangle + \langle\pi(X)v|w\rangle = 0, \quad X \in \mathfrak{g}, \quad v, w \in \mathcal{V}. \tag{13.78}$$

Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Mówimy, że forma dwuliniowa $\langle\cdot|\cdot\rangle$ na $\mathfrak{g}$ jest *niezmiennicza*, gdy

$$\langle[B, A]|C\rangle + \langle A|[B, C]\rangle = 0, \quad A, B, C \in \mathfrak{g}. \tag{13.79}$$

Inny równoważny warunek:

$$\langle[A, B]|C\rangle = \langle A|[B, C]\rangle.$$

Definicję (13.79) można zatem przeformułować następująco: forma na algebrze Liego jest niezmiennicza, gdy jest ona niezmiennicza dla reprezentacji dołączonej:

$$\langle \mathrm{ad}(B)A|C\rangle + \langle A|\mathrm{ad}(B)C\rangle = 0.$$

Jeśli $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$, to $\mathrm{Tr}\, AB$ jest formą niezmienniczą. Ogólniej, z każdą reprezentacją π algebry Liego $\mathfrak{g}$ w skończenie wymiarowej przestrzeni mamy związaną niezmienniczą formę dwuliniową

$$\langle B|C\rangle_\pi := \mathrm{Tr}\, \pi(B)\pi(C).$$

Jeśli $\pi = \mathrm{ad}$ formę tę nazywamy *formą Killinga* i oznaczamy czasem $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$.

Twierdzenie 13.8 *Niech $\perp$ będzie dopełnieniem ortogonalnym dla formy niezmienniczej $\langle\cdot|\cdot\rangle$ Niech $\mathfrak{b}$ będzie ideałem w $\mathfrak{g}$.*

(1) *$\mathfrak{b}^\perp$ też jest ideałem.*

(2) *Jeśli forma zeruje się na $\mathfrak{b}$, to $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{g}^\perp$.*

(3) *Jeśli forma jest niezdegenerowana, to $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}^\perp$ jest przemiennym ideałem.*

Dowód. (1) Niech $A \in \mathfrak{g}$, $B \in \mathfrak{b}$, $C \in \mathfrak{b}^\perp$.

$$\langle [C, A] | B \rangle = \langle C | [A, B] \rangle = 0.$$

Zatem, $[A, C] \in \mathfrak{b}^\perp$.

(2) Niech $B_1, B_2 \in \mathfrak{b}$. Wtedy

$$\langle [B_1, B_2] | A \rangle = \langle B_1 | [B_2, A] \rangle = 0.$$

Zatem $[B_1, B_2] \in \mathfrak{b}^\perp$.

(3) $\mathfrak{g}^\perp = \{0\}$ Zatem, na mocy (2), $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \{0\}$. $\square$

Stwierdzenie 13.9 *Niech $\mathfrak{a}$ będzie ideałem algebry Liego $\mathfrak{g}$. Niech $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ i $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathfrak{a}}$ będą formami Killinga względem $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{a}$. Wtedy obcięcie $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ do $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ jest równe $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathfrak{a}}$.*

Dowód. Niech $A, B \in \mathfrak{a}$. Wybieramy bazę w $\mathfrak{g}$ tak, aby początkowe elementy tworzyły bazę $\mathfrak{a}$. Wtedy

$$\mathrm{ad}(A) \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}(B) \sim \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\mathrm{ad}(A)\mathrm{ad}(B) \sim \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd

$$\langle A|B\rangle_{\mathfrak{g}} = \mathrm{Tr}\mathrm{ad}(A)\mathrm{ad}(B) = \mathrm{Tr} a_{11}b_{11} = \langle A|B\rangle_{\mathfrak{a}}.$$

$\square$

Przykład 13.10 *Dla $gl(n) = \mathbb{C}\mathbb{1}_n \oplus sl(n)$ forma Killinga jest równa*

$$\langle A|B\rangle_{\mathrm{ad}} = 2n\mathrm{Tr}AB - 2\mathrm{Tr}A\mathrm{Tr}B.$$

Czyli forma Killinga równa jest $2n$ razy forma śladowa na $sl(n)$ i 0 na $\mathbb{C}\mathbb{1}_n$. Niezerowe elementy macierzowe formy Killinga mamy dla $i \neq j$:

$$\langle A_{ij}|A_{ji}\rangle_{\mathrm{ad}} = 2n, \ \langle A_{ii}|A_{ii}\rangle_{\mathrm{ad}} = 2n-2, \quad \langle A_{ii}|A_{jj}\rangle_{\mathrm{ad}} = -2.$$

Mamy bowiem

$$\mathrm{ad}(A)\mathrm{ad}(B)X = ABX + XBA - AXB - BXA.$$

Niezerowe wyrazy diagonalne dla reprezentacji dołączonej są równe

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}(A_{ij})\mathrm{ad}(A_{ji})A_{ik} &= A_{ik}, \ k \neq j, && n-1 \ \textit{wyrazów}, \\
\mathrm{ad}(A_{ij})\mathrm{ad}(A_{ji})A_{kj} &= A_{kj}, \ k \neq i, && n-1 \ \textit{wyrazów}, \\
\mathrm{ad}(A_{ij})\mathrm{ad}(A_{ji})A_{ij} &= 2A_{ij}, && 2 \ \textit{wyrazy}, \\
\\
\mathrm{ad}(A_{ii})\mathrm{ad}(A_{ii})A_{ik} &= A_{ik}, \ k \neq i, && n-1 \ \textit{wyrazów}, \\
\mathrm{ad}(A_{ii})\mathrm{ad}(A_{ii})A_{ki} &= A_{ki}, \ k \neq i, && n-1 \ \textit{wyrazów}, \\
\\
\mathrm{ad}(A_{ii})\mathrm{ad}(A_{jj})A_{ij} &= -A_{ij}, && 1 \ \textit{wyraz}, \\
\mathrm{ad}(A_{ii})\mathrm{ad}(A_{jj})A_{ji} &= -A_{ji}, && 1 \ \textit{wyraz}.
\end{aligned}$$

13.13 Algebry półproste i reduktywne

Mówimy, że algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest *półprosta* gdy nie posiada niezerowych ideałów przemiennych. $\mathfrak{g}$ jest *reduktywna* gdy jest sumą prostą półprostej i przemiennej algebry Liego.

Twierdzenie 13.11 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *$\mathfrak{g}$ jest algebrą półprostą.*

(2) *Forma Killinga na $\mathfrak{g}$ jest niezdegenerowana.*

(3) *$\mathfrak{g}$ jest sumą prostą ideałów prostych*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n.$$

Dowód. (2)⇒(1): Niech $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathrm{ad}}$ będzie nieosobliwa. Niech $\mathfrak{a}$ będzie ideałem przemiennym. Dobierzmy bazę w $\mathfrak{g}$ tak, aby początkowe elementy stanowiły bazę w $\mathfrak{a}$. Niech $B \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathfrak{a}$. Mamy

$$\mathrm{ad}(B) \sim \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}(A) \sim \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\mathrm{ad}(A)\mathrm{ad}(B) \sim \begin{bmatrix} 0 & a_{12}b_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Czyli

$$\langle A|B\rangle_{\mathrm{ad}} = \mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}(A)\mathrm{ad}(B) = 0.$$

Zatem $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}^{\perp} = \{0\}$.

(1)⇒(2): Implikacja ta wynika z Kryterium Cartana dla formy Killinga (Tw. 20.15).

(1)⇒(3): Niech $\mathfrak{a}$ będzie nietrywialnym ideałem. Wiemy już, że z (1) wynika, że forma Killinga jest niezdegenerowana. Z Tw. 13.8 wynika, że $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$ jest ideałem przemiennym. Z półprostoty $\mathfrak{g}$ wynika, że $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp} = \{0\}$. Kontynuując ten proces dostajemy rozkład na ideały proste.

(3)⇒(1): $\mathfrak{a}_i$ jako proste algebry Liego posiadają niezdegenerowaną formę Killinga. (Wynika to z (1)⇒(2)). Więc to samo jest prawdą dla $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$. □

Twierdzenie 13.12 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprosta i*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n \tag{13.80}$$

będzie jej rozkładem na proste ideały.

(1) *Dowolny ideał ma postać $\mathfrak{a}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_{i_k}$, gdzie $1 \leq i_1 < \cdots i_k \leq n$.*

(2) *Rozkład (13.80) jest jedyny z dokładnością do permutacji.*

(3) *Obraz $\mathfrak{g}$ względem homomorfizmu jest półprosty.*

(4) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

Dowód. (1) Niech $\mathfrak{h}$ będzie ideałem w $\mathfrak{g}$. Jeśli $\mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{h} \neq \{0\}$, to $\mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{h}$ jest nietrywialnym ideałem. Zatem $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{h}$. Czyli

$$I_1 = \{i \ : \ \mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{h}\}, \quad I_2 = \{i \ : \ \mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{h} = \{0\}\}$$

stanowi rozbicie zbioru $\{1, \dots, n\}$ na rozłączne podzbiory. Połóżmy

$$\mathfrak{g}_1 := \bigoplus_{i \in I_1} \mathfrak{a}_i, \quad \mathfrak{g}_2 := \bigoplus_{i \in I_2} \mathfrak{a}_i.$$

Oczywiście, $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{h}$.

Niech $B \in \mathfrak{h}$. $B = B_1 + B_2$, $B_i \in \mathfrak{g}_i$.

Niech $j \in I_1$. Wtedy $[B_2, \mathfrak{a}_j] \in \mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{a}_j = \{0\}$.

Niech $j \in I_2$. Mamy $B, B_1 \in \mathfrak{h}$. Zatem $B_2 \in \mathfrak{h}$. Więc, $[B_2, \mathfrak{a}_j] \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}_j = \{0\}$. Zatem $[B_2, \mathfrak{a}_j] = \{0\}$.

Czyli $[B_2, \mathfrak{g}] = \{0\}$. Zatem B_2 należy do centrum algebry $\mathfrak{g}$. Czyli $B_2 = 0$.

(2) Na mocy (1), jeśli $\mathfrak{a}$ jest prostym ideałem zawartym w $\mathfrak{g}$, to jest on równy jednemu z ideałów w (13.80). □

Twierdzenie 13.13 *Niech $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie półprosta. Wtedy form śladowa jest niezdegenerowana.*

Dowód. Dowód jest analogiczny do dowodu Tw. 13.11 (1)⇒(2), przy czym korzystamy z Kryterium Cartana dla formy śladowej (Tw. 20.13). □

Twierdzenie 13.14 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mathfrak{g}$ *jest algebrą reduktywną.*

(2) *Istnieje niezdegenerowana forma niezmiennicza na* $\mathfrak{g}$.

(3) $\mathfrak{g}$ *jest sumą prostą ideałów prostych lub równych* $\mathbb{K}$.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n.$$

14 Zwarte grupy i ich reprezentacje

14.1 Reprezentacje

Rozważmy reprezentację $\rho : \mathfrak{g} \to gl(\mathcal{V})$ lub $\rho : G \to GL(\mathcal{V})$. Mówimy, że reprezentacja jest *przywiedlna*, gdy posiada nietrywialną podprzestrzeń niezmienniczą. W przeciwnym razie mówimy, że jest *nieprzywiedlna*.

Mówimy, że reprezentacja jest *rozkładalna*, gdy posiada nietrywialny rozkład na sumę prostą podprzestrzeni niezmienniczych. W przeciwnym razie mówimy, że jest *nierozkładalna*.

Każda reprezentacja rozkładalna jest przywiedlna.

W oczywisty sposób definiujemy *sumę prostą*. *Iloczyn tensorowy* reprezentacji ρ_1 i ρ_2 działa w $\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2$ i jest równy dla grup $\rho_1 \otimes \rho_2$ a dla algebr Liego $\rho_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \rho_2$.

Mówimy, że reprezentacja jest *całkowicie rozkładalna*, gdy istnieje rozkład $\mathcal{V} = \oplus_{j=1}^n \mathcal{V}_j$ takie, że reprezentacja ograniczona do $\mathcal{V}_j$ jest nieprzywiedlna.

(Zauważmy następującą niekonsekwencję terminologiczną: reprezentacja nieprzywiedlna jest całkowicie rozkładalna, ale nierozkładalna).

Jeśli $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$ jest podprzestrzenią niezmienniczą, to $\rho_1 := \rho\Big|_{\mathcal{V}_1}$ nazywamy *podreprezentacją* reprezentacji ρ. Mamy również naturalną *reprezentację ilorazową* $\rho^1 : \mathfrak{g} \to L(\mathcal{V}/\mathcal{V}_1)$ zadaną przez $\rho^1(A)(v + \mathcal{V}_1) = \rho(A) + \mathcal{V}_1$. Wybierając bazę w $\mathcal{V}$ tak, by pierwsze wektory należały do $\mathcal{V}_1$, możemy wtedy napisać

$$\rho(A) = \begin{bmatrix} \rho_1(A) & ? \\ 0 & \rho^1(A) \end{bmatrix}.$$

Jeśli istnieje podprzestrzeń niezmiennicza $\mathcal{V}^1$ dopełniająca do $\mathcal{V}_1$, i bazy dostosujemy do rozkładu $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}^1$, to ? znika.

Zauważmy, że jeśli $\mathcal{W}$ jest podprzestrzenią niezmienniczą dla reprezentacji ilorazowej ρ^1, to $\mathcal{W} + \mathcal{V}_1$ jest podprzestrzenią niezmienniczą dla ρ.

Dla każdej reprezentacji skończenie wymiarowej znajdziemy niezerową podprzestrzeń niezmienniczą. Przez indukcję, konstruujemy ciąg przestrzeni niezmienniczych $\{0\} = \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \cdots \subset \mathcal{V}_n = \mathcal{V}$ takich, że reprezentacja ilorazowa na $\mathcal{V}_{n+1}/\mathcal{V}_n$ jest nieprzywiedlna. Ciąg taki nazywamy *ciągiem Jordana-Höldera*. Robimy to indukcyjnie: dla reprezentacji na $\mathcal{V}/\mathcal{V}_n$ szukamy podreprezentacji nieprzywiedlnej.

14.2 Reprezentacja kontragradientna

Załóżmy, że mamy reprezentację (niekoniecznie unitarną) π grupy G na skończenie wymiarowej przestrzeni $\mathcal{V}$. Reprezentację kontragradientną do π nazywamy reprezentację π^{ct} działającą w przestrzeni sprzężonej $\mathcal{V}^{\#}$ zadaną przez

$$\pi^{\mathrm{ct}}(g) := \pi(g)^{\#(-1)}, \quad g \in G.$$

Jeśli mamy reprezentację algebry Liego $\mathfrak{g}$, jej reprezentacja kontragradientna jest zdefiniowana jako

$$\pi^{\mathrm{ct}}(A) := -\pi(A)^{\#}, \quad A \in \mathfrak{g}.$$

π jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy gdy π^{ct} jest nieprzywiedlna (bo anihilator przestrzeni niezmienniczej dla π jest niezmienniczy dla π^{ct}).

Zauważmy, że dla reprezentacji unitarnych zapisanych w bazie ortonormalnej, reprezentacja kontragradientna pokrywa się z reprezentacją zespolenie sprzężoną $\overline{\rho}$.

14.3 Utożsamienie iloczynu tensorowego i operatorów liniowych

Rozważmy przestrzeń wektorową skończenie wymiarową $\mathcal{V}$. Wybierzmy bazę $e_1, \ldots, e_n$, Mamy wtedy bazę w przestrzeni dualnej $e^1, \ldots, e^n$. Wektor $v \in \mathcal{V}$ możemy zapisywać na wiele sposobów

$$v = v^i e_i = [v^i].$$

Niech $\mathcal{W}$ będzie również skończenie wymiarową przestrzenią. Wybierzmy w niej bazę $f_1, \ldots, f_m$. Zdefiniujmy $J : \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \to L(\mathcal{W}^{\#}, \mathcal{V})$ następująco:

$$J(e_i \otimes f_j)\xi := e_i \langle f_j | \xi \rangle.$$

Zauważmy, że $\Phi \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ i $J(\Phi)$ mają tę samą macierz:

$$\Phi = \Phi^{ij} e_i \otimes f_j, \qquad J(\Phi) f^j = \Phi^{ij} e_i.$$

Jeśli $P \in L(\mathcal{V})$, $Q \in L(\mathcal{W})$, to

$$P \otimes Q\, \Phi = P J(\Phi) Q^{\#}.$$

W szczególności, jeśli $\mathcal{W} = \mathcal{V}^{\#}$, to $J(e_i \otimes e^i) = 1\!\!1_{\mathcal{V}}$.

Niech $\Psi \in \mathcal{V}^{\#} \otimes \mathcal{W}^{\#}$. Wtedy

$$\mathrm{Tr} \Psi \Phi = \langle J(\Psi) | J(\Phi) \rangle.$$

14.4 Iloczyn reprezentacji i reprezentacji kontragradientnej

Rozważmy skończenie wymiarową reprezentację grupy $\rho : G \to GL(\mathcal{V})$ lub algebry Liego $\rho : \mathfrak{g} \to gl(\mathcal{V})$. Wtedy mamy reprezentację $\rho \otimes \rho^{\mathrm{ct}}$ lub $\rho \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes \rho^{\mathrm{ct}}$ w $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^{\#}$. Wektor $e_i \otimes e^i$ rozpina 1-wymiarową przestrzeń na której ta reprezentacja jest trywialna. Ma ona reprezentację dopełniającą, zadaną przez jądro śladu, gdzie korzystamy z utożsamienia $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^{\#} \simeq L(\mathcal{V})$.

Na przykład, jeśli rozważymy algebrę $sl(n, \mathbb{C})$ lub $su(n)$ i ρ jest reprezentacją fundamentalną na $\mathbb{C}^n$, to dostaniemy reprezentację dołączoną. Jest ona nieprzywiedlna.

Jeśli rozważymy reprezentację fundamentalną $so(n, \mathbb{C})$ lub $so(n)$, to reprezentacja na macierzach bezśladowych rozkłada się na sumę prostą dwóch podreprezentacji nieprzywiedlnych: w macierzach symetrycznych bezśladowych i w macierzach antysymetrycznych. Ta druga jest tożsama z reprezentacją dołączoną.

Twierdzenie 14.1 *Niech π_1, π_2 będą skończenie wymiarowymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi. Wtedy $\pi_1 \otimes \pi_2$ zawiera $\iota \Leftrightarrow \pi_2 \simeq \pi_1^{\mathrm{ct}}$. Jeśli to ma miejsce, to $\pi_1 \otimes \pi_2$ zawiera ι jednokrotnie*

Dowód. $\Rightarrow$: Niech $\Psi \in \mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2$ będzie niezmienniczym wektorem dla $\pi_1 \otimes \pi_2$.

$$\Psi = \pi_1(g) \otimes \pi_2(g)\, \Psi$$

implikuje

$$J(\Psi) = \pi_1(g) J(\Psi) \pi_2(g)^{\#},$$

czyli

$$J(\Psi) \pi_2(g)^{\# -1} = \pi_1(g) J(\Psi),$$

zatem $J(\Psi)$ splata π_1 i π_2^{ct}. Zatem $\pi_1 \simeq \pi_2^{\mathrm{ct}}$.

Odwracając rozumowanie dostajemy $\Leftarrow$.

Poza tym, z Lematu Schura wynika, że $J(\Psi)$ jest proporcjonalne do identyczności. $\pi_1 \otimes \pi_2$ zawiera ι jednokrotnie

14.5 Istnienie miary Haara i jego konsekwencje

Załóżmy, że $(X, \mathrm{d}x)$ jest przestrzenią z miarą na której działa mierzalnie grupa G przez $(g, x) \mapsto gx$. Mówimy, że działanie zachowuje miarę, jeśli

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(gx)\mathrm{d}x.$$

W szczególności, grupa działa na sobie na dwa sposoby: z prawej i z lewej. Mówimy, że miara $\mathrm{d}g$ na G jest lewoniezmiennicza jeśli

$$\int f(g)\mathrm{d}g = \int f(hg)\mathrm{d}g,$$

prawoniezmiennicza jeśli

$$\int f(g)\mathrm{d}g = \int f(gh^{-1})\mathrm{d}g.$$

Twierdzenie 14.2 *Na zwartej grupie istnieje dokładnie jedna miara lewo- i prawoniezmiennicza* $\mathrm{d}g$ *taka, że* $\int\limits_G \mathrm{d}g = 1$.

Miarę tę nazywamy *unormowaną miarą Haara.* W szczególności, na skończonej grupie jest to miara licząca podzielona przez rząd grupy.

Twierdzenie 14.3 *Niech* $(\rho, \mathcal{V})$ *będzie reprezentacją grupy zwartej* G*. Wtedy istnieje iloczyn skalarny taki, że* ρ *jest reprezentacją unitarną*

Dowód. Wybieramy dowolny iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot)_0$ na $\mathcal{V}$. Kładziemy

$$(v|w) := \int (\rho(g)v|\rho(g)w)_0 \mathrm{d}g.$$

□

Wniosek 14.4 *Reprezentacje skończenie wymiarowe grupy zwartej są zawsze całkowicie rozkładalne.*

Twierdzenie 14.5 $\mathfrak{g}$ *jest algebrą Liego grupy Liego zwartej wtedy i tylko wtedy gdy posiada dodatni niezdegenerowany iloczyn skalarny.*

14.6 Reprezentacje nieprzywiedlne

Twierdzenie 14.6 *Każda reprezentacja nieprzywiedlna grupy zwartej jest skończenie wymiarowa.*

Niech G będzie grupą zwartą. Oznaczmy przez $\hat{G}$ zbiór klas równoważności reprezentacji nieprzywiedlnych w przestrzeniach zespolonych. Możemy założyć, że są unitarne. W szczególności, mamy w $\hat{G}$ reprezentację trywialną ι. Dla każdego elementu $\hat{G}$ wybierzemy reprezentanta $(\pi, \mathcal{V}_\pi)$. Wybierzemy również bazę ortonormalną $e_{\pi,1}, \ldots, e_{\pi,d_\pi}$, gdzie $d_\pi := \dim \mathcal{V}_\pi$. Możemy wtedy zapisać π jako macierz

$$[\pi_{ij}(g)]_{i,j=1,\ldots,d_\pi}, \quad g \in G.$$

Mamy też charaktery nieprzywiedlne

$$\chi_\pi(g) := \sum_{i=1}^{d_\pi} \pi_{ii}(g) = \mathrm{Tr}\pi(g)$$

Dla każdej $\pi \in \hat{G}$ mamy jej reprezentację zespolenie sprzężoną $\overline{\pi}$, która pokrywa się z jej reprezentacją kontragradientną π^{ct}. Oczywiście, $\chi_{\overline{\pi}} = \overline{\chi_\pi}$.

W $L^2(G)$ będziemy używać iloczynu skalarnego

$$(f|f') := \int \overline{f(g)} f'(g) \mathrm{d}g.$$

Niech $L^2_{\mathrm{cent}}(G)$ będzie podprzestrzenią $L^2(G)$ składającą się z funkcji stałych na klasach sprzężoności.

Twierdzenie 14.7 (1) $\sqrt{d_\pi}\pi_{ij}$, $\pi \in \hat{G}$, $i, j = 1, \ldots, d_\pi$ *stanowią bazę ortonormalną w* $L^2(G)$.
(2) χ_π *stanowią bazę ortonormalną w* $L^2_{\mathrm{cent}}(G)$.

14.7 Rozkład dowolnej reprezentacji

Niech $(\rho, \mathcal{W})$ będzie reprezentacją grupy G zwartej na przestrzeni wymiaru $d_\rho < \infty$. Jest ona całkowicie rozkładalna, czyli można rozłożyć ją na składniki

$$\rho \simeq \underset{\pi\in\hat{G}}{\oplus} m_\pi \pi. \tag{14.81}$$

Zatem

$$d_\rho = \sum_{\pi\in\hat{G}} m_\pi d_\pi. \tag{14.82}$$

m_π nazywamy *krotnością* π *w* ρ. Jeśli ρ jest reprezentacją unitarną, to można założyć, że suma (14.81) jest ortogonalna.

Mamy rozkład przestrzeni $\mathcal{W}$ na sumę prostą ortogonalną $\mathcal{W} = \underset{\pi\in\hat{G}}{\oplus} \mathcal{W}_\pi$ taki, że $\rho\Big|_{\mathcal{W}_\pi}$ jest równoważna $m_\pi\pi$, oraz rzuty ortogonalne Q_π na $\mathcal{W}_\pi$. Przestrzenie $\mathcal{W}_\pi$ będziemy nazywać przestrzeniami izotypowymi. Oczywiście, $\mathcal{W}_\pi = \mathrm{Ran} Q_\pi$,

$$\sum_{\pi\in\hat{G}} Q_\pi \;=\; \mathbb{1}, \quad Q_\pi^* = Q_\pi, \quad Q_\pi Q_{\pi'} = Q_\pi \delta_{\pi\pi'}.$$

Będziemy czasem pisać $Q_\pi(\rho)$, $m_\pi(\rho)$ żeby podkreślić zależność od ρ.

Twierdzenie 14.8 *Dla* $\pi \in \hat{G}$

$$
\begin{aligned}
m_\pi(\rho) &= \int \overline{\chi_\pi(g)}\chi_\rho(g)\mathrm{d}g && (14.83)\\
&= (\chi_\pi|\chi_\rho), && (14.84)\\
Q_\pi(\rho) &= d_\pi \int \overline{\chi_\pi(g)}\rho(g)\mathrm{d}g. && (14.85)
\end{aligned}
$$

W szczególności, mamy rzut na wektory stałe

$$Q_\iota(\rho) = \int \rho(g)\mathrm{d}g.$$

Twierdzenie 14.9

$$
\begin{aligned}
m_\iota(\rho\otimes\pi) = m_{\overline{\pi}}(\rho) &= \int \chi_\pi(g)\chi_\rho(g)\mathrm{d}g, && (14.86)\\
Q_\iota(\rho\otimes\pi) &= \int \rho(g)\otimes\pi(g)\mathrm{d}g, && (14.87)\\
\mathrm{Tr}_\pi Q_\iota(\rho\otimes\pi) &= \frac{1}{d_\pi}Q_{\overline{\pi}}(\rho), && (14.88)\\
\sum_{\pi\in\hat{G}} d_\pi \mathrm{Tr}_\pi Q_\iota(\rho\otimes\pi) &= 1\!\!1_\rho. && (14.89)
\end{aligned}
$$

Dowód. (14.86) i (14.87) są oczywiste. (14.88) wynika z (14.87):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_\pi Q_\iota(\rho\otimes\pi) &= \int \rho(g)\chi_\pi(g)\mathrm{d}g\\
&= \int \rho(g)\overline{\chi_{\overline{\pi}}(g)}\mathrm{d}g = \frac{1}{d_\pi}Q_{\overline{\pi}}(\rho).
\end{aligned}
$$

(14.89) wynika z

$$\sum_{\pi\in\hat{G}} Q_{\overline{\pi}}(\rho) = 1\!\!1_\rho.$$

□

Twierdzenie 14.10 *Załóżmy, że* $\pi,\pi' \in \hat{G}$, $\Phi \in \mathrm{Ran}_\iota(\rho\otimes\pi)$ *i* $\Phi' \in \mathrm{Ran}_\iota(\rho\otimes\pi')$. *Wtedy*

$$\mathrm{Tr}_\rho|\Phi)(\Phi'| = \delta_{\pi,\pi'}\frac{(\Phi'|\Phi)}{d_\pi}1\!\!1_\pi. \tag{14.90}$$

Dowód. Oczywiście,

$$\rho(g)\otimes\pi(g)\Phi = \Phi, \quad \rho(g)\otimes\pi'(g)\Phi' = \Phi'.$$

Zatem,

$$\rho(g)\otimes\pi(g)|\Phi)(\Phi'|\rho(g)^{-1}\otimes\pi'(g)^{-1} = |\Phi)(\Phi'|.$$

Stąd,

$$\pi(g)\mathrm{Tr}_\rho|\Phi)(\Phi'|\pi'(g)^{-1} = \mathrm{Tr}_\rho|\Phi)(\Phi'|.$$

Więc, z Lematu Schura wynika, że

$$\mathrm{Tr}_\rho|\Phi)(\Phi'| = \delta_{\pi,\pi'}c\mathbb{1}_\pi. \tag{14.91}$$

Biorąc ślad (14.91) dostajemy

$$(\Phi'|\Phi) = \delta_{\pi,\pi'}cd_\pi.$$

□

14.8 Rozkład iloczynu tensorowego reprezentacji

Szczególnie ważny jest rozkład iloczynu tensorowego dwóch reprezentacji nieprzywiedlnych. Oczywiście, $\pi\otimes\iota\simeq\pi$, $\pi\otimes\overline{\pi}$ zawiera ι z krotnością 1.

Niech $\pi_1,\pi_2,\pi_3\in\hat{G}$. Mamy wzór

$$\begin{aligned} m_{\overline{\pi}_3}(\pi_1\otimes\pi_2) &= m_\iota(\pi_1\otimes\pi_2\otimes\pi_3) \\ &= \int\chi_{\pi_1}(g)\chi_{\pi_2}(g)\chi_{\pi_3}(g)\mathrm{d}g. \end{aligned}$$

A oto wzór na odpowiednie rzuty:

$$\begin{aligned} Q_{\overline{\pi}_3}(\pi_1\otimes\pi_2) &= d_{\pi_3}\int\overline{\chi_{\overline{\pi}_3}(g)}\pi_1(g)\otimes\pi_2(g)\mathrm{d}g \\ &= d_{\pi_3}\int\chi_{\pi_3}(g)\pi_1(g)\otimes\pi_2(g)\mathrm{d}g; \\ Q_\iota(\pi_1\otimes\pi_2\otimes\pi_3) &= \int\pi_1(g)\otimes\pi_2(g)\otimes\pi_3(g)\mathrm{d}g. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$d_{\pi_3}\mathrm{Tr}_{\pi_3}Q_\iota(\pi_1\otimes\pi_2\otimes\pi_3) = Q_{\overline{\pi}_3}(\pi_1\otimes\pi_2). \tag{14.92}$$

14.9 Przykład: $\mathbb{Z}_n$

Reprezentacje są numerowane przez $j\in\mathbb{Z}_n$:

$$\mathbb{Z}_n\ni k\mapsto\pi_j(\phi) := \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}jk}$$

Mamy $\overline{\pi}_j = \pi_{n-j}$

$$\pi_j\otimes\pi_k\simeq\pi_{j+k}.$$

14.10 Przykład: $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

Reprezentacje są numerowane przez $j\in\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{T}\ni\phi\mapsto\pi_j(\phi) := \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}j\phi}$$

Mamy $\overline{\pi}_j = \pi_{-j}$

$$\pi_j\otimes\pi_k\simeq\pi_{j+k}.$$

14.11 Przykład: S_3

S_3 ma reprezentację trywialną, signum i (2-wymiarową) standardową, którą oznaczamy przez π. Oto tablica charakterów:

	ι	sgn	π
id	1	1	2
(12)	1	-1	0
(123)	1	1	-1

Mamy

$$\chi_{\pi\otimes\pi} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \chi_\iota + \chi_{\mathrm{sgn}} + \chi_\pi.$$

15 $SL(2,\mathbb{C})$ i $SU(2)$ i ich reprezentacje

W tym rozdziale będziemy badać zwartą grupę Liego $SU(2)$ i zespoloną grupę Liego $SL(2,\mathbb{C})$. Ich algebry Liego to odpowiednio $su(2)$ i $sl(2,\mathbb{C})$ $sl(2,\mathbb{C})$ jest kompleksyfikacją $su(2)$.

15.1 $sl(2,\mathbb{C})$ i $su(2)$

Niech $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ będą macierzami Pauliego.

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Spełniają one

$$\sigma_i\sigma_j = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}\mathbb{1}.$$

Stanowią one bazę algebry $sl(2,\mathbb{C})$ i mają relacje komutacyjne

$$\left[\frac{\mathrm{i}\sigma_i}{2}, \frac{\mathrm{i}\sigma_j}{2}\right] = -\epsilon_{ijk}\frac{\mathrm{i}\sigma_k}{2}.$$

Będziemy również używać alternatywnej bazy w $sl(2,\mathbb{C})$

$$N = \frac{1}{2}\sigma_3, \quad A_\pm := \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm \mathrm{i}\sigma_2).$$

Mamy

$$A_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\sigma_1 = A_+ + A_-, \quad \sigma_2 = -\mathrm{i}A_+ + \mathrm{i}A_-,$$
$$[N, A_\pm] = \pm A_\pm, \quad [A_+, A_-] = 2N.$$

Na $sl(2,\mathbb{C})$ mamy iloczyn skalarny śladowy $\mathrm{Tr}XY$, $X, Y \in sl(2,\mathbb{C})$. Możemy go też ograniczyć do rzeczywistej podprzestrzeni macierzy hermitowskich bezśladowych $\mathrm{i}su(2,\mathbb{C})$, wtedy jest dodatnio określony. Alternatywnie, ten iloczyn skalarny możemy dostać z wyznacznika, mamy bowiem tożsamość

$$\det X = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}X^2, \quad X \in sl(2,\mathbb{C}).$$

$\mathrm{i}\sigma_1, \mathrm{i}\sigma_2, \mathrm{i}\sigma_3$ stanowią bazę ortonormalną algebry Liego $su(2)$.

15.2 $so(3,\mathbb{C})$ i $SO(3,\mathbb{C})$

Pamiętamy, że $A \in SL(2,\mathbb{C})$ możemy przyporządkować

$$\rho_A X := AXA^{-1}, \quad X \in sl(2,\mathbb{C})$$

Zachowuje iloczyn skalarny. Utożsamiając $sl(2,\mathbb{C})$ z $\mathbb{C}^3$ dostajemy homomorfizm $SL(2,\mathbb{C})$ na $SO(3,\mathbb{C})$ z jądrem $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$.

Biorąc $A \in SU(2)$ i ograniczając się do $X \in \mathrm{i}su(2)$, dostajemy homomorfizm $SU(2)$ na $SO(3)$ z takim samym jądrem.

Mamy też infinitezymalne wersje tych homomorfizmów zadane przez

$$\rho_A X := [A, X].$$

Zadają one izomorfizm $sl(2,\mathbb{C})$ na $so(3,\mathbb{C})$ oraz $su(2)$ na $so(3)$.

Bazę w $so(3)$ stanowią

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oczywiście,

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k,$$
$$\rho_{\mathrm{i}\sigma_i/2} = L_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

15.3 Skończenie wymiarowe reprezentacje $sl(2,\mathbb{C})$

Rozważmy reprezentację $\pi : sl(2,\mathbb{C}) \to gl(\mathcal{V})$. Wprowadźmy operator Casimira

$$\begin{aligned} C &:= \frac{1}{4}\Big(\pi(\sigma_1)^2 + \pi(\sigma_2)^2 + \pi(\sigma_3)^2\Big) = \pi(N)^2 + \frac{1}{2}\Big(\pi(A_+)\pi(A_-) + \pi(A_-)\pi(A_+)\Big) \\ &= \pi(N)^2 - \pi(N) + \pi(A_+)\pi(A_-) = \pi(N)^2 + \pi(N) + \pi(A_-)\pi(A_+). \end{aligned}$$

Sprawdzamy, że C komutuje z $\pi(sl(2,\mathbb{C}))$. Zatem przestrzenie własne operatora C są niezmiennicze dla $\pi(sl(2,\mathbb{C}))$.

Będziemy pomijać π.

Twierdzenie 15.1 (1) *Dla każdego $n = 1, 2, \ldots$ istnieje jedyna, z dokładnością do równoważności, reprezentacja nieprzywiedlna $sl(2,\mathbb{C})$ w $\mathbb{C}^n$. Nazywamy ją* reprezentacją o spinie l, *gdzie $n = 2l + 1$. Ma ona następujące własności:*

(i) $\mathrm{spec} N = \{-l, -l+1 \cdots, l-1, l\}$.

(ii) $C = l(l+1)$.

(iii) *Istnieje baza $\{v_{-l}, \ldots, v_l\}$ taka, że*

$$\begin{aligned} N v_m &= m v_m, \\ A_- v_m &= (l+m) v_{m-1}, \\ A_+ v_m &= (l-m) v_{m+1}. \end{aligned} \tag{15.93}$$

(2) *Reprezentacja $sl(2,\mathbb{C})$ w przestrzeni $\mathcal{V}$ jest równoważna reprezentacji o spinie l wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z poniższych warunków:*

   (i) *Istnieje w $\mathcal{V}$ wektor cykliczny v_+ taki, że $A_+v_+ = 0$ i $Nv_+ = lv_+$. (Wektor ten nazywamy* wektorem najwyższej wagi*).*

   (ii) *Istnieje w $\mathcal{V}$ wektor cykliczny v_- taki, że $A_-v_- = 0$ i $Nv_- = -lv_-$. (Wektor ten nazywamy* wektorem najniższej wagi*).*

   (iii) *Reprezentacja jest nieprzywiedlna i* $\max \mathrm{spec} N = l$.

   (iv) *Reprezentacja jest nieprzywiedlna i* $\min \mathrm{spec} N = -l$.

Dowód. Reprezentację o spinie l można zrealizować w przestrzeni wielomianów rozpiętych przez $v_m := z_+^{l+m} z_-^{l-m}$, $m = -l, \dots, l$. Zadana jest przez operatory

$$\begin{aligned} N &:= \frac{1}{2}(z_+\partial_{z_+} - z_-\partial_{z_-}), \\ A_- &:= z_-\partial_{z_+}, \\ A_+ &:= z_+\partial_{z_-}. \end{aligned}$$

Sprawdzamy, że dostajemy wtedy reprezentację (15.93).

Pokażmy, że jest ona nieprzywiedlna. Niech $\mathcal{V}_0$ będzie podprzestrzenią niezmienniczą. Niech $x = \sum x_n v_n \in \mathcal{V}_0$. Operator N zachowuje $\mathcal{V}_0$. Zatem jeśli $x_n \neq 0$, to $v_n \in \mathcal{V}_0$. Ale wtedy, działając A^+ i A^- dostajemy wszystkie v_m

Załóżmy teraz, że $sl(2,\mathbb{C})$ działa nieprzywiedlnie w skończenie wymiarowej przestrzeni $\mathcal{V}$. Pokażmy najpierw, że jeśli $\lambda \in \mathrm{spec} N$, to $\mathrm{spec} N \subset \lambda + \mathbb{Z}$. W istocie, N posiada wektor własny $v \in \mathcal{V}$:

$$Nv = \lambda v.$$

Ponieważ $\mathcal{V}$ jest nieprzywiedlna, dowolny wektor w $\mathcal{V}$ jest liniową kombinacją $A_1 \cdots A_n v$, gdzie $A_i = A_\pm$ lub $A_i = N$. Poza tym,

$$NA_+v = (\lambda+1)A_+v, \qquad NA_-v = (\lambda-1)A_-v.$$

Korzystając, z tego, że $\mathcal{V}$ jest skończenie wymiarowa, dostajemy $\lambda_\pm$ takie, że $\lambda_- = \min \mathrm{spec} N$, $\lambda_+ = \max \mathrm{spec} N$. Niech $Nv_\pm = \lambda_\pm v_\pm$, $v_\pm \neq 0$. Mamy $\lambda_+ - \lambda_- \in \mathbb{Z}$ i $A_\pm v_\pm = 0$. Mamy

$$\begin{aligned} Cv_+ &= \left(N^2 + N\right) v_+ = (\lambda_+^2 + \lambda_+)v_+, \\ Cv_- &= \left(N^2 - N\right) v_- = (\lambda_-^2 - \lambda_-)v_-. \end{aligned}$$

Ponieważ reprezentacja jest nieprzywiedlna, C jest liczbą. Równanie

$$\lambda_+^2 + \lambda_+ = \lambda_-^2 - \lambda_-$$

ma dwa rozwiązania: $\lambda_+ = \lambda_- - 1$, które odrzucamy, bo wtedy $\lambda_+ < \lambda_-$, i $\lambda_- = -\lambda_+$. Kładziemy $l := \lambda_+$. Oczywiście, $2l = \lambda_+ - \lambda_- \in \mathbb{Z}$. Rozważmy $\mathrm{Span}\{A_-^j v_+,\ j = 0, \dots, 2l\}$. Korzystając z relacji komutacyjnych sprawdzamy, że jest to niezmiennicza przestrzeń dla $sl(2,\mathbb{C})$. Zatem jest ona równa $\mathcal{V}$. Poza tym, $A_-^{2l}v_+$ jest proporcjonalny do v_-. Kładziemy

$$v_m := \frac{(l+m)!}{(2l)!} A_-^{l-m} v_+.$$

Oczywiście, $A_- v_m = (l+m)v_{m-1}$ i $Nv_m = mv_m$. Poza tym,

$$\begin{aligned} l(l+1)A_-^{l-m-1}v_+ &= \left(N^2 - N + A_+A_-\right) A_-^{l-m-1}v_+ \\ &= m(m+1)A_-^{l-m-1}v_+ + A_+A_-^{l-m}v_+. \end{aligned}$$

Stąd

$$A_+A_-^{l-m}v_+ = (l-m)(l+m+1)A_-^{l-m-1}v_+.$$

Zatem $A_+v_m = (l-m)A_{m+1}$. To dowodzi jedyności w punkcie (1). □

Alternatywną naturalną bazą dla reprezentacji $sl(2,\mathbb{C})$ jest

$$u_m := \frac{(2l)!}{(l-m)!(l+m)!}v_m = \frac{A_-^{l-m}v_+}{(l-m)!}.$$

Dostajemy wtedy

$$\begin{aligned} Nu_m &= mu_m, \\ A_-u_m &= (l-m+1)u_{m-1}, \\ A_+u_m &= (l+m+1)u_{m+1}. \end{aligned}$$

15.4 Reprezentacje unitarne $su(2)$

Twierdzenie 15.2 *Każda nieprzywiedlna reprezentacja infinitezymalnie unitarna $su(2)$ jest skończenie wymiarowa. Jest ona obcięciem reprezentacji opisanych w poprzednim twierdzeniu. Bazę unitarną dostajemy kładąc*

$$|l,m) = \frac{\sqrt{(2l)!}}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!}}v_m = \frac{\sqrt{(l-m)!(l+m)!}}{\sqrt{(2l)!}}u_m.$$

Mamy wtedy

$$\begin{aligned} N|l,m) &= m|l,m), \\ A_-|l,m) &= \sqrt{(l+m)(l-m+1)}|l,m-1), \\ A_+|l,m) &= \sqrt{(l+m+1)(l-m)}|l,m+1). \end{aligned} \tag{15.94}$$

Dowód. Rozważmy infinitezymalnie unitarną reprezentację nieprzywiedlną $su(2)$. (Nie zakładamy skończonego wymiaru przestrzeni). Operatory $\mathrm{i}\sigma_i$ muszą być antysamosprzężone, czyli N musi być samosprzężony, a $A_+ = A_-^*$. Operator Casimira jest dodatni. Ponieważ $A_+A_- \geq 0$, więc $N^2 - N$ jest ograniczone. To pokazuje, że spec$N$ musi być ograniczone. Zatem Ker$A_+ \neq \{0\}$. Z nieprzywiedlności, operator Casimira jest liczbą. Dlatego na KerA_+ mamy $C = N^2 - N$. N zachowuje KerA_+. Spektrum N na KerA_+ jest najwyżej dwuelementowe. Zatem można zdiagonalizować N. Zatem dostajemy te same przypadki, które były rozważane w Tw. 15.1.

Baza opisana w tym twierdzeniu jest ortogonalna, ale nie ortonormalna. Mamy relację

$$\begin{aligned} (A_-^{l-m}v_+|A_-^{l-m}v_+) &= (A_-^{l-m-1}v_+|A_+A_-A_-^{l-m-1}v_+) \\ &= (l-m)(l+m+1)(A_-^{l-m-1}v_+|A_-^{l-m-1}v_+). \end{aligned}$$

Stąd dostajemy

$$\begin{aligned}(A_-^{l-m}v_+|A_-^{l-m}v_+) &= (l-m)\cdots 1(l+m+1)\cdots 2l(v_+|v_+) \\ &= \frac{(l-m)!(2l)!}{(l+m)!}(v_+|v_+).\end{aligned} \tag{15.95}$$

Stąd, żeby dostać bazę ortonormalną, kładziemy

$$|l,m) := \frac{\sqrt{(l+m)!}}{\sqrt{(l-m)!(2l)!}}A_-^{l-m}v_+. \tag{15.96}$$

□

15.5 Reprezentacje $SL(2,\mathbb{C})$ i $SU(2)$

Twierdzenie 15.3 *Dla każdego $n = 2l+1 = 1,2,\dots$ istnieje jedyna, z dokładnością do równoważności, ciągła reprezentacja nieprzywiedlna $SL(2,\mathbb{C})$ w $\mathbb{C}^n$. Odpowiada ona reprezentacji $sl(2,\mathbb{C})$ omawianej powyżej. Dla $l \in \mathbb{Z}$ zadaje ona reprezentację $SO(3,\mathbb{C})$.*

Dowód. Istnienie: Oznaczmy bazę w $\mathbb{C}^2$ przez $|\uparrow)$ i $|\downarrow)$. $SL(2,\mathbb{C})$ działa w naturalny sposób w $\mathbb{C}^2$. Działa więc również w $\otimes_{\mathrm{s}}^{2l}\mathbb{C}^2$.

Wprowadźmy bazę w $\otimes_{\mathrm{s}}^{2l}\mathbb{C}^2$

$$v_m = \sum |j_1) \otimes \cdots \otimes |j_{2l}),$$

gdzie sumujemy po wektorach składających się z $l-m$ czynników $|\downarrow)$ i $l+m$ czynników $|\uparrow)$. Latwo sprawdzamy, że dostajemy reprezentację $SL(2,\mathbb{C})$ i że jest ona nieprzywiedlna.

Jednoznaczność: Jeśli mamy ciągłą nieprzywiedlną reprezentację $SL(2,\mathbb{C})$ w $\mathbb{C}^n$, to generuje ona nieprzywiedlną reprezentację $sl(2,\mathbb{C})$ w $\mathbb{C}^n$. Takie reprezentacje już zbadaliśmy. □

Twierdzenie 15.4 *Dla każdego $n = 2l+1 = 1,2,\dots$ istnieje jedyna, z dokładnością do równoważności, ciągła unitarna reprezentacja nieprzywiedlna $SU(2)$ w $\mathbb{C}^n$. Odpowiada ona reprezentacji $su(2)$ omawianej powyżej. Dla $l \in \mathbb{Z}$ zadaje ona reprezentację $SO(3)$.*

Dowód. Powtażamy te same argumenty. Możemy jeszcze zauważyć, że jeśli $SU(2)$ działa na $\mathbb{C}^2$ unitarnie, to na $\otimes_{\mathrm{s}}^{2l}\mathbb{C}^2$ też. □

Mamy $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi N} = (-1)^l$. Dlatego dla $l \in \mathbb{Z}$ reprezentacje $SU(2)$ odpowiadają reprezentacjom $SO(3)$.

15.6 Parametryzacje $SU(2)$

Niech $(a_0, \vec{a}) \in \mathbb{C}^4$. Niech $A = a_0\mathbb{1} + \mathrm{i}\vec{a}\vec{\sigma}$. Wtedy

$$\det A = a_0^2 + (\vec{a})^2.$$

Zatem $SL(2,\mathbb{C})$ jest 3-wymiarową sferą zespoloną.

Mamy $A^* = \overline{a}_0 - \mathrm{i}\vec{\overline{a}}\vec{\sigma}$. Dlatego $AA^* = \mathbb{1}$ jest równoważne $(a_0, \vec{a}) \in \mathbb{R}^4$. Czyli $SU(2)$ jest 3-wymiarową sferą rzeczywistą.

Odwzorowanie eksponencjalne przekształca $sl(2,\mathbb{C})$ na $SL(2,\mathbb{C})$:

$$\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\vec{\theta}\vec{\sigma}} = \cos\frac{\sqrt{\theta^2}}{2}\mathbb{1} + \frac{\mathrm{i}\vec{\theta}\vec{\sigma}}{\sqrt{\theta^2}}\sin\frac{\sqrt{\theta^2}}{2}, \quad \vec{\theta} \in \mathbb{C}^3.$$

W szczególności, jeśli $\frac{\sqrt{\theta^2}}{2} = \pi$, to dostajemy $-\mathbb{1}$.

Odwzorowanie eksponencjalne przekształca również $su(2)$ na $SU(2)$:

$$\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\vec{\theta}\vec{\sigma}} = \cos\frac{|\theta|}{2}\mathbb{1} + \frac{\mathrm{i}\vec{\theta}\vec{\sigma}}{|\theta|}\sin\frac{|\theta|}{2}, \quad \vec{\theta} \in \mathbb{R}^3.$$

W szczególności, $SU(2)\backslash\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$ jest sparametryzowana przez $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^3$, $|\theta| \in]0, 2\pi[$.

Niech $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ będzie macierzą w $SU(2)$. Wtedy

$$|a|^2 + |b|^2 = 1, \qquad |c|^2 + |d|^2 = 1, \tag{15.97}$$
$$a\overline{c} + b\overline{d} = 0, \qquad c\overline{a} + d\overline{b} = 0, \tag{15.98}$$
$$ad - bc = 1. \tag{15.99}$$

Wyliczamy c z (15.98) i wstawiamy do (15.99) dostając

$$d(|a|^2 + |b|^2) = \overline{a}.$$

Stąd wynika, że

$$c = -\overline{b}, \quad d = \overline{a}, \quad |a|^2 + |b^2| = 1.$$

Czyli $SU(2)$ jest sferą 3-wymiarową. Wyjmijmy z niej biegun południowy i północny, odpowiadające $a = \pm 1$, $b = 0$. Wtedy można napisać

$$a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\cos\frac{\beta}{2}, \quad b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\sin\frac{\beta}{2}, \quad \beta \in]0, 2\pi[, \ \phi \in [0, \pi[, \ \psi \in [0, 2\pi[.$$

(Zauważmy, że dla $\beta \in]0, 2\pi[$, $\cos\frac{\beta}{2}$ przyjmuje oba znaki, ale $\sin\frac{\beta}{2}$ jest zawsze dodatni). Połóżmy $\alpha = \phi + \psi$, $\gamma = \phi - \psi$. Dostajemy wtedy parametryzację przy pomocy kątów Eulera

$$a = \cos\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha+\gamma)}, \quad b = \sin\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha-\gamma)}, \ \beta \in]0, 2\pi[, \quad \alpha, \gamma \in [0, 2\pi[.$$

Czasami stosuje się inny zasięg kątów: $\beta \in]0, \pi]$, $\alpha \in [0, 4\pi[$, $\gamma \in [0, 2\pi[$. Gdy stosujemy kąty Eulera do parametryzacji $SO(3)$ używamy zasięgu $\beta \in]0, \pi]$, $\alpha, \gamma \in [0, 2\pi[$.

Element $SU(2)$ odpowiadający α, β, γ oznaczamy przez

$$\begin{aligned}
D(\alpha, \beta, \gamma) &:= \begin{bmatrix} \cos\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha+\gamma)} & \sin\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha-\gamma)} \\ -\sin\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(-\alpha+\gamma)} & \cos\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(-\alpha-\gamma)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\alpha} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & \sin\frac{\beta}{2} \\ -\sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma} \end{bmatrix} \\
&= D(\alpha, 0, 0)D(0, \beta, 0)D(0, 0, \gamma).
\end{aligned}$$

15.7 D-macierze Wignera

Niech $D^j(\alpha,\beta,\gamma)$ oznacza operator $D(\alpha,\beta,\gamma)$ w reprezentacji o spinie j:

$$D^j(\alpha,\beta,\gamma) \;=\; D^j(\alpha,0,0)D^j(0,\beta,0)D^j(0,0,\gamma).$$

Macierz $D^j(\alpha,\beta,\gamma)$ w bazie $|jm)$ nazywamy *D^j-macierzą Wignera.*

Macierz $D^j(\alpha,0,0)=D^j(0,0,\alpha)$ jest macierzą diagonalną, która na m-tym miejscu ma $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha m}$. Bardziej skomplikowana jest tzw. d^j-macierz Wignera

$$d^j(\beta)=D^j(0,\beta,0),$$

którą obliczymy poniżej. Wyrazimy ją najpierw w nieortogonalnej bazie $v^j_m=z_+^{j+m}z_-^{j-m}$:

$$\begin{aligned}
d^j(\beta)z_+^{j+m}z_-^{j-m} &= \Big(z_+\cos\frac{\beta}{2}+z_-\sin\frac{\beta}{2}\Big)^{j+m}\Big(-z_+\sin\frac{\beta}{2}+z_-\cos\frac{\beta}{2}\Big)^{j-m}\\
&= \sum_{p=0}^{j+m}\frac{(j+m)!}{(j+m-p)!p!}z_+^{j+m-p}\Big(\cos\frac{\beta}{2}\Big)^{j+m-p}z_-^p\Big(\sin\frac{\beta}{2}\Big)^p\\
&\quad\times\sum_{q=0}^{j-m}\frac{(j-m)!}{(j-m-q)!q!}z_+^q\Big(-\sin\frac{\beta}{2}\Big)^q z_-^{j-m-q}\Big(\cos\frac{\beta}{2}\Big)^{j-m-q}\\
&= \sum_{m'}\tilde{d}^j_{mm'}(\beta)z_+^{j+m'}z_-^{j-m'},
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\tilde{d}^j_{mm'}(\beta) &:= \sum_p\frac{(j+m)!(j-m)!}{p!(m'-m+p)!(j+m-p)!(j-m'-p)!}\\
&\quad\times(-1)^{m'-m-p}\Big(\cos\frac{\beta}{2}\Big)^{2j+m-m'+p}\Big(\sin\frac{\beta}{2}\Big)^{2j-m+m'-p},
\end{aligned}$$

i sumujemy po tych wskaźnikach, dla których argumenty silni w mianowniku są nieujemne. Zamieniając bazę v^j_m na ortonormalną bazę $|j,m)$

$$d^j_{mm'}(\beta)=\tilde{d}^j_{mm'}(\beta)\frac{\sqrt{(j+m')!}\sqrt{(j-m')!}}{\sqrt{(j+m)!}\sqrt{(j-m)!}}$$

dostajemy ostatecznie

$$\begin{aligned}
d^j_{mm'}(\beta) &:= \sum_p\frac{\sqrt{(j+m)!}\sqrt{(j-m)!}\sqrt{(j+m')!}\sqrt{(j-m')!}}{p!(m'-m+p)!(j+m-p)!(j-m'-p)!}\\
&\quad\times(-1)^{m'-m-p}\Big(\cos\frac{\beta}{2}\Big)^{2j+m-m'+p}\Big(\sin\frac{\beta}{2}\Big)^{2j-m+m'-p}.
\end{aligned}$$

Możemy wyrazić d-macierze Wignera przez wielomiany Jacobiego:

$$\begin{aligned}
& d^j_{mm'}(\beta) \\
= \;& (-1)^{m'-m}\frac{\sqrt{(j+m)!}\sqrt{(j-m)!}}{\sqrt{(j+m')!}\sqrt{(j-m')!}}\Big(\sin\frac{\beta}{2}\Big)^{-m+m'}\Big(\cos\frac{\beta}{2}\Big)^{-m-m'}P_{j+m}^{-m+m',-m-m'}(\cos\beta) \\
= \;& \frac{\sqrt{(j+m)!}\sqrt{(j-m)!}}{\sqrt{(j+m')!}\sqrt{(j-m')!}}\Big(\sin\frac{\beta}{2}\Big)^{m-m'}\Big(\cos\frac{\beta}{2}\Big)^{m+m'}P_{j-m}^{m-m',m+m'}(\cos\beta) \\
= \;& \frac{\sqrt{(j+m')!}\sqrt{(j-m')!}}{\sqrt{(j+m)!}\sqrt{(j-m)!}}\Big(\sin\frac{\beta}{2}\Big)^{m-m'}\Big(\cos\frac{\beta}{2}\Big)^{-m-m'}P_{j+m'}^{m-m',-m-m'}(\cos\beta) \\
= \;& (-1)^{m'-m}\frac{\sqrt{(j+m')!}\sqrt{(j-m')!}}{\sqrt{(j+m)!}\sqrt{(j-m)!}}\Big(\sin\frac{\beta}{2}\Big)^{-m+m'}\Big(\cos\frac{\beta}{2}\Big)^{m+m'}P_{j-m'}^{-m+m',m+m'}(\cos\beta).
\end{aligned}$$

Zauważmy, że we wszystkich przypadkach wielomiany Jacobiego są postaci $P_n^{\alpha,\beta}$, gdzie

$$2n+\alpha+\beta+1=2j+1.$$

15.8 Typ reprezentacji grupy $SL(2,\mathbb{C})$

Niech

$$\epsilon := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mamy $\epsilon^2 = -1\!\!1$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Zatem jeśli $X \in SL(2,\mathbb{C})$, to

$$\epsilon X \epsilon^{-1} = X^{\#(-1)},$$

zaś jeśli $A \in sl(2,\mathbb{C})$, to

$$\epsilon A \epsilon^{-1} = -A^{\#},$$

czyli reprezentacja fundamentalna $SL(2,\mathbb{C})$ jest równoważna swojej reprezentacji kontragradientnej. Zatem reprezentacja fundamentalna $SU(2)$ jest równoważna swojej zespolenie sprzężonej. Operator realizujący tę równoważność ma kwadrat $-1\!\!1$. Czyli reprezentacja fundamentalna $SU(2)$ jest typu kwaternionowego.

Latwo sprawdzić, że reprezentacje o spinie całkowitym są typu rzeczywistego, a o spinie połówkowym, typu kwaternionowego.

15.9 Miara Haara na $SU(2)$

$SU(2)$ jest 3-wymiarową sferą. Miara Haara jest standardową unormowaną miarą niezmienniczą na tej sferze. Jeśli używamy parametryzacji $\theta \in \mathbb{R}^3$, $|\theta| \in]0,2\pi[$, to jest ona równa

$$\frac{1}{\pi}\sin^2\frac{|\theta|}{2}\mathrm{d}|\theta|\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi},$$

gdzie $\frac{d\Omega}{4\pi}$ jest unormowaną miarą na sferze 2-wymiarowej

Jeśli używamy kątów Eulera $\alpha, \gamma \in [0, 2\pi[$, $\beta \in]0, 2\pi[$, to jest ona równa

$$\frac{d\alpha}{2\pi}\frac{d\gamma}{2\pi}\frac{|\sin\beta| d\beta}{4}.$$

Aby to zobaczyć, wystarczy policzyć wektory styczne

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha &= \frac{i}{2}\begin{bmatrix} e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} & e^{\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} \\ e^{\frac{i}{2}(-\alpha+\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} & -e^{\frac{i}{2}(-\alpha-\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} \end{bmatrix}, \\
\partial_\gamma &= \frac{i}{2}\begin{bmatrix} e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} \\ -e^{\frac{i}{2}(-\alpha+\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} & -e^{\frac{i}{2}(-\alpha-\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} \end{bmatrix}, \\
\partial_\beta &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} & e^{\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} \\ -e^{\frac{i}{2}(-\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{\frac{i}{2}(-\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Następnie liczymy wyznacznik macierzy Gramma

$$\det\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \cos\beta & 0 \\ \cos\beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\sin^2\beta.$$

dostając miarę $\frac{d\alpha d\gamma|\sin\beta| d\beta}{2\sqrt{2}}$, którą następnie normujemy.

15.10 Charaktery reprezentacji $SU(2)$

Klasy sprzężoności elementów $SU(2)$ są parametryzowane przez $|\theta| \in [0, 2\pi]$. A oto wzór, które pozwala wyrazić klasę sprzężoności w kątach Eulera:

$$\cos\frac{|\theta|}{2} = \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

$N = \frac{\sigma_3}{2}$ ma w l-tej repezentacji wartości własne $-l$, $-l+1$,... l. Dlatego $\frac{|\vec{\theta}|}{2}\sigma_3$ ma w l-tej reprezentacji wartości własne $-l|\theta|$, $(-l+1)|\theta|$,... $l|\theta|$. $e^{\frac{i}{2}\vec{\theta}\vec{\sigma}}$ jest sprzężone do $e^{i|\theta|\sigma_3}$. Zatem charakter $e^{\frac{i}{2}\vec{\theta}\vec{\sigma}}$ dla reprezentacji o spinie l jest równy

$$\chi_l(\theta) = e^{-il|\theta|} + e^{i(-l+1)|\theta|} + \cdots + e^{il|\theta|} = \frac{\sin\left((2l+1)\frac{|\theta|}{2}\right)}{\sin\frac{|\theta|}{2}}.$$

Rozważmy iloczyn tensorowy reprezentacji o spinie j_1 i j_2. Jej charakter jest równy

$$\begin{aligned}
\chi_{j_1}(\theta)\chi_{j_2}(\theta) &= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2} e^{i(m_1+m_2)|\theta|} \\
= \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}\sum_{M=-J}^{J} e^{iM|\theta|} &= \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}\chi_J(\theta).
\end{aligned}$$

Dlatego też mamy rozkład reprezentacji,

$$j_1 \otimes j_2 = \bigoplus_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} J.$$

15.11 Współczynniki Clebscha-Gordana i $3j$-symbole

W przestrzeni reprezentacji $j_1 \otimes j_2$ mamy bazę o.n.

$$|j_1 m_1)|j_2 m_2), \quad -j_1 \le m_1 \le j_1, \quad -j_2 \le m_2 \le j_2.$$

Przestrzeń ta rozkłada się na podprzestrzenie o spinie $|j_1 - j_2| \le J \le j_1 + j_2$. W każdej z nich mamy bazę o.n.

$$|(j_1 j_2)JM), \quad -J \le M \le J,$$

ze standardowym działaniem $su(2)$. Mamy rozkład

$$|(j_1 j_2)JM) = \sum_{m_1+m_2=M} |j_1 m_1)|j_2 m_2)(j_1 m_1 j_2 m_2|JM).$$

Wzór ten definiuje współczynniki $(j_1 m_1 j_2 m_2|JM)$ jednoznacznie z wyjątkiem czynnika fazowego, niezależnego dla każdej trójki j_1, j_2, J. Aby go ustalić żądamy aby

$$(j_1 j_1 j_2 J{-}j_1|JJ) > 0.$$

(Zauważmy, że $|J - j_1| \le j_2$).

$$(j_1 m_1 j_2 m_2|JM) = (JM|j_1 m_1 j_2 m_2)$$

nazywają się *współczynnikami Clebscha-Gordana*. Mamy

$$\begin{aligned} Q_J(j_1 \otimes j_2) \quad &= \sum_{M=m_1+m_2=m_1'+m_2'} (JM|j_1 m_1 j_2 m_2)|j_1 m_1)|j_2 m_2) \\ &\quad \times (j_1 m_1' j_2 m_2'|JM)(j_1' m_1'|(j_2 m_2'|. \end{aligned}$$

Oto wzór rekurencyjny:

$$\begin{aligned} &\sqrt{(J \mp M)(J \pm M + 1)}(j_1 m_1 j_2 m_2|JM \pm 1) \\ = \ &\sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)}(j_1 m_1 \mp 1 j_2 m_2|JM) \\ &+\sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)}(j_1 m_1 j_2 m_2 \mp 1|JM). \end{aligned}$$

Przestrzeń wektorów niezmienniczych w reprezentacji $j_1 \otimes j_2 \otimes j_3$ jest jednowymiarowa. Jeśli

$$\sum_{m_1+m_2+m_3=0} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} |j_1 m_1)|j_2 m_2)|j_3 m_3)$$

jest takim unormowanym wektorem, to współczynniki $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ są zdefiniowane jednoznacznie z dokładnością do czynnika fazowego. Aby go ustalić żądamy

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_1 & -j_2 & -j_1+j_2 \end{pmatrix} > 0.$$

Tak zdefiniowane współczynniki nazywają się $3j$*-symbolami Wignera.*

$$\begin{aligned} Q_\iota(j_1 \otimes j_2 \otimes j_3) &= \sum_{m_1+m_2+m_3=0} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} |j_1 m_1)|j_2 m_2)|j_3 m_3) \\ &\quad \times \sum_{m_1'+m_2'+m_3'=0} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1' & m_2' & m_3' \end{pmatrix} (j_1 m_1'|(j_2 m_2'|(j_3 m_3'|. \end{aligned}$$

Oto związek pomiędzy współczynnikami Clebscha-Gordana a $3j$-symbolami:

$$(j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 - m_3) = (-1)^{j_1-j_2-m_3} \sqrt{2j_3+1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}.$$

Związek ten wynika z (14.92) z wyjątkiem znaku $(-1)^{j_1-j_2}$.

Wyprowadźmy teraz wzór rekurencyjny.

$$\begin{aligned} 0 &= (J^\pm \otimes 1\!\!1 \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes J^\pm \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes 1\!\!1 \otimes J^\pm) \\ &\quad \times \sum_{m_1+m_2+m_3=0} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} |j_1 m_1)|j_2 m_2)|j_3 m_3) \\ &= \sum_{m_1+m_2+m_3=0} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \sqrt{(j_1 \mp m_1)(j_1 \pm m_1 + 1)} |j_1 m_1 + 1)|j_2 m_2)|j_3 m_3) + \ldots \\ &= \sum_{m_1+m_2+m_3=\pm 1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 \mp 1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)} |j_1 m_1)|j_2 m_2)|j_3 m_3) + \ldots \end{aligned}$$

Stąd dla każdej trójki m_1, m_2, m_3 spełniającej $m_1 + m_2 + m_3 = \pm 1$ mamy związek rekurencyjny

$$\begin{aligned} 0 &= \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 \mp 1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \\ &\quad + \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 \mp 1 & m_3 \end{pmatrix} \\ &\quad + \sqrt{(j_3 \mp m_3 + 1)(j_3 \pm m_3)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \mp 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ustalmy trójkę j_1, j_2, j_3. Nośnik $3j$-symbolu leży w przestrzeni $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ i jest zawarty w części wspólnej trzech pasów

$$j_1 \le m_1 \le j_1 \; j_2 \le m_2 \le j_2 \; j_3 \le m_3 \le j_3$$

przecinających się pod kątem $\frac{2\pi}{3}$. Warunek

$$j_1 \leq j_2 + j_3, \quad j_2 \leq j_3 + j_1, \quad j_3 \leq j_1 + j_2$$

oznacza, że to przecięcie ma sześć wierzchołków (być może pokrywających się) typu $(j_1, -j_2, -j_1 + j_2)$. Rozwiązywanie rekurencji można zacząć od brzegu, gdzie jest ona 2-elementowa i kontynuować ją do wewnątrz.

Zastosowanie wzoru (14.92) daje

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{16\pi^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\alpha \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\gamma \int_0^{2\pi} |\sin\beta| \mathrm{d}\beta \; D^{j_1}_{m_1 k_1}(\alpha,\beta,\gamma) D^{j_2}_{m_2 k_2}(\alpha,\beta,\gamma) D^{j_3}_{m_3,k_3}(\alpha,\beta,\gamma) \\
= &\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Możemy ograniczyć całkowanie względem β do $[0, \pi]$, zastępując $\frac{1}{16\pi^2}$ przez $\frac{1}{8\pi^2}$. Oto wniosek:

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}\Omega Y_{j_1,m_1}(\Omega) Y_{j_2,m_2}(\Omega) Y_{j_3,m_3}(\Omega) \\
= &\sqrt{\frac{(2j_1+1)(2j_2+1)(2j_3+3)}{4\pi}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Oto inne własności

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \mathrm{sgn}(\sigma)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_{\sigma(1)} & j_{\sigma(2)} & j_{\sigma(3)} \\ m_{\sigma(1)} & m_{\sigma(2)} & m_{\sigma(3)} \end{pmatrix}, \tag{15.100}$$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix}. \tag{15.101}$$

$$(2j+1)\sum_{m_1,m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j' \\ m_1 & m_2 & m' \end{pmatrix} = \delta_{jj'}\delta_{mm'}, \tag{15.102}$$

$$\sum_{j,m}(2j+1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1' & m_2' & m \end{pmatrix} = \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'}. \tag{15.103}$$

(15.102) wynika z (14.90). (15.103) jest szczególnym przypadkiem (14.92).

15.12 Iloczyn tensorowy z reprezentacją o spinie $\frac{1}{2}$

Szczególnie łatwy jest przypadek gdy jeden ze spinów jest równy $\frac{1}{2}$. Można wtedy ograniczyć się do dwuelementowych relacji rekurencyjnych:

$$\sqrt{2j+1}\begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ j-\frac{1}{2} & -j & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ j+\frac{1}{2} & -j & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0, \qquad j+\tfrac{1}{2}, -j, \tfrac{1}{2} \;;$$

$$\sqrt{j+m+1}\begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ -m+\frac{1}{2} & m-1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \sqrt{j+m}\begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ -m-\frac{1}{2} & m & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0, \qquad -m-\tfrac{1}{2}, m-1, \tfrac{1}{2} \;;$$

$$
\begin{pmatrix} j+\frac12 & j & \frac12 \\ -j-\frac12 & j & \frac12 \end{pmatrix} + \sqrt{2j+1}\begin{pmatrix} j+\frac12 & j & \frac12 \\ -j+\frac12 & j & -\frac12 \end{pmatrix} \quad = \quad 0, \qquad -j-\tfrac12, j, -\tfrac12 \ ;
$$

$$
\sqrt{j-m+1}\begin{pmatrix} j+\frac12 & j & \frac12 \\ -m-\frac12 & m+1 & -\frac12 \end{pmatrix} + \sqrt{j-m}\begin{pmatrix} j+\frac12 & j & \frac12 \\ -m+\frac12 & m & -\frac12 \end{pmatrix} \quad = \quad 0, \qquad -m-\tfrac12, m+1, -\tfrac12 \ ;
$$

Dostajemy stąd

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} j+\frac12 & j & \frac12 \\ -m+\frac12 & m & -\frac12 \end{pmatrix} &= \frac{(-1)^{j+m}\sqrt{j-m+1}}{\sqrt{(2j+1)(2j+2)}} \\
\begin{pmatrix} j+\frac12 & j & \frac12 \\ -m-\frac12 & m & \frac12 \end{pmatrix} &= \frac{(-1)^{-j-m+1}\sqrt{j+m+1}}{\sqrt{(2j+1)(2j+2)}}.
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=-j}^{j}\begin{pmatrix} j+\frac12 & j & \frac12 \\ -m+\frac12 & m & -\frac12 \end{pmatrix}^2 + \sum_{m=-j}^{j}\begin{pmatrix} j+\frac12 & j & \frac12 \\ -m-\frac12 & m & \frac12 \end{pmatrix}^2 \\
= &\sum_{m=-j}^{j}\frac{(j-m+1)+(j+m+1)}{(2j+1)(2j+2)} = 1.
\end{aligned}
$$

A oto odpowiadające im współczynniki Clebscha-Gordana:

$$
\begin{aligned}
\left(jm\frac12\frac12\middle|j+\frac12\ m+\frac12\right) &= \frac{\sqrt{j+m+1}}{\sqrt{2j+1}}, \\
\left(jm\frac12\ -\frac12\middle|j+\frac12\ m-\frac12\right) &= \frac{\sqrt{j-m+1}}{\sqrt{2j+1}}, \\
\left(jm\frac12\frac12\middle|j-\frac12\ m+\frac12\right) &= -\frac{\sqrt{j-m}}{\sqrt{2j+1}}, \\
\left(jm\frac12\ -\frac12\middle|j-\frac12\ m-\frac12\right) &= \frac{\sqrt{j+m}}{\sqrt{2j+1}}.
\end{aligned}
$$

16 Zastosowanie grupy $SU(3)$ w fizyce cząstek

16.1 Reprezentacje $su(3)$

Każda skończenie wymiarowa reprezentacja $su(3)$ rozszerza się do reprezentacji $sl(3,\mathbb{C})$ w tym samym wymiarze. I na odwrót, dla każdej skończenie wymiarowej reprezentacji $sl(3,\mathbb{C})$ można dobrać iloczyn skalarny tak, by jej ograniczenie do $su(3)$ było infinitezymalnie unitarne. Reprezentacja $su(3)$ jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy gdy taka jest reprezentacja $sl(3,\mathbb{C})$.

Wśród reprezentacji nieprzywiedlnych $sl(3,\mathbb{C})$ uprzywilejowane miejsce zajmuje reprezentacja *fundamentalna* na $\mathbb{C}^3$ i jej reprezentacja kontragradientna. Tę ostatnią będziemy nazywać reprezentacją *antyfundamentalną*. Będziemy pisać, że działa na $\mathbb{C}^{3\#}$. Dla $su(3)$ reprezenacja kontragrandientna jest tożsama z reprezentacją zespolenie sprzężoną. Wtedy też można pisać $\overline{\mathbb{C}}^3$ zamiast $\mathbb{C}^{3\#}$.

Wszystkie skończenie wymiarowe reprezentacje nieprzywiedlne $sl(3,\mathbb{C})$ można łatwo opisać. Tworzymy iloczyn tensorowy

$$\otimes_{\mathrm{s}}^{p}\mathbb{C}^3 \otimes \otimes_{\mathrm{s}}^{q}\mathbb{C}^{3\#}.$$

Elementami tej przestrzeni są tensory

$$\sum e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q} t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q},$$

które są w skrócie zapisywane jako $[t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}]$. Mamy zwężenie

$$[t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}] \mapsto [t^{i_1,\dots,i_{p-1},k}_{j_1,\dots,j_{q-1},k}],$$

gdzie stosujemy konwencję sumacyjną Einsteina. Operator zwężenia splata reprezentację na $\otimes_{\mathrm{s}}^{p}\mathbb{C}^3 \otimes \otimes_{\mathrm{s}}^{q}\mathbb{C}^{3\#}$ z reprezentacją na $\otimes_{\mathrm{s}}^{p-1}\mathbb{C}^3 \otimes \otimes_{\mathrm{s}}^{q-1}\mathbb{C}^{3\#}$. Jądro tego operatora jest niezmienniczą przestrzenią. Są to wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne dla $sl(3,\mathbb{C})$.

Oczywiście, $sl(3,\mathbb{C})$ można również reprezentować w antysymetrycznym iloczynie tensorowym. Nie prowadzi to jednak do dodatkowych reprezentacji. Zauważmy bowiem, że $\otimes_{\mathrm{a}}^{3}\mathbb{C}^3$ i $\otimes_{\mathrm{a}}^{3}\mathbb{C}^{\#3}$ są jednowymiarowe, zatem $sl(3,\mathbb{C})$ są na niej trywialne. Natomiast reprezentacja na $\otimes_{\mathrm{a}}^{2}\mathbb{C}^3$ jest równoważna reprezentacji antyfundamentalnej, zaś na $\otimes_{\mathrm{a}}^{2}\mathbb{C}^{3\#}$ —fundamentalnej.

16.2 Pierwiastki i algebra Cartana

$sl(3,\mathbb{C})$ jest oczywisty sposób zanurzona w $gl(3,\mathbb{C})$, która jest rozpięta przez operatory $A_{ij} := |i\rangle\langle j|$. $gl(3,\mathbb{C})$ posiada naturalny iloczyn skalarny

$$\langle A|B\rangle = \mathrm{Tr} A^{\#} B, \tag{16.104}$$

w którym A_{ij} stanowią bazę ortonormalną.

Zbiór elementów diagonalnych algebry $sl(3,\mathbb{C})$ nazywamy *algebrą Cartana* dla $sl(3,\mathbb{C})$ i oznaczamy przez $\mathfrak{h}$. Jest to maksymalna przemienna podalgebra w $sl(3,\mathbb{C})$. Jest ona rozpięta przez $H_{ij} = -H_{ji} = A_{ii} - A_{jj}$, $i \neq j$. Oczywiście,

$$H_{12} + H_{23} + H_{31} = 0.$$

$\mathfrak{h}$ ma 2 wymiary i jako jej bazę można wybrać H_{12}, H_{23}. Zauważmy, że $\langle H_{12}|H_{23}\rangle = -1$, $\langle H_{12}|H_{12}\rangle = \langle H_{23}|H_{23}\rangle = 2$. Dlatego też kąt między H_{12} i H_{23} wynosi $\frac{2\pi}{3}$.

16.3 Wagi reprezentacji

Załóżmy, że mamy reprezentację π algery Liego $su(3)$ (albo $sl(3,\mathbb{C})$) w skończenie wymiarowej przestrzeni $\mathcal{V}$. Dla $A \in sl(3,\mathbb{C})$ będziemy pisać A zamiast $\pi(A)$. Wektory w $\mathcal{V}$ które są wektorami własnymi dla algebry Cartana nazywamy *wektorami wagowymi* tej reprezentacji. Ich wartości własne zależą liniowo od $\mathfrak{h}$, można więc je interpretować jako elementy $\mathfrak{h}^{\#}$. Nazywamy je *wagami*. Oznaczmy przez $\mathcal{V}_\beta$ przestrzeń wektorów własnych dla wagi $\beta \in \mathfrak{h}^{\#}$. Mamy

$$Hv = \langle\beta|H\rangle v, \quad v \in \mathcal{V}_\beta, \quad H \in \mathfrak{h}.$$

Elementy A_{ij} dla $i \neq j$ należą do $sl(3, \mathbb{C})$ i nazywamy je *operatorami pierwiastkowymi.* Elementy A_{ij}, A_{ji} i H_{ij} spełniają relacje $sl(2, \mathbb{C})$

$$[A_{ij}, A_{ji}] = H_{ij},\ [H_{ij}, A_{ij}] = 2A_{ij},\ [H_{ij}, A_{ji}] = -2A_{ji}.$$

Zatem wartości własne H_{ij} muszą być liczbami całkowitymi.

Zbiór elementów $\mathfrak{h}^{\#}$, które na H_{ij}, H_{jk}, H_{ki} przyjmują wartości całkowite nazywa się *kratą wagową* $\mathcal{W}$. Wagi każdej reprezentacji muszą należeć do kraty wagowej.

16.4 Pierwiastki

Jedną z reprezentacji jest reprezentacja dołączona, czyli reprezentacja dla której przestrzenią jest samo $sl(3, \mathbb{C})$ zaś działaniem jest komutator. Dla reprezentacji dołączonej mamy wagę zerową, dla której wektorami wagowymi jest algebra Cartana. Operatory pierwiastkowe spełniają

$$[H, A_{ij}] = \langle \alpha_{ij} | H \rangle A_{ij}, \quad H \in \mathfrak{h},$$

gdzie α_{ij} jest funkcjonałem liniowym na $\mathfrak{h}$ zwanym *pierwiastkiem.* Innymi słowy, jest elementem przestrzeni sprzężonej do $\mathfrak{h}$, oznaczanej przez $\mathfrak{h}^{\#}$. Jeśli i, j, k są różne, można to zapisać jako

$$\langle \alpha_{ij} | H_{ij} \rangle = 2, \quad \langle \alpha_{ij} | H_{jk} \rangle = -1, \quad \langle \alpha_{ij} | H_{ki} \rangle = -1.$$

Identyfikując $\mathfrak{h}^{\#}$ z $\mathfrak{h}$ przy pomocy iloczynu skalarnego (16.104) dostajemy utożsamienie $\alpha_{ij} = H_{ij}$. Zbiór elementów $\mathfrak{h}^{\#}$ będących całkowitoliczbowymi kombinacjami liniowymi pierwiastków nazywamy *kratą pierwiastkową* $\mathcal{U}$. Oczywiście, $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$.

Niech $\beta \in \mathcal{W}$ będzie wagą pewnej reprezentacji. Mamy

$$A_{ij} \mathcal{V}_{\beta} \subset \mathcal{V}_{\beta + \alpha_{ij}}.$$

Oczywiście, elementy algebry Cartana zachowują $\mathcal{V}_{\beta}$. Dlatego, jeśli reprezentacja jest nieprzywiedlna i ma wagę $\beta \in \mathcal{W}$, to wszystkie inne wagi należą do $\beta + \mathcal{U}$.

16.5 Reprezentacja fundamentalna i antyfundamentalna

Wagi reprezentacji fundamentalnej L_i spełniają dla różnych i, j, k

$$\langle L_i | H_{ij} \rangle = 1,\ \langle L_i | H_{jk} \rangle = 0,\ \langle L_i | H_{ki} \rangle = -1.$$

Zatem

$$L_i = \frac{1}{3}(H_{ij} + H_{ik}), \quad H_{ij} = L_i - L_j.$$

Oczywiście, $L_1 + L_2 + L_3 = 0$. Jeśli wybierzemy L_1, L_2 jako bazę, to

$$\begin{aligned} H_{12} &= L_1 - L_2, \\ H_{23} &= L_2 - L_3 = L_1 + 2L_2, \\ H_{31} &= L_3 - L_1 = -2L_1 - L_2. \end{aligned}$$

Wektory L_i rozpinają kratę wagową. Razem z wektorami $-L_i$ leżą na wierzchołkach sześciokąta foremnego:

$$\begin{array}{ccccc} & & -L_3 & & \\ L_2 & & & & L_1 \\ -L_1 & & & & -L_2 \\ & & L_3 & & \end{array}$$

16.6 Trialność

Krata $\mathcal{W}$ dzieli się na trzy podkraty:

$$\mathcal{W}_k \quad := \quad \{n_1 L_1 + n_2 L_2 \ : \ n_1 + n_2 \in 3\mathbb{Z} + k\}.$$

Równoważnie,

$$\mathcal{W}_0 = \mathcal{U}, \quad \mathcal{W}_1 = L_1 + \mathcal{U}, \quad \mathcal{W}_2 = 2L_1 + \mathcal{U}.$$

$k \in \mathbb{Z}_3$ nazywa się *trialnością* kraty. Wagi reprezentacji typu (p, q) leżą na kracie $\mathcal{W}_{p-q}$.

$SU(3)$ ma centrum $\{e^{i\frac{2\pi k}{3}} \mathbb{1} \ : \ k = 0, 1, 2\} \simeq \mathbb{Z}_3$. $\mathbb{Z}_3$ ma 3 reprezentacje nieprzywiedlne, też numerowane przez $\mathbb{Z}_3$. Trialność danej reprezentacji odpowiada reprezentacji centrum.

16.7 Pierwiastki ujemne i dodatnie

Wśród operatorów pierwiastkowych wyróżniamy pierwiastki ujemne:

$$A_{12}, \ A_{13}, \ A_{23}$$

i pierwiastki dodatnie:

$$A_{21}, \ A_{31}, \ A_{32}.$$

Wektor najwyższej wagi to taki, który jest zabijany przez pierwiastki ujemne. Każda reprezentacja nieprzywiedlna posiada dokładnie jeden (z dokładnością do czynnika) wektor najwyższej wagi Ψ. Wtedy każdy wektor jest kombinacją liniową wektorów postaci $B_1 \cdots B_n \Psi$, gdzie $B_1, \ldots$ są pierwiastkami dodatnimi.

Niech e_1, e_2, e_3 będzie bazą $\mathbb{C}^3$ a e^1, e^2, e^3 bazą dualną w $\mathbb{C}^{\#3}$. Reprezentacja nieprzywiedlna na $\otimes_s^p \mathbb{C}^3 \otimes \otimes_s^q \mathbb{C}^{3\#}$ ma wektor najwyższej wagi $\otimes^p e_1 \otimes \otimes^q e^3$ z wagą $pL_1 - qL_3 = (p+q)L_1 + qL_2$.

16.8 Diagramy wagowe przykładowych reprezentacji

$\mathbb{C}^3$: wagi $\{L_i\}$, najwyższa waga L_1

$$\begin{array}{ccc} 1 & & \underline{1} \\ & 1 & \end{array}$$

$\otimes_s^2 \mathbb{C}^3$: wagi $\{L_i + L_j\}$, najwyższa waga $2L_1$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 1 & & \underline{1} \\ & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

$\otimes_{\mathrm{s}}^3\mathbb{C}^3$: wagi $\{L_i + L_j + L_k\}$, najwyższa waga $3L_1$

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & 1 & & 1 & & \underline{1} \\
 & 1 & & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & &
\end{array}$$

$\mathbb{C}^{3\#}$: wagi $\{-L_i\}$, najwyższa waga $-L_3$

$$\begin{array}{ccc}
 & \underline{1} & \\
1 & & 1
\end{array}$$

$\otimes_{\mathrm{s}}^2\mathbb{C}^{3\#}$: wagi $\{-L_i - L_j\}$, najwyższa waga $-2L_3$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \underline{1} & & \\
 & 1 & & 1 & \\
1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

$\otimes_{\mathrm{s}}^3\mathbb{C}^{3\#}$: wagi $\{-L_i - L_j - L_k\}$, najwyższa waga $-3L_3$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \underline{1} & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

reprezentacja dołączona, działa w $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^{3\#}$, wagi $\{L_i - L_j,\ i \neq j;\ \ 2 \times 0\}$, najwyższa waga $L_1 - L_3$

$$\begin{array}{ccccc}
 & 1 & & \underline{1} & \\
1 & & 2 & & 1 \\
 & 1 & & 1 &
\end{array}$$

reprezentacja w $\otimes_{\mathrm{s}}^2\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^{3\#}$, wagi $\{2L_i - L_j,\ i \neq j;\ -2L_i;\ 2 \times L_i\}$ najwyższa waga $2L_1 - L_3$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & & 1 & & \underline{1} & \\
1 & & 2 & & 2 & & 1 \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & & 1 & & 1 & &
\end{array}$$

Zbiór wag reprezentacji wraz z krotnościami musi spełniać następujące własności:

(1) Jest symetryczny względem odbicia w każdej z osi zadanej przez L_k.

(2) Po przecięciu dowolną prostą prostopałą do L_k dostajemy krotności pewnej reprezentacji $SU(2)$.

(3) Jeśli reprezentacja jest nieprzywiedlna, to jej wagi znajdują się w jednej z podkrat $\mathcal{W}_0$, $\mathcal{W}_1$ lub $\mathcal{W}_2$.

(1) wynika z tego, że $B \mapsto W_{ij} A W_{ij}^{-1}$ jest izomorfizmem algebry $sl(3,\mathbb{C})$, gdzie

$$W_{ij} = W_{ij}^{-1} := A_{kk} + A_{ij} + A_{ji}.$$

Ten izomorfizm zamienia H_{ij} na $-H_{ji}$ i H_{ik} na H_{jk}.

(2) Wynika z tego, że jeśli $\mathcal{H}_\beta$ jest przestrzenią wagową, to $\oplus_n \mathcal{H}_{\beta+n\alpha_{ij}}$ rozpinają reprezentację $sl(2,\mathbb{C})$.

Mamy następującą regułę dla krotności wag (wymiaru przestrzeni wagowych). Wagi na obrzeżach mają krotność 1. W każdej następnej warstwie zwiększają się o 1, chyba że dochodzimy do warstwy w formie trójkąta, i wtedy nie zwiększamy krotności. W szczególności, dla reprezentacji w $\otimes_{\mathrm{s}}^n \mathbb{C}^3$ i $\otimes_{\mathrm{s}}^n \mathbb{C}^{3\#}$, które mają obrzeża trójkątne, wszystkie krotności są równe 1.

16.9 Symetrie w mechanice kwantowej

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta a $G \ni g \mapsto U(g) \in U(\mathcal{H})$ reprezentacją unitarną grupy.

Najczęstsze zastosowanie teorii grup to *symetrie przybliżone*. Załóżmy, że $A_1, \dots, A_n$ jest układem komutujących samosprzężonych obserwabli, które powoli zmieniają się z czasem. Na przykład, jeśli $H = H_0 + V$ jest hamiltonianem i V jest w odpowiednim sensie małe, to jedną z tych obserwabli może być H_0. Załóżmy, że $U(g)$, $g \in G$, komutują z $A_1, \dots, A_n$. Wtedy przestrzenie własne dla $A_1, \dots, A_n$ są niezmiennicze dla G.

Inne zastosowanie to *grupy cechowania*. Oznacza to, że zarówno hamiltonian H jak i wszystkie obserwable fizyczne komutują z $U(g)$, $g \in G$.

16.10 Konwencje

Reprezentacje unitarne $u(1)$ są jednowymiarowe i zadane są przez $q \in \mathbb{R}$, zwany ładunkiem

$$u(1) \ni \theta \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta q}.$$

Przy iloczynie tensorowym ładunki się dodają.

Reprezentacje nieprzywiedlne $su(n)$, $so(n)$ są z reguły oznaczane liczbami odpowiadającymi ich wymiarowi. Dla reprezentacji sprzężonej dopisujemy kreskę. Tak więc reprezentacja fundamentalna $su(n)$ jest oznaczana przez n a antyfundamentalna przez $\overline{n}$.

16.11 Zachowane ładunki

Każda cząstka pozostawiona samej sobie w końcu rozpadnie się na fotony, neutrina, elektrony, protony i ich antycząstki.

Następujące wielkości nie zależą od kanałów rozpadu: ładunek elektryczny

$$Q := \#p + \#\overline{e} - \#\overline{p} - \#e,$$

i ładunek barionowy

$$B := \#p - \#\overline{p}.$$

Są to liczby, które są zawsze zachowane.

16.12 Izospin

Proton p i neutron n mają podobne masy i własności nie związane z oddziaływaniem elektromagnetycznym. Podobnie mezony π^+, π^0, π^-.

Heisenberg zaproponował, że hamiltonian ma rozkład

$$H = H_{\text{strong}} + H_{\text{em}},$$

gdzie H_{strong} to hamiltonian oddziaływań silnych niezmienniczy względem grupy $SU(2)$, w odróżnieniu od hamiltonianu elektromagnetycznego H_{em}. Oznaczmy przez I_1, I_2, I_3 generatory $su(2)$, zwane izospinem. Oddziaływanie elektromagnetyczne komutuje jedynie z I_3.

Proton p i neutron n byłyby wektorami własnymi I_3 należącymi do reprezentacji fundamentalnej $SU(2)$. Przyjmujemy, że proton i neutron należą do reprezentacji o izospinie $\frac{1}{2}$:

$$I_3 p = \frac{1}{2}p, \quad I_3 n = -\frac{1}{2}n.$$

Podobnie, mezony π należą do reprezentacji o izospinie 1:

$$I_3\pi^+ = \pi^+, \quad I_3\pi^0 = 0, \quad I_3\pi^- = -\pi^-.$$

Ogólniej, zaobserwowano, że możemy pogrupować cząstki w multiplety izospinowe. W obrębie tego samego multipletu izospinowego cząstki są bardzo podobne pod względem masy i innych własności, natomiast mają inny ładunek elektryczny i I_3.

Zauważono, że oddziaływania między cząstkami można podzielić na silne, które następują bardzo szybko, słabe, które są znacznie wolniejsze i elektromagnetyczne. Izospin zachowywany jest w oddziaływaniach silnych, ale nie słabych, np:

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu, \quad \mu^+ \to e^+ + \nu_e + \overline{\nu}_\mu.$$

Biorąc pod uwagę oddziaływania silne każdej cząstce można przypisać wartość I_3.

Zwróćmy uwagę na to, że dla multipletu nukleonowego i pionowego zachodzi związek

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}B. \tag{16.105}$$

16.13 Dziwność

Zauważono, że istnieje jeszcze jedna liczba, która jest zachowana w reakcjach silnych, a w reakcjach słabych zmienia się o ± 1. Nazwano ją dziwnością i oznaczono przez S. Przyjęto, że "standardowe cząstki" takie jak p, n, π, e mają dziwność zero.

Okazało się, że cząstki oddziałujące silnie można pogrupować w większe multiplety, w obrębie których cząstki róznią się o wartość S i I_3. W obrębie multipletów mamy stosunkowo podobne masy, ten sam spin i tę samą liczbę barionową. Okazało się, że multiplety te mają symetryczną postać, jeśli za współrzędne wybierze się I_3 i hiperładunek

$$Y = B + S.$$

Znaleziono też związek zwany formułą Gell-Manna – Nishijimy uogólniający (16.105):

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y.$$

Hadrony z zerowym ładunkiem barionowym nazywane są mezonami. Na poniższych diagramach wagowych na osi pionowej odkładamy Y, na osi poziomej I_3.

Najważniejsze multiplety mezonów ($B = 0$):

Nonet pseudoskalarny składa się z oktetu

$$\begin{array}{ccccc} & K^0 & & K^+ & \\ \pi^- & & \pi^0, \eta & & \pi^+ \\ & K^- & & K^{\overline{0}} & \end{array}$$

i singletu η'.

Nonet pseudowektorowy składa się z oktetu

$$\begin{array}{ccccc} & K^{*0} & & K^{*+} & \\ \rho^- & & \rho^0, \omega & & \rho^+ \\ & K^{*-} & & K^{*\overline{0}} & \end{array}$$

i singletu ω'.

Oto podstawowe multiplety barionów ($B = 1$):

Oktet ze spinem $\frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{ccccc} & n & & p & \\ \Sigma^- & & \Sigma^0, \Lambda^0 & & \Sigma^+ \\ & \Xi^- & & \Xi^0 & \end{array}$$

Dekuplet ze spinem $\frac{3}{2}$:

$$\begin{array}{ccccccc} \Delta^- & & \Delta^0 & & \Delta^+ & & \Delta^{++} \\ & \Sigma^{*-} & & \Sigma^{*0} & & \Sigma^{*+} & \\ & & \Xi^{*-} & & \Xi^{*0} & & \\ & & & \Omega^- & & & \end{array}$$

16.14 Kwarki

Wprowadźmy 3 kwarki: u, d i s. Traktujemy je jako wektory wagowe dla fundamentalnej reprezentacji $SU(3)$:

$$\begin{array}{ccc} d & & u \\ & & \\ & s & \end{array}$$

Mamy też antykwarki odpowiadające reprezentacji antyfundamentalnej:

$$\begin{array}{ccc} & \bar{s} & \\ & & \\ \bar{u} & & \bar{d} \end{array}$$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{3}(2\#u - \#d - \#s), \\ B &= \frac{1}{3}(\#u + \#d + \#s), \\ S &= -\#s, \\ Y &= \frac{1}{3}(\#u + \#d - 2\#s), \\ I_3 &= \frac{1}{2}(\#u - \#d). \end{aligned}$$

Rozważmy grupę $SU(3)_{\text{fl}}$ opisującą flavory u, d, s, grupę $SU(2)_{\text{spin}}$ opisującą spin i $SU(3)_{\text{col}}$ odpowiedzialna za kolor. Kwarki można traktować jako elementy $\mathbb{C}^3_{\text{fl}} \otimes \mathbb{C}^2_{\text{spin}} \otimes \mathbb{C}^3_{\text{col}}$, zaś antykwarki jako elementy $\overline{\mathbb{C}}^3_{\text{fl}} \otimes \overline{\mathbb{C}}^2_{\text{spin}} \otimes \overline{\mathbb{C}}^3_{\text{col}}$. Działa na nich grupa $SU(3)_{\text{fl}} \times SU(2)_{\text{spin}} \times SU(3)_{\text{col}}$

Kwarki są fermionami, zatem stany są opisywane przez elementy

$$\otimes^p_{\text{a}} \Big(\mathbb{C}^3_{\text{fl}} \otimes \mathbb{C}^2_{\text{spin}} \otimes \mathbb{C}^3_{\text{col}}\Big) \otimes \otimes^q_{\text{a}} \Big(\overline{\mathbb{C}}^3_{\text{fl}} \otimes \overline{\mathbb{C}}^2_{\text{spin}} \otimes \overline{\mathbb{C}}^3_{\text{col}}\Big). \tag{16.106}$$

Hipoteza *uwięzienia* mówi, że w fizyce realizowane są tylko stany "bezbarwne", czyli takie na które grupa kolorowa działa trywialnie. Jeśli zanurzymy (16.106) w przestrzeni

$$\otimes^p \Big(\mathbb{C}^3_{\text{fl}} \otimes \mathbb{C}^2_{\text{spin}}\Big) \otimes \otimes^q \Big(\overline{\mathbb{C}}^3_{\text{fl}} \otimes \overline{\mathbb{C}}^2_{\text{spin}}\Big) \otimes \Big(\otimes^p \mathbb{C}^3_{\text{col}} \otimes \otimes^q \overline{\mathbb{C}}^3_{\text{col}}\Big), \tag{16.107}$$

to będą one postaci $\Psi \otimes \Phi$, gdzie Φ, odpowiadające "kolorowym" stopniom swobody, jest singletem względem $SU(3)$.

Wśród $\otimes^p \mathbb{C}^3_{\text{col}} \otimes \otimes^q \overline{\mathbb{C}}^3_{\text{col}}$ reprezentacje singletowe z najmniejszymi (p, q) znajdziemy dla $(1 \otimes 1)$ (mezony), $(3, 0)$ (bariony) i $(0, 3)$ (antybariony).

W szczególności, mezony są elementami

$$\begin{aligned} & \mathbb{C}^3_{\text{fl}} \otimes \mathbb{C}^2_{\text{spin}} \otimes \mathbb{C}^3_{\text{col}} \otimes \overline{\mathbb{C}}^3_{\text{fl}} \otimes \overline{\mathbb{C}}^2_{\text{spin}} \otimes \overline{\mathbb{C}}^3_{\text{col}} \\ = \; & \Big(\mathbb{C}^3_{\text{fl}} \otimes \mathbb{C}^2_{\text{spin}} \otimes \overline{\mathbb{C}}^3_{\text{fl}} \otimes \overline{\mathbb{C}}^2_{\text{spin}}\Big) \otimes \Big(\mathbb{C}^3_{\text{col}} \otimes \overline{\mathbb{C}}^3_{\text{col}}\Big). \end{aligned}$$

Warunek bezbarwności daje

$$\Psi \otimes \frac{1}{\sqrt{3}}(|1,\overline{1}\rangle + |2,\overline{2}\rangle + |2,\overline{2}\rangle),$$

gdzie 1,2,3 odpowiada 3 kolorom i

$$\Psi \in \mathbb{C}^3_{\text{fl}} \otimes \mathbb{C}^2_{\text{spin}} \otimes \overline{\mathbb{C}}^3_{\text{fl}} \otimes \overline{\mathbb{C}}^2_{\text{spin}} \simeq (\mathbb{C}^3_{\text{fl}} \otimes \overline{\mathbb{C}}^3_{\text{fl}}) \otimes (\mathbb{C}^2_{\text{spin}} \otimes \overline{\mathbb{C}}^2_{\text{spin}}).$$

Dla reprezentacji $SU(3)_{\text{fl}}$ mamy $3\otimes\overline{3} = 8+1$. Dla reprezentacji $SU(2)_{\text{spin}}$ mamy $2\otimes 2 = 3+1$, co daje spin 0 i 1. Zatem dostajemy oba nonety mezonów.

Oto "zawartość kwarkowa" nonetów mezonowych:

$$\begin{array}{ccccc}
 & d\overline{s} & & u\overline{s} & \\
d\overline{u} & & d\overline{d}, u\overline{u}, s\overline{s} & & u\overline{d} \\
 & s\overline{u} & & s\overline{d} &
\end{array}$$

Mezony o zerowym ładunku różnią się kwarkami:

$$\begin{aligned}
\pi^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(d\overline{d} - u\overline{u}),\\
\eta &= \frac{1}{\sqrt{6}}(2s\overline{s} - d\overline{d} - u\overline{u}),\\
\eta' &= \frac{1}{\sqrt{3}}(s\overline{s} + d\overline{d} + u\overline{u}).
\end{aligned}$$

Bariony są elementami

$$\begin{aligned}
& \otimes^3_{\text{a}}(\mathbb{C}^3_{\text{fl}} \otimes \mathbb{C}^2_{\text{spin}} \otimes \mathbb{C}^3_{\text{col}})\\
\subset\ & \otimes^3\Big(\mathbb{C}^3_{\text{fl}} \otimes \mathbb{C}^2_{\text{spin}}\Big) \otimes \otimes^3\mathbb{C}^3_{\text{col}}.
\end{aligned}$$

Warunek bezbarwności daje

$$\Psi \otimes \frac{1}{\sqrt{3!}}\Big(|1,2,3\rangle + |2,3,1\rangle + |3,1,2\rangle - |1,3,2\rangle - |3,2,1\rangle - |1,3,2\rangle\Big).$$

Kolorowa część wektora jest antysymetryczna. Zatem Ψ musi być elementem $\otimes^3_{\text{s}}(\mathbb{C}^3_{\text{fl}} \otimes \mathbb{C}^2_{\text{spin}})$, która ma wymiar $\frac{6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 56$. Ze względu na działanie grupy $SU(3)_{\text{fl}} \times SU(2)_{\text{spin}}$, na pewno w $\otimes^3_{\text{s}}(\mathbb{C}^3_{\text{fl}} \otimes \mathbb{C}^2_{\text{spin}})$ znajdziemy reprezentację $\otimes^3_{\text{s}}\mathbb{C}^3_{\text{fl}} \otimes \otimes^3_s\mathbb{C}^2_{\text{spin}}$. Ma ona wymiar 10×4. Zatem została reprezentacja $56-40 = 16$-wymiarowa. Odpowiada ona reprezentacji dołączonej razy $\mathbb{C}^2$. Czyli mamy rozkład

$$\mathbb{C}^{10} \otimes \mathbb{C}^4 \oplus \mathbb{C}^8 \otimes \mathbb{C}^2,$$

co odpowiada dekupletowi (reprezentacji $\otimes^3_{\text{s}}\mathbb{C}^3$) o spinie $\frac{3}{2}$ i oktetowi (reprezentacji dołączonej) o spinie $\frac{1}{2}$.

A oto “zawartość kwarkowa” multipletów barionowych:

$$\begin{array}{ccccccc} ddd & & ddu & & duu & & uuu \\ & dds & & dus & & uus & \\ & & dss & & uss & & \\ & & & sss & & & \end{array}$$

A oto stany spinowe barionów leżących w środku diagramu, gdzie występuje największa degeneracja:

$$\begin{array}{ll} \Sigma^{*0} & d\uparrow u\uparrow s\uparrow, \\ & \frac{1}{\sqrt{3}}(d\uparrow u\uparrow s\downarrow + d\uparrow u\downarrow s\uparrow + d\downarrow u\uparrow s\uparrow), \\ & \frac{1}{\sqrt{3}}(d\downarrow u\downarrow s\uparrow + d\uparrow u\downarrow s\downarrow + d\downarrow u\uparrow s\downarrow), \\ & d\downarrow u\downarrow s\downarrow; \\ \Sigma^0 & \frac{1}{\sqrt{6}}(2d\uparrow u\uparrow s\downarrow - d\uparrow u\downarrow s\uparrow - d\downarrow u\uparrow s\uparrow), \\ & \frac{1}{\sqrt{6}}(2d\downarrow u\downarrow s\uparrow - d\uparrow u\downarrow s\downarrow - d\downarrow u\uparrow s\downarrow); \\ \Lambda^0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(d\uparrow u\downarrow s\uparrow - d\downarrow u\uparrow s\uparrow), \\ & \frac{1}{\sqrt{2}}(d\uparrow u\downarrow s\downarrow - d\downarrow u\uparrow s\downarrow). \end{array}$$

(Σ^{*0} ma spin $\frac{3}{2}$, zaś Σ^0 i Λ^0 ma spin $\frac{1}{2}$. Na poszczególnych linijkach są kolejne wartości rzutu spinu). Ażeby dostać stany np. Σ^{*-} i Σ^- należy zamienić wszędzie u na d i odrzucić Λ^0.

Wszystkie fizycznie realizowane reprezentacje $SU(3)_{\mathrm{fl}}$ mają trialność 0 – to wynika z “bezbarwności”.

17 Zastosowanie teorii grup w modelu standardowym i modelach wielkiej unifikacji

17.1 Model standardowy

Model standardowy oparty jest na grupie cechowania $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

Oznaczmy (samosprzężone) generatory $su(2)$ przez T_1, T_2, T_3. Stanowią one generatory tzw. słabego izospinu. Samosprzężony generator $u(1)$ oznaczamy przez Y. Jest to tzw. słaby hiperładunek, nie mylić z hiperładunkiem, który ma to samo oznaczenie.

Podstawowym założeniem modelu Weinberga-Salama (który jest częścią modelu standardowego opisującą oddziaływania słabe i elktormagnetyczne) jest to, że ładunek elektryczny Q

pochodzi częściowo z $SU(2)$ a częściowo z $U(1)$. Wyrazić to można wzorem

$$Q = T_3 + Y. \tag{17.108}$$

(Stosujemy konwencję z podręcznika Srednicki'ego. Często zastępuje się Y przez $2Y$, tak by był spełniony wzór $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$, analogiczny do wzoru Gell-Manna – Nishijimy).

Poza bozonami cechowania – odpowiadającymi algebrze Liego $su(3) \oplus su(2) \oplus u(1)$ – w lagranżjanie występują naładowane cząstki odpowiadające różnym nieprzywiedlnym reprezentacjom (multipletom) grupy $SU(3) \oplus SU(2) \oplus U(1)$. Każda z nich posiada antycząstki posiadające odwrotną chiralność i ładunki. Można je podzielić następująco:

(1) Multiplet (albo więcej multipletów) zespolonych skalarnych bozonów (Higgsa) służących do złamania symetrii cechowania $SU(2) \times U(1)$.

(2) Kilka multipletów weylowskich (chiralnych) fermionów. Każdy multiplet występuje w 3 generacjach. Multiplety fermionów można podzielić na dwie rodziny

  (i) Leptony, które nie uczestniczą w oddziaływaniach silnych, czyli są singletami ze względu na $SU(3)$.

  (ii) Kwarki, które transformują się nietrywialnie względem $SU(3)$.

(Multiplet – nieprzywiedlna, na ogół wielowymiarowa reprezentacja grupy cechowania).

Istnieją dwie wersje modelu standardowego: pierwotna wersja, którą oznaczamy SM, nie zawierała neutrin prawochiralnych. W nowszej wersji, oznaczanej przez νSM są dodatkowo neutrina prawochiralne.

Będziemy stosowali nazewnictwo odnoszące się do pierwszej generacji.

17.2 Leptony

Leptony można podzielić na elektrony i neutrina. Elektrony są zarówno lewo- i prawochiralne. Mają tę samą masę. Z punktu widzenia oddziaływań e.m. i silnych można traktować je jako fermiony dirakowskie, czyli para fermion lewochiralny i prawochiralny. Oznaczane są przez $e = (e_\mathrm{L}, e_\mathrm{R})$, Mają one $Q = -1$. Antycząstka dla elektronu nazywa się pozytonem i jest oznaczana przez $\bar{e}$.

Neutrina mają $Q = 0$. Neutrina elektronowe, oznaczane ν_e lub $\nu_{e,\mathrm{L}}$, w SM są lewochiralne i mają masę zerową,

$(e_\mathrm{L}, \nu_{e,\mathrm{L}})$ tworzą dublet ze względu na $SU(2)$. Mamy

$$T_3 e_\mathrm{L} = -\frac{1}{2} e_\mathrm{L}, \quad T_3 \nu_{e,\mathrm{L}} = \frac{1}{2} \nu_{e,\mathrm{L}}.$$

Korzystając z (17.108), dostajemy stąd

$$Y e_\mathrm{L} = -\frac{1}{2} e_\mathrm{L}, \quad Y \nu_{e,\mathrm{L}} = -\frac{1}{2} \nu_{e,\mathrm{L}}.$$

e_R jest singletem dla $SU(2)$. Dlatego też (17.108) implikuje

$$Y e_\mathrm{R} = -e_\mathrm{R}.$$

Przy zestawianiu multipletów, wygodnie jest odwoływać się wyłącznie do multipletów lewochiralnych. Dlatego zamiast elektronu prawochiralnego bierzemy pod uwagę pozyton lewochiralny. Ma on $Q = 1$ i $T_3 = 0$. Oto jego hiperładunek:

$$Y\overline{e}_{\mathrm{R}} = \overline{e}_{\mathrm{R}}.$$

W νSM wprowadza się dodatkowe neutrino prawochiralne $\nu_{e,\mathrm{R}}$, które transformują się trywialnie ze względu na grupę cechowania. Przy zestawianiu multipletów bierzemy pod uwagę jego antycząstkę $\overline{\nu}_{e,\mathrm{R}}$, która jest lewochiralna.

Reasumując, mamy następujące multiplety lewochiralnych leptonów:

$$\begin{array}{ccc} L & := (e_{\mathrm{L}}, \nu_{e,\mathrm{L}}) & (1, 2, -\frac{1}{2}), \\ \overline{E} & := \overline{e}_{\mathrm{R}} & (1, 1, 1), \\ \overline{N} & := \overline{\nu}_{e,\mathrm{R}} & (1, 1, 0). \end{array}$$

17.3 Skalar Higgsa

Aby zbudować niezmiennicze człony masowe w lagranżjanie potrzebujemy dodatkowego skalara, ϕ, który jest singletem dla $SU(3)$, dubletem dla $SU(2)$ i ma $Q = 0$. Zatem $Y = -\frac{1}{2}$. Czyli jego reprezentacja to

$$(1, 2, -\frac{1}{2}).$$

17.4 Kwarki

Mamy dwa kwarki, u i d. Na przykład, proton i neutron są zbudowane następująco:

$$p = uud, \quad n = udd.$$

Oto ich ładunek elektryczny:

$$Qu = \frac{2}{3}u, \quad Qd = -\frac{1}{3}d.$$

Są one trypletami ze względu na $SU(3)$ – transformują się wzgl. reprezentacji fundamentalnej.

Mamy też antykwarki:

$$Q\overline{u} = -\frac{2}{3}\overline{u}, \quad Q\overline{d} = \frac{1}{3}\overline{d}.$$

Transformują się wzgl. reprezentacji antyfundamentalnej.

Lewochiralne kwarki są dubletem ze wzgl. na $SU(2)$:

$$T_3 u_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}u_{\mathrm{L}}, \quad T_3 d_{\mathrm{L}} = -\frac{1}{2}d_{\mathrm{L}}.$$

Stąd

$$Y u_{\mathrm{L}} = \frac{1}{6}u_{\mathrm{L}}, \quad Y d_{\mathrm{L}} = \frac{1}{6}d_{\mathrm{L}}.$$

Prawochiralne kwarki są singletami dla $SU(2)$. Dla nich

$$T_3 u_{\mathrm{R}} = 0, \quad T_3 d_{\mathrm{R}} = 0.$$

Stąd

$$Y u_{\mathrm{R}} = \frac{2}{3} u_{\mathrm{R}}, \quad Y d_{\mathrm{R}} = -\frac{1}{3} d_{\mathrm{R}}.$$

Reasumując, mamy następujące multiplety lewochiralnych kwarków:

$$\begin{aligned} Q = (u_{\mathrm{L}}, d_{\mathrm{L}}) &\qquad (3, 2, \frac{1}{6}), \\ \overline{U} = \overline{u}_{\mathrm{R}} &\qquad (\overline{3}, 1, -\frac{2}{3}), \\ \overline{D} = \overline{d}_{\mathrm{R}} &\qquad (\overline{3}, 1, \frac{1}{3}). \end{aligned}$$

17.5 Lagranżjan modelu standardowego

Lagranżjan modelu standardowego jest singletem ze względu na grupę cechowania. Można wyróżnić w nim następujące człony:

(1) Człon kinetyczny dla pól cechowania.

(2) Człony kinetyczne dla fermionów.

(3) Człon kinetyczny dla bozonów skalarnych.

(4) Potencjał dla bozonów skalarnych ("kapelusz meksykański"?) – ze względu na renormalizowalność powinien to być wielomian maksymalnie 4 stopnia. Zakładamy, że jest niezmienniczy przy zamianie ϕ na $-\phi$.

(5) Wyrazy masowe – wyrazy 2-liniowe w fermionach. Muszą być singletami ze względu na grupę cechowania, i dlatego z reguły mnożone są przez bozon skalarny.

Niech ψ, ψ' transformują się zgodnie z reprezentacją fundamentalną SU(3). Wtedy niezmiennicze rzeczywiste dwuliniowe wyrażenia zbudowane z ψ, ψ' są postaci

$$\overline{\psi}^{\alpha} \psi'_{\alpha}$$

i wyrażenia sprzężone.

Niech ψ, ψ' transformują się zgodnie z reprezentacją fundamentalną SU(2). Wtedy niezmiennicze dwuliniowe wyrażenia zbudowane z ψ, ψ' są postaci

$$\begin{aligned} &\overline{\psi}^{i} \psi'_{i}, \\ &\epsilon^{ij} \psi_i \psi'_j, \end{aligned}$$

i wyrażenia sprzężone.

Jeśli mamy $\psi_1, \ldots, \psi_n$ mające ładunki $y_1, \ldots, y_n$ ze względu na $U(1)$, to $\psi_1 \cdots \psi_n$ jest niezmiennicze jeśli $y_1 + \cdots + y_n = 0$. Dlatego też mamy następujące możliwe wyrazy niekinetyczne w lagranżjanie νSM (uwzględniamy jedynie fermiony lewochiralne)

$$\overline{\phi}_i\phi^i, \quad (\overline{\phi}_i\phi^i)^2, \tag{17.109}$$

$$\epsilon^{ij}\phi_i\overline{E}L_j, \ \epsilon^{ij}\phi_i\overline{D}^\alpha Q_{\alpha j}, \ \overline{\phi}^i\overline{U}^\alpha Q_{\alpha i}, \tag{17.110}$$

$$\overline{\phi}^i L_i\overline{N}, \quad \overline{N}C\overline{N}. \tag{17.111}$$

Fermiony prawochiralne występują w wyrażeniach sprzężonych do (17.110) i (17.111). α przebiega indeks kolorowy, i, j przebiegają indeksy $1, 2$. C jest macierzą sprzężenia ładunkowego. W SM tylko (17.109) i (17.110) są możliwe.

17.6 $SU(n)$

$SU(n)$ ma reprezentację fundamentalną $\mathbb{C}^n$ i antyfundamentalną $\overline{\mathbb{C}}^n$. Wśród reprezentacji nieprzywiedlnych są

$$\begin{aligned} &\otimes^p_{\mathrm{s}}\mathbb{C}^n, \qquad p = 1, 2, \ldots, \\ &\otimes^q_{\mathrm{a}}\mathbb{C}^n, \qquad q = 1, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Mamy

$$\otimes^q_{\mathrm{a}}\mathbb{C}^n \simeq \otimes^{n-q}_{\mathrm{a}}\overline{\mathbb{C}}^n.$$

A oto użyteczne relacje dla dowolnych dwóch przestrzeni $\mathcal{Z}, \mathcal{W}$:

$$\otimes^p_{\mathrm{s/a}}(\mathcal{Z} \oplus \mathcal{W}) \simeq \bigoplus_{j=0}^{p} \otimes^j_{\mathrm{s/a}}\mathcal{Z} \oplus \otimes^{p-j}_{\mathrm{s/a}}\mathcal{W},$$

$$\otimes^2\mathcal{Z} = \otimes^2_{\mathrm{s}}\mathcal{Z} \oplus \otimes^2_{\mathrm{a}}\mathcal{Z}.$$

17.7 Rozszerzanie $SU(3) \otimes SU(2) \times U(1)$ do $SU(5)$

Poniższa analiza jest oparta częściowo na książce Srednicki'ego i artykule Baez-Huerta.

Mamy inkluzję

$$su(5) \supset su(3) \oplus su(2) \oplus u(1),$$

gdzie

$$Y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & & & & \\ & -\frac{1}{3} & & & \\ & & -\frac{1}{3} & & \\ & & & \frac{1}{2} & \\ & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Fundamentalną reprezentację $SU(5)$ rozkłada się następująco:

$$5 \to (3, 1, -\frac{1}{3}) \oplus (1, 2, \frac{1}{2}).$$

Stąd,

$$\otimes^4_{\mathrm{a}}5 = \overline{5} \quad \to \quad (\overline{3}, 1, \frac{1}{3}) \oplus (1, 2, -\frac{1}{2}). \tag{17.112}$$

Względem $SU(5)$, mamy $\otimes_{\mathrm{a}}^2 5 = 10$. Względem $SU(3)$ mamy $\otimes_{\mathrm{a}}^2 3 = \overline{3}$. Zatem

$$\begin{aligned} 10 = \otimes_{\mathrm{a}}^2 5 &\to \otimes_{\mathrm{a}}^2(3,1,-\frac{1}{3}) \oplus (3,1,-\frac{1}{3})\otimes(1,2,\frac{1}{2}) \oplus \otimes_{\mathrm{a}}^2(1,2,\frac{1}{2}) \\ &= (\overline{3},1,-\frac{2}{3}) \oplus (3,2,\frac{1}{6}) \oplus (1,1,1). \end{aligned} \tag{17.113}$$

Wszystkie multiplety lewochiralne SM względem $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ znajdziemy w następujących dwóch multipletach względem $SU(5)$: $\otimes_{\mathrm{a}}^4 5$ (17.112) i $\otimes_{\mathrm{a}}^2 5$ (17.113). Żeby dostać antycząstki wystarczy dodać $\otimes_{\mathrm{a}}^1 5$ i $\otimes_{\mathrm{a}}^3 5$. Aby dodać neutrina prawochiralne i ich antycząstki wystarczy dołączyć $\otimes_{\mathrm{a}}^0 5$ i $\otimes_{\mathrm{a}}^5 5$. Dostajemy przestrzeń $\Gamma_{\mathrm{a}}(\mathbb{C}^5)$. Przestrzeń ta rozkłada się na dwie nieprzywiedlne reprezentacje $Spin(10)$ (dwukrotnego nakrycia $SO(10)$) odpowiadające lewochiralnym i prawochiralnym cząstkom.

W poniższej liście c jako indeks górny oznacza jeden z kolorów r,g,b, zaś c,c',c'' jest jedną z cyklicznych permutacji r,g,b. Piszemy $a_1\cdots a_n$ zamiast $\frac{1}{\sqrt{n!}}a_1\wedge\cdots\wedge a_n$.

$1,\mathrm{L}$	$5,\mathrm{R}$	$10,\mathrm{L}$	$\overline{10},\mathrm{R}$	$\overline{5},\mathrm{L}$	$1,\mathrm{R}$
$\overline{\nu}_{\mathrm{R}} = 1$	$\overline{e}_{\mathrm{L}} = u$	$\overline{e}_{\mathrm{R}} = ud$	$e_{\mathrm{R}} = cc'c''$	$e_{\mathrm{L}} = cc'c''d$	$\nu_{\mathrm{R}} = cc'c''ud$
	$\overline{\nu}_{\mathrm{L}} = d$	$u_{\mathrm{L}}^c = cu$	$\overline{u}_{\mathrm{L}}^c = c'c''d$	$\nu_{\mathrm{L}} = cc'c''u$	
	$d_{\mathrm{R}}^c = c$	$d_{\mathrm{L}}^c = cd$	$\overline{d}_{\mathrm{L}}^c = c'c''u$	$\overline{d}_{\mathrm{R}}^c = c'c''ud$	
		$\overline{u}_{\mathrm{R}}^c = c'c''$	$u_{\mathrm{R}}^c = cud$		

17.8 Pola w GUT opartej na $SU(5)$

W GUT opartym na $SU(5)$, bez prawoskrętnego neutrina, poza bozonami cechowania parametryzowanymi przez $su(5)$, mamy następujące pola:

(1) Zespolone bozony skalarne

 (1) Bozon Φ w reprezentacji dołączonej odpowiedzialny za łamanie $SU(5)$ do $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$. Sprzęga się tylko do bozonów cechowania i ϕ.

 (2) Bozon ϕ w reprezentacji fundamentalnej odpowiedzialny za łamanie $SU(2)\times U(1)$ do $U(1)$.

(3) Weylowskie lewochiralne fermiony

 (1) Multiplet ψ w reprezentacji $\overline{5}$ (antyfundamentanej).

 (2) Multiplet χ w reprezentacji 10 (antysymetrycznej).

Możliwe wyrazy niekinetyczne w lagranżjanie:

$$\begin{gathered} \mathrm{Tr}\Phi^2,\ \mathrm{Tr}\Phi^4,\ (\mathrm{Tr}\Phi^2)^2, \\ \overline{\phi}\cdot\phi,\ (\overline{\phi}\cdot\phi)^2,\ \overline{\phi}\cdot\Phi^2\phi, \\ \phi^i\psi^j\chi_{ij},\quad \epsilon^{ijklm}\overline{\phi}_i\chi_{jk}\chi_{lm}. \end{gathered}$$

Jeśli chcemy, żeby neutrina miały masę, musimy dodać pole ν_{R} będące singletem dla $SU(5)$ i wyraz

$$\overline{\phi}_i\psi^i\overline{\nu}_{\mathrm{R}}.$$

17.9 Rozszerzanie $SU(3) \otimes SU(2) \times U(1)$ do $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$

W Teorii Pati-Salama zakładamy, że istnieje czwarty kolor "biały", oznaczany przez w reprezentujący leptony. Grupa $SU(4)$ działą w dwóch reprezentacjach: fundamentalnej z bazą r, g, b, w i antyfundamentalnej z bazą $\overline{r}, \overline{g}, \overline{b}, \overline{w}$.

"Lewa" grupa $SU(2)$ działa na $\mathbb{C}^2$ z bazą $u_{\mathrm{L}}, d_{\mathrm{L}}$. "Prawa" grupa $SU(2)$ działa na $\mathbb{C}^2$ z bazą $u_{\mathrm{R}}, d_{\mathrm{R}}$.

Cząstki materii (łącznie z prawym neutrinem) organizujemy w cztery reprezentacje grupy $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$:

$(4,2,1)$	$(4,1,2)$	$(\overline{4},2,1)$	$(\overline{4},1,2)$
$\nu_{\mathrm{L}} = w \otimes u_{\mathrm{L}}$	$\nu_{\mathrm{R}} = w \otimes u_{\mathrm{R}}$	$\overline{\nu}_{\mathrm{L}} = \overline{w} \otimes u_{\mathrm{L}}$	$\overline{\nu}_{\mathrm{R}} = \overline{w} \otimes u_{\mathrm{R}}$
$e_{\mathrm{L}} = w \otimes d_{\mathrm{L}}$	$e_{\mathrm{R}} = w \otimes d_{\mathrm{R}}$	$\overline{e}_{\mathrm{L}} = \overline{w} \otimes d_{\mathrm{L}}$	$\overline{e}_{\mathrm{R}} = \overline{w} \otimes d_{\mathrm{R}}$
$u^c_{\mathrm{L}} = c \otimes u_{\mathrm{L}}$	$u^c_{\mathrm{R}} = c \otimes u_{\mathrm{R}}$	$\overline{u}^c_{\mathrm{L}} = \overline{c} \otimes u^c_{\mathrm{L}}$	$\overline{u}_{\mathrm{R}} = \overline{c} \otimes u_{\mathrm{R}}$
$d^c_{\mathrm{L}} = c \otimes d_{\mathrm{L}}$	$d^c_{\mathrm{R}} = c \otimes d_{\mathrm{R}}$	$\overline{d}^c_{\mathrm{L}} = \overline{c} \otimes d^c_{\mathrm{L}}$	$\overline{d}_{\mathrm{R}} = \overline{c} \otimes d_{\mathrm{R}}$

Oto słownik (z lewej stosujemy oznaczenia dla obecnego podrozdziału, z prawej dla podrozdziału 17.7):

$$
\begin{array}{llll}
u_{\mathrm{L}} & = u, & d_{\mathrm{L}} & = d, \\
u_{\mathrm{R}} & = ud, & d_{\mathrm{R}} & = 1, \\
c & = c, & w & = cc'c'', \\
\overline{c} & = c'c'', & \overline{w} & = 1.
\end{array}
$$

Mamy następujące utożsamienia:

$$
\begin{array}{rcl}
(\mathbb{C}^4 \oplus \overline{\mathbb{C}}^4) \otimes (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}^2) & \simeq & (\overline{\mathbb{C}} \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \overline{\mathbb{C}}^3 \oplus \mathbb{C}) \otimes (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}) \\
\simeq \ \Gamma_{\mathrm{a}}(\mathbb{C}^3) \otimes \Gamma_{\mathrm{a}}(\mathbb{C}^2) & \simeq & \Gamma_{\mathrm{a}}(\mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^2).
\end{array}
$$

$$
SU(4) \simeq Spin(6), \quad SU(2) \times SU(2) \simeq Spin(4).
$$

Zatem grupa $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$ to to samo co grupa $Spin(6) \times Spin(4)$. Oczywiście, $Spin(6) \times Spin(4)/\mathbb{Z}_2$ jest podgrupą $Spin(10)$.

18 Algebry Clifforda i grupy Spin

18.1 Algebry Clifforda

Będziemy oznaczać przez $\mathbb{K}(n)$ algebrę macierzy $n \times n$ nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

Wybierzmy znak + lub −. Niech $\phi_1, ..., \phi_n$ spełniają relacje

$$
[\phi_i, \phi_j]_+ = \pm 2\delta_{ij} \mathbb{1}. \tag{18.114}
$$

Algebra łączna nad $\mathbb{R}$ generowana przez $\mathbb{1}, \phi_1, \ldots, \phi_n$ spełniająca te relacje nazywa się *(rzeczywistą) algebrą Clifforda* i będzie oznaczana przez $\mathrm{Cl}^{\pm}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Cl}^{\pm}(n)$.

Algebra łączna nad $\mathbb{C}$ generowana przez te relacje nazywa się *zespoloną algebrą Clifforda* i będzie oznaczana przez $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^n)$. Nie zależy ona od znaku w (18.114). Dla ustalenia uwagi będziemy przyjmowali, że elementy ją generujące spełniają (18.114) ze znakiem $+$. Zastępując ϕ_i przez $\mathrm{i}\phi_i$ możemy zamieniać jeden znak przez drugi.

Zarówno $\mathrm{Cl}^+(\mathbb{R}^n)$ jak i $\mathrm{Cl}^-(\mathbb{R}^n)$ są rzeczywistymi podalgebrami w $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^n)$.

Bazę algebry Clifforda stanowią elementy $\phi_{i_1}\cdots\phi_{i_k}$, gdzie $i_1 < \cdots < i_k$.

Algebry Clifforda są $*$-algebrami, jeśli wyposażymy je w inwolucję jednoznacznie zdefiniowaną przez $\phi_i^* = \phi_i$ dla $\mathrm{Cl}^+(\mathbb{R}^n)$ i $\mathrm{Cl}^+(\mathbb{C}^n)$ i $\phi_i^* = -\phi_i$ dla $\mathrm{Cl}^-(\mathbb{R}^n)$. W szczególności, można zdefiniować *unitarne* elementy algebry Clifforda, które spełniają $A^*A = AA^* = \mathbb{1}$, a także samosprzężone elementy, spełniające $A = A^*$.

18.2 Parzyste algebry Clifforda

Odwzorowanie $\phi_i \mapsto -\phi_i$ rozszerza się jednoznacznie do automorfizmu algebr Clifforda oznaczanego przez α. Elementy zachowywane przez ten automorfizm nazywają się parzystymi. Podalgebrę parzystych elementów w $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^n)$ onaczamy przez $\mathrm{Cl}_0(\mathbb{C}^n)$.

Jeśli rozpatrujemy $\mathrm{Cl}^+(\mathbb{R}^n))$ i $\mathrm{Cl}^-(\mathbb{R}^n)$ jako podalgebry $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^n)$, to zbiór parzystych elementów w obu algebrach się pokrywa. Będziemy go oznaczali przez $\mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^n)$ (nie wskazując na znak $\pm$).

Mamy izomorfizm

$$\mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^n) \simeq \mathrm{Cl}^-(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Aby się o nim przekonać zauważmy, że $\mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^n)$ jest generowana przez $\psi_j := \phi_j\phi_n$, $j = 1, \ldots, n-1$, spełniające relacje

$$[\psi_j, \psi_k]_+ = -\delta_{jk}\mathbb{1}.$$

18.3 Element objętości

Następujący element nazywa się czasem *elementem objetości*:

$$\omega := \phi_1 \cdots \phi_n.$$

Mamy

$$\omega^2 = (-\mathbb{1})^{\frac{1}{2}n(n\mp 1)}, \quad \omega\phi_i = -(-1)^n\phi_i\omega.$$

W szczególności, dla nieparzystego n ω należy do centrum algebry Clifforda.

Oczywiście, $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)$ jest generowane przez $\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \omega$.

Załóżmy, że n jest nieparzyste. Jeśli $\omega^2 = \mathbb{1}$, to mamy izomorfizm $\mathrm{Cl}^\pm(\mathbb{R}^{n-1}) \oplus \mathrm{Cl}^\pm(\mathbb{R}^{n-1}) \simeq \mathrm{Cl}^\pm(\mathbb{R}^n)$ zadany przez

$$(A_1, A_2) \mapsto \frac{\mathbb{1} + \omega}{2} A_1 + \frac{\mathbb{1} - \omega}{2} A_1.$$

Jeśli $\omega^2 = -\mathbb{1}$, to mamy izomorfizm $\mathbb{C}\mathrm{Cl}^\pm(\mathbb{R}^{n-1}) \simeq \mathrm{Cl}^\pm(\mathbb{R}^n)$ zadany przez

$$A_1 + \mathrm{i}A_2 \mapsto A_1 + \omega A_1.$$

18.4 Reprezentacja Foka algebry Clifforda

Załóżmy, że $n = 2m$. Definiujemy następujące elementy $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^n)$:

$$a_i := \frac{1}{2}(\phi_{2i-1} + \mathrm{i}\phi_{2i}), \quad a_i^* := \frac{1}{2}(\phi_{2i-1} - \mathrm{i}\phi_{2i}).$$

Mamy wtedy

$$[a_1, a_j]_+ = [a_i^*, a_j^*]_+ = 0, \quad [a_i.a_j^*]_+ = \delta_{ij}\mathbb{1}.$$

Załóżmy, że wektor Ω jest zabijany przez a_i. Dostajemy wtedy reprezentację $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^{2m})$ na $\Gamma_a(\mathbb{C}^m)$. Przestrzeń $\Gamma_a(\mathbb{C}^m)$ ma wymiar 2^m. Operatory kreacji i anihilacji generują wszystkie macierze. Można używając tego pokazać, że $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^{2m}) \simeq \mathbb{C}(2^m)$.

Mamy operator liczby cząstek

$$N = \sum_{i=1}^{m} a_i^* a_i$$

i operator parzystości

$$(-1)^N = (-1)^{\sum_i a_i^* a_i} = \prod_{i=1}(-1)^{a_i^* a_i} = \prod_i (\mathbb{1} - 2a_i^* a_i).$$

Mamy

$$[(-1)^N, a_i]_+ = [(-1)^N, a_i^*]_+ = 0, \quad \left((-1)^N\right)^2 = \mathbb{1}.$$

Zatem $\pm(-1)^N$ spełniają razem z $\phi_1, \ldots, \phi_{2m}$ relacje (18.114). Dostajemy zatem dwie nierównoważne reprezentacje $\mathrm{Cl}^{\pm}(\mathbb{R}^{2m+1})$ i $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^{2m+1})$ na $\Gamma_{\mathrm{a}}(\mathbb{C}^m)$. Można używając tego pokazać, że $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^{2m+1}) \simeq \mathbb{C}(2^m) \oplus \mathbb{C}(2^m)$.

18.5 Postać algebr Clifforda

Używając rezultatów otrzymanych powyżej można dostać następującą tabelkę:

n	$\mathrm{Cl}^+(\mathbb{R}^n)$	$\mathrm{Cl}^-(\mathbb{R}^n)$	$\mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^n)$	$\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^n)$	$\mathrm{Cl}_0(\mathbb{C}^n)$
0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$		$\mathbb{C}$	
1	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{C}$,	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	$\mathbb{C}$
2	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$
3	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$,	$\mathbb{H}$	$\mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(2)$
4	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2)$
5	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4) \oplus \mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(4)$
6	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(4) \oplus \mathbb{C}(4)$
7	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(8)$
8	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8)$

18.6 Grupa Pin i Spin

Niech $v \in \mathbb{R}^n$. *Odbiciem względem* v nazywamy odwzorowanie

$$R_v y := y - 2\frac{\langle v|y\rangle}{\langle v|v\rangle} v.$$

Oczywiście, $R_v^2 = 1\!\!1$ i $R_v \in O(\mathbb{R}^n) \backslash SO(\mathbb{R}^n)$. Odbicia generują $O(\mathbb{R}^n)$. Parzyste iloczyny odbić generują $SO(\mathbb{R}^n)$.

Zdefiniujmy jako element $\mathrm{Cl}^{\pm}(\mathbb{R}^n)$

$$\phi(v) := \sum_i v_i \phi_i.$$

Oczywiście,

$$\phi(v)^* = \pm\phi(v), \ \ \phi(v)\phi(v)^* = \langle v|v\rangle,$$

Załóżmy, że $\langle v|v\rangle = 1$. Wtedy $\pm\phi(v)$ jest unitarnym nieparzystym elementem $\mathrm{Cl}^{\pm}(\mathbb{R}^n)$ i

$$(\pm\phi(v))\phi(y)(\pm\phi(v))^* = -\phi(R_v y).$$

Niech $Pin^{\pm}(\mathbb{R}^n)$ będzie grupą w $\mathrm{Cl}^{\pm}(\mathbb{R}^n)$ generowaną przez $\phi(v)$, $\langle v|v\rangle = 1$. Oczywiście, wszystkie elementy $Pin^{\pm}(\mathbb{R}^n)$ są unitarne. Definiujemy też grupę $Spin(\mathbb{R}^n)$ składającą się z parzystych elementów w $Pin^{\pm}(\mathbb{R}^n)$.

Jeśli $U \in Spin(\mathbb{R}^n)$, to istnieje $R_U \in SO(\mathbb{R}^n)$ taki, że

$$U\phi(y)U^* = \phi(R_U y),$$

Jeśli $U \in Pin^{\pm}(\mathbb{R}^n)\backslash Spin(\mathbb{R}^n)$, to istnieje $R_U \in O(\mathbb{R}^n)\backslash SO(\mathbb{R}^n)$ taki, że

$$U\phi(y)U^* = -\phi(R_U y).$$

Mamy równoważną definicję $Pin^{\pm}(\mathbb{R}^n)$: jest to zbiór elementów unitarnych w $\mathrm{Cl}^{\pm}(\mathbb{R}^n)$ takich, że

$$\{U\phi(v)U^* \ : \ v \in \mathbb{R}^n\} = \{\phi(v) \ : \ v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Zauważmy, że $R_U = R_{-U}$. $U \mapsto R_U$ definiują dwukrotne nakrycia:

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to Spin(\mathbb{R}^n) \to SO(\mathbb{R}^n) \to 1,$$
$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to Pin^{\pm}(\mathbb{R}^n) \to O(\mathbb{R}^n) \to 1.$$

W niskich wymiarach mamy koincydencje:

$$\begin{aligned}
Spin(\mathbb{R}^2) &\simeq SO(\mathbb{R}^2),\\
Spin(\mathbb{R}^3) &\simeq SU(\mathbb{C}^2),\\
Spin(\mathbb{R}^4) &\simeq SU(\mathbb{C}^2) \times SU(\mathbb{C}^2),\\
Spin(\mathbb{R}^5) &\simeq SU(\mathbb{H}^2),\\
Spin(\mathbb{R}^6) &\simeq SU(\mathbb{C}^4).
\end{aligned}$$

18.7 Reprezentacje grupy $Spin(n)$

Grupa $Spin(2m)$ ma reprezentację w przestrzeni $\Gamma_{\mathrm{a}}(\mathbb{C}^m)$. Jest ona przywiedlna – rozkłada się na reprezentację o parzystej liczbie "cząstek" i reprezentację o nieparzystej liczbie. Te reprezentacje są już nieprzywiedlne.

Grupa $Spin(2m+1)$ ma reprezentację nieprzywiedlną w $\Gamma_{\mathrm{a}}(\mathbb{C}^m)$.

Wszystkie te reprezentacje nazywają się spinorowymi. Nie odpowiadają one reprezentacjom $SO(n)$.

19 Przegląd klasycznych algebr Liego

19.1 $sl(n,\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} sl(n,\mathbb{C}) &= \{A\in gl(n,\mathbb{C}) \ : \ \mathrm{Tr}A=0\}, \\ su(n) &= \{A\in gl(n,\mathbb{C}) \ : \ \mathrm{Tr}A=0, \quad A^*=-A\}. \end{aligned}$$

$sl(n,\mathbb{C})$ jest kompleksyfikacją $su(n)$. To znaczy,

$$sl(n,\mathbb{C}) = su(n) + \mathrm{i}su(n).$$

$A\in sl(n,\mathbb{C})$ rozkłada się na $A=\frac{1}{2}(A-A^*)+\frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}(A+A^*)$.

Wprowadzamy iloczyn skalarny

$$\langle X|Y\rangle := \mathrm{Tr}XY.$$

Oznaczmy

$$A_{ij} := |i\rangle\langle j|.$$

Niech

$$\mathfrak{h} := \left\{ \sum_{i=1}^n c_i A_{ii} \ : \ \sum_{i=1}^n c_i = 0 \right\}.$$

$\mathfrak{h}$ jest maksymalną przemienną podalgebrą w $sl(n,\mathbb{C})$ – jest to przykład *algebry Cartana*. Połóżmy

$$H_{ij} := A_{ii} - A_{jj} = -H_{ji}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} [H_{kl}, A_{ij}] &= \alpha_{ij}(H_{kl})A_{ij}, \\ \alpha_{ij}(H_{kl}) &= \delta_{ik}+\delta_{jl}-\delta_{jk}-\delta_{il} = \langle H_{ij}|H_{kl}\rangle. \end{aligned}$$

Czyli A_{ij} są *operatorami pierwiastkowymi*, czyli wektorami własnymi dla działania algebry Cartana, a $\alpha_{ij}\in\mathfrak{h}^{\#}$ są wartościami własnymi, zwanymi *pierwiastkami*. Korzystając z dwoistości zadanej przez iloczyn skalarny, można pierwiastki utożsamić z *kopierwiastkami* H_{ij}, elementami algebry Cartana.

W szczególności,

$$\langle H_{ij}|H_{ij}\rangle = 2, \quad \langle H_{ij}|H_{kj}\rangle = 1, \quad \langle H_{ij}|H_{jk}\rangle = -1, \quad i\neq k.$$

Jako bazę kraty pierwiastkowej można przyjąć $H_{12}, H_{23}, \ldots, H_{n-1,n}$. Mają one wszystkie długość $\sqrt{2}$ i są prostopadłe do siebie z wyjątkiem

$$\angle(H_{12}, H_{23}) = \cdots = \angle(H_{n-2,n-1}, H_{n-1,n}) = \frac{2\pi}{3}.$$

19.2 $so(n, \mathbb{C})$

Jeśli przyjmiemy, że iloczyn skalarny ma postać

$$\langle x|y\rangle = \sum x_i y_j,$$

to mamy

$$\begin{aligned} so(n, \mathbb{C}) &= \{A \in gl(n, \mathbb{C}) \ : \ A^{\#} = -A\}, \\ so(n, \mathbb{R}) &= \{A \in gl(n, \mathbb{R}) \ : \ A^{\#} = -A\}. \end{aligned}$$

$so(n, \mathbb{C})$ jest kompleksyfikacją $so(n, \mathbb{R})$:

$$so(n, \mathbb{C}) = so(n, \mathbb{R}) \oplus \mathrm{i}so(n, \mathbb{R}).$$

$A = \mathrm{Re}A + \mathrm{iIm}A$. Wprowadzamy iloczyn skalarny $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}XY$. Bazę ortonormalną stanowią

$$L_{ij} = |i\rangle\langle j| - |j\rangle\langle i|, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

Zatem, wymiar $so(n, \mathbb{C})$ jest równy $\frac{n(n-1)}{2}$.

19.3 $so(2m)$

Załóżmy, że $n = 2m$ Wygodnie jest przyjąć inną postać iloczynu skalarnego w $\mathbb{C}^{2m}$. Niech współrzędne będą indeksowane przez $\pm i$, $i = 1, \ldots m$.

$$\langle z|w\rangle = \sum_i z_i w_{-i} = \sum_{i=1}^{m} 2 z_i w_{-i}.$$

Aby przejść do współrzędnych kartezjańskich kładziemy

$$z_{\pm j} = x_{2j-1} \pm \mathrm{i}x_{2j}.$$

Wprowadzamy iloczyn skalarny $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}XY$.
Wprowadźmy operatory

$$B_{ij} := |i\rangle\langle -j| - |j\rangle\langle -i|.$$

Oczywiście, $B_{ij} = -B_{ji}$. W szczególności, $B_{ii} = 0$. Kładziemy

$$N_i := B_{i-i} = |i\rangle\langle i| - |-i\rangle\langle -i|. \tag{19.115}$$

Niech $\mathfrak{h}$ będzie rozpięta przez N_i, $i = 1, \ldots, m$, które stanowią bazę ortonormalną. Jest to algebra Cartana.

Bazę $so(2m,\mathbb{C})$ stanowią N_i, $i=1,\dots,m$, oraz

$$B_{ij}, \quad 1\le |i|<|j|\le m.$$

Kładziemy dla $|i|\neq|j|$,

$$N_{ij}=N_{ji}=-N_{-i-j}=-N_{-j-i}=\mathrm{sgn}(i)N_i+\mathrm{sgn}(j)N_j.$$

Mamy dla $k=1,\dots,m$,

$$\begin{aligned}[N_k,B_{ij}] &= \beta_{ij}(N_k)B_{ij},\\ \beta_{ij}(N_k) &= \mathrm{sgn}(i)\delta_{|i|k}+\mathrm{sgn}(j)\delta_{|j|k}=\langle N_{ij}|N_k\rangle.\end{aligned}$$

$$\langle N_{ij}|N_{ij}\rangle=2,\ \langle N_{ij}|N_{i-j}\rangle=0,\ \langle N_{ij}|N_{ik}\rangle=1,\ |j|\neq|k|.$$

Czyli B_{ij} są operatorami pierwiastkowymi, β_{ij} są pierwiastkami, wreszcie N_{ij} są kopierwiastkami. Mają one długość $\sqrt{2}$.

Jako bazę kraty pierwiastkowej można wybrać $N_{12},\dots,N_{m-2,m-1},N_{m-1,m},N_{m-1,-m}$. Są wzajemnie prostopadłe z wyjątkiem

$$\angle(N_{12},N_{23})=\cdots=\angle(N_{m-2,m-1},N_{m-1,m})=\angle(N_{m-2,m-1},N_{m-1,m})=\frac{2\pi}{3}.$$

19.4 $so(2m+1)$

Do $\mathbb{C}^{2m}$ dodajemy współrzędną indeksowaną przez 0. Iloczyn skaarny ma postać

$$\langle z|w\rangle=\sum_i z_iw_{-i}=z_0w_0+\sum_{i=1}^m 2z_iw_i.$$

Aby przejść do współrzędnych kartezjańskich kładziemy

$$z_{\pm j}=x_{2j-1}\pm \mathrm{i}x_{2j}, \qquad z_0=x_{2m+1}.$$

Prócz operatorów B_{ij} wprowadźmy operatory

$$B_j:=B_{0j}=|0\rangle\langle -j|-|j\rangle\langle 0|, \quad 1\le|j|\le m.$$

Algebra Cartana $\mathfrak{h}$ jest nadal rozpięta przez N_i, $i=1,\dots,m$.

Bazę $so(2m+1,\mathbb{C})$ stanowią N_i, $i=1,\dots,m$, oraz

$$B_{ij}, \quad 1\le|i|<|j|\le m,$$

$$B_j, \quad 1\le|j|\le m.$$

Mamy dodatkowe w porównaniu z $so(2m)$ relacje dla $k=1,\dots,m$

$$\begin{aligned}[N_k,B_j] &= \beta_j(N_k)B_j,\\ \beta_j(N_k) &= \mathrm{sgn}(j)\delta_{|j|k}=\langle N_j|N_k\rangle.\end{aligned}$$

$$\langle N_i|N_i\rangle = 1, \quad \langle N_i|N_{ij}\rangle = 1,$$

Czyli B_{ij} i B_j są operatorami pierwiastkowymi, β_{ij} i β_j są pierwiastkami, wreszcie N_{ij} i N_j są kopierwiastkami. N_j mają długość 1.

Jako bazę kraty pierwiastkowej można wybrać $N_{12}, \dots, N_{m-2,m-1}, N_{m-1,m}, N_m$. Mają one długość $\sqrt{2}$ z wyjątkiem ostatniego, który ma długość 1. Są wzajemnie prostopadłe z wyjątkiem

$$\angle(N_{12}, N_{23}) = \cdots = \angle(N_{m-2,m-1}, N_{m-1,m}) = \frac{2\pi}{3}, \quad \angle(N_{m-1,m}, N_m) = \frac{3\pi}{4}.$$

19.5 $sp(2m, \mathbb{C})$

Współrzędne będą indeksowane przez $\pm i$, $i = 1, \dots m$:

$$\omega = \sum_i \operatorname{sgn}(i)|i\rangle\langle -i|.$$

Wprowadźmy operatory

$$C_{ij} := \operatorname{sgn}(i)|i\rangle\langle -j| + \operatorname{sgn}(j)|j\rangle\langle -i|.$$

$$C_i := C_{ii} = 2|i\rangle\langle -i|, \quad 1 \le |i| \le m.$$

Niech N_i będą zdefiniowane jak dla $so(n)$. Zauważmy, że

$$N_i = C_{i-i} = |i\rangle\langle i| - |-i\rangle\langle -i|, \quad i = 1, \dots, m. \tag{19.116}$$

Bazę $sp(2m, \mathbb{C})$ stanowią N_i, $i = 1, \dots, m$, oraz

$$C_{ij}, \quad 1 \le |i| < |j| \le m, \quad C_j, \quad 1 \le j \le m.$$

Wprowadzamy iloczyn skalarny $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}XY$. Niech $\mathfrak{h}$ będzie rozpięta przez N_i, $i = 1, \dots, m$, które stanowią bazę ortonormalną. Niech N_{ij}, β_{ij}, β_j będą zdefiniowane jak dla $so(n)$. Mamy dla $k = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} [N_k, C_{ij}] &= \beta_{ij}(N_k)C_{ij}, \\ [N_k, C_j] &= 2\beta_j(N_k)C_j. \end{aligned}$$

Czyli C_{ij} i C_j są operatorami pierwiastkowymi, β_{ij} i $2\beta_j$ są pierwiastkami, wreszcie N_{ij} i $2N_j$ są kopierwiastkami. Mają one długość, odpowiednio, $\sqrt{2}$ i 2.

Jako bazę kraty pierwiastkowej można wybrać $N_{12}, \dots, N_{m-2,m-1}, N_{m-1,m}, 2N_m$. Jest to prawie ta sama baza co dla $so(2m+1)$. W szczególności, ma te same kąty.

19.6 Koincydencje

$\phi : so(3, \mathbb{C}) \to sl(2, \mathbb{C})$

$$\phi(N_1) = H_{12}/2, \ \phi(B_1) = A_{12}, \ \phi(B_{-1}) = A_{21}.$$

$\phi : so(4, \mathbb{C}) \to sl(2, \mathbb{C}) \oplus sl(2, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \phi(N_{12}) = H_{12}/2, &\quad \phi(B_{12}) = A_{12},\ \phi(B_{-1-2}) = A_{21}, \\ \phi(N_{1-2}) = H_{-1-2}/2, &\quad \phi(B_{-12}) = A_{-1-2},\ \phi(B_{1-2}) = A_{-2-1}. \end{aligned}$$

$\phi : so(5, \mathbb{C}) \to sp(4, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \phi(N_{12}) = N_{12}, &\quad \phi(B_{12}) = C_{12},\ \phi(B_{-1-2}) = C_{21}, \\ \phi(N_{1-2}) = N_{1-2}, &\quad \phi(B_{-12}) = C_{-12},\ \phi(B_{1-2}) = C_{2-1}, \\ &\quad \phi(B_i) = C_i. \end{aligned}$$

$\phi : so(6, \mathbb{C}) \to sl(4, \mathbb{C})$

Jeśli (ij) jest parą w zbiorze $\{1, 2, 3, 4\}$, wtedy $\overline{(ij)}$ będzie oznaczało taką parę (kl), że $ijkl$ jest parzystą permutacją 1234.

Poniżej, ij są parami w zbiorze $\{1, 2, 3\}$.

$$\begin{aligned} \phi(N_{ij}) = H_{ij}/2, &\quad \phi(B_{ij}) = A_{ij},\ \phi(B_{-i-j}) = A_{ji}, \\ \phi(N_{i-j}) = H_{\overline{ij}}/2, &\quad \phi(B_{-ij}) = A_{\overline{ij}},\ \phi(B_{i-j}) = A_{\overline{ji}}. \end{aligned}$$

19.7 Konstrukcja Schura-Weyla

Diagramem Younga będziemy nazywali nierosnący ciąg liczb naturalnych lub zer $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$, od pewnego miejsca zerowy. Czasami bierzemy pod uwagę tylko niezerowe elementy, dostając ciąg skończony. Rysujemy go w postaci ułożonych obok na siebie kwadratów (okienek), po λ_i w $i$tym wierszu. Wielkością diagramu Younga nazywamy $|\lambda| := \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots$.

Dualny diagram Younga jest zdefiniowany jako

$$\lambda'_k := \max\{m \ : \ \lambda_m \geq k\}.$$

Tablicą Younga nazywamy diagram Younga z wpisanymi w okienka kolejne liczby naturalne $1, \dots, |\lambda|$. Na przykład, można wpisać liczby po kolei. Wtedy będziemy utożsamiać diagram z tablicą.

Dualną tablicą Younga nazywamy tablicę Younga odbitą w przekątnej. Odpowiada ona dualnemu diagramowi Younga.

Niech τ będzie tablicą Younga o wielkości n. Wiążemy z nią dwie podgrupy w S_n:

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{row},\tau} &= \{\text{permutacje z } S_n \text{ nie mieszające elementów w wierszach}\} \\ S_{\mathrm{col},\tau} &= \{\text{permutacje z } S_n \text{ nie mieszające elementów w kolumnach}\}. \end{aligned}$$

Oczywiście,

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{row},\tau} &= S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \cdots, \\ S_{\mathrm{col},\tau} &= S_{\lambda'_1} \times S_{\lambda'_2} \times \cdots. \end{aligned}$$

Definiujemy następujące rzuty w algebrze grupowej $C[S_n]$:

$$\begin{aligned}\Theta_{\mathrm{row},\tau} &:= \frac{1}{|S_{\mathrm{row},\tau}|}\sum_{\sigma\in S_{\mathrm{row},\tau}}\sigma,\\ \Theta_{\mathrm{col},\tau} &:= \frac{1}{|S_{\mathrm{col},\tau}|}\sum_{\sigma\in S_{\mathrm{col},\tau}}\mathrm{sgn}(\sigma)\sigma.\end{aligned}$$

Niech

$$\mathfrak{A}_\tau = \Theta_{\mathrm{row},\tau}\Theta_{\mathrm{col},\tau}C[S_n]$$

Jest to przestrzeń niezmiennicza dla prawej regularnej reprezentacji grupy S_n. Nazwijmy ją $(\pi_\tau, \mathfrak{A}_\tau)$.

Twierdzenie 19.1 (1) *π_τ są nieprzywiedlnymi reprezentacjami grupy S_n.*

(2) *Każda nieprzywiedlna reprezentacja S_n jest postaci π_τ.*

(3) *$\pi_{\tau_1} \simeq \pi_{\tau_2}$ wtedy i tylko wtedy gdy diagramy Younga tablic τ_1 i τ_2 są takie same.*

(4) *$\pi_{\tau'}$ jest równoważna iloczynowi reprezentacji znakowej i π_τ.*

19.8 Reprezentacje $SL(n, \mathbb{C})$

Rozważmy przestrzeń $\mathcal{V}$. Rozważmy reprezentację grupy $\rho : G \to GL(\mathcal{V})$, albo algebry Liego $\rho : \mathfrak{g} \to gl(\mathcal{V})$. Mamy wtedy naturalne reprezentacje $\otimes^n\rho : G \to GL(\otimes^n\mathcal{V})$, $\mathrm{d}\otimes^n \rho : \mathfrak{g} \to gl(\otimes^n\mathcal{V})$

Mamy naturalną reprezentację S_n na $\otimes^n\mathcal{V}$. Reprezentacja grupy S_n komutuje z $\otimes^n\rho$ i $\mathrm{d}\otimes^n\rho$. Dlatego też komutuje z rzutami $\Theta_{\mathrm{row},\tau}$ i $\Theta_{\mathrm{col},\tau}$. Zdefiniujmy

$$\mathcal{V}_\tau := \Theta_{\mathrm{row},\tau}\Theta_{\mathrm{col},\tau} \otimes^n \mathcal{V},$$

gdzie τ jest pewną tablicą Younga. Jest to podprzestrzeń niezmiennicza dla $\otimes^n\rho$. Niech ρ_τ oznacza reprezentację $\otimes^n\rho$ obciętą do $\mathcal{V}_\tau$.

W szczególności rozważmy grupę $GL(n, \mathbb{C})$ i jej reprezentację fundamentalną na $\mathbb{C}^n$. Zauważmy, że dla τ będącego kolumną o wysokości n mamy $\rho_\tau(g) = \det g$. Dlatego też po obcięciu do $SL(n, \mathbb{C})$ dostajemy reprezentację trywialną.

Dla τ będącego kolumną wysokości $n - 1$ na $GL(n, \mathbb{C})$ dostajemy reprezentację, która macierzy przyporządkowuje macierz dopełnień algebraicznych. Dlatego też, na $SL(n, \mathbb{C})$ dostajemy reprezentację kontragradientną.

Widać zatem, że dla grupy $SL(n, \mathbb{C})$ wystarczy ograniczyć się do diagramów Younga, których wszystkie kolumny są niższe niż n.

Niech τ będzie diagramem Younga. Diagram sprzężony defniujemy następująco. Kolumny o długości m zastępujemy przez kolumny o długości $n - m$. Następnie porządkujemy kolumny w kolejności malejącej. Diagram sprzężony oznaczamy przez $\overline{\tau}$.

Twierdzenie 19.2 (1) *ρ_τ są nieprzywiedlnymi reprezentacjami grupy $SL(n, \mathbb{C})$.*

(2) *Każda skończenie wymiarowa nieprzywiedlna reprezentacja $SL(n, \mathbb{C})$ jest postaci ρ_τ.*

(3) *$\rho_{\tau_1} \simeq \rho_{\tau_2}$ wtedy i tylko wtedy gdy diagramy Younga tablic τ_1 i τ_2 są takie same.*

(4) *$\overline{\rho}_\tau = \rho_{\overline{\tau}}$.*

20 Struktura algebr Liego

20.1 Nilpotentne i rozwiązalne algebry Liego

Niższą serią centralną nazywamy podalgebry $\mathcal{D}_k\mathfrak{g}$ zdefiniowane indukcyjnie

$$\mathcal{D}_1\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad \mathcal{D}_k\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathcal{D}_{k-1}\mathfrak{g}].$$

Serią pochodną nazywamy podalgebry

$$\mathcal{D}^1\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad \mathcal{D}^k\mathfrak{g} := [\mathcal{D}^{k-1}\mathfrak{g}, \mathcal{D}^{k-1}\mathfrak{g}].$$

$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathcal{D}\mathfrak{g} = \mathcal{D}_1\mathfrak{g} = \mathcal{D}^1\mathfrak{g}$ nazywamy *pochodną algebry* $\mathfrak{g}$.

Na przykład, $\mathcal{D}t(\mathbb{K}^n) = n(\mathbb{K}^n)$.

Twierdzenie 20.1 *$\mathcal{D}^k\mathfrak{g}$ i $\mathcal{D}_k\mathfrak{g}$ są ideałami charakterystycznymi w $\mathfrak{g}$. Jeśli $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ jest homomorfizmem, to $\phi(\mathcal{D}^k\mathfrak{g}) = \mathcal{D}^k\phi(\mathfrak{g})$, $\phi(\mathcal{D}_k\mathfrak{g}) = \mathcal{D}_k\phi(\mathfrak{g})$.*

Stwierdzenie 20.2 (1) *Jeśli $\mathfrak{a}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ jest przemienna, to $\mathfrak{a} \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

(2) *Jeśli $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{a} \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest przestrzenią liniową, to $\mathfrak{a}$ jest ideałem i $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ jest przemienna.*

Dowód. (1): Jeśli $A + \mathfrak{a}, B + \mathfrak{a} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, to $[A + \mathfrak{a}, B + \mathfrak{a}] = \mathfrak{a}$ oznacza $[A, B] \in \mathfrak{a}$. Więc $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$.

(2) wynika z $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$.□

Mówimy, że algebra $\mathfrak{g}$ jest *nilpotentna*, jeśli $\mathcal{D}_k\mathfrak{g} = \{0\}$ dla pewnego k i *rozwiązalna*, jeśli $\mathcal{D}^k\mathfrak{g} = \{0\}$ dla pewnego k. Mówimy, że $\mathfrak{g}$ jest półprosta, jeśli nie ma rozwiązalnych ideałów.

Stwierdzenie 20.3 (1) *$\mathfrak{h}$ jest rozwiązalna $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}\mathfrak{h}$ jest rozwiązalna.*

(2) *$\mathfrak{h}$ jest nilpotentna $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}\mathfrak{h}$ jest nilpotentna.*

(3) *$\mathfrak{h}$ jest półprosta $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}\mathfrak{h}$ jest półprosta.*

Dowód. 5) $\Leftarrow$. Niech $\mathfrak{a}$ będzie niezerowym ideałem rozwiązalnym w $\mathbb{C}\mathfrak{h}$. Wtedy $\overline{\mathfrak{a}}$ też. Również $\mathfrak{b} := \mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{a}}$ jest rozwiązalny. Wtedy $\mathbb{C}(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}) = \mathfrak{b}$. $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}$ jest niezerowym ideałem rozwiązalnym w $\mathfrak{h}$. □

Algebra $\mathfrak{n}(\mathbb{K}^n)$ ściśle górnotrójkątnych macierzy jest nilpotentna, jak również każda jej podalgebra. Można pokazać, że każda algebra nilpotentna jest izomorficzna do podalgebry $\mathfrak{n}(\mathbb{K}^n)$.

Twierdzenie 20.4 (1) *Każda podalgebra, obraz homomorficzny, suma prosta algebr nilpotentnych jest nilpotentna.*

(2) *Niech $\mathfrak{a}$ będzie podprzestrzenią w $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (a więc ideałem w $\mathfrak{g}$). Jeśli $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ jest nilpotentna, to $\mathfrak{g}$ też.*

(3) *$\mathfrak{g}$ jest nilpotentna $\Leftrightarrow$ $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ jest nilpotentna.*

Dowód. (2) Wiemy, że dla pewnego n, $\mathcal{D}_n(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) = \{0\}$. Z tego wynika, że $\mathcal{D}_n\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}$. Zatem $\mathcal{D}_{n+1}\mathfrak{g} = \{0\}$.

(3) $\Rightarrow$ jest oczywiste. By pokazać $\Leftarrow$ zauważmy, że $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ i zastosujmy (2). □

Algebra $t(\mathbb{K}^n)$ górnotrójkątnych macierzy jest rozwiązalna jak również każda jej podalgebra. Można pokazać, że każda algebra rozwiązalna jest izomorficzna do podalgebry $t(\mathbb{K}^n)$. Każda reprezentacja algebry rozwiązalnej na przestrzeni $\mathcal{V}$ ma obraz izomorficzny do podalgebry w $\mathfrak{t}(\mathcal{V})$.

Twierdzenie 20.5 (1) *Każda podalgebra, obraz homomorficzny, suma prosta algebr rozwiązalnych jest rozwiązalny.*

(2) *Niech $\mathfrak{a}$ będzie ideałem w $\mathfrak{g}$. Jeśli $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ są rozwiązalne, to $\mathfrak{g}$ też.*

(3) *$\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna $\Leftrightarrow$ $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ jest rozwiązalna.*

Dowód. (2) Niech $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ będzie kanonicznym homomorfizmem.

Niech $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) = 0$. Mamy $\pi(\mathcal{D}^n\mathfrak{g}) \subset \mathcal{D}^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$. Zatem $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) \subset \ker\pi = \mathfrak{a}$.

Niech $\mathcal{D}^k\mathfrak{a} = \{0\}$. Wtedy $\mathcal{D}^{k+n}\mathfrak{g} = \mathcal{D}^k\mathcal{D}^n\mathfrak{g} \subset \mathcal{D}^k\mathfrak{a} = \{0\}$.

(2) implikuje (3). □

W twierdzeniu tym nie można zamienić "rozwiązalny" przez "nilpotentny", co pokazuje przykład $0 \to n(\mathbb{K}^n) \to t(\mathbb{K}^n) \to d(\mathbb{K}^n) \to 0$..

Twierdzenie 20.6 *Niech $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ będą ideałami w $\mathfrak{g}$.*

(1) *Jeśli $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ są rozwiązalne, to $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ też.*

(2) *Jeśli $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ są nilpotentne, to $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ też.*

Dowód. (1) Z rozwiązalności $\mathfrak{a}$ wynika rozwiązalność $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$. Mamy $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b} \simeq \mathfrak{a}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$, zatem $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ jest rozwiązalna. W ciągu dokładnym $0 \to \mathfrak{b} \to \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \to (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ wyrazy brzegowe są rozwiązalne, więc wyraz środkowy też.

(2) Rozważmy A_i, $i = 1, \dots 2k + 1$, z których każdy należy do $\mathfrak{a}$ lub $\mathfrak{b}$. Pokażemy, że

$$[A_1.[A_2, \cdots [A_{2k}, A_{2k+1}] \cdots]$$

należy do $\mathcal{D}_k\mathfrak{a}$ lub $\mathcal{D}_k\mathfrak{b}$.

Rzeczywiście, wtedy co najmniej $k + 1$ wyrazów należy do $\mathfrak{a}$ lub $\mathfrak{b}$. Załóżmy, że do $\mathfrak{a}$. Korzystamy następnie z tego, że $\mathcal{D}_j\mathfrak{a}$ jest ideałem charakterystycznym w $\mathfrak{a}$.

Zatem, jeśli $\mathcal{D}_k\mathfrak{a} = \mathcal{D}_k\mathfrak{b} = \{0\}$, to $\mathcal{D}_{2k+1}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \{0\}$. □

Zatem w każdej alebrze Liego istnieje największy ideał rozwiązalny, zwany *radykałem*, i największy ideał nilpotentny.

20.2 Twierdzenie Liego

Twierdzenie 20.7 (Liego) *Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią zespoloną a $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie rozwiązalną algebrą Liego. Wtedy istnieje $\alpha \in \mathfrak{g}^\#$ taki, że*

$$\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{g}) := \bigcap_{A \in \mathfrak{g}} \mathrm{Ker}\,(A - \alpha(A)) \neq \{0\}. \tag{20.117}$$

Przestrzeń $\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{g})$ nazwiemy *przestrzenią własną algebry* $\mathfrak{g}$ *dla pierwiastka* α. $\alpha \in \mathfrak{g}^\#$ dla którego ta przestrzeń jest niezerowa nazywamy *pierwiastkiem algebry* $\mathfrak{g}$.

Dowód Twierdzenia Liego opiera się na następującym stwierdzeniu.

Stwierdzenie 20.8 *Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią zespoloną, $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego i $\alpha \in \mathfrak{g}^\#$. Niech $B \in gl(\mathcal{V})$ spełnia*

$$[B, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}.$$

Wtedy B zachowuje podprzestrzeń $\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{g})$ zdefiniowaną w (20.117).

Dowód. Niech x należy do $\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{g})$ i $x_j := B^j x$, $j = 0, 1, \ldots$. Niech k będzie najmniejszą liczbą taką , że x_m jest kombinacją liniową $x_0, \ldots, x_{m-1}$. Wykażemy, że istnieje macierz $\alpha_{ij} \in \mathfrak{g}^\#$ taka, że $\alpha_{ij} = 0$, $i < j$, $\alpha_{ii} = \alpha$ i

$$Ax_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}(A) x_j. \tag{20.118}$$

Jest to oczywiste dla $i = 1$. Załóżmy, że to prawda dla $i = k$.

$$\begin{aligned} Ax_{k+1} = ABx_k &= [A, B]x_k + BAx_k \\ &= \sum_i \alpha_{ki}([A, B])x_i + \alpha_{ki}(A)x_{i+1}. \end{aligned}$$

Czyli

$$\alpha_{k+1,i}(A) = \alpha_{k,i}([A, B]) + \alpha_{k,i-1}(A),$$

co kończy dowód (20.118).

Niech $\mathcal{X}$ będzie przestrzenią rozpiętą przez $x_0, \ldots, x_k$. Jest ona B-niezmiennicza i $\mathfrak{g}$-niezmiennicza. Macierz $\mathfrak{g}$ obcięta do $\mathcal{X}$ jest górnotrójkątna i na diagonali ma α. Zatem, dla $A \in \mathfrak{g}$,

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{X}} A = k\alpha(A), \quad A \in \mathfrak{g}.$$

W szczególności,

$$0 = \mathrm{Tr}_{\mathcal{X}}[A, B] = k\alpha([A, B]).$$

Zatem $\alpha([A, B]) = 0$. Dlatego też, $\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij}$. Więc,

$$ABx = \alpha(A)Bx.$$

Dowód Tw. 20.7. Stosujemy indukcję względem $\dim \mathfrak{g}$. Dla $\dim \mathfrak{g} = 1$ jest to znany fakt.

Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $\dim \mathfrak{g} = k-1$. Niech $\dim \mathfrak{g} = k$. $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$ kowymiaru $j > 0$. Dowolna podprzestrzeń $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$ jest ideałem. W szczególności, niech $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathbb{C}B = \mathfrak{g}$. Z założenia indukcyjnego istnieje funkcjonał pierwiastkowy α_1 na $\mathfrak{g}_1$. $\mathrm{ad}(B)$ zachowuje $\mathfrak{g}_1$. Zatem, ze Stw. 20.8 wynika, że B zachowuje $\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{g})$. B posiada wektor własny $v \in \mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{g})$, czyli $Bv = \mu v$. Każdy $A \in \mathfrak{g}$ jest postaci $A = A_1 + tB$, $A_1 \in \mathfrak{g}_1$, $t \in \mathbb{K}$. Wtedy

$$(A_1 + tB)v = (\alpha_1(A) + t\mu)v.$$

□

Twierdzenie 20.9 *Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią zespoloną a $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(1) *$\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna.*

(2) *Istnieje ciąg niezmienniczych przestrzeni $\{0\} = \mathcal{V}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{V}_n = \mathcal{V}$, $\dim \mathcal{V}_j = j$.*

(3) *Istnieje baza w $\mathcal{V}$ taka, że $\mathfrak{g}$ jest zawarta w macierzach górnotrójkątnych.*

Dowód. (1)⇒(2) Stosujemy indukcję względem $\dim \mathcal{V}$. Dla $\dim \mathcal{V} = 1$ jest to oczywiste. Niech będzie prawdziwe dla $\dim \mathcal{V} = n$. Niech $\dim \mathcal{V} = n + 1$. Na mocy Tw. Liego istnieje pierwiastek $\alpha \in \mathfrak{g}^{\#}$ z wektorem własnym $v \in \mathcal{V}$. Przestrzeń $\mathbb{C}v$ jest niezmiennicza. Dlatego mamy reprezentację ilorazową w $\mathcal{V}/\mathbb{C}v$, $\dim \mathcal{V}/\mathbb{C}v = n$. Zatem istnieją przestrzenie $\{0\} = \mathcal{W}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{W}_n = \dim \mathcal{V}/\mathbb{C}v$, $\dim \mathcal{W}_j = j$ niezmiennicze względem tej reprezentacji. Niech $\mathcal{V}_{j+1}$ będzie przeciwobrazem $\mathcal{W}_j$ względem homomorfizmu kanonicznego.

(2)⇒(3) Wybieramy bazę $e_1, \ldots, e_n$ taką, że $\mathcal{V}_j = \mathrm{Span}\{e_1, \ldots, e_j\}$.

(3)⇒(1) Podalgebra algebry rozwiązalnej jest rozwiązalna. □

Twierdzenie 20.10 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie zespoloną algebrą Liego. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(1) *$\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna.*

(2) *Istnieje ciąg ideałów $\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ taki, że $\dim \mathfrak{g}_j = j$.*

(3) *$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest nilpotentna.*

Dowód. (1)⇒(2) Rozważmy reprezentację $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g})$. $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset gl(\mathfrak{g})$ jest algebrą rozwiązalną. Zatem istnieje ciąg podprzestrzeni $\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$, $\dim \mathfrak{g}_j = j$, które są $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$-niezmiennicze. $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$-niezmienniczość oznacza bycie ideałem.

(2)⇒(1) Z tego, że $\mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_{j-1}$ jest 1-wymiarowa, wynika, że jest przemienna. Dlatego, ze Stw. 20.2 (1) dostajemy $[\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{j-1}$. Stąd $\mathcal{D}^k\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_{n-k}$.

(3)⇒(1) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest nilpotentne, więc rozwiązalna. $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest przemienna wiąc rozwiązalna. Zatem $\mathfrak{g}$ iest rozwiązalna.

(1)⇒(3) Rozważmy $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset gl(\mathfrak{g})$. W pewnej bazie, $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset t(\mathbb{C}^n)$. Zatem $[\mathrm{ad}(\mathfrak{g}), \mathrm{ad}(\mathfrak{g})] \subset n(\mathbb{C}^n)$. Więc $\mathrm{ad}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = [\mathrm{ad}(\mathfrak{g}), \mathrm{ad}(\mathfrak{g})]$ jest nilpotentna. Czyli, z Tw. 20.5 (3) wynika, że $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest nilpotentna. □

Stwierdzenie 20.11 *Każda nietrywialna skończenie wymiarowa reprezentacja nieprzywiedlna algebry rozwiązalnej jest* 1*-wymiarowa.*

Dowód. Zgodnie z Tw. Liego, każda algebra Liego działająca na skończenie wymiarowej przestrzeni posiada wektor własny. □

20.3 Dolny ciąg centralny

Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. *Dolny ciąg centralny* $\mathcal{C}_j\mathfrak{g}$ definiujemy indukcyjnie w sposób następujący: $\mathcal{C}_0\mathfrak{g} = \{0\}$. Jeśli zdefiniowaliśmy $\mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g}$, $\pi_{k-1}\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g}$ jest homomorfizmem kanonicznym, to

$$\mathcal{C}_k\mathfrak{g} := \pi_{k-1}^{-1}\left(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}/\mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g})\right).$$

(Automatycznie, $\mathcal{C}_k$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$, jako przeciwobraz ideału względem homomorfizmu).

Twierdzenie 20.12 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *$\mathfrak{g}$ jest nilpotentna.*

(2) *Istnieje ciąg ideałów $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_n = \{0\}$ takich, że $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{j+1}$.*

(3) *Istnieje m takie, że $\mathcal{C}_m\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$.*

Dowód. (1)⇒(2) jest oczywiste, jeśli położyć $\mathfrak{g}_j = \mathcal{D}_j\mathfrak{g}$.

(2)⇒(1). Pokazujemy indukcyjnie, że $\mathcal{D}_j\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_j$.

(2)⇒(3) Pokażemy indukcyjnie, że $\mathfrak{g}_{m-k} \subset \mathcal{C}_k\mathfrak{g}$. Dla $k = 0$, $\mathfrak{g}_m = \mathcal{C}_0\mathfrak{g} = \{0\}$.

Załóżmy, że $\mathfrak{g}_{m-(k-1)} \subset \mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g}$. Mamy

$$\begin{aligned}[\mathfrak{g}/\mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g}, \pi_{k-1}(\mathfrak{g}_{m-k})] &= \pi_{k-1}\left([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{m-k}]\right) \\ \subset \pi_{k-1}(\mathfrak{g}_{m-(k-1)}) &\subset \pi_{k-1}(\mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g}) = \{0\}.\end{aligned}$$

Zatem $\pi_{k-1}(\mathfrak{g}_{m-k}) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g}/\mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g})$. Więc, $\mathfrak{g}_{m-k} \subset \mathcal{C}_k\mathfrak{g}$.

(3)⇒(2).

$$\pi_{k-1}\left([\mathfrak{g}, \mathcal{C}_k\mathfrak{g}]\right) = [\pi_{k-1}(\mathfrak{g}), \pi_{k-1}(\mathcal{C}_k\mathfrak{g})] = [\mathfrak{g}/\mathcal{C}_k\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{g}/\mathcal{C}_k\mathfrak{g})] = \{0\}.$$

Zatem $[\mathfrak{g}, \mathcal{C}_k\mathfrak{g}] \subset \ker \pi_{k-1} = \mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g}$. Stąd,

$$\mathcal{C}_m\mathfrak{g} \subset \cdots \subset \mathcal{C}_0\mathfrak{g}_0$$

spełnia warunki (2). □

20.4 Kryteria Cartana rozwiązalności

Twierdzenie 20.13 (Kryterium Cartana dla formy śladowej.) *Niech $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *$\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna.*

(2) $\mathrm{Tr}AB = 0$, *$A \in \mathfrak{g}$, $B \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

(3) $\mathrm{Tr}AB = 0$, *$A, B \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

Lemat 20.14 *Niech $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ będą podprzestrzeniami w $L(\mathcal{V})$. Połóżmy*

$$\mathfrak{b} := \{B \in L(\mathcal{V}) \ : \ \mathrm{ad}(B)\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}\}.$$

Niech $A \in \mathfrak{b}$. Jeśli

$$\mathrm{Tr}AB = 0, \quad B \in \mathfrak{b},$$

to A jest nilpotentny.

Dowód. Niech $A = S + N$ będzie kanonicznym rozkładem na część półprostą i nilpotentną. Niech $e_1, \ldots, e_n$ będzie bazą diagonalizującą S, tak że $Ae_j = \lambda_j e_j$. Niech $e^1, \ldots, e^n$ będzie bazą dualną.

Niech $\mathbb{L}$ będzie podzbiorem $\mathbb{K}$

$$\mathbb{L} := \{\sum r_j \lambda_j \ : \ r_j \in \mathbb{Q}\}.$$

Niech $f : \mathbb{L} \to \mathbb{Q}$ będzie funkcją $\mathbb{Q}$-liniową. Zdefiniujmy P przez $Pe_j = f(\lambda_j)e_j$. Mamy

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(S)|e_i)(e_j| &= (\lambda_i - \lambda_j)|e_i)(e_j|, \\ \mathrm{ad}(P)|e_i)(e_j| &= (f(\lambda_i) - f(\lambda_j))\,|e_i)(e_j| = f(\lambda_i - \lambda_j)|e_i)(e_j|. \end{aligned}$$

Zatem $\mathrm{ad}(P) = f(\mathrm{ad}(S)$. Można dobrać wielomian p o wolnym wyrazie zero taki, że $f(\lambda_i - \lambda_j) = p(\lambda_i - \lambda_j)$. Wtedy $\mathrm{ad}(P) = p(\mathrm{ad}(S))$. Ze Stw. 21.8 wynika, że $\mathrm{ad}(S)$ jako część półprosta $\mathrm{ad}(A)$ jest też wielomianem (bez wyrazu wolnego) od $\mathrm{ad}(A)$, tj. $\mathrm{ad}(S) = s(\mathrm{ad}(A))$. Ostatecznie, $\mathrm{ad}(P) = s(p(\mathrm{ad}(S)) = t(\mathrm{ad}(A)$, gdzie t jest wielomianem bez wyrazu wolnego. Z tego, że $\mathrm{ad}(A)\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}$ wynika, że $t(\mathrm{ad}(A))\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}$. Zatem $P \in \mathfrak{b}$. Więc P taki, że $Pe_j = \overline{\lambda}_j e_j$ należy do $\mathfrak{b}$. Dlatego,

$$0 = \mathrm{Tr}AP = \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j)\lambda_j. \tag{20.119}$$

Prawa strona (20.119) należy do $\mathbb{L}$, można więc na nią zadziałać funkcją f. Dostajemy

$$0 = \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j)^2.$$

Zatem $f(\lambda_1) = \cdots = f(\lambda_n) = 0$ (bo $f(\lambda_j) \in \mathbb{Q}$). Więc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. □

Dowód Tw. 20.13. (1)⇒(2) wynika z faktu, że znajdziemy bazę, w której $\mathfrak{g}$ są górnotrójkątne.

(2)⇒(1). Niech

$$\mathfrak{n} := \{C \in L(\mathcal{V}) \ : \ [C, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}.$$

Wtedy $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{n}$. Więc dla $A, B \in \mathfrak{g}$, $C \in \mathfrak{n}$,

$$\mathrm{Tr}[A, B]C = \mathrm{Tr}A[B, C] = 0.$$

Zatem

$$\mathrm{Tr}DC = 0, \ D \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \ C \in \mathfrak{n}.$$

Na podstawie Lematu 20.14, z (2) wynika, że wszystkie elementy $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ są nilpotentne. Zatem $\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna.

(2)⇒(3) jest oczywiste.

(3)⇒(2). Na mocy (2)⇒(1), $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest rozwiązalna. Ale $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest przemienna, więc rozwiązalna. Zatem $\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna. □

Twierdzenie 20.15 (Kryterium Cartana dla formy Killinga.) *Niech $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mathfrak{g}$ *jest rozwiązalna.*

(2) $\langle A|B\rangle_{\mathrm{ad}} = 0,\ A \in \mathfrak{g},\ B \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

(3) $\langle A|B\rangle_{\mathrm{ad}} = 0,\ A, B \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Dowód. (1)⇒(2). $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset gl(\mathfrak{g})$ jest rozwiązalną algebrą Liego. Możemy zatem do niej zastosować Tw. 20.13 (1)⇒(2).

(2)⇒(1). Z Tw. 20.13 (2)⇒(1) wynika, że $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ jest rozwiązalna. Ale to jest równoważne temu, że $\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna.

(2)⇒(3) jest oczywiste.

(3)⇒(2). Z tego, że $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$ wynika, że form Killinga dla $\mathfrak{g}$ obcięta do $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ pokrywa sie z formą Killinga dla $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Zatem możemy zastosować (2)⇒(1) do $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ i wnioskować, że $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest rozwiązalna. Następnie powtarzamy argument, który używaliśmy w dowodzie Tw. 20.13, który implikuje rozwiązalność $\mathfrak{g}$. □

Dowód Tw. 13.11 (1)⇒(2): Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprosta. Rozważmy $\mathfrak{g}^{\perp}$ (względem formy Killinga). Wtedy $\mathfrak{g}^{\perp}$ jest ideałem dla którego forma Killinga jest równa 0. Zatem z Kryterium Cartana dla formy Killinga (Tw. 20.15) $\mathfrak{g}^{\perp}$ jest rozwiązalny. Z półprostoty $\mathfrak{g}^{\perp} = \{0\}$. Zatem forma Killinga jest niezdegenerowana. □

Dowód Tw. 13.13: Dowód analogiczny jak powyżej, z tą różnicą, że z Kryterium Cartana dla formy śladowej Tw. 20.13. □

Rozważmy przemienną algebrę $\mathbb{K}^n$ z bazą $e_1, \dots, e_n$. Dowolny operator $P \in L(\mathbb{K}^n)$ definiuje różniczkowanie na $\mathbb{K}^n$. Dlatego $\mathbb{R} \ni t \mapsto tP \in \mathrm{Der}(\mathbb{K}^n)$ jest homomorfizmem algebr Liego. Niech $f = 1 \in \mathbb{R}$ będzie bazą w $\mathbb{R}$. Rozważmy algebrę Liego $\mathfrak{g} := \mathbb{K}^n \rtimes_P \mathbb{K}$. Mamy

$$[e_i, f] = Pe_i, \quad [e_i, e_j] = 0, \quad [f, f] = 0.$$

Forma Killinga ma jedyny niezerowy wyraz dla

$$\langle f|f\rangle = \mathrm{Tr} P^2.$$

Aby to pokazać, liczymy

$$\mathrm{ad}(f) = -\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}(e_i) = -\begin{bmatrix} 0 & Pe_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oczywiście, $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = P\mathbb{K}^n$, która jest przemienna. Zatem algebra jest rozwiązalna.

Poza tym, łatwo sprawdzamy, że $\mathcal{D}_m(\mathfrak{g}) = P^m\mathbb{K}^n$. Dlatego $\mathfrak{g}$ jest nilpotentna wtedy i tylko wtedy gdy P jest nilpotentny.

20.5 Algebry półproste i reduktywne a algebry rozwiązalne

Przypomnijmy, że algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest półprosta gdy nie posiada niezerowych ideałów przemiennych, a jest *reduktywna* gdy jest sumą prostą półprostej i przemiennej algebry Liego.

Twierdzenie 20.16 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mathfrak{g}$ *jest algebrą półprostą.*

(2) $\mathfrak{g}$ *nie posiada niezerowych ideałów rozwiązalnych.*

(3) *Radykał algebry* $\mathfrak{g}$ *jest równy* $\{0\}$.

Dowód. (2)$\Rightarrow$(1) jest oczywiste

(1)$\Rightarrow$(2). Niech $\mathfrak{a}$ będzie niezerowym ideałem rozwiązalnym. Wtedy istnieje k takie, że $\mathcal{D}^{k-1}\mathfrak{a} \neq \{0\}$ i $\mathcal{D}^k\mathfrak{a} = \{0\}$. $\mathcal{D}^{k-1}\mathfrak{a}$ jest więc przemienne. Poza tym, jest to ideał charakterystyczny w $\mathfrak{a}$. Zatem jest to ideał w $\mathfrak{g}$.

(2)$\Rightarrow$(3) Radykał jest ideałem rozwiązalnym.

(3)$\Rightarrow$(1) Załóżmy, że $\mathfrak{a}$ jest niezerowym ideałem przemiennym. Radykał zawiera $\mathfrak{a}$, więc jest niezerowy. □

Twierdzenie 20.17 *Niech* $\mathfrak{g}$ *będzie dowolną algebrą Liego i* $\mathfrak{r}$ *jej radykałem. Wtedy istnieje podalgebra półprosta* $\mathfrak{a}$ *taka, że* $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \rtimes \mathfrak{a}$.

Dowód. Udowodnimy tylko słabszy fakt, który mówi, że $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ jest pólprosta. Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy istnieje ideał rozwiązalny $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$. Niech $\mathfrak{r}_1$ będzie jego przeciwobrazem w $\mathfrak{g}$. Wtedy mamy $0 \to \mathfrak{r} \to \mathfrak{r}_1 \to \mathfrak{h} \to 0$. Ponieważ $\mathfrak{r}$ i $\mathfrak{h}$ są rozwiązalne, taki jest $\mathfrak{r}_1$. Ale $\mathfrak{r}$ jest największym ideałem rozwiązalnym w $\mathfrak{g}$. Zatem $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}$. Zatem $\mathfrak{h} = 0$. □

Twierdzenie 20.18 *Niech* $\mathfrak{g}$ *będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mathfrak{g}$ *jest algebrą reduktywną.*

(2) $\mathfrak{g}$ *nie posiada nieprzemiennych ideałów rozwiązalnych.*

(3) *Radykał algebry* $\mathfrak{g}$ *jest przemienny.*

20.6 Operator Casimira

Niech $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego a $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ jej ideałem. Wybierzmy bazę $B_1, \dots, B_n$ w $\mathfrak{b}$. Załóżmy, że macierz

$$b_{ij} = \mathrm{Tr}\ B_i B_j.$$

jest nieosobliwa. Niech $[b^{ij}]$ będzie jej odwrotnością. *Operator Casimira dla ideału* $\mathfrak{b}$ jest zdefiniowany jako

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{b}} := \sum_{ij=1}^{n} B_i B_j b^{ij}.$$

Zauważmy, że operator Casimira nie zależy od wyboru bazy w $\mathfrak{b}$.

Twierdzenie 20.19 (1) *Operator Casimira komutuje z* $\mathfrak{g}$.

(2) $\mathrm{Tr}\mathcal{C}_{\mathfrak{b}} = \dim \mathfrak{b}$, *w szczególności* $\mathcal{C}_{\mathfrak{b}} \neq 0$.

(3) *Jeśli* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *i algebra* $\mathfrak{g}$ *działa nieprzywiedlnie w* $\mathcal{V}$, *to* $\mathcal{C}_{\mathfrak{b}} = \frac{\dim \mathfrak{b}}{\dim \mathcal{V}} \mathbb{1}$.

Dowód. (1). Niech $A \in \mathfrak{g}$. Z tego, że $\mathfrak{b}$ jest ideałem wynika, że

$$[A, B_i] = \sum_{k=1}^{n} t_i^k B_k.$$

Z niezmienniczości formy $\langle \cdot | \cdot \rangle_\rho$ wynika, że

$$\begin{aligned} 0 &= \langle [A, B_i] | B_j \rangle_\rho + \langle B_i | [A, B_j] \rangle_\rho \\ &= t_i^k b_{kj} + b_{ik} t_j^k. \end{aligned}$$

W skrótowym zapisie, $t^\# b - bt = 0$. Mnożąc przez odwrotność b z obu stron dostajemy $b^{-1} t^\# + tb^{-1} = 0$, czyli

$$0 = b^{ik} t_k^j + t_k^i b^{kj}.$$

Dlatego

$$\begin{aligned} [A, \mathcal{C}_\mathfrak{b}] &= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\rho([A, B_i]) \rho(B_j) + \rho(B_i) \rho([A, B_j]) \right) b^{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \left(t_i^k B_k B_j + B_i t_j^k B_k \right) b^{ij} \; = \; 0. \end{aligned}$$

□

20.7 Reprezentacje algebr półprostych

Stwierdzenie 20.20 *Algebry półproste Liego nie posiadają nietrywialnych reprezentacji 1-wymiarowych.*

Dowód. Jądro takiej reprezentacji musiałoby być ideałem kowymiaru 1. Musiałby istnieć zatem ideał wymiaru 1, który byłby z konieczności przemienny, co jest niemożliwe. □

Stwierdzenie 20.21 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Wtedy $\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna $\Leftrightarrow$ wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne algebry $\mathfrak{g}$ są jednowymiarowe.*

Dowód. $\Rightarrow$. Niech $\pi : \mathfrak{g} \to L(\mathcal{V})$ będzie nietrywialną reprezentacją zespoloną. Wtedy istnieje $v \in \mathcal{V}$ i $\alpha \in \mathfrak{g}^\#$ takie, że $Av = \alpha(A)v$. Zatem $\mathbb{C}v$ jest podprzestrzenią niezmienniczą. Zatem jeśli $\mathcal{V}$ jest nieprzywiedlna, to $\dim \mathcal{V} = 1$.

$\Leftarrow$. Niech $\mathfrak{g}$ nie będzie rozwiązalna. Niech $\mathfrak{r}$ będzie radykałem $\mathfrak{g}$. Wtedy $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ jest nietrywialną algebrą półprostą. Niech $\mathfrak{g}/\mathfrak{r} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \mathfrak{a}_n$ będzie rozkładem na proste składniki. Wtedy $(\mathfrak{g}/\mathfrak{r})/(\mathfrak{a}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n) \simeq \mathfrak{a}_1$. Reprezentacja dołączona $\mathfrak{a}_1 \to gl(\mathfrak{a}_1)$ jest nieprzywiedlna i $\dim \mathfrak{a}_1 > 1$. Podnosi się ona do reprezentacji (oczywiście, również nieprzywiedlnej) alfgebry $\mathfrak{g}$. □

Mówimy, że reprezentacja jest *półprosta*, jeśli dla każdej podprzestrzeni niezmienniczej znajdziemy dopełniającą podprzestrzeń niezmienniczą.

Stwierdzenie 20.22 *Jeśli reprezentacja jest półprosta i skończenie wymiarowa, to daje się rozłożyć na sumę prostą reprezentacji nierzywiedlnych.*

Każda niezerowa przemienna algebra posiada niepółproste reprezentacje. Np

$$\mathbb{K} \ni \alpha \mapsto \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 20.23 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mathfrak{g}$ *jest półprosta.*

(2) *Każda reprezentacja* $\mathfrak{g}$ *jest półprosta.*

Dowód. (2)$\Rightarrow$(1). Niech $\mathfrak{b}$ będzie ideałem przemiennym w $\mathfrak{g}$. Reprezentacja $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g})$ jest półprosta. $\mathfrak{b}$ jest podprzestrznią niezmienniczą. Zatem istnieje rozkład na podprzestrzenie niezmiennicze $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. Niezmienniczość względem ad oznacza bycie ideałem. Czyli $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Więc reprezentacje $\mathfrak{b}$ podnoszą się do reprezentacji $\mathfrak{g}$. Każda niezerowa przemienna algebra posiada niepółproste reprezentacje.

(1)$\Rightarrow$(2) Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego.

Krok 1. Załóżmy, że $\mathcal{Y}$ jest podprzestrzenią niezmienniczą kowymiaru 1 dla reprezentacji $\rho : \mathfrak{g} \to gl(\mathcal{X})$ i ρ obcięta do $\mathcal{Y}$ jest nieprzywiedlna. Pokażemy, że istnieje rozkład $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{T}$ na podprzestrzenie niezmiennicze.

Najpierw zauważmy, ża Stw. 20.20 pokazuje, że reprezentacja ilorazowa na $\mathcal{X}/\mathcal{Y}$ jest zerowa. Zatem $\rho(\mathcal{X}) \subset \mathcal{Y}$.

Oznaczmy ograniczenie ρ do $\mathcal{Y}$ przez ρ_0. Jeśli $\rho_0 = 0$, to $\rho(\mathfrak{g})\rho(\mathfrak{g})\mathcal{X} \subset \rho(\mathfrak{g})\mathcal{Y} = \{0\}$. Więc $\rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])\mathcal{X} = \{0\}$. Z półprostoty $\mathfrak{g}$ wynika, że $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, więc $\rho = 0$

Załóżmy więc, że $\rho_0 \neq 0$. Niech $\mathfrak{a} := \mathrm{Ker}\rho_0$. Z półprostoty $\mathfrak{g}$ wynika, że istnieje ideał $\mathfrak{b} \neq \{0\}$ taki, że $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. Reprezentacja ρ_0 (czyli też ρ) ograniczona do $\mathfrak{b}$ jest injektywna. Zatem forma śladowa na $\mathfrak{b}$

$$\langle A|B\rangle_\rho = \mathrm{Tr}\ \rho(A)\rho(B), \quad A, B \in \mathfrak{b},$$

jest nieosobliwa. Niech $\mathcal{C}_{\rho(\mathfrak{b})}$ będzie operatorem Casimira dla ideału $\rho(\mathfrak{b})$. Wtedy $\mathcal{C}_{\rho_0(\mathfrak{b})} = \mathcal{C}_{\rho(\mathfrak{b})}\Big|_{\mathcal{Y}}$ jest operatorem Casimira dla ideału $\rho_0(\mathfrak{b})$. Mamy $\mathrm{Tr}\mathcal{C}_{\rho_0(\mathfrak{b})} = \dim \mathfrak{b} \neq 0$,

$$\mathcal{C}_{\rho_0(\mathfrak{b})}\rho_0(A) = \rho_0(A)\mathcal{C}_{\rho_0(\mathfrak{b})}\rho_0(A), \quad A \in \mathfrak{g}.$$

Reprezentacja ρ_0 jest nieprzewiedlna, więc $\mathcal{C}_{\rho_0(\mathfrak{b})}$ jest skalarny. Więc $\mathrm{Ker}\mathcal{C}_{\rho_0(\mathfrak{b})} = \{0\}$. Obraz $\mathcal{C}_{\rho(\mathfrak{b})}$ leży w $\mathcal{Y}$. Więc $\mathcal{C}_{\rho(\mathfrak{b})}$ musi mieć nietrywialne jądro, które jest podprzestrzenią niezmienniczą dopełniającą do $\mathcal{Y}$.

Krok 2. Tak jak w Kroku 1, z tą różnicą, że nie zakładamy nieprzywiedlności ρ na $\mathcal{Y}$.

Stosujemy indukcję względem wymiaru $\mathcal{X}$. Niech $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Y}$ będzie nieprzywiedlną niezerową podprzestrzenią ρ-niezmienniczą. Rozważmy reprezentację ilorazową ρ' na $\mathcal{X}' := \mathcal{X}/\mathcal{Z}$ z podprzestrzenią niezmienniczą $\mathcal{Y}' := \mathcal{Y}/\mathcal{Z}$. Mamy $\dim \mathcal{X}' < \mathcal{X}$, $\dim \mathcal{X}'/\mathcal{Y}' = 1$. Zatem z założenia indukcyjnego wynika rozkład $\mathcal{X}' = \mathcal{Y}' \oplus \mathcal{R}'$ na sumę prostą podprzestrzeni ρ'-niezmienniczych. Niech $\mathcal{Y}, \mathcal{T}$ będą przeciwobrazami $\mathcal{Y}', \mathcal{T}'$ względem kanonicznej projekcji $\mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{Z}$. Wtedy, korzystając z tego, że $\rho(\mathfrak{g})\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$, dostajemy rozkład $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{T}$ na podprzestrzenie ρ-niezmiennicze.

Krok 3. Pokażemy, że dowolna reprezentacja jest półprosta.

Rozważmy reprezentację $\tau : \mathfrak{g} \to gl(\mathcal{V})$ i podprzestrzeń niezmienniczą $\mathcal{W}$. Zdefiniujmy nową reprezentację $\sigma : \mathfrak{g} \to gl(gl(\mathcal{V}))$

$$\sigma(A) := \mathrm{ad}(\tau(A)), \quad A \in \mathfrak{g}.$$

Niech

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &:= \{B \in gl(\mathcal{V}) \ : \ B\mathcal{V} \subset \mathcal{W}, \ B\Big|_{\mathcal{W}} = \lambda \mathbb{1}_{\mathcal{W}}\}, \\ \mathcal{N} &:= \{B \in gl(\mathcal{V}) \ : \ B\mathcal{V} \subset \mathcal{W}, \ B\Big|_{\mathcal{W}} = 0\}. \end{aligned}$$

Jeśli wprowadzimy dowolny rozkład $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{U}$, to elementy $\mathcal{M}$ mają rozkład

$$B = \begin{bmatrix} \lambda \mathbb{1} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oczywiście, $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$, $\dim \mathfrak{M}/\mathfrak{N} = 1$. Niech $A \in \mathfrak{g}$. Mamy

$$\tau(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \sigma(A)B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \mathbb{1} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda \mathbb{1} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a_{11}b_{12} - \lambda a_{12} - b_{12}a_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zatem $\sigma(\mathfrak{g})\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$. Ograniczając σ do $\mathfrak{M}$ dostajemy reprezentację spełniającą założenia Kroku 2. Zatem $\mathcal{M} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{T}$, gdzie $\mathcal{T}$ jest niezmiennicze. Niech B będzie niezerowym elementem $\mathcal{T}$. Wtedy

$$B = \begin{bmatrix} \lambda \mathbb{1} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda \neq 0.$$

Zatem $\mathrm{Ker}B \cap \mathcal{W} = \{0\}$. Mamy $B\mathcal{V} = \mathcal{W}$, dlatego $\dim \mathrm{Ker}B + \dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{V}$. Zatem $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathrm{Ker}B$. Mamy

$$\sigma(A)B = 0, \quad A \in \mathfrak{g},$$

Zatem

$$\tau(A)B = B\tau(A), \quad A \in \mathfrak{g}.$$

Stąd $\tau(A)\mathrm{Ker}B \subset \mathrm{Ker}B$. Czyli $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathrm{Ker}B$ jest rozkładem na podprzestrzenie τ-niezmiennicze.
$\square$

20.8 Różniczkowania półprostej algebry Liego

Stwierdzenie 20.24 *Niech $\mathfrak{a}$ będzie półprostym idałem algebry Liego $\mathfrak{g}$. Wtedy $\mathfrak{a}$ jest ideałem charakterystycznym.*

Dowód. Mamy $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}] = \mathfrak{a}$. Niech $\mathcal{D} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Wtedy

$$\mathcal{D}\mathfrak{a} = \mathcal{D}[\mathfrak{a},\mathfrak{a}] = [\mathcal{D}\mathfrak{a},\mathfrak{a}] + [\mathfrak{a},\mathcal{D}\mathfrak{a}] \subset [\mathfrak{g},\mathfrak{a}] + [\mathfrak{a},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}.$$

□

Stwierdzenie 20.25 *Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią zespoloną i $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego. Załóżmy, że*

(1) $\mathfrak{g}$ *nie posiada nietrywialnych niezmienniczych podprzestrzeni*

(2) $\mathbb{1} \notin \mathfrak{g}$.

Wtedy $\mathfrak{g}$ jest półprosta.

Dowód. Załóżmy, że $\mathfrak{g}$ posiada ideał rozwiązalny $\mathfrak{a}$. Na mocy Tw. Liego istnieje funkcjonał pierwiastkowy $\alpha \in \mathfrak{a}^{\#}$ taki, że

$$\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{a}) := \{v \in \mathcal{V} \ : \ Av = \alpha(A)v, \quad A \in \mathfrak{a}\} \neq \{0\}.$$

Ze Stwierdzenia 20.8 wynika i tego, że $\mathfrak{a}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$, wynika, że $\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{a})$ jest podprzestrzenią niezmienniczą dla $\mathfrak{g}$. Zatem z (1), $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{a})$. Stąd $A = \alpha(A)\mathbb{1}$, $A \in \mathfrak{a}$. Z (2) wynika, że $\alpha = 0$. Więc $\mathfrak{a} = \{0\}$, co oznacza, że $\mathfrak{g}$ jest półprosta. □

Lemat 20.26 *Jeśli $\mathfrak{g}$ jest półprosta, a $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$ jej rozkładem na proste ideały, to* $\mathrm{Der}\mathfrak{g} = \mathrm{Der}\mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Der}\mathfrak{a}_n$.

Dowód. Inkluzja $\subset$ jest oczywista.

Niech $\mathcal{D} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Ze Stw. 20.24 wynika, że ideały $\mathfrak{a}_i$ są niezmiennicze względem $\mathcal{D}$. Zatem $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{D}_n$. □

Twierdzenie 20.27 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego. Wtedy* $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ *jest izomorfizmem.*

Dowód. Jądro homomorfizmu dołączonego jest centrum. Centrum jest zerowe. Zatem ad jest injekcją.

Pokażmy surjektywność ad.

Załóżmy najpierw, że $\mathfrak{g}$ jest prosta. $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ jest podalgebrą w $gl(\mathfrak{g})$ nie zawierającą identyczności i nie posiadającą podprzestrzeni niezmienniczych. Dlatego, na podstawie Stwierdzenia 20.25 wnioskujemy, że $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ jest półprosta.

Jeśli $\mathfrak{g}$ jest półprosta, i $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$ jej rozkładem na proste ideały, to na mocy Lematu 20.26, $\mathrm{Der}\mathfrak{g} = \mathrm{Der}\mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Der}\mathfrak{a}_n$. Zatem $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ jest półproste.

$\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ jest ideałem w $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Z półprostoty $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ wynika, że istnieje ideał $\mathfrak{h}$ w $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ taki, że $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}$. Niech $\mathcal{D} \in \mathfrak{h}$, $A \in \mathfrak{g}$. Wtedy

$$0 = [\mathcal{D}, \mathrm{ad}(A)] = \mathrm{ad}(\mathcal{D}A).$$

Z injektywności ad wynika, że $\mathrm{ad}(\mathcal{D}A) = 0$. To implikuje $\mathcal{D}A = 0$. Zatem $\mathcal{D} = 0$. Czyli, $\mathfrak{h} = 0$. $\square$

21 Nilpotentne algebry Liego

21.1 Struktura endomorfizmu liniowego

Niech $A \in L(\mathcal{V})$, gdzie $\mathcal{V}$ jest skończenie wymiarowa zespolona.

Twierdzenie 21.1 *Niech $\lambda \in \mathbb{C}$ Następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mathrm{Ker}(\lambda \mathbb{1} - A) \neq \{0\}$.

(2) $\mathrm{Ran}(\lambda \mathbb{1} - A) \neq \mathcal{V}$.

(3) $\det(\lambda \mathbb{1} - A) = 0$.

Zbiór λ spełniających powyższe warunki nazywamy *spektrum* operatora A i oznaczamy $\mathrm{spec}A$.

Mówimy, że D jest *półprosty* (*diagonalizowalny*), gdy posiada bazę złożoną z wektorów własnych. Czyli jeśli $\mathrm{spec}D = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, to $\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(\lambda_i \mathbb{1} - D)$ i względem tego rozkładu $D = \bigoplus_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbb{1}_i$.

Mówimy, że N jest *nilpotentny*, gdy dla pewnego p, $N^p = 0$. Najmniejszą taką liczbę, że $N^p = 0$ nazywamy jego *stopniem nilpotencji.*

Twierdzenie 21.2 *Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią nad $\mathbb{C}$. Wtedy istnieje jednoznaczny rozkład $A = D + N$ na część półprostą i nilpotentną takie, że $DN = ND$.*

Dowód. Niech $\lambda \in \mathrm{spec}A$. Ciąg podprzestrzeni $\mathrm{Ker}(A - \lambda_i)^j$ jest rosnący, więc się stabilizuje dla dostatecznie dużych j. Niech p będzie najmniejszą liczbą taką, że $\mathrm{Ker}(A - \lambda)^p = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i)^{p+1}$. Zdefiniujmy wtedy

$$\mathcal{V}^\lambda(A) := \mathrm{Ker}(A - \lambda)^p = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathrm{Ker}(A - \lambda)^j.$$

Pokazujemy wtedy, że $\mathcal{V} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec}A} \mathcal{V}^\lambda(A)$. Kładąc $D = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec}A} \lambda$ i $N := A - D$ dostajemy rozkład. $\square$

Operator N na n wymiarowej przestrzeni taki, że $N^{p-1} \neq 0$ i $N^p = 0$ nazywamy *elementarnym operatorem nilpotentnym p-tego stopnia.* Każdy taki operator można w odpowiedniej bazie przedstawić w postaci macierzy z jedynkami bezpośrednio nad diagonalą, którą oznaczymy N_p.

Twierdzenie 21.3 *Jeśli N jest nilpotentny, to istnieje rozkład $\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{V}_i$ taki, że N zachowuje $\mathcal{V}_i$ i $N\Big|_{\mathcal{V}_i}$ jest elementarnym operatorem nilpotentnym.*

Twierdzenie 21.4 *Niech $BD = DB$. Wtedy B zachowuje rozkład na podprzestrzenie własne operatora D.*

Twierdzenie 21.5 *Niech $\mathbb{R} \ni t \mapsto \phi(t) \in gl(\mathcal{V})$ będzie reprezentacją algebr Liego. Wtedy reprezentację możemy rozłożyć na nierozkładalne składowe postaci $t \mapsto t(\lambda \mathbb{1} + N_k)$.*

Twierdzenie 21.6 (1) *Niech $N \in L(\mathcal{V})$ będzie nilpotentny. Wtedy $\mathrm{ad}_N \in L(L(\mathcal{V}))$ też.*

(2) *Niech $D \in L(\mathcal{V})$ będzie nilpotentny. Wtedy $\mathrm{ad}_D \in L(L(\mathcal{V}))$ też.*

(3) *Niech $A \in L(cV)$ i niech $A = B + N$ będzie rozkładem na komutujące ze sobą operator półprosty i nilpotentny. Wtedy $\mathrm{ad}_A = \mathrm{ad}_D + \mathrm{ad}_N$ jest również takim rozkładem.*

Stwierdzenie 21.7 *Niech $A, B \in L(\mathcal{V})$. Jeśli istnieje k takie, że $\mathrm{ad}(A)^k B = 0$, to B zachowuje $\mathcal{V}^\lambda(A)$.*

Dowód. Niech
$$\mathcal{V}^\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda)^m \ni x.$$

Załóżmy, że teza zachodzi, jeśli k zastąpimy przez $k - 1$. Mamy
$$(A - \lambda)^n Bx = \sum_{i=1}^{n} (A - \lambda)^j [B, A](A - \lambda)^{n-j+1} x. \tag{21.120}$$

Mamy $\mathrm{ad}(A)^{k-1}[B, A] = 0$. Zatem na mocy założenia indukcyjnego, $[B, A]$ zachowuje $\mathrm{Ker}(A - \lambda)^m$.

Jeśli $n = 2m+1$, to w sumie (21.120) wszystkie składniki są równe zero, bo albo $n-j-1 \geq m$, i wtedy $(A - \lambda)^{n-j+1} x = 0$, albo $j \geq m$, i wtedy $y = [B, A](A - \lambda)^{n-j+1} x \in \mathrm{Ker}(A - \lambda)^m$, więc $(A - \lambda)^j y = 0$. □

Stwierdzenie 21.8 (1) *Niech $D \in gl(\mathcal{V})$ będzie półprosty. Wtedy $\mathrm{ad}(D) \in gl(gl(\mathcal{V}))$ jest półprosty.*

(2) *Niech $N \in gl(\mathcal{V})$ będzie półprosty. Wtedy $\mathrm{ad}(N) \in gl(gl(\mathcal{V}))$ jest półprosty.*

Dowód. (1) Niech $e_1, \ldots, e_n$ będzie bazą taką, że $De_i = \lambda_i e_i$. Wtedy
$$\mathrm{ad}(D)|e_i\rangle\langle e_j| = (\lambda_i - \lambda_j)|e_i\rangle\langle e_j|.$$

(2) Niech $N^p = 0$. Wtedy $\mathrm{ad}(N)^{2p-1} = 0$. □

Stwierdzenie 21.9 *Niech $A = S + N$ będzie rozkładem $A \in L(\mathcal{V})$ na część półprostą i nilpotentną.*

(1) $\mathrm{ad}(A) = \mathrm{ad}(S) + \mathrm{ad}(N)$ *jest kanonicznym rozkładem* $\mathrm{ad}(A) \in gl(gl(\mathcal{V}))$ *na część półprostą i nilpotentną.*

(2) *Niech* $0 = [B, A]$. *Wtedy* $0 = [B, S] = [B, N]$.

Dowód. (1) Sprawdzamy, że $\mathrm{ad}(S)$ komutuje z $\mathrm{ad}(N)$.

(2) Istnieje wielomian s taki, że $S = s(A)$. Dlatego też, istnieje wielomian $\tilde{s}$ taki, że $\mathrm{ad}(S) = \tilde{s}(\mathrm{ad}(A))$. □

21.2 Twierdzenie Engela

Twierdzenie 21.10 *Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią zespoloną i $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego składającą się z operatorów nilpotentnych. Wtedy*

(1) *(***Twierdzenie Engela***) 0 jest funkcjonałem pierwiastkowym dla $\mathfrak{g}$, czyli istnieje $v \in \mathcal{V}$, $v \neq 0$ taki, że $Av = 0$, $A \in \mathfrak{g}$.*

(2) *Istnieje baza w $\mathcal{V}$ dla której $\mathfrak{g}$ jest podalgebrą macierzy ściśle górnotrójkątnych.*

(3) *$\mathfrak{g}$ jest nilpotentna.*

Lemat 21.11 *Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią zespoloną. Niech $\mathfrak{A} \subset L(\mathcal{V})$ będzie algebrą łączną składającą się z operatorów nilpotentnych. Wtedy istnieje $v \in \mathcal{V}$, $v \neq 0$ taki, że $Av = 0$, $A \in \mathfrak{A}$.*

Dowód. Można założyć, że $\mathfrak{A} \neq \{0\}$. Pokażemy najpierw, że $\mathfrak{A}$ posiada nietrywialną podprzestrzeń niezmienniczą. Załóżmy, że tak nie jest. Znajdziemy $y \in \mathcal{V}$, $B \in \mathfrak{A}$ takie, że $z := By \neq 0$. Wedy $\mathfrak{A}z$ jest niezerową podprzestrzenią niezmienniczą. Zatem $\mathfrak{A}z = \mathcal{V}$. Stąd istnieje $C \in \mathfrak{A}$ taki, że $Cz = y$. Czyli $CBy = y$, co oznacza, że CB nie jest nilpotentny. Ale $CB \in \mathfrak{A}$ (bo $\mathfrak{A}$ jest algebrą) – sprzeczność.

Stosując teraz indukcję względem wymiaru dostajemy jednowymiarową podprzestrzeń niezmienniczą. Z powodu nilpotentności, elementy $\mathfrak{A}$ muszą się na niej zerować. □

Lemat 21.12 *Niech $\mathfrak{A}$ będzie algebrą łączną generowaną przez algebrę Liego $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$. Wtedy dla każdego $C \in \mathfrak{A}$ istnieją $A_1, \dots, A_k \in \mathfrak{g}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ i $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ takie, że*

$$C = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i^{n_i}. \tag{21.121}$$

Dowód. Każdy element $\mathfrak{A}$ jest kombinacją liniową wyrażeń postaci.

$$B_1 \cdots B_n, \qquad B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{g}. \tag{21.122}$$

Wyrażenia typu (21.122) nazwiemy wyrażeniami długości n.

Niech $\phi \in \mathfrak{A}^\#$ zeruje się na wyrazach postaci (21.121). Trzeba pokazać, że $\phi = 0$. Pokażemy indukcyjnie, że ϕ zeruje się na wyrażeniach długości n

Załóżmy, że jest to prawda dla $n-1$. Oczywiście,

$$\phi\left(\sum_{\sigma\in S_n} B_{\sigma(1)}\cdots B_{\sigma(n)}\right) = \partial_{t_1}\ldots\partial_{t_n}\phi\left((t_1B_1+\cdots+t_nB_n)^n\right)\Big|_{t_1=\cdots=t_n=0} = 0. \tag{21.123}$$

Ale

$$\sum_{\sigma\in S_n} B_{\sigma(1)}\cdots B_{\sigma(n)} = n!B_1\cdots B_n + C$$

gdzie C jest kombinacją liniową wyrażeń długości $\leq n-1$. Więc $\phi(B_1\cdots B_n)=0$. □

Lemat 21.13 *Niech* $\dim\mathcal{V}=n$ *i* $A\in L(\mathcal{V})$*. Wtedy natępujące warunki są równoważne:*

(1) *A jest nilpotentny.*

(2) $\mathrm{Tr}A^k=0,\ k=1,\ldots,n.$

Dowód. (1)⇒(2) jest oczywisty.

(2)⇒(1). Niech $\mathrm{spec}A=\{\lambda_1,\ldots\lambda_k\}$ z krotnościami $m_1,\ldots,m_k$. Wtedy (2) oznacza

$$\sum_{i=1}^k m_i\lambda_i^j=0,\quad j=1,\ldots,n. \tag{21.124}$$

Połóżmy $\mu_i:=m_i\lambda_i$. (21.124) implikuje

$$\sum_{i=1}^k \mu_i\lambda_i^j=0,\quad j=0,\ldots,m-1. \tag{21.125}$$

Macierz $[\lambda_i^j]$ to macierz Vandermonda z wyznacznikiem $\prod\limits_{i>j}(\lambda_i-\lambda_j)$. Istnienie niezerowego rozwiązania (21.125) oznacza, że $\prod\limits_{i>j}(\lambda_i-\lambda_j)=0$, czyli wszystkie λ_i są równe jakiemuś λ, Ale wtedy $\mathrm{Tr}A^k=n\lambda^k=0$, więc $\lambda=0$. Zatem (21.125) ma tylko zerowe rozwiązanie, zatem $\lambda_i=0$. □

Lemat 21.14 *Niech* $\mathfrak{A}\subset L(\mathcal{V})$ *będzie algebrą łączną. Jeśli* $\mathrm{Tr}A=0$*,* $A\in\mathfrak{A}$*, to wszystkie elementy* $\mathfrak{A}$ *są nilpotentne.*

Dowód. Natychmiastowa konsekwencja z Lematu 21.13. □

Lemat 21.15 *Niech* $\mathfrak{A}\subset L(\mathcal{V})$ *będzie algebrą łączną generowaną przez algebrę Liego* $\mathfrak{g}$ *składającą się z operatorów nilpotentnych. Wtedy wszystkie elementy* $\mathfrak{A}$ *są nilpotentne.*

Dowód. Potęgi operatorów nilpotentnych są nilpotentne. Więc z Lematu 21.12 wynika, że $\mathfrak{A}$ składa się ona z kombinacji liniowych operatorów nilpotentnych. Wobec tego, wszystkie operator w $\mathfrak{A}$ mają ślad równy 0. Wystarczy więc zastosować Lemat 21.14. □

Dowód Twierdzenia 21.10. (1) Niech $\mathfrak{A}$ będzie algebrą łączną generowaną przez $\mathfrak{g}$. Z lematu 21.11 wynika, że istnieje wspólny zerowy wektor własny dla $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{g}$.

(1) implikuje (2) przez indukcję.

(2) pociąga za sobą (3). □

21.3 Przestrzenie pierwiastkowe algebry nilpotentnej

Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią zespoloną a $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego. Dla $\alpha \in \mathfrak{g}^{\#}$ definiujemy

$$\mathcal{V}_j^{\alpha}(\mathfrak{g}) := \bigcap_{A\in\mathfrak{g}} \mathrm{Ker}(A - \alpha(A)\mathbb{1})^j.$$

Jest to rodzina rosnąca ze względu na j. Definiujemy

$$\mathcal{V}^{\alpha}(\mathfrak{g}) := \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{V}_j^{\alpha}(\mathfrak{g}).$$

Przez spec $\mathfrak{g}$ oznaczamy zbiór pierwiastków algebry $\mathfrak{g}$, to znaczy $\alpha \in \mathfrak{g}^{\#}$ dla których $\mathcal{V}^{\alpha}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$.

Twierdzenie 21.16 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie nilpotentną algebrą Liego. Wtedy*

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{spec}\ \mathfrak{g}} \mathcal{V}^{\alpha}(\mathfrak{g}).$$

Dla $A \in \mathfrak{g}$ zdefiniujmy

$$A_{\mathrm{nil}} := A - \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{spec}\ \mathfrak{g}} \alpha(A)\mathbb{1}_{\mathcal{V}^{\alpha}(\mathfrak{g})}.$$

Wtedy $\mathfrak{g} \ni A \mapsto A_{\mathrm{nil}} \in gl(\mathcal{V})$ jest reprezentacją o wartościach w operatorach nilpotentnych. Poza tym, $\alpha([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że wszystkie $A \in \mathfrak{g}$ mają widmo jednopunktowe. Kładąc

$$\langle\alpha|A\rangle := \frac{\mathrm{Tr}A}{\dim\mathcal{V}}$$

mamy wtedy spec$A = \{\langle\alpha|A\rangle\}$. Więc $A - \langle\alpha|A\rangle$ ma widmo zerowe, więc są nilpotentne.

Niech istnieje $A \in \mathfrak{g}$ i spec$A = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Wtedy na mocy Tw. 21.7, każdy $B \in \mathfrak{g}$ zachowuje rozkład $\mathcal{V} = \overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathcal{V}^{\lambda_i}(A)$. Zatem możemy zastosować skończoną indukcję. □

21.4 Przestrzenie pierwiastkowe w algebrach Liego

Stwierdzenie 21.17 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego i $\mathcal{D} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Niech*

$$\mathfrak{g}^{\lambda}(\mathcal{D}) := \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathrm{Ker}(\mathcal{D} - \lambda)^j$$

tak że

$$\mathfrak{g} = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathfrak{g}^{\lambda_i}(\mathcal{D}).$$

Wtedy

$$\left[\mathfrak{g}^{\lambda}(\mathcal{D}), \mathfrak{g}^{\mu}(\mathcal{D})\right] \subset \mathfrak{g}^{\lambda+\mu}(\mathcal{D}).$$

Dowód. Iterując

$$(\mathcal{D}-\lambda-\mu)[A,B] = [(\mathcal{D}-\lambda)A,B] + [A(\mathcal{D}-\mu)B],$$

dostajemy

$$(\mathcal{D}-\lambda-\mu)^n[A,B] = \sum \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right) \left[(\mathcal{D}-\lambda)^j A, (\mathcal{D}-\mu)^{n-j} B\right].$$

Więc jeśli $(\mathcal{D}-\lambda)^k A = 0$ i $(\mathcal{D}-\mu)^m B = 0$, to $(\mathcal{D}-\lambda-\mu)^{k+m}[A,B] = 0$. □

Twierdzenie 21.18 *Niech* $\mathfrak{g}$ *będzie algebrą Liego. Niech* $\mathfrak{h}$ *będzie nilpotentną algebrą Liego i* $\rho : \mathfrak{h} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ *reprezentacją. Niech*

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{spec}\rho} \mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h})$$

będzie rozkładem na przestrzenie pierwiastkowe. Wtedy

$$[\mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h}), \mathfrak{g}^\beta(\mathfrak{h})] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}(\mathfrak{h}).$$

W szczególności, możemy założyć, że $\mathfrak{h}$ jest nilpotentną podalgebrą $\mathfrak{g}$ i reprezentacja jest zadana przez

$$\mathfrak{h} \ni H \mapsto \mathrm{ad}(H) \in gl(\mathfrak{g}).$$

Wśród pierwiastków mamy wtedy 0. Oczywiście, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. Zarówno $\mathfrak{h}$ jak i $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ są podprzestrzeniami niezmienniczymi.

21.5 Algebry Cartana–przypadek ogólny

Niech $\mathfrak{a}$ będzie podalgebrą algebry Liego $\mathfrak{g}$. *Normalizatorem* $\mathfrak{a}$ nazywamy

$$\mathrm{Nor}\mathfrak{a} := \{A \in \mathfrak{g} \ : \ [A, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}\}.$$

Stwierdzenie 21.19 $\mathrm{Nor}\mathfrak{a}$ *jest największą z podalgebr algebry* $\mathfrak{g}$ *zawierającą* $\mathfrak{a}$ *jako ideał.*

Mówimy, że $\mathfrak{h}$ jest podalgebrą Cartana algebry Liego $\mathfrak{g}$, gdy

(1) $\mathfrak{h}$ jest algebrą nilpotentną.

(2) $\mathrm{Nor}\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$.

Stwierdzenie 21.20 *Niech* $\mathfrak{h}$ *będzie nilpotentą podalgebrą w* $\mathfrak{g}$. *Następujące warunki są równoważne.*

(1) $\mathfrak{h}$ *jest podalgebrą Cartana w* $\mathfrak{g}$.

(2) $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$.

Dowód. (1)$\Rightarrow$(2). Oczywiście, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. Załóżmy, że nie ma równości. Oznaczmy przez ρ reprezentację

$$\mathfrak{h} \ni H \mapsto \mathrm{ad}(H) \in gl(\mathfrak{g}).$$

Reprezentacja ρ ograniczona do $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ składa się z samych endomorfizmów nilpotentnych. Tak samo, reprezentacja ilorazowa ρ' w $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$. Na mocy Tw. Engela (Tw. 21.10), istnieje $B + \mathfrak{h} \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$, $B + \mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}$, dla którego $\rho'(\mathfrak{h})(B + \mathfrak{h}) = 0$. Oznacza to, że $B \not\in \mathfrak{h}$ i $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})B \subset \mathfrak{h}$. Zatem algebra generowana przez $\mathfrak{h}$ i B jest zawarta w normalizatorze $\mathfrak{h}$ i jest większa od $\mathfrak{h}$. Więc $\mathfrak{h}$ nie jest algebrą Cartana.

(2)$\Rightarrow$(1). Niech $C \in \mathrm{Nor}\mathfrak{h}$, $C = \sum_\alpha C_\alpha$, $C_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h})$. Dla $B \in \mathfrak{h}$ mamy $\mathrm{ad}(B)C_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h})$ i

$$\mathrm{ad}(B)C = \sum_\alpha \mathrm{ad}(B)C_\alpha \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}).$$

Dlatego $C_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$, czyli $C_\alpha = 0$, $\alpha \neq 0$. Zatem $C = C_0 \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. Czyli $\mathrm{Nor}\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. $\Box$

Stwierdzenie 21.21 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Każda jej podalgebra Cartana jest jej maksymalną podalgebrą nilpotentną.*

Dowód. Niech $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$, gdzie $\mathfrak{h}$ jest Cartana a $\mathfrak{n}$ jest nilpotentna. Rozważmy wstępujący ciąg centralny $\{0\} = \mathcal{C}_0\mathfrak{n} \subset \cdots \subset \mathcal{C}_m\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$. Niech k będzie najmniejszą z liczb dla których $\mathcal{C}_k\mathfrak{n} \not\subset \mathfrak{h}$. Niech $A \in \mathcal{C}_k\mathfrak{n}\backslash\mathfrak{h}$. Mamy

$$[A, \mathfrak{n}] \subset \mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{n} \subset \mathfrak{h},$$

zatem $\mathfrak{h}$ jest ideałem algebry $\mathfrak{a}$ generowanej przez $\mathfrak{h}$ i A. Więc $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Nor}\mathfrak{h}$. Oczywście, $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{a}$. Zatem $\mathrm{Nor}\mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}$. $\Box$

Twierdzenie 21.22 *Niech $\langle\cdot|\cdot\rangle_\mathfrak{g}$ będzie formą Killinga na algebrze Liego $\mathfrak{g}$. Niech $\mathfrak{h}$ będzie jej podalgebrą Cartana.*

(1) *Jeśli $\alpha + \beta \neq 0$, to $\mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h})$ i $\mathfrak{g}^\beta(\mathfrak{h})$ są ortogonalne względem $\langle\cdot|\cdot\rangle_\mathfrak{g}$.*

(2) *Rozkład*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{(\alpha,-\alpha)} \left(\mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}(\mathfrak{h})\right) \tag{21.126}$$

jest rozkładem na sumę prostą ortogonalnych podprzestrzeni.

Dowód. Niech $A \in \mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h})$, $B \in \mathfrak{g}^\beta(\mathfrak{h})$ i $C \in \mathfrak{g}^\gamma(\mathfrak{h})$. Wtedy

$$(\mathrm{ad}(A)\mathrm{ad}(B))^n\, C \in \mathfrak{g}^{(\alpha+\beta)n+\gamma}(\mathfrak{h}).$$

Ponieważ dla dużych n, $\mathfrak{g}^{(\alpha+\beta)n+\gamma}(\mathfrak{h}) = \{0\}$, więc $\mathrm{ad}(A)\mathrm{ad}(B)$ jest nilpotentny. Zatem

$$\langle A|B\rangle = \mathrm{Tr}\, \mathrm{ad}(A)\mathrm{ad}(B) = 0.$$

21.6 Elementy półproste i nilpotentne w półprostych algebrach Liego

Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego nad $\mathbb{C}$.

Twierdzenie 21.23 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ *jest izomorfizmem.*

Dowód. $\mathrm{Ker ad} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Dla półprostych $\mathfrak{g}$, centrum jest zerowe. Zatem ad jest injekcją.

Pokażemy teraz, że ad jest surjekcją. Niech $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \dots \mathfrak{a}_n$ będzie rozkładem na ideały proste. (...) □

Twierdzenie 21.24 *Niech $A \in \mathfrak{g}$. Wtedy istnieją jedyne elementy $S, N \in \mathfrak{g}$ takie, że $\mathrm{ad}_A = \mathrm{ad}_S + \mathrm{ad}_N$ jest kanonicznym rozkładem na część półprostą i nilpotentną. Mamy $A = S + N$.*

Dowód. Mamy rozkład $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{spec\ ad}(A)} \mathfrak{g}^\alpha(A)$. Zdefiniujmy $\mathcal{S}, \mathcal{N} \in L(\mathfrak{g})$, $\mathcal{S} = \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{spec\ ad}(A)} \alpha$, $\mathcal{N} := \mathrm{ad}(A) - \mathcal{S}$. Z tego, że $\left[\mathfrak{g}^\alpha(A), \mathfrak{g}^\beta(A)\right] = \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}(A)$, wynika, że $\mathcal{S} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Dlatego $\mathcal{N} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Z Tw. 21.23 wynika, że istnieją $S, N \in \mathfrak{g}$ takie, że $\mathcal{S} = \mathrm{ad}(S)$, $\mathcal{N} = \mathrm{ad}(N)$. □

Stwierdzenie 21.25 *Niech $A, B \in \mathfrak{g}$ i $A = S + N$ będzie kanonicznym rozkładem na część półprostą i nilpotentną. Jeśli $[A, B] = 0$, to $[S, B] = [N, B] = 0$.*

Dowód. $\mathrm{ad}(A) = \mathrm{ad}(S) + \mathrm{ad}(N)$ jest kanonicznym rozkładem na część półprostą i nilpotentną. Poza tym, $0 = \mathrm{ad}([A, B]) = [\mathrm{ad}(A), \mathrm{ad}(B)]$. Więc $0 = [\mathrm{ad}(S), \mathrm{ad}(B)] = [\mathrm{ad}(N), \mathrm{ad}(B)]$. Ponieważ ad jest izomorfizmem, więc $0 = [S, B] = [N, B]$. □

22 Struktura algebr półprostych

22.1 Podalgebra Cartana dla algebr półprostych

Twierdzenie 22.1 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego nad $\mathbb{C}$ a $\mathfrak{h}$ jej podalgebrą. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *$\mathfrak{h}$ jest algebrą Cartana.*

(2) *$\mathfrak{h}$ jest maksymalną podalgebrą przemienną i wszystkie elementy $\mathfrak{h}$ są półproste.*

Poza tym, jeśli $\langle\cdot|\cdot\rangle$ jest niezdegenerowaną formą niezmienniczą, to jej ograniczenie do $\mathfrak{h}$ jest niezdegenerowane.

Dowód. (2)⇒(1) Niech $H \in \mathfrak{h}$, $B \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. Z półprostoty H wynika, że $[H, B] = 0$. Zatem algebra generowana przez $\mathfrak{h}$ i B jest przemienna. Z maksymalności $\mathfrak{h}$ jako algebry przemiennej wynika, że $B \in \mathfrak{h}$. Więc $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. Więc $\mathfrak{h}$ jest podalgebrą Cartana.

Niech $A, B \in \mathfrak{h}$ i $A = S + N$ będzie kanonicznym rozkładem na część półprostą i nilpotentną. Z przemienności $\mathfrak{h}$ wynika $[A, B] = 0$. Zatem $[N, B] = 0$. Dlatego $(\mathrm{ad}(N)\mathrm{ad}(N))^n = \mathrm{ad}(B)^n \mathrm{ad}(N)^n = 0$. Stąd $\mathrm{ad}(N)\mathrm{ad}(N)$ jest nilpotentny. Czyli, $\langle B|N\rangle = \mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}(B)\mathrm{ad}(N) = 0$. Zatem N jest ortogonalny do $\mathfrak{h}$. Stąd $N = 0$.

(1)⇒(2) Z niezdegenerowania formy i rozkładu (21.126) wynika niezdegenerowanie formy na $\mathfrak{h}$.

Z nilpotentności $\mathfrak{h}$ i kryterium Cartana wynika, że

$$\langle C|[A,B]\rangle = 0, \quad A,B,C \in \mathfrak{h}.$$

Zatem $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$ jest ortogonalne do $\mathfrak{h}$. Z niezdegerowania formy na $\mathfrak{h}$ wynika, że $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] = \{0\}$. Zatem $\mathfrak{h}$ jest przemienna.

Niech $A \in \mathfrak{h}$ i niech $A = S + N$ będzie kanonicznym rozkładem na część półprostą i nilpotentną. .... □

22.2 Zbiór pierwiastków półprostej algebry Liego

Ustalmy zespoloną półprostą algebrę Liego $\mathfrak{g}$ z algebrą Cartana $\mathfrak{h}$. Niech $\mathcal{R} \subset \mathfrak{h}^\#$ oznacza zbiór niezerowych funkcjonałów pierwiastkowych. Dla $\alpha \in \mathcal{R}$, będziemy pisać $\mathfrak{g}^\alpha$ zamiast $\mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h})$

Dla $\alpha \in \mathfrak{h}^\#$ definiujemy $\alpha^\# \in \mathfrak{h}$ wzorem

$$\langle \alpha^\# | A\rangle = \alpha(A).$$

Niech $\mathcal{R}^\# := \{\alpha^\# \ : \ \alpha \in \mathcal{R}\}$.

Przenosimy iloczyn z $\mathfrak{h}$ na $\mathfrak{h}^\#$ przez dualność:

$$\langle \alpha|\beta\rangle := \langle \alpha^\#|\beta^\#\rangle.$$

Dla $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ definiujemy *macierz Cartana* i *macierz Coxetera*

$$\begin{aligned} M(\alpha,\beta) &:= \frac{2\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle}, \\ C(\alpha,\beta) &:= \frac{\langle\alpha|\beta\rangle}{\sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}\sqrt{\langle\beta|\beta\rangle}}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 22.2 (1) $\alpha \in \mathcal{R}$ *implikuje* $-\alpha \in \mathcal{R}$.

(2) $A_\pm \in \mathfrak{g}^{\pm\alpha}$ *implikuje* $[A_+, A_-] = \langle A_+|A_-\rangle \alpha^\#$.

(3) $\alpha \in \mathcal{R}$ *implikuje* $\langle\alpha|\alpha\rangle = \alpha(\alpha^\#) \neq 0$. *Zatem możemy zdefiniować* $H_\alpha := \frac{2\alpha^\#}{\langle\alpha|\alpha\rangle}$.

(4) *Jeśli* $A_\pm$ *są niezerowymi elementami* $\mathfrak{g}^{\pm\alpha}$, *to podalgebra Liego generowana przez* A_+, A_- *i* $\alpha^\#$ *jest izomorficzna z* $sl(2)$.

(5) $\alpha \in \mathcal{R}$ *implikuje* $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$.

(6) $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$ *implikuje*

$$\langle H_1|H_2\rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} \alpha(H_1)\alpha(H_2). \tag{22.127}$$

(7) $\mathcal{R}^\#$ *generuje liniowo* $\mathfrak{h}$.

(8) *Niech* $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$. *Wtedy* $M(\alpha,\beta)$ *jest liczbą całkowitą.*

(9) *Jeśli* $\alpha \in \mathcal{R}$, $t \in \mathbb{C}$ *i* $t\alpha \in \mathcal{R}$, *to* $t = \pm 1$.

(10) *Możliwe niezerowe wartości* $M(\alpha, \beta)$ *to*

(i) $M(\alpha,\beta) = M(\beta,\alpha) = \pm 2$, *wtedy* $C(\alpha,\beta) = \pm 1$ *i* $\beta = \pm\alpha$

(ii) $M(\alpha,\beta) = M(\beta,\alpha) = \pm 1$, *wtedy* $C(\alpha,\beta) = \pm\frac{1}{2}$ *i* α, β *mają tę samą długość.*

(iii) $M(\alpha,\beta) = \pm 2$, $M(\beta,\alpha) = \pm 1$, *wtedy* $C(\alpha,\beta) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ *i* β *jest* $\sqrt{2}$ *razy dłuższy od* α.

(iv) $M(\alpha,\beta) = \pm 3$, $M(\beta,\alpha) = \pm 1$, *wtedy* $C(\alpha,\beta) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ *i* β *jest* $\sqrt{3}$ *razy dłuższy od* α.

(11) *Niech* $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \mathcal{R}$. *Wtedy* $M(\alpha,\beta) < 0$, *istnieją* $n_\pm \in \mathbb{Z}$ *takie, że* $-M(\alpha,\beta) = n_+ - n_-$, *i*

$$\alpha + k\beta \in \mathcal{R}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n_- \leq k \leq n_+.$$

(12) $\mathcal{R}$ *jest niezmienniczy względem odbicia w hiperpłaszczyźnie prostopadłej do* $\beta \in \mathcal{R}$. *Czyli* $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ *implikuje* $\alpha - \frac{2\langle\alpha|\beta\rangle\beta}{\langle\beta|\beta\rangle} \in \mathcal{R}$.

Dowód. (1) Forma $\langle\cdot|\cdot\rangle$ jest nieosobliwa na $\mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$, oraz zerowa na $\mathfrak{g}^\alpha$ i $\mathfrak{g}^{-\alpha}$. Zatem $\dim \mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}^{-\alpha}$.

(2) Niech $H \in \mathfrak{h}$.

$$\begin{aligned} \langle [A_+, A_-]|H\rangle &= \langle A_+|[A_-, H]\rangle \\ = \langle A_+|A_-\rangle\alpha(H) &= \langle A_+|A_-\rangle\langle\alpha^\#|H\rangle. \end{aligned}$$

Zatem, $[A_+, A_-] - \langle A_+|A_-\rangle\alpha^\#$ jest ortogonalny do $\mathfrak{h}$, więc równy 0.

(3) Przypuśćmy, że $\alpha(\alpha^\#) = 0$. Niech $A_\pm \in \mathfrak{g}^{\pm\alpha}$, $\langle A_+|A_-\rangle = 1$. Wtedy $[\alpha^\#, A_\pm] = \pm\alpha(\alpha^\#)A_\pm = 0$, $[A_+, A_-] = \alpha^\#$. Zatem A_+, A_- i $\alpha^\#$ rozpinają 3-wymiarową podalgebrę nilpotentną. Rozpatrzmy reprezentację dołączoną tej podalgebry. Operator $\mathrm{ad}(\alpha^\#)$ ma na przekątnej wyrazy zerowe, więc jest nilpotentny. Ale $\alpha^\# \in \mathfrak{h}$, więc $\mathrm{ad}(\alpha^\#)$ jest półprosty. Zatem $\mathrm{ad}(\alpha^\#) = 0$, skąd $\alpha^\# = 0$, co jest niezgodne z założeniem.

(4) Mnożąc $A_\pm$ przez odpowiednie czynniki dostajemy $\langle A_+|A_-\rangle = \frac{2}{\langle\alpha^\#|\alpha^\#\rangle}$. Wtedy dostajemy $[H_\alpha, A_\pm] = \pm 2A_\pm$, $[A_+, A_-] = H_\alpha$.

(5) Załóżmy, że $\dim \mathfrak{g}^\alpha > 1$. Wtedy $\dim \mathfrak{g}^{-\alpha} > 1$. Znajdziemy zatem $A_\pm \in \mathfrak{g}^{\pm\alpha}$, $B \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ takie, że $\langle A_+|A_-\rangle = \frac{2}{\langle\alpha^\#|\alpha^\#\rangle}$ i $\langle A_+|B\rangle = 0$. May $\mathrm{ad}(A^+)B = 0$ i $\mathrm{ad}(H_\alpha)B = -2B$. Zatem B jest wektorem najwyższej wagi dla reprezentacji $\mathrm{Span}(A_+, A_-, H) \simeq sl(2,\mathbb{C})$ z wagą -2. Reprezentacja taka nie jest skończenie wymiarowa. Więc $B = 0$.

(6) Niech $H \in \mathfrak{h}$, $A \in \mathfrak{g}$. Mamy rozkład $A = A_0 + \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} A_\alpha$ i $\mathrm{ad}(H)A = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} \alpha(H)A_\alpha$. Biorąc pod uwagę, że $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$ dostajemy

$$\mathrm{Tr}\, \mathrm{ad}(H_1)\mathrm{ad}(H_2) = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} \alpha(H_1)\alpha(H_2).$$

(7) Jeśli wzór (22.127) przepiszemy jako

$$\langle H_1|H_2\rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} \langle H_1|\alpha^\#\rangle\langle\alpha^\#|H_2\rangle,$$

to widzimy, że $H \perp \mathrm{Span}\mathcal{R}^\#$ oznacza $\langle H|H\rangle = 0$.

(8) Z własności skończenie wymiarowych reprezentacji $sl(2\mathbb{C})$ wynika, że $\mathrm{ad}(H_\alpha)$ ma całkowite wartości własne. Dla $B \in \mathfrak{g}^\beta$ mamy

$$\mathrm{ad}(H_\alpha)B = \frac{2\langle\alpha^\#|\beta^\#\rangle}{\langle\alpha^\#|\alpha^\#\rangle}B.$$

(8) Niech $\beta = t\alpha$.

$$2t = \frac{2\langle\alpha^\#|\beta^\#\rangle}{\langle\alpha^\#|\alpha^\#\rangle}, \quad \frac{2}{t} = \frac{2\langle\alpha^\#|\beta^\#\rangle}{\langle\beta^\#|\beta^\#\rangle}$$

są całkowite, więc $t \in \{1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$. Wystarczy rozważyć $t = 2$.

Wybierzmy niezerowe $A_\pm$ jak w dowodzie (4) i $B_\pm \in \mathfrak{g}^{\pm 2\alpha}$. Algebra Liego $\mathrm{Span}(A_+, A_-, H) \simeq sl(2,\mathbb{C})$ działa na 5-wymiarową przestrzeń $\mathrm{Span}(A_+, A_-, B_+, B_-, H_\alpha)$ i ma w niej podprzestrzeń niezmienniczą $\mathrm{Span}(A_+, A_-, H)$. Jako algebra półprosta, ma podprzestrzeń dopełniającą 2-wymiarową, w której H_α ma wartości własne $2, -2$, co jest niemożliwe.

(9) Jeśli α i β nie są równoległe, to

$$M(\alpha, \beta)M(\beta, \alpha) = 4C(\alpha, \beta)^2 < 4.$$

Poza tym, $M(\alpha, \beta)$ i $M(\beta, \alpha)$ mają ten sam znak.

(10) Niech

$$n_+ := \sup\left\{n \ : \ \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha} \neq \{0\}\right\}, \quad n_- := \inf\left\{n \ : \ \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha} \neq \{0\}\right\}.$$

Rozważmy przestrzeń

$$\alpha := \bigoplus_{n=n_-}^{n_+} \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha}.$$

Wybierzmy niezerowe $B_\pm \in \mathfrak{g}^{\beta+n_\pm\alpha}$ oraz niech $A_\pm$ będzie jak w dowodzie (4). Mamy

$$[H_\alpha, B_\pm] = \frac{2\langle\alpha^\#|\beta^\#\rangle + 2n_\pm\langle\alpha^\#|\alpha^\#\rangle}{\langle\alpha^\#|\alpha^\#\rangle}B_\pm = (m(\alpha,\beta) + 2n_\pm)B_\pm.$$

Poza tym, $[A_\pm, B_\pm] = 0$, (bo $\mathfrak{g}^{\beta+(n_\pm\pm1)\alpha} = \{0\}$). Niech $\mathfrak{a}_\pm$ będą minimalnymi podprzestrzeniami niezmienniczymi dla $\mathrm{Span}(A_+, A_-, H) \simeq sl(2,\mathbb{C})$ zawierającymi $B_\pm$. Z teorii reprezentacji $sl(2,\mathbb{C})$ wynika, że $\dim\mathfrak{a}_- = -M(\alpha,\beta) - 2n_- + 1$, $\dim\mathfrak{a}_+ = M(\alpha,\beta) + 2n_+ + 1$. Zatem,

$$\begin{array}{rcl} \dim\mathfrak{a}_+ + \dim\mathfrak{a}_- &=& -2n_- + 2n_+ + 2 \\ = 2\dim\mathfrak{a} &>& \dim\mathfrak{a}. \end{array}$$

Zatem $\mathfrak{a}_+ \cap \mathfrak{a}_- \neq \{0\}$. więc $\mathfrak{a}_+ = \mathfrak{a}_- = \mathfrak{a}$. Poza tym, $M(\alpha,\beta) = n_- + n_+$. □

22.3 Układy pierwiastków

Niech $\mathcal{R}$ będzie układem niezerowych wektorów $\mathcal{R}$ w przestrzeni euklidesowej $\mathcal{V}$. Dla $\alpha, \beta \in \mathcal{V}$ zdefiniujmy maierz Cartana i Coxetera tak jak wyżej. Mówimy, że $\mathcal{R}$ jest *układem pierwiastków*, gdy

(1) $\mathcal{R}$ rozpina $\mathcal{V}$.

(2) $\mathcal{R}$ jest niezmienniczy względem odbicia w hiperpłaszczyźnie prostopadłej do $\beta \in \mathcal{R}$. Czyli $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ implikuje $\alpha - \frac{2\langle\alpha|\beta\rangle\beta}{\langle\beta|\beta\rangle} \in \mathcal{R}$.

(3) Macierz Cartana jest całkowitoliczbowa.

(4) $\alpha \in \mathcal{R}$ i $t\alpha \in \mathcal{R}$ implikuje $t = \pm 1$.

Twierdzenie 22.3 *Niech $\mathcal{R}$ będzie układem pierwiastków. Wtedy własności (9) i (10) Twierdzenia 22.2 są spełnione.*

22.4 Pierwiastki dodatnie

Niech $\mathcal{R}$ będzie układem pierwiastków w przestrzeni $\mathcal{V}$. Wybierzmy wektor $v_0 \in \mathcal{V}$ taki, że $\alpha(v_0) \neq 0$, $\alpha \in \mathcal{R}$. To pozwala nam podzielić $\mathcal{R}$ na dwa rozłączne podzbiory

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_+ &:= \{\alpha \in \mathcal{R} \ : \ \alpha(v_0) > 0\}, \\ \mathcal{R}_- &:= \{\alpha \in \mathcal{R} \ : \ \alpha(v_0) < 0\} = -\mathcal{R}_+. \end{aligned}$$

Mówimy, że $\alpha \in \mathcal{R}_+$ jest *nierozkładalny* (lub *prosty*), jeśli nie można go zapisać jako $\alpha = \beta + \gamma$, $\beta, \gamma \in \mathcal{R}_+$.

Mówimy, że $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}$ jest *układem fundamentalnym*, jeśli istnieje $v_0 \in \mathcal{V}$ takie, że $\mathcal{F}$ jest zbiorem pierwiastków nierozkładalnych w $\mathcal{R}$.

Twierdzenie 22.4 (1) *Jeśli $\alpha, \beta \in \mathcal{R}_+$ są nierozkładalne, to $\langle\alpha|\beta\rangle \leq 0$.*

(2) *Każdy $\alpha \in \mathcal{R}_+$ jest liniową kombinacją prostych pierwiastków z całkowitymi nieujemnymi współczynnikami.*

(3) *Zbiór prostych pierwiastów jest bazą przestrzeni $\mathcal{V}$.*

Dowód. (1) Jeśli $\alpha - \beta = \gamma \in \mathcal{R}$, to $\gamma \in \mathcal{R}_+$ lub $\gamma \in \mathcal{R}_-$. W pierwszym przypadku, $\alpha = \gamma + \beta$ nie jest pierwiastkiem prostym, w drugim $\beta = \alpha + (-\gamma)$ nie jest pierwiastkiem prostym. Zatem $\alpha - \beta \notin \mathcal{R}$. A więc, $\langle\alpha|\beta\rangle \leq 0$ wynika z Tw. 22.2.

(2) Jeśli $\alpha \in \mathcal{R}_+$ nie jest prosty, może być zapisany jako $\alpha = \beta + \gamma$, $\beta, \gamma \in \mathcal{R}_+$. Powtarzając ten krok dostajemy w końcu rozkład. Ponieważ $\{\alpha(v_0) \ : \ \alpha \in \mathcal{R}_+\}$ jest zbiorem skończonym, stanie się to po skończonej liczbie kroków.

(3) Wystarczy pokazać liniową niezależność. Załóżmy, że $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są proste i $m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n = 0$. Możemy założyć, że $m_1, \ldots, m_p \geq 0$ a pozostałe współczynniki są ≤ 0 i napisać

$$m_1\alpha_1 + \cdots + m_p\alpha_p = k_{p+1}\alpha_{p+1} + \cdots + k_n\alpha_n =: \gamma,$$

gdzie $k_{p+1}, \ldots, k_n \geq 0$. Mamy

$$0 \leq \langle\gamma|\gamma\rangle = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=p+1}^{n} m_i k_j \langle\alpha_i|\alpha_j\rangle \leq 0.$$

Zatem $\gamma = 0$. Stąd

$$0 = \gamma(v_0) = m_1\alpha_1(v_0) + \cdots + m_p\alpha_p(v_0),$$

co oznacza, że $m_i = 0$, $i = 1, \ldots, p$. Podobnie pokazujemy, że $m_j = 0$, $j = p+1, \ldots, n$. $\square$

22.5 Grupa Weyla

Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią euklidesową. Dla $\alpha \in \mathcal{V}$ definiujemy

$$S_\alpha \beta := \beta - \frac{2\langle\beta|\alpha\rangle\alpha}{\langle\alpha|\alpha\rangle\alpha}.$$

Zauważmy, że jeśli kąt między α i β jest równy θ, to $S_\alpha S_\beta$ jest obrotem o kąt 2θ w płaszczyźnie zadanej przez α, β. W szczególności, jeśli $\theta = \pi/n$, to $(S_\alpha S_\beta)^n = \mathbb{1}$.

Niech $\mathcal{R}$ będzie układem pierwiastkowym. Grupą Weyla związaną z $\mathcal{R}$ nazywamy grupę generowaną przez $\{S_\alpha \ : \ \alpha \in \mathcal{R}\}$. Oznaczamy j a przez $\mathrm{Weyl}_\mathcal{R}$. Oczywiście, $\mathcal{R}$ jest zbiorem na którym działa $\mathrm{Weyl}_\mathcal{R}$.

Mówimy, że $\mathcal{C}$ jest *komórką Weyla*, jeśli jest domknięciem składowej spójnej

$$\mathcal{V} \backslash \bigcup_{\alpha \in \mathcal{R}} \pi_\alpha,$$

gdzie $\pi_\alpha := \{\beta \in \mathcal{V} \ : \ \langle\beta|\alpha\rangle = 0\}$. Mówimy, że π_α jest *ścianą komórki Weyla* $\mathcal{C}$, jeśli jej otwarta niepusta część zawarta w brzegu $\mathcal{C}$. Wtedy α ma określony znak na $\mathcal{C}$.

Twierdzenie 22.5 (1) *Dla każdej pary* $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ *komórek Weyla istnieje dokładnie jeden* $W \in \mathrm{Weyl}_\mathcal{R}$ *taki, że* $W\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$.

(2) *Niech* $\mathcal{C}$ *będzie komórką Weyla. Wtedy*

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}) := \{\alpha \in \mathcal{R} \ : \ \pi_\alpha \text{ jest ścianą } \mathcal{C} \quad \text{i} \quad \alpha \geq 0 \quad \text{na } \mathcal{C}\}$$

jest układem fundamentalnym.

(3) *Niech* $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}$ *będzie układem fundamentalnym. Wtedy*

$$\mathcal{C}(\mathcal{F}) := \{\beta \in \mathcal{V} \ : \ \langle\beta|\alpha\rangle \geq 0, \ \alpha \in \mathcal{F}\}$$

jest komórką Weyla.

(4) *Niech* $\alpha \in \mathcal{R}$. *Wtedy* $\mathcal{W}\alpha = \mathcal{R}$.

22.6 Reprezentacje algebr Liego

Rozważmy reprezentację algebry Liego $\mathfrak{g}$ na przestrzeni zespolonej $\mathcal{V}$. Dla uproszczenia notacji będziemy zakładać, że $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$. Ustalmy algebrę Cartana $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. $\beta \in \mathfrak{h}^\#$ nazywamy *wagą*, gdy odpowiadająca jej *przestrzeń wagowa*

$$\mathcal{V}^\beta := \{v \in \mathcal{V} \ : \ Hv = \beta(H)v, \quad H \in \mathfrak{h}\}$$

jest niezerowa. Zbiór wag oznaczamy przez $\mathcal{W}(\mathcal{V})$. *Krotność wagi* β jest równa $m^\beta(\mathcal{V}) := \dim \mathcal{V}^\beta$.

Twierdzenie 22.6 *Niech* $\mathfrak{g}$ *będzie półprostą algebrą Liego.*

(1) *Niech* $\alpha \in \mathcal{R}$, $\beta \in \mathcal{W}(\mathcal{V})$. *Wtedy*

$$\frac{2\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle} \in \mathbb{Z}.$$

(2) *Niech* $\alpha \in \mathcal{R}$, $\beta \in \mathcal{W}(\mathcal{V})$ *Wtedy istnieją* $n_\pm \in \mathbb{Z}$ *takie, że* $-\frac{2\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle} = n_+ - n_-$, *i*

$$\alpha + k\beta \in \mathcal{R}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n_- \leq k \leq n_+.$$

(3) $\mathcal{W}(\mathcal{V})$ *jest niezmienniczy względem odbicia w hiperpłaszczyźnie prostopadłej do* $\beta \in \mathcal{R}$. *Czyli* $\alpha \in \mathcal{W}(\mathcal{V})$, $\beta \in \mathcal{R}$ *implikuje* $\alpha - \frac{2\langle\alpha|\beta\rangle\beta}{\langle\beta|\beta\rangle} \in \mathcal{W}(\mathcal{V})$.

Niech $L_\mathcal{R}$ oznacza kratę rozpiętą przez $\mathcal{R}$ – *kratę pierwiastkową*. Niech $L_\mathcal{W}$ oznacza *kratę wagową*, zadaną przez

$$L_\mathcal{W} := \left\{\beta \in \mathfrak{h}^\# \ : \ \frac{2\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle} \in \mathbb{Z},\ \alpha \in \mathcal{R}\right\}.$$

Wtedy $L_\mathcal{R}$ jest podkratą w $L_\mathcal{W}$.

23 Homotopia

23.1 Homotopia krzywych

Niech $\mathcal{X}$ będzie rozmaitością i $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$. Oznaczmy przez $K(x_0, x_1, \mathcal{X})$ zbiór krzywych (gładkich, kawałkami ciągłych) zaczynających się w x_0 i kończących się w x_1, tzn $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$.

Niech $\gamma_0, \gamma_1 \in K(x_0, x_1, \mathcal{X})$. Mówimy, że γ_0 jest homotopijnie równoważna γ_1 i piszemy $\gamma_0 \sim \gamma_1$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje funkcja ciągła $[0,1] \times [0,1] \ni (t,s) \mapsto H(t,s)$ taka, że $H(t,0) = \gamma_0(t)$ i $H(t,1) = \gamma_1(t)$.

Twierdzenie 23.1 *Homotopijna równoważność jest relacją równoważności.*

Dowód. Kładąc $H(t,s) = \gamma_0(t)$ dostajemy $\gamma_0 \sim \gamma_0$.

Kładąc $H_{10}(t,s) := H_{01}(t, 1-s)$ dostajemy $\gamma_0 \sim \gamma_1 \Rightarrow \gamma_1 \sim \gamma_0$.

Kładąc

$$H_{02}(t,s) := \begin{cases} H_{01}(t, 2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}; \\ H_{12}(t, 2s-1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

dostajemy $\gamma_0 \sim \gamma_1, \quad \gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \gamma_0 \sim \gamma_2$. $\square$

Zbiór klas homotopii krzywych zaczynających się w x_0 i kończących w x_1 oznaczany jest przez

$$\Pi(x_0, x_1, \mathcal{X}) := K(x_0, x_1, \mathcal{X})/\sim.$$

Twierdzenie 23.2 *Niech* $\mathcal{X}$ *będzie spójna. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $\Pi(x_0, x_1, \mathcal{X})$ *jest jednoelementowy dla każdego* $x_0, x_1 \in \mathcal{X}$.

(2) *Istnieje* $x_0 \in \mathcal{X}$ *taki, że* $\Pi(x_0, x_0, \mathcal{X})$ *jest jednoelementowy.*

Jeśli spełnione są warunki powyższego twierdzenia, mówimy, że zbiór $\mathcal{X}$ jest jednospójny.

23.2 Składanie krzywych i grupa homotopii

Niech $\gamma \in K(x_0, x_1, \mathcal{X})$. Definiujemy $\gamma^{-1} \in K(x_1, x_0, \mathcal{X})$.

$$\gamma^{-1}(t) := \gamma(1-t).$$

Oczywiście, jeśli $\gamma' \sim \gamma$, to $(\gamma')^{-1} \sim \gamma^{-1}$.

Niech $x_0, x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, $\gamma_0 \in K(x_0, x_1, \mathcal{X})$, $\gamma_1 \in K(x_1, x_2, \mathcal{X})$. Definiujemy $\gamma_0 \circ \gamma_1 \in K(x_0, x_2, \mathcal{X})$:

$$\gamma_0 \circ \gamma_1(t) := \begin{cases} \gamma_0(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}; \\ \gamma_1(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Oczywiście, jeśli $\gamma_0 \sim \gamma_0'$, $\gamma_1 \sim \gamma_1'$, to

$$\gamma_0 \circ \gamma_1 \sim \gamma_0' \circ \gamma_1'.$$

Jeśli $\gamma_2 \in K(x_2, x_3, \mathcal{X})$

$$(\gamma_0 \circ \gamma_1) \circ \gamma_2 \sim \gamma_0 \circ (\gamma_1 \circ \gamma_2).$$

Jeśli przez x oznaczamy krzywą stałą równą $x \in \mathcal{X}$, to dla $x_0, x_1 \in \mathcal{X}$, $\gamma \in K(x_0, x_1, \mathcal{X})$,

$$x_0 \circ \gamma \sim \gamma \circ x_1 \sim \gamma.$$

W szczególności, dla każdego $x_0 \in \mathcal{X}$, $\Pi(x_0, x_0, \mathcal{X})$ jest grupą. Jeśli zbiór $\mathcal{X}$ jest spójny, to grupa $\Pi(x_0, x_0, \mathcal{X})$ jest izomorficzna dla różnych $x_0 \in \mathcal{X}$. Nazywamy ją grupą homotopii zbioru $\mathcal{X}$. Oznaczamy ją przez $\Pi(\mathcal{X})$.

Przykłady

(1) $\Pi(\mathbb{R}^n)$ jest grupą jednoelementową.

(2) $\Pi(S^1) = \Pi(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}) = \mathbb{Z}$ (liczba okrążeń wokół zera).

(3) Niech $a, b \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$. Wtedy $\Pi(\mathbb{R}^2 \backslash \{a, b\}) = \mathbb{F}_2$ – grupa wolna o dwóch generatorach. Jako generatory można wybrać τ_0 – okrążenie a, τ_1 – okrążenie b. Grupa $\mathbb{F}_2$ składa się z elementów następujących typów:

$$\begin{array}{ll} \tau_1^{n_p} \tau_0^{m_p} \cdots \tau_1^{n_0} \tau_0^{m_0}, & \tau_0^{m_{p+1}} \tau_1^{n_p} \cdots \tau_1^{n_0} \tau_0^{m_0}, \\ \tau_1^{n_p} \tau_0^{m_p} \cdots \tau_0^{m_1} \tau_1^{n_0}, & \tau_0^{m_{p+1}} \tau_1^{n_p} \cdots \tau_0^{m_1} \tau_1^{n_0}, \end{array} \tag{23.128}$$

gdzie $n_i, m_i \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.

(4) $\Pi(S^n)$ jest trywialna dla $n \geq 2$. Na przykład, $SU(2) \simeq S^3$ jest jednospójna.

(5) W S^n wprowadzamy naturalne działanie grupy $\mathbb{Z}_2$. Przestrzeń orbit $S^n/\mathbb{Z}_2$ nazywa się *n-wymiarową przestrznią projektywną $P\mathbb{R}^n$*. Dla $n \geq 2$ ma ona grupę homotopii $\mathbb{Z}_2$. W szczególności, $SO(3) \simeq SU(2)/\mathbb{Z}_2 \simeq P\mathbb{R}^3$ ma grupę homotopii $\mathbb{Z}_2$.

23.3 Nakrycia

Niech $\mathcal{X}$ będzie rozmaitością spójną z punktem bazowym $x_0 \in \mathcal{X}$. Mówimy, że $(\mathcal{Y}, \Phi, y_0)$ jest nakryciem $(\mathcal{X}, x_0)$, jeśli $\mathcal{Y}$ jest spójną rozmaitością, $\Phi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ jest gładkim odwzorowaniem, $\Phi(y_0) = x_0$ i dla każdego $x \in \mathcal{X}$ istnieje spójne otoczenie $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ zawierające x takie, że $\Phi^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_i \mathcal{W}_i$, gdzie $\mathcal{W}_i$ są spójne, otwarte i nieprzecinające się, oraz $\Phi\Big|_{\mathcal{W}_i}$ jest dyfeomorfizmem $\mathcal{W}_i \to \mathcal{U}$.

23.4 Nakrycie uniwersalne

Nakryciem uniwersalnym $(\mathcal{X}, x_0)$ nazywamy $(\mathcal{X}^{\mathrm{uc}}, \Phi, [x_0])$, gdzie

$$\mathcal{X}^{\mathrm{uc}} := \bigcup_{x\in\mathcal{X}} \Pi(x_0, x, \mathcal{X}),$$

$\Phi^{\mathrm{uc}} : \mathcal{X}^{\mathrm{uc}} \to \mathcal{X}$ jest zadane przez $\Phi^{\mathrm{uc}}([\gamma]) := \gamma(1)$. $\mathcal{X}^{\mathrm{uc}}$ jest wyposażone w naturalną strukturę rozmaitości. $(\mathcal{X}^{\mathrm{uc}}, \Phi^{\mathrm{uc}}, [x_0])$ jest nakryciem $(\mathcal{X}, x_0)$.

Zauważmy, że $\Pi(\mathcal{X}) = (\Phi^{\mathrm{uc}})^{-1}(x_0)$.

23.5 Nakrycie wyznaczone przez podgrupę grupy homotopii

Niech $(\mathcal{Y}, \Phi, y_0)$ będzie nakryciem $(\mathcal{X}, x_0)$. Latwo się przekonać, że Φ indukuje homomorfizm $\Pi(\mathcal{Y}, y_0) \to \Pi(\mathcal{X}, x_0)$.

Niech K będzie podgrupą $\Pi(x_0, x_0, \mathcal{X})$. Dla $x \in \mathcal{X}$, w $\Pi(x_0, z, \mathcal{X})$ wprowadzamy relację: Dla $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \Pi(x_0, x, \mathcal{X})$ piszemy $[\gamma_1] \underset{K}{\sim} [\gamma_2]$, gdy $[\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1] \in K$. Jest to relacja równoważności. Będziemy oznaczali przez $[\gamma]^K$ klasę abstrakcji γ względem tej relacji. Definiujemy

$$\Pi^K(x_0, x, \mathcal{X}) := \Pi(x_0, x, \mathcal{X})/ \underset{K}{\sim},$$

$$\mathcal{X}^K := \bigcup_{x\in\mathcal{X}} \Pi^K(x_0, x, \mathcal{X}),$$

$$\Phi^K([\gamma]^K) = \gamma(1).$$

Wtedy $(\mathcal{X}^K, \Phi^K, [x_0]^K)$ jest nakryciem $(\mathcal{X}, x_0)$, którego grupą homotopii jest K.

Mamy oczywiście naturalne odwzorowanie

$$\Phi_K : \mathcal{X}^{\mathrm{uc}} \to \mathcal{X}^K, \qquad \Phi_K([\gamma]) = [\gamma]^K,$$

spełniające związek $\Phi^K \circ \Phi_K = \Phi$. Czyli $(\mathcal{X}^{\mathrm{uc}}, \Phi_K, [x_0])$ jest nakryciem $(\mathcal{X}^K, [x_0]^K)$.

24 Globalna teoria grup Liego

24.1 Lokalna izomorficzność grup Liego

Będziemy mówili, że grupy Liego G_1 i G_2 są *lokalnie izomorficzne*, gdy istnieją otoczenia identyczności $\mathcal{O}_i \subset G_i$, $i = 1, 2$, i dyfeomorfizm $\Phi : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ taki, że $g_1, g_2, g_1g_2 \in \mathcal{O}_1$ implikuje $\Phi(g_1)\Phi(g_2) = \Phi(g_1g_2)$. Jest to relacja równoważności.

Twierdzenie 24.1 *Niech G będzie spójną grupą Liego i $\mathcal{O}$ otwartym podzbiorem zawierającym $\mathbb{1}$. Wtedy $\mathcal{O}$ generuje G, czyli*

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O} \cdots \mathcal{O}.$$

Dowód. Niech G_0 będzie prawą stroną. Jest oczywiście otwarta. Niech $g \in G_0^{\mathrm{cl}}$. Wtedy istnieje ciąg (g_n) w G_0 taki, że $g_n \to g$. Zatem $gg_n^{-1} \to \mathbb{1}$. Czyli dla dostatecznie dużych n, $gg_n^{-1} \in \mathcal{O}$. Zatem $g \in \mathcal{O}g_n \subset G_0$. Stąd G_0 jest domknięta. Ze spójności G wynika, że $G = G_0$. □

$Z(G)$ oznacza centrum grupy, tzn

$$Z(G) := \{z \in G \ : \ zg = gz, \ g \in G\}.$$

Oczywiście, każda podgrupa w centrum dowolnej grupy jest normalna.

Twierdzenie 24.2 *Niech K będzie dyskretną podgrupą normalną w spójnej grupie Liego G.*

(1) *Wtedy K jest zawarte w centrum grupy G.*

(2) *Niech $\Phi : G \to G/K$ będzie kanonicznym homomorfizmem. Wtedy $Z(G/K) = \Phi(Z(G))$. W szczególności, $Z(G/K) \simeq Z(G)/K$.*

(3) *G/K jest lokalnie izomorficzna z G.*

Dowód. (1) Niech $k \in K$. Funkcja $G \ni g \mapsto gkg^{-1} \in K$ jest ciągła. Dla $g = \mathbb{1}$ jej wartością jest k. Ponieważ K jest dyskretna a G spójna, funkcja musi być stała. Więc $gkg^{-1} = k$, $g \in G$.

(2) Oczywiście, korzystając z tego, że $K \subset Z(G)$ dostajemy $Z(G/K) \supset \Phi(Z(G))$.

Niech $b \in G$ i $\Phi(b) \in Z(G/K)$. Dla dowolnego $g \in G$,

$$\mathbb{1}_{G/K} = \Phi(g)\Phi(b)\Phi(g)^{-1}\Phi(b)^{-1} = \Phi(gbg^{-1}b^{-1}). \tag{24.129}$$

Funkcja

$$G \ni g \mapsto gbg^{-1}b^{-1} \tag{24.130}$$

jest ciągła. Na mocy (24.129), ma ona wartości w dyskretnej grupie K. G jest spójne. Więc (24.130) jest stała. Dla $g = \mathbb{1}$, jej wartością jest $\mathbb{1}$. Więc

$$gbg^{-1}b^{-1} = \mathbb{1}, \quad g \in G.$$

□

Twierdzenie 24.3 *Niech G_1 będzie lokalnie izomorficzna z G_2 i $\Phi : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ jest odwzorowaniem, o którym mowa w definicli lokalnej izomorficzności. Załóżmy, że Φ rozszerza się do homomorfizmu $\Phi : G_1 \to G_2$. Wtedy takie rozszerzenie jest jednoznacznie wyznaczone i jego jądro jest dyskretną podgrupą normalną w G_1.*

24.2 Grupa homotopii grupy Liego

Niech G będzie spójną grupą Liego. Rozważając jej grupę homotopii, zawsze będziemy przyjmować, że $\mathbb{1}$ jest punktem bazowym.

Niech G^{uc} będzie nakryciem uniwersalnym G. Wprowadzamy działanie na G^{uc}:

$$[\gamma_1][\gamma_2] := [\gamma_1\gamma_2],$$

gdzie $\gamma_1\gamma_2(t) := \gamma_1(t)\gamma_2(t)$. Niech Φ^{uc} oznacza kanoniczne rzutowanie $\Phi^{\mathrm{uc}} : G^{\mathrm{uc}} \to G$.

Twierdzenie 24.4 *G^{uc} jest grupą Liego i Φ^{uc} jest surjektywnym homomorfizmem. Dlatego, $G = G^{\mathrm{uc}}/\mathrm{Ker}\Phi^{\mathrm{uc}}$. $\Pi(G)$ można utożsamić z $\mathrm{Ker}\Phi^{\mathrm{uc}}$, która jest dyskretną podgrupą normalną, i dlatego jest zawarta w centrum G^{uc}.*

Zatem w rodzinie lokalnie równoważnych ze sobą grup Liego można wyróżnić "maksymalną" G^{uc}, która jest jednospójna.

Pouczające jest sprawdzić niezależnie, że grupa homotopii grupy Liego G jest przemienna.

Dowód. Niech $\gamma_i \in K(\mathbb{1}, \mathbb{1}, G)$. Zdefiniujmy

$$s_1(t) := \begin{cases} (2t, 0), & 0 \le t \le 1/2, \\ (1, 2t-1), & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}, \quad s_2(t) := \begin{cases} (0, 2t), & 0 \le t \le 1/2, \\ (2t-1, 0), & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Niech $\Gamma(t_1, t_2) := \gamma_1(t_1)\gamma_2(t_2)$. Wtedy $[\gamma_1] \circ [\gamma_2]$ jest reprezentowane przez $\Gamma(s_1(t))$ a $[\gamma_2] \circ [\gamma_1]$ jest reprezentowane przez $\Gamma(s_2(t))$.

$\Gamma\left((1-\theta)s_1(t) + \theta s_2(t)\right)$ jest homotopią między nimi. □

Analizę spójnych grup Liego można ograniczyć do grup spójnych jednospójnych. Niech G taka będzie. Oznaczmy przez Z centrum G.

Twierdzenie 24.5 (1) *Każda spójna grupa Liego lokalnie równoważna grupie G jest izomorficzna z G/K, gdzie K jest podgrupą dyskretną grupy Z.*

(2) *Centrum grupy G/K jest równe Z/K.*

(3) *Grupa homotopii G/K jest równa K.*

Dowód. (3) Niech $[\gamma] \in \Pi(G/K)$. Wtedy możemy podnieść γ do krzywej $\tilde{\gamma} \in K(\mathbb{1}, k, G)$, tak że przy homomorfizmie kanonicznym $\Phi : G \to G/K$ mamy $\Phi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$. Oczywiście, $k \in K$. Dostajemy w ten sposób odwzorowanie $\tilde{\Phi}([\gamma]) = k$. Occzywiście, jest to surjektywny homomorfizm. Z jednospójności $\tilde{G}$ sprawdzamy, że jest injektywny. □

W szczególności, jeśli centrum G jest dyskretne, to mamy też grupę minimalną G/Z z trywialnym centrum i grupą homotopii Z.

24.3 Rozmaitości

Niech $\mathcal{P}$ będzie rozmaitością. $\mathcal{P}$ można pokryć zbiorami otwartymi $\mathcal{O}$ i mapami $\phi_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$. Mapy $\phi_{\mathcal{O}}(p) = x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ pozwalają utożsamić $\mathcal{O}$ z otwartym podzbiorem $\phi_{\mathcal{O}}(\mathcal{O})\mathbb{R}^n$.

Niech $\mathrm{Diff}(\mathcal{P})$ oznacza zbiór dyfeomorfimów rozmaitości $\mathcal{P}$. Jest to grupa. Dla $f \in C^\infty(\mathcal{P})$ i $\Phi \in \mathrm{Diff}(\mathcal{P})$kładziemy $\Phi^\# f(p) := f(\Phi(p))$. Piszemy też $\Phi_\# := (\Phi^\#)^{-1}$. $\mathrm{Diff}(\mathcal{P}) \ni \Phi \mapsto \Phi_\#$ jest działaniem grupy.

Niech $p \in \mathcal{P}$. Standardowa definicja wektora stycznego do $\mathcal{P}$ w punkcie p mówi o klasie abstrakcji krzywych. Jeśli krzywa $t \mapsto \gamma_t \in \mathcal{P}$ spełnia zadaje wektor styczny A w $p = \gamma_0$, będziemy pisali $A_t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_0$. Przez $\mathrm{T}_p\mathcal{P}$ będziemy oznaczali przestrzeń styczną do $\mathcal{P}$ w punkcie p. Jeśli $A \in \mathrm{T}_p\mathcal{P}$, to mamy liniowe odwzorowanie $C^\infty(\mathcal{P}) \to \mathbb{C}$ oznaczane przez $A^\# f$ albo $\langle A^\# | \mathrm{d}f\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma_t)\Big|_{t=0}$, dla krzywej γ_t definiującej A.

Zbiór $\bigcup_{p \in \mathcal{P}} \mathrm{T}_p\mathcal{P}$ z naturalną strukturą rozmaitości nazywamy *wiązką styczną*. Funkcję gładką $\mathcal{P} \ni p \mapsto X(p) \in \mathrm{T}\mathcal{P}$ taką, że $X(p) \in \mathrm{T}_p\mathcal{P}$ nazywamy polem wektorowym. Zbiór pól wektorowych na $\mathcal{P}$ oznaczamy przez $C^\infty(\mathcal{P}, \mathrm{T}\mathcal{P})$. Pole wektorowe X zadaje odwzorowanie $X^\# : C^\infty(\mathcal{P}) \to C^\infty(X)$. We współrzędnych ma ono postać

$$X^\# f(x) = X^j(x)\partial_{x^j} f(x).$$

Komutator dwóch pól wektorowych jest też polem wektorowym:

$$[X^\#, Y^\#] = \left(X^j(x)\partial_{x^j} Y^i(x) - Y^j(x)\partial_{x^j} X^i(x)\right)\partial_{x^i}.$$

Pola wektorowe można przenosić przez dyfeomorfizm. Dla $\Phi \in \mathrm{Diff}(\mathcal{P})$, definiujemy $\Phi_\# : C^\infty(\mathcal{P}, \mathrm{T}\mathcal{P}) \to C^\infty(\mathcal{P}, \mathrm{T}\mathcal{P})$ przez

$$\Phi_\#(X^\#) := \Phi_\# X^\# \Phi_\#^{-1},$$

czyli

$$\Phi_\#(X^\#) f(x) = \Big(X^\#(f \circ \Phi)\Big)\left(\Phi^{-1}(x)\right).$$

We współrzędnych:

$$\Phi_\#(X^\#) = X^j(y)\frac{\partial \Phi^i(y)}{\partial y^j}\Big|_{y=\Phi^{-1}(x)}\partial_{x^i}.$$

Jeśli rodzina dyfeomorfizmów Φ_t zależy w sposób gładki od $t \in \mathbb{R}$, to

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t(x) = X_t(\Phi_t(x)). \tag{24.131}$$

zadaje rodzinę pól wektorowych X_t. Równoważnie,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t^\# = \Phi_t^\# X_t^\#.$$

Można zadać rodzinę pól wektorowych $\mathbb{R} \ni t \mapsto X_t$ i rozważać istnienie rozwiązań (24.131) z $\Phi_0 = \mathrm{Id}$. Rozwiązania takie lokalnie (w $\mathcal{P}$ i w czasie) istnieją i są jednoznaczne.

W szczególności, jeśli

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t(x) = X(\Phi_t(x)), \tag{24.132}$$

to Φ_t jest jednoparametrową grupą i piszemy $\Phi_t = \mathrm{e}^{tX}$. Równoważnie,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t^\# = X^\# \Phi_t^\# = \Phi_t^\# X^\#, \tag{24.133}$$

Jeśli X jest zadanym polem wektorowym takim, że istnieje rozwiązanie (24.132 dla małych t, to istnieje dla $t \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 24.6 *Niech $G \subset \mathrm{Diff}(\mathcal{P})$ będzie grupą domkniętą.*

(1) *Niech Φ_t będzie krzywą w G taką, że $\mathrm{Id} = \Phi_0$ i pole wektorowe X niech spełnia $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_0 = X$. Wtedy grupa $\{\mathrm{e}^{tX} \ : \ t \in \mathbb{R}\}$ jest zawarta w G.*

(2) *Niech X, Y będą polami wektorowymi takimi, że e^{tX} i e^{tY} należą do G dla $t \in \mathbb{R}$. Wtedy $\mathrm{e}^{t(\alpha A + \beta B)}$ należy do G dla $t \in \mathbb{R}$.*

(3) *Niech* $\{\mathrm{e}^{tA} : t \in \mathbb{R}\}$ *i* $\{\mathrm{e}^{tB} : t \in \mathbb{R}\}$ *będą zawarte w* G. *Wtedy* $\{\mathrm{e}^{t[A,B]} : t \in \mathbb{R}\}$ *jest zawarte w* G.

Zatem jeśli G *jest grupą Liego w* $\mathrm{Diff}(\mathcal{P})$, *to przestrzeń styczna do* G *jest algebrą Liego.*

Dowód. Założymy dodatkowo, że $\mathcal{P}$ jest przestrzenią liniową a wszystkie polawektorowe odpowiadają transformacjom liniowym. By pokazać (1), piszemy:

$$G \ni \Phi_{t/n}^n \simeq (\mathbb{1} + X/n)^n \to \mathrm{e}^{tX}.$$

By pokazać (2) wystarczy założyć, że $\alpha = \beta = 1$. Następnie sprawdzamy, że

$$\mathrm{e}^{t(X+Y)} = \mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{tY} + O(t^2).$$

(3) wynika z

$$\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{tY}\mathrm{e}^{-tX}\mathrm{e}^{-tY} = \mathrm{e}^{t^2[X,Y]} + O(t^3),$$

które pokazujemy następująco:

$$\begin{aligned}
& \mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{tY}\mathrm{e}^{-tX}\mathrm{e}^{-tY} \\
= \;& \left(\mathbb{1} + tX + \frac{t^2}{2}X^2\right)\left(\mathbb{1} + tY + \frac{t^2}{2}Y^2\right)\left(\mathbb{1} - tX + \frac{t^2}{2}X^2\right)\left(\mathbb{1} - tX + \frac{t^2}{2}X^2\right) + O(t^3) \\
= \;& \mathbb{1} + tX + tY - tX - tY + \frac{t^2}{2}X^2 + \frac{t^2}{2}Y^2 + + \frac{t^2}{2}X^2 + \frac{t^2}{2}Y^2 \\
& -t^2X^2 - t^2Y^2 + t^2XY + t^2XY - t^2XY - t^2YX + O(t^3) \\
= \;& \mathbb{1} + t^2[X,Y] + O(t^3).
\end{aligned}$$

24.4 Algebra Liego grupy Liego

Niech G będzie grupą Liego. Jak zwykle, $\mathbb{1}$ oznacza jej element jednostkowy. Oznaczmy przez $\mathfrak{g}$ przestrzeń styczną do G w punkcie $\mathbb{1}$, czyli $\mathfrak{g} = \mathrm{T}_{\mathbb{1}}G$.

Mamy dyfeomorfizmy

$$\mathrm{L}(g)h := gh, \qquad \mathrm{R}(g)h := hg^{-1}.$$

$$G \ni g \mapsto \mathrm{L}(g), \mathrm{R}(g) \in \mathrm{Diff}(G)$$

są homomorfizmami grup

Mamy również $\mathrm{K}h := h^{-1}$. Oczywiście, $\mathrm{K}^2 = \mathrm{Id}$ i $\mathrm{KL}(g)\mathrm{K} = \mathrm{R}(g)$.

Mówimy, że $B \in C^\infty(\mathcal{P}, \mathrm{T}\mathcal{P})$. jest lewo- (prawo-)niezmiennicze, gdy

$$\mathrm{L}(g)_\# B^\# = B^\#, \quad \mathrm{R}(g)_\# B^\# = B^\#, \quad g \in G.$$

Twierdzenie 24.7 *Dla każdego* $A \in \mathrm{T}_{\mathbb{1}}G$ *istnieje dokładnie jedno pole lewo- i prawoniezmiennicze* $L_A, R_A \in C^\infty(\mathcal{P}, \mathrm{T}\mathcal{P})$ *takie, że* $L_A(\mathbb{1}) = R_A(\mathbb{1}) = A$.

$L_A f(g)$ *jest równe wektorowi* $A^\#$ *działającemu na funkcję* $G \ni h \mapsto f(gh)$. *Każde pole lewoniezmiennicze jest tej postaci. Pola lewoniezmiennicze tworzą algebrę Liego.*

$R_A f(g)$*jest równe wektorowi* $A^\#$ *działającemu na funkcję* $G \ni h \mapsto f(hg)$. *Każde pole prawoniezmiennicze jest tej postaci. Pola prawoniezmiennicze tworzą algebrę Liego.*

Mamy $\mathrm{KL}_A\mathrm{K} = R_{-B}$.

Twierdzenie 24.8 *Niech $A \in \mathrm{T}_{\mathbb{1}}G$. Wtedy istnieje dokładnie jedna krzywa $\mathbb{R} \ni t \mapsto g(t) \in G$ spełniająca równanie*

$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} g(t)^{-1} = A.$$

Równoważnie,

$\mathbb{R} \ni t \mapsto g(t) \in G$ *jest homomorfizmem grup.*

Równoważnie:

$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = L_A g(t), \quad \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{L}(g_t) &= L_A(\mathrm{L}(g_t)), \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{R}(g_t) &= -R_A(\mathrm{R}(g_t)). \end{aligned}$$

Będziemy pisać $g(t) =: \mathrm{e}^{tA}$. Daje to równoważną definicję komutatora:

Twierdzenie 24.9 *Niech $A, B \in \mathrm{T}_{\mathbb{1}}G$. Wtedy*

$$[0, \infty[\ni s \mapsto \gamma(s) := \mathrm{e}^{\sqrt{s}A}\mathrm{e}^{\sqrt{s}B}\mathrm{e}^{-\sqrt{s}A}\mathrm{e}^{-\sqrt{s}B}$$

jest różniczkowalne w zerze i $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\gamma(s)\Big|_{s=0} = [A, B]$.

Twierdzenie 24.10 *Niech $\Phi : G \to H$ będzie homomorfizmem grup Liego z algebrami Liego $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$. Wtedy $\phi := \Phi_{\#} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ jest homomorfizmem algebr Liego. G i H są lokalnie izomorficzne, wtedy i tylko wtedy gdy $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$ są izomorficzne.*

Twierdzenie 24.11 *Niech $\mathfrak{g}$ jest algebrą Liego. Wtedy istnieje grupa Liego G, której algebra Liego jest izomorficzna z $\mathfrak{g}$.*

Szkic dowodu Z Twierdzenia Ado wynika, że algebrę $\mathfrak{g}$ można zanurzyć w $gl(\mathcal{V})$ dla pewnej przestrzeni $\mathcal{V}$. Definiujemy G jako podgrupę w $GL(\mathcal{V})$ generowaną przez e^A dla $A \in \mathfrak{g}$. Następnie należy pokazać, że G jest rozmaitością i $\mathfrak{g}$ jest jej przestrzenią styczną. □

24.5 Przemienne grupy Liego

Twierdzenie 24.12 *Niech L będzie dyskretną podgrupą w $\mathbb{R}^n$. Niech* $\mathrm{Span}L$ *będzie k wymiarowe. Wtedy istnieją $e_1, \ldots, e_k$ takie, że*

$$L = \{c_1e_1 + \cdots + c_ke_k,\ (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{Z}^k\}.$$

Twierdzenie 24.13 *Każda abelowa spójna grupa Liego jest izomorficzna z $\mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^k$.*

24.6 Podgrupy grup Liego

Twierdzenie 24.14 *Niech H będzie domkniętą podgrupą grupy Liego G. Wtedy H jest też grupą Liego. Jeśli $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ są algebrami Liego grup G i H, wtedy nawias w $\mathfrak{h}$ pokrywa się z nawiasem $\mathfrak{g}$ obciętym do $\mathfrak{h}$. W szczególności, $\mathfrak{h}$ jest podalgebrą Liego w $\mathfrak{g}$. Jeśli H jest normalna w G, to $\mathfrak{h}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$.*

Nie każda podalgebra w $\mathfrak{g}$ jest styczna do podgrupy w G.

Twierdzenie 24.15 *Niech G będzie grupą Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$. Jeśli $\mathfrak{h}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$ takim, że istnieje podgrupa H styczna do $\mathfrak{h}$, to spójna składowa jedności H_0 jest podgrupą normalną w G.*