Teoria grup

Jan Dereziński

Katedra Metod Matematycznych Fizyki
Uniwersytet Warszawski
Hoża 74, 00-682, Warszawa
e-mail jan.derezinski@fuw.edu.pl

28 maja 2019

rok 2010/11

Spis treści

1 Podstawowe własności grup

1.1 Definicja

Grupa to niepusty zbiór G wyposażony w

(1) działanie $G \times G \ni (g,h) \mapsto g \cdot h \in G$ mające własność *łączności*

$$(gh)k = g(hk), \quad g,h,k \in G.$$

(2) wyróżniony element $e \in G$, zwany elementem neutralnym, spełniający

$$eg = ge = g, \quad g \in G.$$

(3) odwzorowanie $G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$, zwane odwrotnością spełniające

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e, \quad g \in G.$$

Czyli grupa jest czwórką $(G, \cdot, e, ^{-1})$. Notacja powyższa nosi nazwę *multiplikatywnej.*

Mówimy, że grupa jest *nietrywialna*, gdy jest różna od grupy składającej się jedynie z elementu neutralnego.

Element neutralny w notacji multiplikatywnej jest często oznaczany przez 1 lub $\mathbb{1}$.

Możliwe jest też sformułowanie słabszych aksjomatów, w ktorych grupa jest zbiorem wyposażonym jedynie w łączne działanie i dwa warunki zapewniające istnienie elementu neutralnego i odwrotności.

Mówimy, że grupa jest *przemienna* lub *abelowa*, gdy

$$gh = hg, \quad g, h \in G.$$

Dla grup abelowych stosujemy często notację *addytywną*, w której grupa to $(G, +, 0, -)$.

1.2 Podgrupy

Niech G będzie grupą. Niepusty podzbiór $H \subset G$ nazywamy *podgrupą* gdy jest zamknięty ze względu na mnożenie i branie odwrotności. Zawiera wtedy element neutralny i ze względu na mnożenie i odwrotność dziedziczone z G jest grupą.

Mówimy, że podgrupa jest *nietrywialna*, gdy jest różna od grupy składającej się jedynie z elementu neutralnego, jak również od grupy G.

Jeśli rodzina $H_\alpha \subset G$ składa się z podgrup, to $\cap_\alpha H_\alpha$ jest też podgrupą. Dlatego, dla dowolnego podzbioru $X \subset G$ istnieje najmniejsza podgrupa zawierająca X. Oznaczamy ją przez $\mathrm{Gr}(X)$ i nazywamy *podgrupą generowaną przez* X.

Grupę generowaną przez jeden element nazywamy *grupą cykliczną*. Są to grupy $\mathbb{Z}_n$, $n \in \mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$.

Liczbę elementów zbioru X oznaczamy przez $\#X$. Liczbę elementów grupy nazywamy *rzędem grupy.*

Mówimy, że $g \in G$ ma *rząd* $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, gdy $n = \#\mathrm{Gr}(g)$. Jeśli rząd g jest równy $n \in \mathbb{N}$, to $\mathrm{Gr}(g) = \{e, g, \dots, g^{n-1}\}$ jest podgrupą w G izomorficzną z $\mathbb{Z}_n$. Jeśli rząd g jest równy ∞, to $\mathrm{Gr}(g) = \{\dots, g^{-1}, e, g, g^2, \dots\}$ jest podgrupą izomorficzną z $\mathbb{Z}$.

Jeśli H jest podgrupą i $g \in G$, to $gHg^{-1} := \{ghg^{-1} \ : \ h \in H\}$ jest też podgrupą zwaną *podgrupą sprzężoną do* H.

1.3 Homomorfizmy

Niech G, H będą grupami. Odwzorowanie $\phi : G \to H$ jest *homomorfizmem*, gdy

$$\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2), \quad g_1, g_2 \in G.$$

Stwierdzenie 1.1 *Jeśli ϕ jest homomorfizmem, to*

$$\phi(e_G) = e_H, \quad \phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}.$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \phi(e_G)e_H &= \phi(e_G)\phi(e_G)\phi(e_G)^{-1} \\ = \ \phi(e_G^2)\phi(e_G)^{-1} &= \phi(e_G)\phi(e_G)^{-1} = e_H. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(g^{-1}) &= \phi(g^{-1})\phi(g)\phi(g)^{-1} = \phi(g^{-1}g)\phi(g)^{-1} \\ = \ \phi(e_G)\phi(g)^{-1} &= e_H\phi(g)^{-1} = \phi(g)^{-1}. \end{aligned}$$

□

Bijektywny homomorfizm nazywamy *izomorfizmem.*

Jeśli $G = H$, to homomorfizm nazywamy *endomorfizmem* a izomorfizm *automorfizmem.* Automorfizmy grupy G tworzą grupę oznaczaną $\mathrm{Aut}(G)$.

1.4 Działanie

Niech X będzie zbiorem. Przez $S(X)$ oznaczamy zbiór bijekcji na zbiorze X. Wtedy $S(X)$ jest grupą ze składaniem i elementem neutralnym równym id, gdzie $\mathrm{id}(x) = x$, $x \in X$.

Niech G będzie grupą. Homomorfizm $G \to S(X)$ nazywamy *działaniem grupy G na zbiorze X*.

Innymi słowy, odwzorowanie

$$G \times X \ni (g, x) \mapsto \tau_g(x) \in X \tag{1.1}$$

jest działaniem, gdy

$$\tau_g(\tau_h(x)) = \tau_{gh}(x), \quad g, h \in G.$$

Stosujemy też często notację uproszczoną:

$$G \times X \ni (g, x) \mapsto gx \in X.$$

W tej notacji własności homomorficzności i łączności naturalnie się zapisują:

$$g(hx) = (gh)x, \quad ((gh)k)x = (g(hk))x, \quad g, h, k \in G,\ x \in X.$$

Dlatego też, zbyteczne jest pisanie nawiasów.

Jeśli $x \in X$, to

$$G^x := \{g \in G \ : \ \tau_g(x) = x\}$$

jest podgrupą w G zwaną *grupą izotropii elementu x.*

Niech $\tau : G \times X \to X$, $\tilde{\tau} : G \times \tilde{X} \to \tilde{X}$, będą działaniami. Mówimy, że bijekcja $\phi : X \to \tilde{X}$ jest *izomorfizmem działań τ i $\tilde{\tau}$*, gdy

$$\tilde{\tau}_g(\phi(x)) = \phi\left(\tau_g(x)\right), \quad g \in G,\ x \in X. \tag{1.2}$$

W notacji uproszczonej (1.2) ma postać

$$g\phi(x) = \phi(gx), \quad g \in G, \quad x \in X.$$

1.5 Orbity

Niech $\tau : G \to S(X)$ będzie działaniem. Definiujemy relację

$$x \sim_\tau y \;\Leftrightarrow \exists_{g \in G} \tau_g(x) = y.$$

Stwierdzenie 1.2 *$\sim_\tau$ jest relacją równoważności.*

Klasy abstrakcji tej relacji nazywamy *orbitami działania* τ. Klasę abstrakcji dla elementu $x \in X$ nazywamy *orbitą elementu* x i oznaczamy $\tau_G(x)$. Zbiór orbit czasem oznaczamy przez $G \backslash X$.

Jeśli x, y należą do tej samej orbity, to grupy izotropii G^x i G^y są do siebie *sprzężone*, to znaczy istnieje $g \in G$ takie, że $G^x = gG^y g^{-1}$.

Mówimy, że działanie τ jest *tranzytywne*, gdy posiada dokładnie jedną orbitę. Mówimy też wtedy, że X jest *przestrzenią jednorodną* dla grupy G.

1.6 Warstwy

Niech H będzie podgrupą grupy G. Wtedy H działa na G przez *lewe mnożenie*

$$\lambda_h(g) := hg, \quad g \in G, \; h \in H.$$

Orbity tego działania mają postać

$$Hg := \{hg \;:\; h \in H\}, \; g \in G,$$

i są nazywane *lewymi warstwami podgrupy* H. Zbiór lewych warstw jest oznaczany przez $H \backslash G$.

H działa na G również przez *prawe mnożenie*

$$\rho_h(g) := gh^{-1}, \quad g \in G, \; h \in H.$$

Orbity tego działania mają postać

$$gH := \{gh \;:\; h \in H\}, \; g \in G,$$

i są nazywane *prawymi warstwami podgrupy* H. Zbiór prawych warstw jest oznaczany przez G/H.

$G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$ jest izomorfizmem dla tych działań.

Lewe i prawe mnożenie jest bijekcją, tak samo odwrotność. Dlatego też wszystkie lewe (jak również prawe) warstwy mają tę samą liczbę elementów równą rzędowi H. Jako wniosek dostajemy

Twierdzenie 1.3 (Lagrange) *Jeśli G jest grupą skończoną i H jej podgrupą, to*

$$\#G = (\#H)(\#G/H).$$

Dowód. Wybieramy w każdej warstwie po jednym elemencie. Innymi słowy, ustalamy odwzorowanie $\theta : G/H \to G$ o własności $\theta(W) \in W$, $W \in G/H$. Sprawdzamy, że $G/H \times H \ni (W,h) \to \theta(W)h \in G$ jest bijekcją. $\square$.

Liczbę $\#G/H$ nazywamy *indeksem podgrupy* H.

W szczególności, G działa na sobie samej. Jest to działanie tranzytywne. Każdemu elementowi $g \in G$ odpowiada inna bijekcja na G. Dlatego też dostajemy

Twierdzenie 1.4 (Cayley) *Każda grupa jest izomorficzna z podgrupą w $S(G)$.*

1.7 Klasy sprzężoności

Niech $g \in G$. Kładziemy

$$\mathrm{Ad}(g)(h) := ghg^{-1}, \quad h \in G.$$

Wtedy $\mathrm{Ad}(g)$ jest automorfizmem grupy G nazywanym *automorfizmem wewnętrznym* lub *automorfizmem dołączonym zadanym przez g.*

$$G \ni g \mapsto \mathrm{Ad}(g) \in \mathrm{Aut}(G)$$

jest homomorfizmem. Jego obraz oznaczamy przez $\mathrm{Inn}(G)$.

Grupa G działa na sobie samej przez automorfizmy wewnętrzne. Orbity względem tego działania nazywają się *klasami sprzężoności.*

Niech $\mathrm{Sub}(G)$ oznacza zbiór podgrup grupy G. Jeśli $H \in \mathrm{Sub}(G)$, to gHg^{-1} też jest podgrupą. $\mathrm{Sub}(G) \ni H \mapsto gHg^{-1} \in \mathrm{Sub}(G)$ jest działaniem grupy G na $\mathrm{Sub}(G)$. Mówimy, że dwie podgrupy są *sprzężone*, jeśli należą do tej samej orbity.

1.8 Klasyfikacja działań grupy

Następujący wzór definiuje działanie grupy G na G/H:

$$g(kH) := (gk)H, \quad g,k \in G.$$

Działanie to jest tranzytywne. Grupą izotropii elementu jednostkowego jest H. Poniższe twierdzenie mówi, że każde działanie tranzytywne jest izomorficzne z takim działaniem.

Twierdzenie 1.5 (Podstawowe twierdzenie o przestrzeniach jednorodnych) *Niech $\tau : G \times X \to X$ będzie działaniem tranzytywnym i $x \in X$. Wtedy wzór*

$$\phi(gG^x) := \tau_g(x)$$

definiuje izomorfizm działania G na przestrzeni warstw G/G^x i τ. Jeśli X jest zbiorem skończonym, to $\#G = \#X\ \#G^x$.

Dowód. Dobra określoność. Niech $g,k \in G$.

$$\begin{aligned} gG^x = kG^x \quad &\Rightarrow \quad k^{-1}gG^x = G^x \\ \Rightarrow \quad k^{-1}g \in G^x \quad &\Rightarrow \quad x = \tau_{k^{-1}g}(x) \\ \Rightarrow \quad \tau_k^{-1}\tau_g(x) = x \quad &\Rightarrow \quad \tau_k(x) = \tau_g(x). \end{aligned}$$

Injektywność Rozumowanie w stronę przeciwną do poprzedniej: pokazuje, że

$$\tau_k(x) = \tau_g(x) \;\Rightarrow\; gG^x = kG^x.$$

Surjektywność wynika z tranzytywności.
Izomorficzność działań:

$$\phi(gkG^x) = \tau_{gk}(x) = \tau_g(\tau_k x)) = \tau_g(\phi(kG^x).$$

Liczba elementów: X jest bijektywny zbiorowi G/G_x, możemy więc zastosować Twierdzenie Lagrange'a. $\Box$

Twierdzenie 1.6 *Niech H i K będą podgrupami. Wtedy działania G na G/H i G/K są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy H jest sprzężona do K.*

Dowód. $\Leftarrow$ Niech $K = mHm^{-1}$. Definiujemy

$$\phi(gH) = gm^{-1}K = gHm^{-1}.$$

Trywialnie sprawdzamy, że ϕ jest dobrze określone, bijektywne i splata działania.

$\Rightarrow$ Niech $\phi : G/H \to G/K$ będzie izomorfizmem. Wtedy istnieje $m \in G$ takie, że $\phi(H) = m^{-1}K$. Dla $h \in H$

$$hm^{-1}K = h\phi(H) = \phi(hH) = \phi(H) = m^{-1}K.$$

Czyli $mhm^{-1}K = K$. Zatem, $mHm^{-1} \subset K$. Odwracając role dostajemy $mHm^{-1} = K$ $\Box$

Załóżmy teraz, że grupa G działa na zbiorze X (niekoniecznie tranzytywnie). Przez $G\backslash X$ będziemy oznaczać zbiór orbit tego działania. Niech X^g oznacza zbiór punktów stałych $g \in G$.

Twierdzenie 1.7 *Niech*

$$X = X_1 \cup \cdots \cup X_k$$

będzie rozbiciem X na orbity. Z każdej orbity wybieramy reprezentanta $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, k$. Wtedy

$$\sum_{i=1}^{k} \#G\Big(1 - \frac{1}{\#G^{x_i}}\Big) = \sum_{g \neq e} \#X^g. \tag{1.3}$$

Dowód. Niech

$$P := \big\{(g, x) \in \big(G \setminus \{e\}\big) \times X \;:\; gx = x\big\}.$$

Obliczymy liczbę elementów P dwoma sposobami.

Mamy

$$P = \bigcup_{x \in X} \big(G^x \setminus \{e\}\big) \times \{x\} = \bigcup_{j=1}^{k} \bigcup_{x \in X_j} \big(G^x \setminus \{e\}\big) \times \{x\}.$$

Dla $x \in X_j$ mamy $\#X_j = \frac{\#G}{\#G^x}$. Zatem $\#P$ jest równe lewej stronie (1.3).

Z drugiej strony,
$$P = \bigcup_{g \neq e} \{g\} \times X^g.$$
Zatem $\#P$ jest równe prawej stronie (1.3). $\square$

Poniższy podobny wzór bywa przypisywany Burnside'owi.

Twierdzenie 1.8 *Niech*
$$G = G_1 \cup \cdots \cup G_l$$
będzie rozkładem grupy na klasy sprzężoności. Z każdej klasy sprzężoności wybieramy reprezentanta $g_i \in G_i$, $i = 1, \ldots, l$. Wtedy
$$(\#G)(\#G\backslash X) = \sum_{j=1}^{l} (\#G_j)(\#X^{g_j}). \tag{1.4}$$

Dowód. Niech
$$Z := \{(g, x) \in G \times X \ : \ gx = x\}.$$
Obliczymy liczbę elementów Z dwoma sposobami.

Mamy
$$Z = \bigcup_{x \in X} G^x \times \{x\} = \bigcup_{j=1}^{k} \bigcup_{x \in X_j} G^x \times \{x\}.$$
Dla $x \in X_j$ mamy $(\#G^x)(\#X_j) = \#G$. Zatem $\#Z$ jest równe lewej stronie (1.4).

Z drugiej strony,
$$Z = \bigcup_{g \in G} \{g\} \times X^g.$$
Zauważmy, że $X^{hgh^{-1}} = hX^g$, dlatego $\#X^g$ jest stałe na klasach sprzężoności. Stąd $\#Z$ jest równe prawej stronie (1.4). $\square$

1.9 Iloczyn prosty

Niech K, H będą grupami. Wtedy $K \times H$ jest grupą z iloczynem
$$(k_1, h_1)(k_2, h_2) := (k_1 k_2, h_1 h_2).$$
$K \times H$ z takim iloczynem nazywamy *iloczynem (zewnętrznym) grupy K i H*. Zauważmy, że $K \times \{e_H\}$, $\{e_K\} \times H$ są podgrupami, które komutują, ich przecięcie to $\{(e_K, e_H)\}$ i generują razem $K \times H$.

Latwo sprawdzamy, że dla $n \in \mathbb{N}$ przestrzeń klas $\mathcal{Z}/n\mathbb{Z}$ jest grupą abelową. Jej elementy są postaci $[0], \ldots, [n-1]$.

Stwierdzenie 1.9 *Jeśli n, m są liczbami względnie pierwszymi, to*
$$\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \ni ([i], [j]) \mapsto [in + jm] \in \mathbb{Z}_{mn}$$
jest izomorfizmem.

Dowód. Najpierw sprawdzamy, że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ powyższe odwzorowanie jest dobrze określone i jest homomorfizmem. Aby dowieść, że jest on surjektywny korzystamy z faktu, że dla względnie pierwszych m, n istnieją $i, j \in \mathbb{Z}$ takie, że $in + jm = 1$. $\square$

Można pokazać, że każda skończona grupa abelowa jest iloczynem grup postaci $\mathbb{Z}_{p^k}$, gdzie p są liczbami pierwszymi.

1.10 Podgrupy normalne

Niech N będzie podgrupą w G. Mówimy, że N jest *podgrupą normalną*, gdy

$$g \in G,\ n \in N \ \Rightarrow\ gng^{-1} \in N.$$

Równoważny warunek:

$$gN = Ng, \quad g \in G$$

Czyli nie ma wtedy potrzeby rozróżniać lewych i prawych warstw.

Grupę która nie posiada nietrywialnych podgrup normalnych nazywamy *grupą prostą*. Przykładami grup prostych są $\mathbb{Z}_p$ dla pierwszych p i A_n dla $n \geq 5$.

Wszystkie grupy proste skończone zostały sklasyfikowane. Dowód prostoty A_5 jako pierwszy podał Galois w 1831 r. Pełna lista jest znana od 1981 r., kiedy skonstruowano *Grupę Monstrum*. Dowód kompletności tej klasyfikacji ogłoszono w 1983 r. Za datę, kiedy powszechnie zgodzono się z tym, że dowód ten został ukończony uznaje się 2004.

Jeśli $\phi : G \to H$ jest homomorfizmem, to $\phi(G)$ jest podgrupą w H i

$$\mathrm{Ker}\phi = \{g \in G \ : \ \phi(g) = e_H\}$$

jest podgrupą normalną.

Wzór

$$(g_1N)(g_2N) := g_1g_2N$$

definiuje w G/N strukturę grupy. Odwzorowanie

$$G \ni g \mapsto gN \in G/N$$

jest homomorfizmem, którego jądrem jest N.

Jeśli $\phi : G \to H$ jest surjektywnym homomorfizmem, którego jądrem jest też N, to

$$\psi(gN) := \phi(g)$$

definiuje izomorfizm $\psi : G/N \to H$.

Sytuację, gdy $\phi : G \to H$ jest surjektywnym homomorfizmem, dla którego N jest jądrem, często zapisujemy w skrócie

$$1 \to N \to G \to H \to 1. \tag{1.5}$$

Mówimy wtedy, że G *jest rozszerzeniem* N *przez* H, albo że mamy *krótki ciąg dokładny (1.5).*

1.11 Iloczyn półprosty

Niech H, N będą grupami i homomorfizm $H \ni h \mapsto \alpha_h \in \mathrm{Aut}(N)$. Definiujemy *(zewnętrzny) iloczyn półprosty* $N \rtimes_\alpha H$ jako $N \times H$ wyposażone w działanie

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) := (n_1 \alpha_{h_1}(n_2), h_1 h_2),$$

element neutralny (e_N, e_H), i odwrotność

$$(n, h)^{-1} = (\alpha_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1}).$$

Zauważmy, że $N \times e_H$ jest podgrupą normalną, zaś $e_N \times H$ jest podgrupą, ich przecięcie jest równe $\{(e_N, e_H)\}$ oraz $\mathrm{Gr}(N \cup H) = N \rtimes_\alpha H$.

Odwzorowanie

$$N \rtimes_\alpha H \ni (n, h) \mapsto h \in H$$

jest surjektywnym homomorfizmem, którego jądrem jest N.

Załóżmy, że mamy krótki ciąg dokładny

$$1 \to N \to G \to H \to 1. \tag{1.6}$$

Zachodzi pytanie, kiedy G jest izomorficzne iloczynowi półprostemu N i H? Ma to miejsce wtedy, gdy istnieje homomorfizm injektywny $\psi : H \to G$ taki, że $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$, $\psi(H)$ i N generują G i $\psi(H) \cap N = e_G$. Mówimy wtedy, że ciąg *się rozszczepia.* Nie zawsze to ma miejsce: Weźmy

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \to 0.$$

2 Przykłady grup

2.1 Permutacje

Jeśli X jest zbiorem skończonym, bijekcję na X często nazywamy *permutacją.* Pamiętamy, że przez $S(X)$ oznaczamy grupę bijekcji na X. Piszemy $S_n := S(\{1, 2, \dots, n\})$. Oczywiście, jeśli X ma n elementów, to $S(X)$ jest izomorficzne z S_n.

Permutację $\pi \in S_n$ nazywamy *cyklem k-elementowym*, gdy istnieją parami różne $x_1, \dots, x_k \in \{1, \dots, n\}$ takie, że

$$\pi x_i = x_{i+1}, \ i = 1, \dots, k,$$

(rozumiejąc, że $k + 1 = 1$). Cykl oznaczamy przez $(x_1, \dots, x_k)$. Dwa cykle $(x_1, \dots, x_k)$ i $(y_1, \dots, y_m)$ nazywamy *rozłącznymi* jeśli zbiory $\{x_1, \dots, x_k\}$, $\{y_1, \dots, y_m\}$ są rozłączne.

Każdą permutację możemy przedstawić jako iloczyn cykli rozłącznych. Rozkład ten jest jednoznaczny (z dokładnością do kolejności). W szczególności, wyznacza on ciąg $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ liczb z $\{0, 1, \dots\}$ takich, że $\sum_j j\lambda_j = n$ i w rozkładzie na cykle rozłączne występuje λ_j cykli j-elementowych.

Wielomian Vandermonda stopnia n definiujemy jako

$$V(x_1, \dots, x_n) := \prod_{i<j} (x_i - x_j).$$

Latwo sprawdzić, że dla $\pi \in S_n$,

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \pm V(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}).$$

Definiujemy

$$\mathrm{sgn}\pi := \frac{V(x_1, \ldots, x_n)}{V(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})}.$$

$\mathrm{sgn} : S_n \to \{1, -1\}$. jest homomorfizmem. Jądro tego homomorfizmu nazywamy *grupą alternującą* i oznaczamy przez A_n.

2.2 Iloczyn półprosty z grupą $\mathbb{Z}_2$

Niech K będzie grupą abelową z zapisem addytywnym. Odwzorowanie $K \ni k \mapsto \beta(k) := -k \in K$ jest automorfizmem grupy K.

Dla grup $\mathbb{Z}_2^n$ jest to automorfizm identycznościowy. Jeśli nie wszystkie elementy grupy K są rzędu 2 lub 1, to jest to automorfizm nietrywialny. Możemy zdefiniować grupę $K \rtimes_\beta \mathbb{Z}_2$. W szczególności, grupa

$$D_n := \mathbb{Z}_n \rtimes_\beta \mathbb{Z}_2$$

nosi nazwę *grupy dwuściennej (dihedralnej)*. Jest ona nieabelowa dla $n \geq 3$.

2.3 Grupa permutacji 3 elementów

Mamy izomorfizm $A_3 \simeq \mathbb{Z}_3$:

$$A_3 = \{\mathrm{id},\ (123),\ (132)\}.$$

Mamy też izomorfizm $S_3 \simeq D_3 = \mathbb{Z}_3 \rtimes_\beta \mathbb{Z}_2$

S_3 posiada następujące nietrywialne podgrupy: jedną podgrupę (normalną) $\mathbb{Z}_3$ i 3 sprzężone do siebie podgrupy $\mathbb{Z}_2$. Mamy zatem 4 nieizomorficzne tranzytywne działania S_3: na zbiorze 6-, 3-, 2- i 1-elementowym

2.4 Grupa permutacji 4 elementów

Elementy grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ można oznaczyć jako $\{e, a, b, ab\}$. Automorfizmy tej grupy polegają na permutacjach $\{a, b, ab\}$. Czyli

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \simeq S_3.$$

Grupę $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ można włożyć w $A_4 \subset S_4$

$$\{\mathrm{id},\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\}.$$

Jest ona normalna w A_4 i w S_4. Mamy izomorfizmy

$$\begin{aligned}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes A_3 &\simeq A_4,\\ (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes S_3 &\simeq S_4.\end{aligned}$$

W szczególności, A_4 nie jest prosta. To, że A_5 jest prosta pokazał Galois.

2.5 Grupa obrotów $SO(3)$

Przez $SO(3)$ będziemy oznaczać grupę obrotów (właściwych) przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Lemat 2.1 *Dla każdego $A \in SO(3)\setminus\{\mathbb{1}\}$ istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez 0 i $\theta \in [0, 2\pi[$ takie, że A jest obrotem wokół A o kąt θ. A jest skończonego rzędu, gdy $\theta = \frac{2\pi j}{n}$, $j = 1, \dots, n-1$.*

Prostą opisaną w powyższym lemacie nazywamy *osią obrotu A*. Jeśli wybierzemy zwrot tej prostej, będziemy mówili o *osi skierowanej*.

Następnie opiszemy wszystkie skończone podgrupy grupy obrotów.

Lemat 2.2 *Niech G będzie skończoną podgrupą $SO(3)$. Niech α będzie osią pewnego obrotu z G. Wtedy obroty wokół osi α należące do G stanowią grupę izomorficzną z $\mathbb{Z}_n$.*

Oś taką jak w powyższym lemacie nazywamy *osią n-krotną*.

Przez $O(3)$ będziemy oznaczać grupę obrotów niewłaściwych przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Mamy $O(3) = SO(3) \times \mathbb{Z}_2$, gdzie generatorem $\mathbb{Z}_2$ jest symetria środkowa.

2.6 Grupa obrotów właściwych wielokąta foremnego $C_n \simeq \mathbb{Z}_n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{2\pi j}{n} & \sin\frac{2\pi j}{n} \\ 0 & -\sin\frac{2\pi j}{n} & \cos\frac{2\pi j}{n} \end{bmatrix}, \quad j = 0, \dots, n-1. \tag{2.7}$$

2.7 Grupa dihedralna $D_n \simeq \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$

Do (2.7) dołączamy

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\frac{\pi j}{n} & \sin\frac{\pi j}{n} \\ 0 & \sin\frac{\pi j}{n} & \cos\frac{\pi j}{n} \end{bmatrix}, \quad j = 0, \dots, n-1. \tag{2.8}$$

2.8 Grupa czworościanu $T \simeq A_4$

Grupa symetrii czworościanu. Permutuje

(1) 4 wierzchołki,

(2) 4 ściany,

(3) 6 krawędzi.

Ma

(1) 4 osie 3-krotne, między wierzchołkiem a przeciwległą ścianą,

(2) 3 osie 2-krotne, między środkami przeciwległych krawędzi.

2.9 Grupa sześcianu/ośmiościanu $O \simeq S_4$

Grupa symetrii sześcianu. Permutuje

(1) 8 wierzchołków/ścian,

(2) 6 ścian/wierzchołków,

(3) 12 krawędzi.

Ma

(1) 4 osie 3-krotne, między przeciwległymi wierzchołkami/ścianami,

(2) 3 osie 4-krotne, między środkami przeciwległych ścian/wierzchołków,

(3) 6 osi 2-krotnych, między środkami przeciwległych krawędzi.

2.10 Grupa dwudziestościanu/dwunastościanu) $I \simeq A_5$

Grupa symetrii dwudziestościanu. Permutuje

(1) 10 wierzchołków/ścian,

(2) 20 ścian/wierzchołków,

(3) 30 krawędzi.

Ma

(1) 6 osi 5-krotnych, między przeciwległymi wierzchołkami/ścianami,

(2) 10 osi 3-krotnych, między środkami przeciwległych ścian/wierzchołków,

(3) 15 osie 2-krotne, między środkami przeciwległych krawędzi.

2.11 Skończone podgrupy grupy obrotów

Twierdzenie 2.3 *Lista powyższa zawiera wszystkie skończone podgrupy obrotów.*

Dowód. Niech G będzie skończoną podgrupą grupy obrotów. Niech X będzie zbiorem osi skierowanych elementów z G, czyli

$$X = \{\alpha \in S^2 \ : \ g\alpha = \alpha \text{ dla pewnego } g \in G\}$$

$$G \times X \ni (g, \alpha) \mapsto g\alpha \in X$$

jest działaniem grupy G na X. Działanie zachowuje krotność. Niech $X_1, \dots, X_k$ będzie rozbiciem X na orbity. Niech n_i będzie krotnością elementów orbity X_i. Zakładamy, że $n_1 \leq \cdots \leq n_k$.

Zachodzi wzór

$$\sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\#G}\right). \tag{2.9}$$

Jest to przykład zastosowania Tw. 1.7. Dla wygody czytelnika przytaczamy niezależny dowód.

Rozważmy

$$P := \left\{(g, \alpha) \in (G \backslash \{\mathbb{1}\}) \times X \ : \ g\alpha = \alpha\right\}.$$

Dla każdego $g \in G \backslash \{\mathbb{1}\}$ mamy dwa przecięcia osi obrotu i sfery. Dlatego

$$\#P = 2(\#G - 1). \tag{2.10}$$

Dla każdego $\alpha \in X_j$ jest $n_j - 1$ obrotów $g \in G \backslash \{\mathbb{1}\}$ takich, że $g\alpha = \alpha$. Dlatego

$$\#P = \sum_{i=1}^{k} \#X_i(n_i - 1). \tag{2.11}$$

Ale grupa izotropii $\alpha \in X_i$ jest izomorficzna z $\mathbb{Z}_{n_i}$. Dlatego

$$\#X_i = \frac{\#G}{n_i}. \tag{2.12}$$

(2.10), (2.11) i (2.12) dają razem (2.9).

Rozwiązujemy więc równanie (2.9).

$\#G \geq 2$ implikuje $2\left(1 - \frac{1}{\#G}\right) \in [1, 2[$.

$n_i \geq 2$ implikuje $1 - \frac{1}{n_i} \in [\frac{1}{2}, 1[$. Dla $k = 1$ lewa strona (2.9) < 1. Dla $k \geq 4$ lewa strona (2.9) ≥ 1. Dlatego $k = 2, 3$.

Rozważmy $k = 2$. Możemy przepisać (2.9) jako

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} = \frac{2}{\#G}. \tag{2.13}$$

Wiemy, że $n_i \leq \#G$. Więc jedyne rozwiązania (2.13) to $n_1 = n_2 = \#G \in \mathbb{N}$

Rozważmy $k = 3$. Możemy przepisać (2.9) jako

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1 + \frac{2}{\#G}. \tag{2.14}$$

Jeśli $n_1 \geq 3$, to lewa strona (2.14) ≤ 1, co jest niemożliwe. Więc $n_1 = 2$.

Jeśli $n_2 \geq 4$, to znów lewa strona (2.14) ≤ 1, co jest niemożliwe. Więc $n_2 = 2$ lub $n_2 = 3$.

Jeśli $n_2 = 2$, to

$$n_1 = n_2 = 2, \quad n_3 = \frac{\#G}{2}.$$

Jeśli $n_2 = 3$, to dla $n_3 \geq 6$ lewa strona (2.14) ≤ 1. Dlatego $n_3 = 3$, $n_3 = 4$ lub $n_3 = 5$.

Następnie identyfikujemy powstałe możliwości z poszczególnymi grupami

- $n_1 = n_2 = n = \#G$.

  Mamy $\frac{\#G}{n_1} = \frac{\#G}{n_2} = 1$. Zatem mamy tylko jedną oś. Jest ona n-krotna. Zatem $G = C_n$.

- $n_1 = n_2 = 2$, $n_3 = n$, $\#G = 2n$.

  Mamy $\frac{\#G}{n_1} = \frac{\#G}{n_2} = n$, $\frac{\#G}{n_3} = 2$. Zatem mamy tylko jedną oś n-krotną. Zatem G zawiera C_n. Osie 2-krotne muszą być prostopadłe do niej. Jedyna możliwość to D_n.

- $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 3$, $\#G = 12$. Mamy $\frac{\#G}{n_1} = 6$, $\frac{\#G}{n_2} = 4$, $\frac{\#G}{n_3} = 4$. Wybierzmy oś 3-krotną. Musi ona przecinać sferę w dwóch różnych orbitach. Pozostałe punkty 3-krotne tworzą dwa trójkąty równoboczne w płaszczyznach prostopadłych do tej osi.

- $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$, $\#G = 24$.

  Mamy $\frac{\#G}{n_1} = 12$, $\frac{\#G}{n_2} = 8$, $\frac{\#G}{n_3} = 6$. Wybierzmy oś 4-krotną. Przecina ona sferę w dwóch elementach orbity X_3. Pozostałe punkty 4-krotne tworzą kwadrat w płaszczyznie prostopadłej do tej osi.

- $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$, $\#G = 60$.

  Mamy $\frac{\#G}{n_1} = 30$, $\frac{\#G}{n_2} = 20$, $\frac{\#G}{n_3} = 12$. Wybierzmy oś 5-krotną. Przecina ona sferę w dwóch elementach orbity X_3. Pozostałe punkty 5-krotne tworzą dwa pięciokąty foremne w dwóch płaszczyznach prostopadłych do tej osi.

3 Grupy macierzowe

3.1 Ciała

Mówimy, że $(\mathbb{K}, +, \cdot, 1, 0\}$ jest *ciałem*, gdy $(\mathbb{K}, +, 0, -\}$ i $(\mathbb{K}^\times, \cdot, 1, ^{-1})$ są grupami abelowymi spełniającymi

$$x(y + z) = xy + xz,$$

gdzie $\mathbb{K}^\times := \mathbb{K} \backslash \{0\}$.

Definiujemy homomorfizmy, izomorfizmy, etc. ciał w oczywisty sposób.

Najważniejszymi ciałami dla nas są $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$. $\mathbb{R}$ ma jedynie automorfizm trywialny. $\mathbb{C}$ ma jeden nietrywialny automorfizm: *sprzężenie zespolone* $\mathbb{C} \ni z \mapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$.

3.2 Przestrzenie wektorowe

Mówimy, że $(\mathcal{V}, +, 0, -)$ jest *przestrzenią wektorową nad ciałem* $\mathbb{K}$, gdy jest to grupa abelowa wyposażona w działanie $\mathbb{K} \times \mathcal{V} \ni (x, v) \mapsto xv \in \mathcal{V}$ takie, że

$$(x + y)v = xv + yv, \quad (xy)v = x(yv), \quad x, y \in \mathbb{K}, \quad v \in \mathcal{V},$$

$$x(u + v) = xu + xv, \quad x \in \mathbb{K}, \quad u, v \in \mathcal{V}.$$

Przykładem przestrzeni nad $\mathbb{K}$ są $\mathbb{K}^n$. Przestrzenie wektorowe izomorficzne z $\mathbb{K}^n$ nazywamy *przestrzeniami wymiaru n*

3.3 Odwzorowania liniowe

Homomorfizmy przestrzeni wektorowych nazywamy *odwzorowaniami liniowymi.*

Jeśli $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ są przestrzeniami, to $L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ będzie oznaczało zbiór odwzorowań liniowych z $\mathcal{V}$ do $\mathcal{W}$. Będziemy pisać $L(\mathcal{V}) := L(\mathcal{V}, \mathcal{V})$.

$L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ będziemy utożsamić z macierzami o n wierszach i m kolumnach. Dla $A \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ przez A^*, $\overline{A}$ i $A^\#$ będziemy oznaczać macierz *hermitowsko sprzężoną, zespolenie sprzężoną i transponowaną do A.*

3.4 Ogólna grupa liniowa

Niech $A \in L(\mathbb{K}^n)$. Wzór

$$\det A := \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}\pi A_{1,\pi(1)} \cdots A_{n,\pi(n)} \in \mathbb{K}$$

definiuje *wyznacznik* spełniający

$$\det AB = \det A \det B.$$

$GL(\mathbb{K}^n)$ definiujemy jako

$$GL(\mathbb{K}^n) := \{A \in L(\mathbb{K}^n) \ : \ \det A \neq 0\}.$$

Jest to grupa. Piszemy też

$$GL(\mathbb{K}^n) = GL(n, \mathbb{K}).$$

Wyznacznik definiuje homomorfizm

$$\det GL(\mathbb{K}^n) \to \mathbb{K}^\times.$$

Definiujemy

$$SL(\mathbb{K}^n) = SL(n, \mathbb{K}) := \{A \in GL(\mathbb{K}^n) \ : \ \det A = 1\}.$$

Można też podejść do grupy GL bardziej abstrakcyjnie. Niech $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{K}$. Zbiór bijekcji liniowych z $\mathcal{V}$ w $\mathcal{W}$ oznaczamy przez $Gl(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. W szczególności $GL(\mathcal{V}) := GL(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ jest grupą. Dla $\mathcal{V} = \mathbb{K}^n$ pokrywa się to z poprzednią definicją.

3.5 Grupa ortogonalna w skończonym wymiarze

$O(\mathbb{K}^n)$ definiujemy jako

$$O(\mathbb{K}^n) := \{A \in L(\mathbb{K}^n) \ : \ A^\# A = 1\!\!1\}.$$

(Automatycznie elementy $O(\mathbb{K}^n)$ spełniają $AA^\# = 1\!\!1$). Jest to podgrupa w $GL(\mathbb{K}^n)$. Piszemy też

$$O(\mathbb{R}^n) = O(n).$$

Macierze ortogonalne zachowują standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{K}^n$.

Latwo pokazać, że wyznacznik macierzy ortogonalnych może mieć wartość ± 1, Definiujemy

$$SO(\mathbb{K}^n) := SL(\mathbb{K}^n) \cap O(\mathbb{K}^n).$$

W przypadku zespolonym piszemy też $O(n, \mathbb{C}) = O(\mathbb{C}^n)$, $SO(n, \mathbb{C}) = SO(\mathbb{C}^n)$.

W przypadku rzeczywistym piszemy też $O(n) = O(\mathbb{R}^n)$, $SO(n) = SO(\mathbb{R}^n)$. Grupa $O(n)$ ma dwie składowe spójne. Składowa spójna zawierająca jedność pokrywa się z $SO(n)$.

3.6 Grupa pseudo-ortogonalna

Rozważmy dalej przypadek rzeczywisty. Niech $q, p \in 0, 1, \ldots$. Przez $\mathbb{R}^{q,p}$ będziemy rozumieć przestrzeń $\mathbb{R}^{q+p} = \mathbb{R}^q \oplus \mathbb{R}^p$ z iloczynem zadanym przez tensor $I_{q,p} := \begin{bmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}$. To znaczy,

$$vI_{q,p}v' = -\sum_{i=1}^{q} v_i v_i' + \sum_{j=q+1}^{q+p} v_j v_j'. \tag{3.15}$$

$O(\mathbb{R}^{q,p})$ definiujemy jako zbiór macierzy spełniających

$$A^{\#} I_{q,p} A = I_{q,p}.$$

(Automatycznie spełniają one $AI_{q,p}A^{\#} = I_{q,p}$). Jest to grupa. Piszemy też

$$O(\mathbb{R}^{q,p}) = O(q,p).$$

Macierze pseudoortogonalne zachowują iloczyn pseudoskalarny w $\mathbb{R}^{q,p}$.

Wyznacznik macierzy pseudo-ortogonalnych może mieć wartość ± 1, Definiujemy

$$SO(\mathbb{R}^{q,p}) = SO(q,p) := \{A \in O(\mathbb{R}^{q,p}) \ : \ \det A = 1\}.$$

Grupę $O(\mathbb{R}^{1,p})$ nazywamy grupą Lorentza. Ma ona cztery składowe spójne. Spójna składowa jedności jest nazywana ortoczasową grupą Lorentza i jest oznaczana $SO^{\uparrow}(\mathbb{R}^{1,p})$ lub $SO_0(\mathbb{R}^{1,p})$.

3.7 Abstrakcyjne podejście do grup (pseudo-)ortogonalnych

Można też podejść bardziej abstrakcyjnie. Niech $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ będą przestrzeniami wektorowymi z formą symetryczną, którą dla $v, v' \in \mathcal{V}$ oznaczamy $v \cdot v'$. Zbiór bijekcji liniowych z $\mathcal{V}$ w $\mathcal{W}$ spełniających

$$Av \cdot Av' = v \cdot v'$$

oznaczamy przez $O(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. W szczególności $O(\mathcal{V}) := O(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ jest grupą.

Dla $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ każdą niezdegenerowaną formę symetryczną można sprowadzić do postaci (3.15), i wtedy $\mathcal{V}$ nazywamy $\mathbb{R}^{q,p}$. Więc obie definicje sie w tym wypadku pokrywają.

Dla $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$ każdą niezdegenerowaną formę można sprowadzić do postaci (3.15) z $q = 0$.

Dla przestrzenie nieskończenie wymiarowych z reguły zakładamy, że forma symetryczna jest dodatnio określona i nazywamy ją iloczynem skalarnym. Zakładamy też z reguły, że przestrzenie są zupełne, czyli że są *rzeczywistymi przestrzeniami Hilberta.*

3.8 Grupa unitarna w skończonym wymiarze

$U(\mathbb{C}^n)$ definiujemy jako

$$U(\mathbb{C}^n) := \{A \in L(\mathbb{C}^n) \ : \ A^*A = \mathbb{1}\}.$$

(Automatycznie elementy $U(\mathbb{C}^n)$ spełniają $AA^* = \mathbb{1}$). Jest to podgrupa w $GL(\mathbb{C}^n)$. Piszemy też

$$U(\mathbb{C}^n) = U(n).$$

Macierze unitarne zachowują standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{C}^n$.

Latwo pokazać, że wyznacznik macierzy unitarnych ma moduł 1. Definiujemy

$$SU(\mathbb{C}^n) := SL(\mathbb{C}^n) \cap U(\mathbb{C}^n).$$

3.9 Grupa pseudo-unitarna

Niech $q, p \in 0, 1, \ldots$. Przez $\mathbb{C}^{q,p}$ będziemy rozumieć przestrzeń $\mathbb{C}^{q+p} = \mathbb{C}^q \oplus \mathbb{C}^p$ z iloczynem zadanym przez tensor $I_{q,p} := \begin{bmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}$. To znaczy,

$$\overline{v} I_{q,p} v' = -\sum_{i=1}^{q} \overline{v}_i v'_i + \sum_{j=q+1}^{q+p} \overline{v}_j v'_j. \tag{3.16}$$

$U(\mathbb{C}^{q,p})$ definiujemy jako zbiór macierzy spełniających

$$A^* I_{q,p} A = I_{q,p}.$$

(Automatycznie spełniają one $A I_{q,p} A^* = I_{q,p}$). Jest to grupa. Piszemy też

$$U(\mathbb{C}^{q,p}) = U(q, p).$$

Macierze pseudo-unitarne zachowują iloczyn pseudoskalarny w $\mathbb{C}^{q,p}$.

Wyznacznik macierzy pseudo-unitarnych ma moduł 1. Definiujemy

$$SU(\mathbb{C}^{q,p}) = SU(q, p) := \{A \in U(\mathbb{C}^{q,p}) \ : \ \det A = 1\}.$$

3.10 Abstrakcyjne podejście do grup (pseudo-)unitarnych

Można też podejść bardziej abstrakcyjnie. Niech $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ będą zespolonymi przestrzeniami wektorowymi z wyróżnioną formą hermiowską, którą dla $v, v' \in \mathcal{V}$ oznaczamy $\overline{v} \cdot v'$. Zbiór bijekcji liniowych z $\mathcal{V}$ w $\mathcal{W}$ spełniających

$$\overline{Av} \cdot Av' = \overline{v} \cdot v'$$

oznaczamy przez $U(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. W szczególności $U(\mathcal{V}) := U(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ jest grupą.

Dla $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$ każdą niezdegenerowaną formę hermitowską można sprowadzić do postaci (3.16), i wtedy $\mathcal{V}$ nazywamy $\mathbb{C}^{q,p}$. Więc obie definicje sie w tym wypadku pokrywają.

Dla przestrzenie nieskończenie wymiarowych z reguły zakładamy, że forma hermitowska jest dodatnio określona i nazywamy ją iloczynem skalarnym. Zakładamy też z reguły, że przestrzenie są zupełne, czyli że są *(zespolonymi) przestreniami Hilberta*

3.11 Grupa symplektyczna w skończonym wymiarze

W przestrzeni $\mathbb{K}^{2n} = \mathbb{K}^n \oplus \mathbb{K}^n$ wprowadzamy macierz $J = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix}$. Grupa $Sp(\mathbb{K}^n) = Sp(n, \mathbb{K})$ jest zdefiniowana jako

$$Sp(\mathbb{K}) := \{A \in L(\mathbb{K}^n) \ : \ A^{\#} J A = J\}$$

(Automatycznie elementy $Sp(\mathbb{K}^n)$ spełniają $AJA^{\#} = J$). Jest to podgrupa w $GL(\mathbb{K}^n)$. Macierze symplektyczne zachowują standardową formę symplektyczną w $\mathbb{K}^n$.

$$\omega(v, v') = \sum_{i=1}^{n} (v_i v'_{i+n} - v_{i+n} v'_i) = v \cdot J v'. \tag{3.17}$$

Możemy też zapisać

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} y_i \wedge y_{n+i},$$

gdzie $y_1, \ldots, y_{2n}$ jest bazą dualną do $v_1, \ldots, v_{2n}$. Mamy $\omega(Av, Av') = \omega(v, v')$ dla $v, v' \in \mathbb{K}^{2n}$ Dlatego

$$\omega \wedge \cdots \wedge \omega(Av_1, \ldots, Av_{2n}) = \omega \wedge \cdots \wedge \omega(v_1, \ldots, v_{2n}).$$

$$\omega \wedge \cdots \wedge \omega(v_1, \ldots, v_{2n}) = \det[v_1, \ldots, v_{2n}].$$

Dlatego $Sp(\mathbb{K}^n)$ jest podgrupą w $SL(\mathbb{K}^n)$.

3.12 Abstrakcyjne podejście do grup symplektycznych

Można też podejść bardziej abstrakcyjnie. Niech $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ będą przestrzeniami wektorowymi z formą symetryczną, którą np. dla $v, v' \in \mathcal{V}$ oznaczamy $v\omega v'$. Zbiór bijekcji liniowych z $\mathcal{V}$ w $\mathcal{W}$ spełniających

$$Av\omega\, Av' = v\omega v'$$

oznaczamy przez $Sp(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. W szczególności $Sp(\mathcal{V}) := Sp(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ jest grupą.

Każdą niezdegenerowaną formę symetryczną można sprowadzić do postaci (3.17). Więc obie definicje się w tym wypadku pokrywają.

3.13 Grupy afiniczne

Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią wektorową. Odwzorowaniem afinicznym na $\mathcal{V}$ nazywamy odwzorowanie postaci

$$\mathcal{V} \ni v \mapsto w + Av \in \mathcal{V}$$

gdzie $w \in \mathcal{V}$ i $A \in L(\mathcal{V})$. Odwzorowania afiniczne dla których $A \in GL(\mathcal{V})$ tworzą grupę z działaniem

$$(w_1, A_1)(w_2, A_2) := (w_1 + A_1 w_2, A_1 A_2)$$

elementem neutralnym $(0, \mathbb{1})$ i odwrotnością $(w, A)^{-1} = (A^{-1}w, A^{-1})$. Grupę tę nazywamy *afinicznym rozszerzeniem grupy* $GL(\mathcal{V})$.

Grupa $GL(\mathcal{V})$ działa na elementy z $\mathcal{V}$ w oczywisty sposób. Czyli dostajemy homomorfizm

$$GL(\mathcal{V}) \ni A \mapsto A \in \mathrm{Aut}(\mathcal{V}),$$

gdzie z prawej $\mathcal{V}$ jest traktowana jako grupa z dodawaniem. Latwo widzimy, że grupa afiniczna jest iloczynem półprostym $\mathcal{V} \rtimes GL(\mathcal{V})$.

Często w zastosowaniach spotykamy grupy w których $GL(\mathcal{V})$ jest zastąpione jej podgrupą. Na przykład, grupa Poincarego jest afinicznym rozszerzeniem grupy Lorentza $\mathbb{R}^{1,3} \rtimes O(1,3)$.

3.14 Grupy Liego

Mówimy, że G jest *grupą Liego*, jeśli jest to grupa będąca rozmaitością (gładką) i odwzorowania

$$\begin{aligned} G \times G \ni (g,h) &\mapsto gh \in G \\ G \ni g &\mapsto g^{-1} \in G \end{aligned}$$

są gładkie.

Wszystkie rozważane w tej sekcji grupy dla skończenie wymiarowych $\mathcal{V}$ nad ciałem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ są grupami Liego.

Oto wymiary wybranyh grup Liego

(1) $\dim SL(\mathbb{R}^n) = \dim SU(\mathbb{C}^n) = n^2 - 1$,

(2) $\dim SO(\mathbb{R}^n) = \frac{n(n-1)}{2}$,

(3) $\dim Sp(\mathbb{R}^{2n} = \frac{2n(2n+1)}{2}$.

4 Reprezentacje grup

4.1 Definicja

Niech G będzie grupą a $\mathcal{V}$ przestrzenią liniową. *Reprezentacją grupy G na przestrzeni $\mathcal{V}$* nazywamy homomorfizm $\pi : G \to Gl(\mathcal{V})$. Będziemy też często pisać, że para $(\pi, \mathcal{V})$ jest reprezentacją grupy G.

Innymi słowy, $G \ni g \mapsto \pi(g) \in L(\mathcal{V})$ jest reprezentacją, gdy

$$\pi(g_1 g_2) = \pi(g_1)\pi(g_2), \quad g_1, g_2 \in G.$$

Jeśli $\mathcal{V}$ jest przestrzenią Hilberta, to *reprezentacją unitarną grupy G na przestrzeni $\mathcal{V}$* nazywamy homomorfizm $\pi : G \to U(\mathcal{V})$.

W szczególności, $G \ni g \mapsto 1\!\!1_{\mathcal{V}} \in L(\mathcal{V})$ jst reprezentacją. Nazywamy ją *reprezentacją trywialną*.

4.2 Suma prosta

Niech $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ będą przestrzeniami liniowymi. Wtedy $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ ma strukturę przestrzeni wektorowej, oznaczanej przez $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$ i nazywanej *sumą prostą przestrzeni $\mathcal{V}_1$ i $\mathcal{V}_2$*.

Jeśli $A_i \in L(\mathcal{V}_i)$, to $A_1 \oplus A_2 \in L(\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2)$ jest zdefiniowany jako

$$(A_1 \oplus A_2)(v_1, v_2) := (A_1 v_1, A_2 v_2).$$

Niech $(\pi_i, \mathcal{V}_i)$ będą reprezentacjami na przestrzeniach $\mathcal{V}_i$. Wtedy

$$\pi_1 \oplus \pi_2(g) := \pi_1(g) \oplus \pi_2(g)$$

definiuje reprezentację na przestrzeni $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$ zwaną *sumą prostą reprezentacji π_1 i π_2*. Będziemy pisać

$$m\pi = \underbrace{\pi \oplus \cdots \oplus \pi}_{m \text{ razy}}.$$

4.3 Równoważność

Niech $(\pi, \mathcal{V}_\pi)$, $(\rho, \mathcal{V}_\rho)$ będą reprezentacjami G. Mówimy, że operator U *splata* π i ρ, jeśli

$$U\pi(g) = \rho(g)U, \quad g \in G. \tag{4.18}$$

Mówimy, że π, ρ są reprezentacjami *równoważnymi*, gdy istnieje $U \in Gl(\mathcal{V}_\pi, \mathcal{V}_\rho)$ splatający π i ρ. Piszemy wtedy $\pi \simeq \rho$.

Jeśli dodatkowo przestrzenie te są przestrzeniami Hilberta, mówimy, że π, ρ są *unitarnie równoważne*, gdy istnieje $U \in U(\mathcal{V}_\pi, \mathcal{V}_\rho)$ splatający π i ρ.

Twierdzenie 4.1 *Niech $\mathcal{V}_\pi$, $\mathcal{V}_\rho$ będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami Hilberta. Niech $(\pi, \mathcal{V}_\pi)$, $(\rho, \mathcal{V}_\rho)$ będą reprezentacjami unitarnymi. Wtedy ich równoważność jest równoważna unitarnej równoważności.*

Dowód. Niech $A \in GL(\mathcal{V}_\pi, \mathcal{V}_\rho)$ splata π i ρ. Wtedy $A^* \in GL(\mathcal{V}_\rho, \mathcal{V}_\pi)$ splata ρ i π. Zatem $A^*A \in GL(\mathcal{V}_\pi)$ splata π z sobą. To samo jest prawdą dla $(A^*A)^{-1/2}$. Zatem operator unitarny $(AA^*)^{-1/2}A$ splata π z ρ. $\square$

4.4 Nieprzywiedlność

Niech $(\pi, \mathcal{V})$ będzie reprezentacją G. Mówimy, że podprzestrzeń $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$ jest *niezmiennicza dla* $(\pi, \mathcal{V})$, gdy jest niezmiennicza względem $\pi(g)$, $g \in G$. Połóżmy $\pi_1 := \pi\Big|_{\mathcal{V}_1}$. Wtedy $(\pi_1, \mathcal{V}_1)$ jest też reprezentacją. Mówimy, że $(\pi_1, \mathcal{V}_1)$ jest *podreprezentacją* reprezentacji $(\pi, \mathcal{V})$.

Twierdzenie 4.2 *Jeśli $(\pi, \mathcal{V})$ jest unitarna i $\mathcal{V}_1$ jest niezmiennicza dla $(\pi, \mathcal{V})$, to $\mathcal{V}_1^\perp$ jest też niezmiennicza dla $(\pi, \mathcal{V})$.*

Mówimy, że $(\pi, \mathcal{V})$ jest *nieprzywiedlna*, gdy nie istnieje nietrywialna podprzestrzeń w $\mathcal{V}$ niezmiennicza względem π.

Mówimy, że $(\rho, \mathcal{V})$ jest *całkowicie rozkładalna*, gdy $\rho \simeq \oplus_{i=1}^n \pi_i$, gdzie π_i są nieprzywiedlne.

Twierdzenie 4.3 *Niech $(\pi, \mathcal{V})$ będzie reprezentacją unitarną w skończenie wymiarowej przestrzeni. Wtedy $(\pi, \mathcal{V})$ jest całkowicie rozkładalna.*

Dowód. Załóżmy, że $\mathcal{V}$ jest przywiedlna. Wtedy posiada nietrywialną podprzestrzeń niezmienniczą $\mathcal{V}_1$. $\mathcal{V}_2 := \mathcal{V}_1^\perp$ jest też niezmiennicza. Kontynuując dostaniemy rozkład. $\square$

Jeśli weźmiemy reprezentację $\mathbb{R} \ni t \mapsto \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in L(\mathbb{C}^2)$, to $\mathbb{C} \oplus \{0\}$ jest przestrzenią niezmienniczą, która nie posiada dopełniającej niezmienniczej. Dlatego jest to reprezentacja przywiedlna, ale nie jest całkowicie rozkładalna. Nie jest natomiast unitarna dla jakiegokolwiek iloczynu skalarnego.

Unitarna równoważność reprezentacji jest relacją równoważności. Przez $\hat{G}$ będziemy oznaczali zbiór klas abstrakcji reprezentacji nieprzywiedlnych względem tej relacji.

4.5 Reprezentacje jednowymiarowe

Rozważmy reprezentacje w jednowymiarowej przestrzeni zespolonej. Takie reprezentacje mają wartości w grupie $GL(\mathbb{C})$, która pokrywa się z multiplikatywną grupą liczb zespolonych $\mathbb{C}^\times$. W $\mathbb{C}$ mamy z dokładnością do proporcjonalności tylko jeden iloczyn skalarny. Reprezentacja jest unitarna (bądź unitaryzowalna) gdy ma wartości w $U(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$.

Każda reprezentacja jednowymiarowa jest nieprzywiedlna. Jeśli $G \ni g \mapsto \chi(g) \in \mathbb{C}^\times$ jest jednowymiarową reprezentacją zaś $G \ni g \mapsto \pi(g)$ jest dowolną reprezentacją, to

$$\chi\pi(g) := \chi(g)\pi(g)$$

jest też reprezentacją. Jeśli π jest nieprzywiedlne, to $\chi\pi$ też. W szczególności, reprezentacje jednowymiarowe dowolnej grupy tworzą grupę ze względu na mnożenie.

Dla grupy $\mathbb{Z}_n$, dla $m = 0, \dots, n-1$,

$$\mathbb{Z}_n \ni k \mapsto \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi km}{n}} \in \mathbb{C}^\times$$

jest reprezentacją. Jest ona zawsze unitarna. Ogólniej, niech $(m_1, \dots, m_p) \in \mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_p}$. Wtedy

$$\mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_p} \ni (k_1, \dots, k_p) \mapsto \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi k_1 m_1}{n_1}} \cdots \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi k_p m_p}{n_p}} \in \mathbb{C}^\times$$

jest reprezentacją unitarną. Latwo się przekonać, że wszystkie nieprzywiedlne reprezentacje grupy $\mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_p}$ są tej postaci. Możemy zapisać symbolicznie

$$\big(\mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_p}\big)\hat{} = \mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_p}.$$

Dla grupy $\mathbb{Z}$, dla dowolnego $\mu \in \mathbb{C}$

$$\mathbb{Z} \ni k \mapsto \mathrm{e}^{k\mathrm{i}\mu} \in \mathbb{C}^\times$$

jest reprezentacją. Jest ona unitarna wtedy i tylko wtedy gdy μ jest rzeczywiste. W szczególności, nie wszystkie reprezentacje $\mathbb{Z}$ są unitaryzowalne.

4.6 Reprezentacje permutacyjne

Niech grupa G działa na zbiorze X. Niech δ_x będzie bazą kanoniczną w $l^2(X)$. Wtedy

$$\pi(g)\delta_x := \delta_{gx}, \quad g \in G, \ x \in X,$$

lub równoważnie

$$\pi(g)f(x) := f(g^{-1}x), \quad g \in G, \ x \in X,$$

definiuje reprezentację unitarną na $l^2(X)$.

Jeśli X jest skończone, to reprezentacja ta jest przywiedlna, bo przestrzeń rozpięta na wektorze $\sum_x \delta_x$ jest niezmiennicza.

4.7 Podstawowe reprezentacje grupy permutacji

Rozważmy powyższą konstrukcję dla grupy S_n działającej na $\{1, \dots, n\}$. Zatem rozważamy S_n działającą na $\mathbb{C}^n$,

$$\pi\delta_i := \delta_{\pi i}.$$

Niech $\mathcal{V}_n = \{f \in \mathbb{C}^n \ : \ f_1 + \cdots + f_n = 0\} = \{(1, \dots, 1)\}^\perp$. Reprezentacja π obcięta do $\mathcal{V}$ bywa nazywana *reprezentacją standardową grupy S_n*.

Twierdzenie 4.4 *Reprezentacja standardowa jest nieprzywiedlna dla $n \geq 2$*

Dowód. Twierdzenie jest oczywiste dla grupy S_2, dla której wymiar reprezentacji jest równy 1.

Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n - 1$. Bazą przestrzeni $\mathcal{V}_n$ jest $e_1 = \delta_1 - \delta_n, \dots, e_{n-1} := \delta_{n-1} - \delta_n$. Rozważmy grupę $S_{n-1} \subset S_n$. Działa one na bazę $e_1, \dots, e_{n-1}$ jak reprezentacja permutacyjna. Dlatego też, z założenia indukcyjnego, jej jedyne nietrywialne podprzestrzenie niezmiennicze są rozpięte przez $e_1 + \cdots + e_{n-1} = \delta_1 + \cdots + \delta_{n-1} - (n-1)\delta_n$ oraz jej dopełnienie ortogonalne. Latwo się przekonać, że jakikolwiek element $S_n \backslash S_{n-1}$ nie zachowuje obu podprzestrzeni. $\square$

Zauważmy, że dla grupy A_3, reprezentacja standardowe na $\mathcal{V}_3$ jest przywiedlna. Dla A_4, reprezentacja standardowa jest nieprzywiedlna na $\mathcal{V}_3$. Dlatego też, Twierdzenie 4.4 jest słuszne jeśli zastąpimy S_n przez A_n i $n \geq 4$ (z takim samym dowodem).

Zatem dla dowolnej grupy permutacji znamy już 4 reprezentacje nieprzywiedlne.

(1) trywialna, (1-wymiarowa),

(2) sgn, (1-wymiarowa),

(3) standardowa, ($d - 1$-wymiarowa),

(4) sgn$\times$standardowa, ($d - 1$-wymiarowa).

Dla małych n niektóre z nich się pokrywają: Dla S_2, (1)=(4), (2)=(3). Dla S_3, (3)=(4).

Począwszy od S_4, wszystkie cztery reprezentacje są różne.

4.8 Lematy Schura

Twierdzenie 4.5 (Pierwszy Lemat Schura) *Niech $(\pi, \mathcal{V})$ będzie nieprzywiedlną unitarną reprezentacją G. Niech $A \in B(\mathcal{V})$ splata $(\pi, \mathcal{V})$ z samą sobą. Wtedy $A = c\mathbb{1}$ dla pewnego $c \in \mathbb{C}$.*

Dowód. Niech A będzie niezerowym operatorem splatającym $(\pi, \mathcal{V})$ z sobą. A^* też splata. Jeden z operatorów $A + A^*$ i $\mathrm{i}(A - A^*)$ jest niezerowy i oba splatają. Zatem można założyć, że A jest samosprzężony. Jeśli A nie jest równy $\lambda\mathbb{1}$, to znaczy istnieją $\lambda_1 \neq \lambda_2$ w spektrum A. Załóżmy dla uproszczenia, że $\dim \mathcal{V} < \infty$. Wtedy $\mathrm{Ker}(A - \lambda_1)$ jest nietrywialną podprzestrzenią niezmienniczą, co jest sprzecznością. $\square$

Twierdzenie 4.6 (Drugi Lemat Schura) *Niech $(\pi, \mathcal{V}_\pi)$, $(\rho, \mathcal{V}_\rho)$ będą nieprzywiedlnymi unitarnymi reprezentacjami G. Jeśli istnieje $A \in B(\mathcal{V})$, $A \neq 0$ splatający $(\pi, \mathcal{V}_\pi)$ z $(\rho, \mathcal{V}_\rho)$, to $(\pi, \mathcal{V}_\pi)$ jest unitarnie równoważna $(\rho, \mathcal{V}_\rho)$.*

Dowód. Niech $A \neq 0$. $A^*A \neq 0$ splata $(\pi, \mathcal{V}_\pi)$ z sobą. Dlatego $A^*A = \lambda_1 \mathbb{1}$, $\lambda_1 \neq 0$. Podobnie, AA^* splata $(\rho, \mathcal{V}_\rho)$ z sobą. Dlatego $AA^* = \lambda_2 \mathbb{1}$. Mamy $\lambda_1^2 \mathbb{1} = A^*AA^*A = \lambda_2 A^*A = \lambda_2\lambda_1 \mathbb{1}$. Zatem $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$. Więc $U := \lambda^{-\frac{1}{2}} A$ jest unitarny. □

4.9 Iloczyn tensorowy I

Najpierw wprawadźmy iloczyn tensorowy w "naiwny" sposób.

Oznaczmy bazę kanoniczną $\mathbb{C}^n$ przez e_i, $i = 1, \ldots, n$, zaś bazę kanoniczną $\mathbb{C}^m$ przez f_j, $j = 1, \ldots, m$. Przestrzeń $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ można zdefiniować jako $\mathbb{C}^{nm}$ z bazą $e_i \otimes f_j$, $i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$. Czyli elementy $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ są postaci $\sum_{i,j=1}^n t_{ij} e_i \otimes f_j$.

Jeśli $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$, $w = \sum_{j=1}^m w_j f_j$, to kładziemy

$$v \otimes w := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m v_i w_j e_i \otimes f_j.$$

Niech A będzie operatorem na $\mathbb{C}^n$ a B operatorem na $\mathbb{C}^m$. Przez $A \otimes B$ rozumiemy operator na $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$, którego macierz jest równa

$$(A \otimes B)_{ij,kl} = A_{ik} B_{jl}.$$

Jeśli A i B są unitarne/hermitowskie, to $A \otimes B$ też.

4.10 Iloczyn tensorowy II

Wprowadźmy teraz iloczyn tensorowy w sposób niezależny od bazy. Niech $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ będą przestrzeniami. Dla uproszczenia, będziemy zakładać, że są skończenie wymiarowe.

Niech $\mathcal{Z}$ będzie przestrzenią skończonych kombinacji liniowych wektorów (v, w), $v \in \mathcal{V}$, $w \in \mathcal{W}$. W przestrzeni tej wyróżniamy podprzestrzeń $\mathcal{Z}_0$ rozpiętą na wektorach

$$\begin{aligned} (\lambda v, w) - \lambda(v, w), &\qquad (v, \lambda w) - \lambda(v, w), \\ (v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w), &\qquad (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2). \end{aligned}$$

Definiujemy $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} := \mathcal{Z}/\mathcal{Z}_0$. Jeśli $v \in \mathcal{V}$, $w \in \mathcal{W}$, to definiujemy $v \otimes w := (v, w) + \mathcal{Z}_0$.

$\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ jest przestrzenią wektorową. $\otimes$ jest działaniem spełniającym warunki

$$\begin{aligned} (\lambda v) \otimes w = \lambda v \otimes w, &\qquad v \otimes (\lambda w) - \lambda v \otimes w, \\ (v_1 + v_2) \otimes w - v_1 \otimes w - v_2 \otimes w, &\qquad v \otimes (w_1 + w_2) - v \otimes w_1 - v \otimes w_2. \end{aligned}$$

Wektory postaci $v \otimes w$ nazywają się *tensorami prostymi*. Nie są to wszystkie wektory w $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$, ale rozpinają $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$.

Pokażmy, że powyższa definicja jest rółnoważna definicji "naiwnej".

Twierdzenie 4.7 *Jeśli e_i, $i = 1, \ldots, n$ jest bazą w $\mathcal{V}$, zaś f_j, $j = 1, \ldots, m$ bazą w $\mathcal{W}$, to $e_i \otimes f_j$, $i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$. jest bazą w $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$.*

Dowód. Latwo sprawdzamy, że $e_i \otimes f_j$ rozpinają $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$. Trzeba pokazać ich liniową niezależność. Niech

$$\sum_{i,j} t^{ij} e_i \otimes f_j = 0. \tag{4.19}$$

Niech $e^1, \ldots, e^n$ będzie bazą dualną do $e_1, \ldots, e_n$, tzn

$$\langle e^i | e_j \rangle = \delta^i_j.$$

Podobnie, niech $f^1, \ldots, f^m$ będzie bazą dualną do $f_1, \ldots, f_m$. Zdefiniujmy funkcjonał p^{ij} na $\mathcal{Z}$ wzorem

$$\langle p^{ij} | (v, w) \rangle = \langle e^i | v \rangle \langle f^j | w \rangle.$$

Sprawdzamy, że $p^{ij} = 0$ na $\mathcal{Z}_0$. Zatem p^{ij} jest dobrze określony na $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} = \mathcal{Z}/\mathcal{Z}_0$. Stosując p^{ij} do (4.19) dostajemy $t^{ij} = 0$. $\square$

Twierdzenie 4.8 *Jeśli $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ są przestrzeniami Hilberta, to $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ posiada jedyny iloczyn skalarny taki, że*

$$(v_1 \otimes w_1 | v_2 \otimes w_2) = (v_1|v_2)(w_1|w_2). \tag{4.20}$$

Jeśli e_i, $i = 1, \ldots, n$ jest bazą ortonormalną w $\mathcal{V}$, zaś f_j, $j = 1, \ldots, m$ bazą ortonormalną w $\mathcal{W}$, to $e_i \otimes f_j$, $i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$. jest bazą ortonormalną w $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$.

Dowód. Najpierw sprawdzamy, że jeśli iloczyn skalarny o własności (4.20) istnieje, to część twierdzenia o bazach ortonormalnych musi być prawdziwa. $\square$

Twierdzenie 4.9 *Niech A będzie operatorem na $\mathcal{V}$ i B operatorem na $\mathcal{W}$. Wtedy istnieje dokładnie jeden operator $A \otimes B$ na $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ taki, że*

$$(A \otimes B) v \otimes w := (Av) \otimes (Bw).$$

Dowód. Wystarczy zdefiniować $A \otimes B$ w bazie:

$$(A \otimes B) e_i \otimes f_j := (Ae_i) \otimes (Bf_j).$$

$\square$

Niech $(\pi, \mathcal{V})$, $(\rho, \mathcal{W})$ będą reprezentacjami. *Iloczynem tensorowym tych reprezentacji* nazywamy reprezentację $\pi \otimes \rho$ w przestrzeni $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$

$$(\pi \otimes \rho)(g) = \pi(g) \otimes \rho(g).$$

Zauważmy, że $m\pi$ jest równoważne $\pi \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{C}^m}$.

4.11 Reprezentacja grupy permutacji

Twierdzenie 4.10 *Dla $\sigma \in S_n$ istnieje dokładnie jeden operator $\Theta(\sigma) \in L(\otimes^n \mathcal{V})$, dla którego*

$$\Theta(\sigma) v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = v_{\sigma^{-1}1} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}n}.$$

$$S_n \ni \sigma \mapsto \Theta(\sigma) \in L(\mathcal{V}^{\otimes n})$$

jest reprezentacją.

Dowód. Wystarczy wybrać bazę $e_1, \ldots, e_m$ w $\mathcal{V}$ i położyć

$$\Theta(\sigma) e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} = e_{i_{\sigma^{-1}1}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma^{-1}n}}$$

To definiuje jednoznacznie operator $\Theta(\sigma)$.

Pokażmy, że $\Theta(\pi)\Theta(\sigma) = \Theta(\pi\sigma)$. Niech $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{V}$ i $w_i := v_{\sigma^{-1}i}$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\Theta(\pi)\Theta(\sigma) v_1 \otimes \cdots \otimes v_n &= \Theta(\pi) w_1 \otimes \cdots \otimes w_n \\
&= w_{\pi^{-1}1} \otimes \cdots \otimes w_{\pi^{-1}n} \\
&= v_{\sigma^{-1}\pi^{-1}1} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}\pi^{-1}n} \\
&= v_{(\pi\sigma)^{-1}1} \otimes \cdots \otimes v_{(\pi\sigma)^{-1}n}.
\end{aligned}$$

Jeśli $\mathcal{V}$ jest przestrzenią Hilberta, jest to reprezentacja unitarna.

Jest to reprezentacja przywiedlna. W szczególności, można podać rzuty ortogonalne na podprzestrzenie na których reprezentacja jest trywialna i znakową:

$$\begin{aligned}
\Theta^n_{\mathrm{s}} &:= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \Theta(\sigma), \\
\Theta^n_{\mathrm{a}} &:= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\sigma \Theta(\sigma).
\end{aligned}$$

Kładziemy $\otimes^n_{\mathrm{s/a}} \mathcal{V} := \Theta^n_{\mathrm{s/a}} \otimes^n \mathcal{V}$.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\Theta^2_{\mathrm{s}} &:= \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \Theta(\tau)), \\
\Theta^2_{\mathrm{a}} &:= \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \Theta(\tau)).
\end{aligned}$$

Zatem $\mathbb{1} = \Theta^2_{\mathrm{s}} + \Theta^2_{\mathrm{a}}$. Czyli każdy 2-tensor można rozłożyć na część symetryczną i antysymetryczną: $\otimes^2 \mathcal{V} = \otimes^2_{\mathrm{s}} \mathcal{V} \oplus \otimes^2_{\mathrm{a}} \mathcal{V}$.

Jeśli $t \in \otimes^n \mathcal{V}$, to

$$t = \sum t_{i_1,\ldots,i_n} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned}
\Theta_{\mathrm{s}} t &= \sum t_{(i_1,\ldots,i_n)} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}, \\
\Theta_{\mathrm{a}} t &= \sum t_{[i_1,\ldots,i_n]} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n},
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} t_{(i_1,\dots,i_n)} &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} t_{i_{\sigma i},\dots,i_{\sigma n}}, \\ t_{[i_1,\dots,i_n]} &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}\sigma t_{i_{\sigma i},\dots,i_{\sigma n}}. \end{aligned}$$

Mamy

$$\dim \otimes_{\mathrm{s}}^n \mathbb{C}^d = \frac{(d+n-1)!}{(d-1)!n!}, \quad \dim \otimes_{\mathrm{a}}^n \mathbb{C}^d = \frac{n!}{d!(n-d)!}.$$

4.12 Charaktery

Załóżmy, że π jest reprezentacją na skończenie wymiarowej przestrzeni $\mathcal{V}$. Charakterem reprezentacji π nazywamy funkcję na G równą

$$\chi_\pi(g) := \mathrm{Tr}\pi(g).$$

Mamy $\dim \mathcal{V} = \chi_\pi(e)$,

$$\begin{aligned} \chi_\pi(g) &= \chi_\pi(hgh^{-1}), \quad g,h\in G; \\ \chi_{\pi\oplus\rho} &= \chi_\pi + \chi_\rho, \\ \chi_{n\pi} &= n\chi_\pi, \\ \chi_{\pi\otimes\rho} &= \chi_\pi\chi_\rho, \\ \chi_{\overline{\pi}} &= \overline{\chi}_\pi, \\ \chi_{\otimes_{\mathrm{s}}^2\pi} &= \frac{1}{2}\left(\chi_\pi(g)^2 + \chi_\pi(g^2)\right); \\ \chi_{\otimes_{\mathrm{a}}^2\pi} &= \frac{1}{2}\left(\chi_\pi(g)^2 - \chi_\pi(g^2)\right). \end{aligned}$$

5 Reprezentacje grup skończonych

W tej sekcji wszystkie grupy są skończone.

5.1 Unitaryzowalność

Twierdzenie 5.1 *Niech G będzie grupą skończoną a $(\rho, \mathcal{V}_\rho)$ jej reprezentacją. Wtedy istnieje iloczyn skalarny na $\mathcal{V}_\rho$ taki, że ρ jest reprezentacją unitarną.*

Dowód. Wybierzmy dowolny iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot)_0$ w $\mathcal{V}_\rho$. Wtedy

$$(v|w) := \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}(\rho(g)v|\rho(g)w)_0$$

jest też iloczynem skalarnym. Mamy

$$(\rho(h)v|\rho(h)w) = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}(\rho(gh)v|\rho(gh)w)_0 = (v|w).$$

Zatem ρ jest reprezentacją unitarną. $\square$

Stąd wniosek, że każda reprezentacja grupy skończonej w skończenie wymiarowej przestrzeni jest całkowici rozkładalna.

5.2 Relacje ortogonalności

Unitarna równoważność reprezentacji jest relacją równoważności. Przez $\hat{G}$ będziemy oznaczali zbiór klas abstrakcji reprezentacji nieprzywiedlnych względem tej relacji. W praktyce dla każdego elementu $\hat{G}$ wybierzemy reprezentanta $(\pi, \mathcal{V}_\pi)$. Wybierzemy również bazę ortonormalną $e_{\pi,1}, \dots, e_{\pi,d_\pi}$, gdzie $d_\pi := \dim \mathcal{V}_\pi$. Możemy wtedy zapisać π jako macierz

$$[\pi_{ij}(g)]_{i,j=1,\dots,d_\pi}\,, \quad g \in G.$$

Czyli

$$\pi_{ij}(g) = (e_{\pi,i}|\pi(g)e_{\pi,j})\,.$$

Mamy też charaktery nieprzywiedlne

$$\chi_\pi(g) := \sum_{i=1}^{d_\pi}\pi_{ii}(g) = \mathrm{Tr}\pi(g)$$

W $l^2(G)$ będziemy używać iloczynu skalarnego

$$(f|f') := \frac{1}{\#G}\sum\overline{f(g)}f'(g).$$

Twierdzenie 5.2 *Niech $\pi, \pi' \in \hat{G}$.*

$$(\pi_{ij}|\pi'_{km}) = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\overline{\pi_{ij}(g)}\pi'_{km}(g) \quad = \quad \frac{1}{d_\pi}\delta_{\pi,\pi'}\delta_{ik}\delta_{jm}, \tag{5.21}$$

$$(\chi_\pi|\chi_{\pi'}) = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\overline{\chi_\pi(g)}\chi_{\pi'}(g) \quad = \quad \delta_{\pi,\pi'}. \tag{5.22}$$

Lemat 5.3 *Niech π, π' będą reprezentacjami. Niech H będzie operatorem z $\mathcal{V}_{\pi'}$ do $\mathcal{V}_\pi$. Zdefiniujmy*

$$\langle H\rangle := \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\pi(g^{-1})H\pi'(g).$$

Wtedy $\langle H\rangle$ splata π' i π. W szczególności, jeśli π, π' są nieprzywiedlne, to $\langle H\rangle$ jest niezerowe jedynie, gdy są one równoważne i wtedy (przyjmując, że $(\pi, \mathcal{V}_\pi) = (\pi', \mathcal{V}_{\pi'})$) mamy

$$\langle H\rangle = \frac{\mathrm{Tr}H}{d_\pi}\mathbb{1}_{\mathcal{V}_\pi}. \tag{5.23}$$

Dowód.

$$\begin{aligned}\pi(h)\langle H\rangle &= \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\pi(hg^{-1})H\pi'(g)\\ &= \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\pi((gh^{-1})^{-1})H\pi'(gh^{-1})\pi'(h) \;=\; \langle H\rangle\pi'(h).\end{aligned}$$

Następnie stosujemy Lemat Schura. Pokażmy na koniec (5.23). Wiemy, że $\langle H\rangle = c\mathbb{1}_{\mathcal{V}_\pi}$. Zatem

$$cd_\pi = \mathrm{Tr}\langle H\rangle = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}\pi(g^{-1})H\pi(g) = \mathrm{Tr}H.$$

□

Dowód Twierdzenia 5.2 Stosujemy Lemat 5.3 do $H = |e_{\pi,j})(e_{\pi',m}|$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\pi(g^{-1})|e_{\pi,j})(e_{\pi',m}|\pi'(g) &= \frac{1}{d_\pi}\mathbb{1}_{\mathcal{V}_\pi}\delta_{\pi,\pi'}\mathrm{Tr}|e_{\pi j})(e_{\pi,m}|\\ &= \frac{1}{d_\pi}\mathbb{1}_{\mathcal{V}_\pi}\delta_{\pi,\pi'}\delta_{jm}.\end{aligned}$$

Następnie obkładamy obie strony przez $(e_{\pi,i}|\cdots|e_{\pi',k})$, dostając (5.21). Aby pokazać (5.22), liczymy:

$$(\chi_\pi|\chi_{\pi'}) \;=\; \sum_{i=1}^{d_\pi}\sum_{j=1}^{d_{\pi'}}(\pi_{ii}|\pi'_{jj}) = \delta_{\pi\pi'}\sum_{i=1}^{d_\pi}(\pi_{ii}|\pi_{ii}) = \delta_{\pi\pi'}\frac{d_\pi}{d_\pi}.$$

□

5.3 Rozkład reprezentacji

Niech $(\rho,\mathcal{W})$ będzie reprezentacją grupy G na przestrzeni wymiaru d_ρ. Możemy ją zawsze rozłożyć na składniki jednorodne:

$$\rho \simeq \bigoplus_{\pi\in\hat{G}} m_\pi\pi. \tag{5.24}$$

Zatem

$$d_\rho = \sum_{\pi\in\hat{G}} m_\pi d_\pi. \tag{5.25}$$

Jeśli ρ jest reprezentacją unitarną, to można założyć, że suma (5.24) jest ortogonalna. Mamy też rozkład przestrzeni $\mathcal{W}$ na sumę prostą ortogonalną $\mathcal{W} = \bigoplus_{\pi\in\hat{G}}\mathcal{W}_\pi$ taki, że $\rho\Big|_{\mathcal{W}_\pi}$ jest równoważna $m_\pi\pi$, oraz rzuty ortogonalne Q_π na $\mathcal{W}_\pi$. Oczywiście, $\mathcal{W}_\pi = \mathrm{Ran}Q_\pi$,

$$\sum_{\pi\in\hat{G}} Q_\pi \;=\; \mathbb{1},\;\; Q_\pi^* = Q_\pi,\;\; Q_\pi Q_{\pi'} = Q_\pi\delta_{\pi\pi'}.$$

Pokażemy, że liczby m_π, podprzestrzenie $\mathcal{W}_\pi$ i rzuty Q_π są wyznaczone jednoznacznie. Pokażemy, jak je łatwo znajdować.

Pamiętamy, że charakter ρ jest zdefiniowany jako $\chi_\rho(g) := \mathrm{Tr}\rho(g)$, $g\in G$.

Twierdzenie 5.4 *Dla* $\pi \in \hat{G}$

$$m_\pi = \frac{1}{\#G} \sum_{g\in G} \overline{\chi_\pi(g)} \chi_\rho(g) \tag{5.26}$$

$$= (\chi_\pi | \chi_\rho), \tag{5.27}$$

$$Q_\pi = \frac{d_\pi}{\#G} \sum_{g\in G} \overline{\chi_\pi(g)} \rho(g). \tag{5.28}$$

Dowód. Niech ρ spełnia (5.24). Wtedy

$$\rho = \sum m_\pi \rho_\pi.$$

Następnie relacja ortogonalności charakterów implikuje (5.26).

Możemy znaleźć bazę ortonormalną w $\mathcal{W}_\pi$ $e_{\pi,i,p}$, $i = 1, \dots, d_\pi$, $p = 1, \dots, m_\pi$ taką, że

$$\rho(g) e_{\pi,i,p} = \sum_{j=1}^{d_\pi} \pi_{ji}(g) e_{\pi,j,p}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{d_\pi}{\#G} \sum_{g\in G} \overline{\chi_{\pi'}(g)} \rho(g) e_{\pi,i,p} &= \frac{d_\pi}{\#G} \sum_{g\in G} \sum_{k=1}^{d_{\pi'}} \sum_{j=1}^{d_\pi} \overline{\pi'_{kk}(g)} \pi_{ji}(g) e_{\pi,j,p} \\ &= \delta_{\pi,\pi'} \sum_{k,j=1}^{d_\pi} \delta_{kj} \delta_{ki} e_{\pi,j,p} = \delta_{\pi,\pi'} e_{\pi,i,p}. \end{aligned}$$

□

5.4 Reprezentacja regularna

Jeśli grupa G działa na zbiorze X, to wiąże się z tym unitarna reprezentacja grupy G na przestrzeni $l^2(X)$ zadana przez

$$\lambda(g) f(x) := f(g^{-1}x), \quad g \in G, \ x \in X.$$

W szczególności, rozważmy $X = G$. Iloczyn skalarny w $l^2(G)$ normalizujemy

$$(f|f') := \frac{1}{\#G} \sum \overline{f(g)} f'(g).$$

Dostajemy reprezentację na $l^2(G)$ zwaną *(lewą) reprezentacją regularną*. Mamy też *prawą reprezentację regularną*

$$\rho(g) f(h) := f(hg), \quad g, h \in G.$$

Twierdzenie 5.5 (1) $\lambda \simeq \underset{\pi\in\hat{G}}{\oplus} d_\pi \pi.$

(2) $\#G = \sum_{\pi \in \hat{G}} d_\pi^2$. *Funkcje* $\sqrt{d_\pi}\pi_{ij}$ *stanowią bazę ortonormalną w* $l^2(G)$.

Dowód. Charakter reprezentacji regularnej jest równy

$$\chi_\lambda(g) = \#G\ \delta_e(g).$$

Stąd

$$m_\pi = (\chi_\lambda|\chi_\pi) = \chi_\pi(e) = d_\pi.$$

To pokazuje (1), z którego na mocy (5.25) wynika (2).

Wiemy, że $\{\sqrt{d_\pi}\pi_{ij}\ :\ \pi \in \hat{G},\ i,j = 1,\dots,d_\pi\}$ stanowią układ ortonormalny. (2) oznacza, że liczba jego elementów równa jest wymiarowi $l^2(G) = \#G$. Zatem jest to baza ortonormalna. □

5.5 Liczba reprezentacji nieprzywiedlnych

Twierdzenie 5.6 *Liczba klas sprzężoności jest równa liczbie reprezentacji nieprzywiedlnych.*

Dowód. Niech $l^2_{\mathrm{cent}}(G)$ będzie podprzesterzenią $l^2(G)$ składającą się z funkcji stałych na klasach sprzężoności. Wiemy, że χ_π, $\pi \in \hat{G}$, stanowią układ ortonormalny w $l^2_{\mathrm{cent}}(G)$. Pokażemy, że jest to baza ortonormalna.

Najpierw zauważmy, że z Lematu 5.3 wynika, że

$$\langle \pi(g) \rangle = \frac{\chi_\pi(g)}{d_\pi} \mathbb{1}_{\mathcal{V}_\pi}. \tag{5.29}$$

Niech $f \in l^2_{\mathrm{cent}}(G)$.

$$\begin{aligned} f(g) &= \sum_{\pi\in\hat{G}} \sum_{i,j}^{d_\pi} f_{\pi,ij}\pi_{ij}(g) \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{h\in G} \sum_{\pi\in\hat{G}} \sum_{i,j}^{d_\pi} f_{\pi,ij}\pi_{ij}(hgh^{-1}) \\ &= \sum_{\pi\in\hat{G}} \sum_{i,j}^{d_\pi} f_{\pi,ij}(e_{\pi,i}|\langle\pi(g)\rangle e_{\pi,j}) \\ &= \sum_{\pi\in\hat{G}} \sum_{i}^{d_\pi} f_{\pi,ii}\frac{\chi_\pi(g)}{d_\pi}, \end{aligned}$$

gdzie w ostatnim kroku skorzystaliśmy z (5.29). Zatem $l^2_{\mathrm{cent}}(G)$ jest rozpięte przez χ_π, $\pi \in \hat{G}$. □

6 Algebry łączne

6.1 Definicja

Niech $\mathfrak{A}$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$. Mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest *algebrą* jeśli jest wyposażona w działanie

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \ni (A, B) \mapsto AB \in \mathfrak{A}$$

spełniające

$$\begin{aligned} &A(B + C) = AB + AC, \quad (B + C)A = BA + CA, \\ &(\alpha\beta)(AB) = (\alpha A)(\beta B). \end{aligned}$$

Jeśli w dodatku

$$A(BC) = (AB)C,$$

to mówimy, że jest to *algebra łączna.* (W praktyce, skracamy nazwę, przez *algebrę* rozumiejąc algebrę łączną).

Mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest *algebrą przemienną* gdy $A, B \in \mathfrak{A}$ implikuje $AB = BA$.

Centrum algebry $\mathfrak{A}$ jest zdefiniowane jako

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{A}) = \{A \in \mathfrak{A} \ : \ AB = BA, \ B \in \mathfrak{A}\}.$$

6.2 Podalgebry

Ustalmy algebrę $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ nazywmy *podalgebrą* gdy jest to podprzestrzeń liniowa i $A, B \in \mathfrak{B} \Rightarrow AB \in \mathfrak{B}$. Oczywiście, podalgebra jest również algebrą.

Jeśli rodzina $\mathfrak{B}_\alpha \subset \mathfrak{A}$ składa się z podalgebr, to $\cap_\alpha \mathfrak{B}_\alpha$ jest też podalgebrą. Dlatego, dla dowolnego podzbioru $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ istnieje najmniejsza podalgebra zawierająca $\mathfrak{B}$. Oznaczamy ją przez $\mathrm{Alg}(\mathfrak{B})$ i nazywamy *podalgebrą generowaną przez* $\mathfrak{B}$.

Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$. Oczywiście, zbiór liniowych odwzorowań w $\mathcal{V}$, oznaczany przez $L(\mathcal{V})$, jest algebrą.

Podalgebry w $L(\mathcal{V})$ nazywane są *konkretnymi algebrami.*

6.3 Identyczność

Identyczność algebry $\mathfrak{A}$ to element $\mathbb{1} \in \mathfrak{A}$ taki, że

$$A = \mathbb{1}A = A\mathbb{1}, \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Każda algebra ma najwyżej jedną identyczność. W rzeczy samej, jeśli $\mathbb{1}_1, \mathbb{1}_2$ są identycznościami, to

$$\mathbb{1}_1 = \mathbb{1}_1\mathbb{1}_2 = \mathbb{1}_2.$$

Mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest *unitalna* albo *z jedynką*, jeśli posiada identyczność. W dalszym ciągu, dla $\lambda \in \mathbb{C}$ będziemy po prostu pisać λ zamiast $\lambda\mathbb{1}$.

Zawsze można do algebry $\mathfrak{A}$ dołączyć jedynkę. Dostajemy wtedy algebrę $\mathfrak{A}_{\mathbf{1}}$, jako przestrzeń wektorow równą $\mathfrak{A} \oplus \mathbb{C}$ z działaniem

$$(A, \lambda)(B, \mu) := (AB + \lambda B + \mu A, \lambda\mu).$$

6.4 Idempotenty

$P \in \mathfrak{A}$ nazywa się *idempotentem* gdy $P^2 = P$. $P\mathfrak{A}P$ jest podalgebrą zwaną *algebrą zredukowaną*.

Identyczność jest idempotentem.

Idempotent P nazywa się *minimalnym* gdy $P\mathfrak{A}P$ jest jednowymiarowa.

6.5 Sumy proste

Jeśli $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ są algebrami, możemy zdefiniować $\mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_2$.

Jeśli $\mathfrak{A}$ jest algebrą i $P \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$ jest idempotentem, to oczywiście $P\mathfrak{A} = P\mathfrak{A}P$ jest podalgebrą. $\mathfrak{A}$ jest naturalnie izomorficzna z $P\mathfrak{A} \oplus (1-P)\mathfrak{A}$.

6.6 Homomorfizmy

Niech $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ będą algebrami. Odwzorowanie $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ nazywa się *homomorfizmem* gdy jest liniowe i zachowuje mnożenie, to znaczy

(1) $\phi(\lambda A) = \lambda\phi(A)$;

(2) $\phi(A + B) = \phi(A) + \phi(B)$;

(3) $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$.

Jeśli ϕ jest homomorfizmem i P jest idempotentem, to $\phi(P)$ jest idempotentem.

Homomorfizm $\mathfrak{A}$ w $L(\mathcal{V})$ jest nazywany *reprezentacją* $\mathfrak{A}$ *na* $\mathcal{V}$.

Jeśli $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ są algebrami unitalnymi i $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ jest homomorfizmem, mówimy, że ϕ jest *unitalny* gdy

$$\phi(\mathbb{1}_{\mathfrak{A}}) = \mathbb{1}_{\mathfrak{B}}.$$

6.7 Lewa regularna reprezentacja

Regularna reprezentacja

$$\mathfrak{A} \ni A \mapsto \lambda(A) \in L(\mathfrak{A})$$

jest zdefiniowana przez

$$\lambda(A)B := AB, \quad A, B \in \mathfrak{A}.$$

Jeśli $\mathfrak{A}$ jest unitalna, to λ jest injektywna. Jeśli $\mathfrak{A}$ nie jest unitalna, to λ może być rozszerzona do reprezentacji

$$\mathfrak{A} \ni A \mapsto \lambda_{\mathbf{1}}(A) \in L(\mathfrak{A}_{\mathbf{1}})$$

w oczywisty sposób. $\lambda_{\mathbf{1}}$ jest injektywna.

W obu przypadkach widzimy, że każda algebra jest izomorficzna z konkretną algebrą.

6.8 Ideały

$\mathfrak{B}$ jest *lewym ideałem* algebry $\mathfrak{A}$ jeśli jest liniową podprzestrzenią w $\mathfrak{A}$ i $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B} \Rightarrow AB \in \mathfrak{B}$. Podobnie definiujemy prawy ideał.

Jeśli $A \in \mathfrak{A}$, to $\mathfrak{A}A$ jest lewym ideałem

$\mathfrak{B}$ nazywa się *ideałem dwustronnym*, lub po prostu *ideałem*, gdy jest lewym i prawym ideałem.

Mówimy, że ideał $\mathfrak{I}$ jest *właściwy* gdy $\mathfrak{I} \neq \mathfrak{A}$. Mówimy, że ideał $\mathfrak{I}$ jest *nietrywialny* gdy $\mathfrak{I} \neq \mathfrak{A}$ i $\mathfrak{I} \neq \{0\}$.

Twierdzenie 6.1 *Jądro homomorfizmu jest ideałem. Jeśli $\mathfrak{I}$ jest ideałem w $\mathfrak{A}$, to $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ ma naturalną strukturę algebry. Odwzorowanie*

$$\mathfrak{A} \ni A \mapsto A + \mathfrak{I} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{I}$$

jest homomorfizmem, którego jądro jest równe $\mathfrak{I}$.

Algebra, która nie posiada nietrywialnych ideałów i jest różna od $\mathbb{K}$ z zerowym iloczynem nazywa się algebrą prostą.

6.9 Przykłady podalgebr w $L(\mathbb{K}^n)$

(1) Algebra górnotrójkątna.

(2) Algebra nil-górnotrójkątna.

(3) Algebra blokowa $L(\mathbb{K}^{p_1}) \oplus \cdots \oplus L(\mathbb{K}^{p_k})$, $n = p_1 + \cdots p_k$.

(4) Algebra $L(\mathbb{K}^p) \otimes \mathbb{1}_q$, $n = pq$.

(5) Lewa regularna reprezentacja $L(\mathbb{K}^{d_1}) \oplus \cdots \oplus L(\mathbb{K}^{d_k})$ działa w $L(\mathbb{K}^n)$ dla $n = d_1^2 + \cdots d_k^2$.

6.10 $*$-algebry

Załóżmy, że $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definicja 6.2 *Mówimy, że algebra $\mathfrak{A}$ jest* $*$-algebrą *gdy jest wyposażona w antyliniowe odwzorowanie $\mathfrak{A} \ni A \mapsto A^* \in \mathfrak{A}$ takie, że $(AB)^* = B^*A^*$, $A^{**} = A$ i $A \neq 0$ implikuje $A^*A \neq 0$. $*$ nazywa się* inwolucją *lub* gwiazdką*.*

Mówimy, że ideał $\mathfrak{I}$ jest $*$-ideałem*, gdy jest $*$-niezmienniczy.*

Definicja 6.3 *Jeśli $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ są $*$-algebrami, to homomorfizm $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ spełniający $\pi(A^*) = \pi(A)^*$ nazywa się* $*$-homomorfizmem*. (Również definiujemy* $*$-izomorfizmy, $*$-automorfizmy,, *etc.)*

Mówimy, że $P \in \mathfrak{A}$ jest rzutem ortogonalnym, jeśli $P = P^2$ i $P = P^*$. Mówimy, że U jest częściową izometrią, jeśli $UU^*UU^* = UU^*$ i $U^*UU^*U = U^*U$. Wtedy rzuty ortogonalne U^*U i UU^* nazywamy rzutem początkowym i końcowym.

Twierdzenie 6.4 *Każda przemienna skończenie wymiarowa $*$-algebra jest $*$-izomorficzna z $C(X)$ dla skończonego zbioru X.*

Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią Hilberta. Zbiór operatorów ograniczonych na $\mathcal{V}$, oznaczany $B(\mathcal{V})$ ze sprzężeniem hermitowskim tworzy $*$-algebrę. Każda podalgebra w $B(\mathcal{V})$ niezmiennicza względem $*$ jest też $*$-algebrą.

Definicja 6.5 *$*$-Algebry takie są zwane* konkretnymi $*$-algebrami*.*

Twierdzenie 6.6 *Niech $\mathfrak{A}$ będzie skończenie wymiarową $*$-algebrą. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *Centrum $\mathfrak{A}$ jest równe $\mathbb{C}\mathbb{1}$.*

(2) *$\mathfrak{A}$ jest prosta.*

(3) *$\mathfrak{A}$ jest $*$-izomorficzna z $B(\mathbb{C}^p)$ dla pewnego p.*

Twierdzenie 6.7 *Każda skończenie wymiarowa $*$-algebra $\mathfrak{N}$ jest $*$-izomorficzna z*

$$\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} B(\mathbb{C}^{p_i}). \tag{6.30}$$

Dowód. Niech $\mathcal{Z}$ będzie centrum $\mathfrak{N}$. Mamy $\mathcal{Z} \simeq C(\{0,\ldots,k\}$. Niech P_i odpowiada funkcji $\delta_i \in C(\{0,\ldots,k\})$. Oczywiście, $P_i = P_i^*$ i $P_iP_j = P_j$ i $\sum_i P_i = \mathbb{1}$.

Mamy $\mathfrak{A} = \oplus_{j=1}^k P_j\mathfrak{A}$. Centrum $P_j\mathfrak{A}$ jest równe $\mathbb{C}P_j$. Zastosować więc możemy Tw. 6.6. □

P_i skonstruowane w dowodzie są nazywane *minimalnymi rzutami centralnymi*. Dla $\mathfrak{N}$ takiej jak w (6.30) zdefinujmy $\dim(\mathfrak{N}) = [p_1,\ldots,p_k]$.

6.11 Reprezentacje skończenie wymiarowych $*$-algebr

Lemat 6.8 *Niech $U \in L(\mathbb{C}^n)$ będzie częściową izometrią. Wtedy U jest unitarne z* $\mathrm{Ran}U^*U$ *do* $\mathrm{Ran}UU^*$*.*

Lemat 6.9 *Niech $\phi : L(\mathbb{C}^p) \to L(\mathbb{C}^n)$ będzie unitalnym $*$- homomorfizmem. Wtedy $n = qp$, $q \in \mathbb{N}$, i ϕ jest unitarnie równoważny homomorfizmowi*

$$L(\mathbb{C}^p) \ni A \mapsto A \otimes \mathbb{1}_q \in L(\mathbb{C}^p \otimes \mathbb{C}^q).$$

Dowód. Niech $e_1,\ldots,e_p$ będzie bazą w $\mathbb{C}^p$. $L(\mathbb{C}^p)$ jest rozpięta przez częściowe izometrie $|e_i)(e_j|$. Niech $q := \mathrm{Tr}\phi\,(|e_1)(e_1|)$ i niech $f_{11},\ldots,f_{1q}$ będzie bazą w $\mathrm{Ran}\phi\,(|e_1)(e_1|)$. Niech $f_{ij} := \phi\,(|e_i)(e_1|)\,f_{1j}$. Wtedy $f_{i1},\ldots,f_{iq}$ stanowią bazę w $\mathrm{Ran}\phi\,(|e_i)(e_i|)$. Mamy

$$|e_1)(e_1| + \cdots + |e_p)(e_p| = \mathbb{1}_p.$$

Zatem

$$\phi\,(|e_1)(e_1|) + \cdots + \phi\,(|e_p)(e_p|) = \mathbb{1}_n.$$

Więc f_{ij}, $i = 1,\ldots,p$, $j = 1,\ldots,q$ stanowią bazę w $\mathbb{R}^n$. Oczywiście

$$\phi\,(|e_i)(e_j|)\,f_{kl} = \delta_{jk} f_{il}.$$

□

Twierdzenie 6.10 *Każda unitalna reprezentacja algebry $\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} L(\mathbb{C}^{p_i})$ na $\mathbb{C}^n$ jest unitarnie równoważna reprezentacji w $\oplus_{i=1}^k \mathbb{C}^{p_i} \otimes \mathbb{C}^{q_i}$*

$$\phi(A_1,\ldots,A_k) := \oplus_{i=1}^k A_i \otimes \mathbb{1}_{q_i}.$$

Mamy $n = \sum_{i=1}^k p_iq_i$ oraz $q_i = \frac{1}{p_i}\mathrm{Tr}\phi(P_i)$.

Dla reprezentacji regularnej mamy $p_i = q_i$. W szczególności, w tym wypadku

$$n = \sum_i p_i^2.$$

6.12 $*$-homomorfizmy skończenie wymiarowych $*$-algebr

Niech $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$ będą skończenie wymiarowymi $*$-algebrami. Niech $P_1, \dots, P_p$, $Q_1, \dots, Q_q$ będą minimalnymi rzutami centralnymi $\mathfrak{N}$ i odpowiednio $\mathfrak{M}$.

Każdy homomorfizm $\alpha : \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$, gdzie $\dim \mathfrak{N} = [n_1, \dots, n_p]$, $\dim \mathfrak{M} = [m_1, \dots, m_q]$, określony jest przez macierz $[t_{ij}]$, gdzie $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, p$ i

$$\sum_j t_{ij} n_j \leq m_i.$$

Mamy $=$ zamiast $\leq$ jeśli α jest unitalna. Będziemy pisać $\mathrm{Mat}(\alpha) = [t_{ij}]$. Mamy $t_{ij} = \mathrm{Tr} Q_i \phi(P_j)$.

7 Algebra grupowa

7.1 Algebra grupowa

Niech G będzie skończoną grupą. Przez $C(G)$ będziemy oznaczali zbiór funkcji zespolonych na G. Jest on rozpięty przez funkcje δ_g, $g \in G$,

$$\delta_g(h) := \begin{cases} 1, & g = h, \\ 0, & g \neq h. \end{cases}$$

Czasami zamiast δ_g pisze się po prostu g.

$C(G)$ jest wyposażone w dwa łączne iloczyny: mnożenie punktowe i splot:

$$\begin{aligned} FG(g) &:= F(g)G(g), \\ F * G(g) &:= \sum_h F(gh^{-1})G(h). \end{aligned}$$

Mamy również inwolucję

$$F^*(g) := \overline{F(g^{-1})}. \tag{7.31}$$

Twierdzenie 7.1 *$C(G)$ ze splotem i sprzężeniem (7.31) jest $*$-algebrą.*

Dowód. Niech $F \in C(G)$ będzie różne od zera. Liczymy

$$F^* * F(g) = \sum_{h \in G} \overline{F(hg^{-1})} F(h).$$

W szczególności,

$$F^* * F(e) = \sum_{h \in G} |F(h)|^2 \neq 0.$$

Zatem $F^*F \neq 0$. $\square$

Mamy naturalne zanurzenie $G \in g \mapsto \delta_g \in C(G)$, przy czym mnożenie przechodzi na splot:

$$\delta_g * \delta_h \quad := \quad \delta_{gh}.$$

Niech $\psi : K \to G$ będzie homomorfizmem grup. Wtedy

$$\psi'(\delta_k) := \delta_{\psi(k)}$$

definiuje $*$-homomorfizm algebr $\psi' : C(K) \to C(G)$. Mamy przemienny diagram

$$\begin{array}{ccc} K & \to & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(K) & \to & C(G) \end{array}$$

Jeśli $\phi : G \to H$ jest również homomorfizmem grup, to $(\psi \circ \phi)' = \psi' \circ \phi'$.

Niech π będzie reprezentacją G na $\mathcal{V}$. Wtedy istnieje dokładnie jedna reprezentacja $\tilde{\pi} : C(G) \to L(\mathcal{V})$ spełniająca

$$\tilde{\pi}(\delta_g) := \pi(g).$$

Jeśli reprezentacja jest unitarna, to $\tilde{\pi}$ jest $*$-reprezentacją. Mamy przemienny diagram

$$\begin{array}{ccc} G & \to & GL(\mathcal{V}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(G) & \to & L(\mathcal{V}) \end{array}$$

Niech $(\pi, \mathcal{V})$ będzie reprezentacją grupy G i $\psi : K \to G$ homomorfizmem. Wtedy $\psi \circ \rho$ jest reprezentacją grupy K. Mamy też

$$\widetilde{\psi \circ \pi} = \psi' \circ \tilde{\pi}.$$

W przyszłości będziemy opuszczać tyldy i primy w powyższych oznaczeniach.

7.2 Postać algebry splotowej

$\phi := \underset{\pi \in \hat{G}}{\oplus} \pi$ jest reprezentacją grupy G na $\underset{\pi \in \hat{G}}{\oplus} \mathcal{V}_\pi$. Rozszerza się ona do reprezentacji algebry splotowej. Jak wspominaliśmy wyżej, rozszerzenie to oznaczamy też przez ϕ. Mamy

$$\begin{aligned} \phi(\delta_g) \quad &:= \quad \underset{\pi \in \hat{G}}{\oplus} \pi(g) \\ &= \quad \underset{\pi \in \hat{G}}{\oplus} \sum_{i,j=1}^{d_\pi} \pi_{ij}(g) |e_{\pi,i})(e_{\pi,j}| \end{aligned}$$

Twierdzenie 7.2 *ϕ jest $*$-izomorfizmem*

$$\phi : C(G) \to \underset{\pi \in \hat{G}}{\oplus} L(\mathcal{V}_\pi) \subset L\left(\underset{\pi \in \hat{G}}{\oplus} \mathcal{V}_\pi \right).$$

Dowód. Oczywiste jest, że $|e_{\pi,i})(e_{\pi,j}|$, $i,j = 1,\dots,d_\pi$, $\pi \in \hat{G}$ rozpinają $\underset{\pi\in\hat{G}}{\oplus} L(\mathcal{V}_\pi)$. Ale $\phi^{-1}\left(|e_{\pi,i})(e_{\pi,j}|\right)(g) = \pi_{ij}(g)$, które jak pokazaliśmy, stanowią bazę $l^2(G) = C(G)$. $\Box$

Niech $1\!\!1_\pi$ oznacza rzut na $\mathcal{V}_\pi$. Niech

$$C_{\mathrm{cent}}(G) := \{F \in C(G) \ : \ F(ghg^{-1}) = F(h), \quad h,g \in G\}$$

Innymi słowy, $C_{\mathrm{cent}}(G)$ składa się z funkcji stałych na klasach sprzężoności grupy G.

Twierdzenie 7.3 *$C_{\mathrm{cent}}(G)$ jest centrum algebry splotowej $C(G)$. Jest rozpięte przez $\phi^{-1}(1\!\!1_\pi)$, $\pi \in \hat{G}$. Mamy*

$$1\!\!1_\pi \quad = \quad \phi\left(\frac{d_\pi}{\#G}\sum_{g\in G}\overline{\chi_\pi(g)}\delta_g\right).$$

Dowód. Niech $F = \sum_{h\in G} F_h\delta_h$ należy do centrum $C(G)$. Wtedy

$$\delta_g F = F\delta_g.$$

Zatem

$$\delta_g F\delta_{g^{-1}} = F.$$

To oznacza, że

$$\sum_{h\in G} F_{g^{-1}hg}\delta_h = \sum_h F_h\delta_h,$$

czyli F jest stałe na klasach sprzężoności.

Wiemy z (5.28), że

$$1\!\!1_\pi \quad = \quad \frac{d_\pi}{\#G}\sum_{g\in G}\overline{\chi_\pi(g)}\phi(g).$$

$\phi(g)$ możemy zastąpić przez $\phi(\delta_g)$ a następnie wyciągnąć ϕ przed całe wyrażenie. $\Box$

Grupa $\mathbb{Z}_n$ ma reprezentacje z charakterami

$$\chi_m(k) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}km2\pi}{n}}, \quad k \in \mathbb{Z}_n,\ m \in \hat{\mathbb{Z}}_n \simeq \mathbb{Z}_n.$$

Odpowiadające im rzuty centralne to

$$1\!\!1_m = \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}_n}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}km2\pi}{n}}\delta_k.$$

Grupa S_n ma reprezentację trywialną/znakową z charakterem $\chi_{\mathrm{s}}(\sigma) = 1/\chi_{\mathrm{a}} = \mathrm{sgn}\sigma$ i rzutem centralnym

$$\begin{aligned} 1\!\!1_{\mathrm{s}} &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\delta_\sigma, \\ 1\!\!1_{\mathrm{a}} &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}\sigma\delta_\sigma. \end{aligned}$$

Ma również reprezentacje standardową, dla której $\chi_{\mathrm{st}}(\sigma)$ jest równe liczbie punktów stałych -1 oraz znakową$\times$standardową z rzutami centralnymi

$$\frac{n-1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\chi_{\mathrm{st}}(\sigma)\delta_\sigma,$$
$$\frac{n-1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}\sigma\chi_{\mathrm{st}}(\sigma)\delta_\sigma.$$

7.3 Reprezentacja regularna

Rozważmy lewą reprezentację regularną λ grupy G na $l^2(G)$. Rozszerza się ona do reprezentacji $\lambda : C(G) \to L(l^2(G))$.

Twierdzenie 7.4 *W poniższym wzorze z lewej F, F' są traktowane jako elementy $l^2(G)$, z prawej, jako elementy algebry $C(G)$:*

$$(F|F') = \tfrac{1}{(\#G)^2}\mathrm{Tr}\lambda\left((F^* * F')\delta_e\right).$$

Dowód. Mamy $(\delta_g^* * \delta_{g'})\delta_e = \delta_{g^{-1}g'}\delta_e = \delta_{g,g'}\delta_e$. Dlatego też

$$\begin{aligned}(F|F') &= \sum_{\pi\in\hat{G}}\frac{d_\pi}{\#G}(F|F')\mathrm{Tr}\pi(\delta_e)\\ &= \sum_{\pi\in\hat{G}}\frac{d_\pi}{(\#G)^2}\sum_{g,g'\in G}\overline{F(g)}F'(g')\mathrm{Tr}\pi\left((\delta_g^* * \delta_{g'})\delta_e\right)\\ &= \sum_{\pi\in\hat{G}}\frac{d_\pi}{(\#G)^2}\mathrm{Tr}\pi\left((F^* * F')\delta_e\right)\\ &= \frac{1}{(\#G)^2}\mathrm{Tr}\lambda\left((F^* * F')\delta_e\right).\end{aligned}$$

8 Reprezentacje zespolone, rzeczywiste i kwaternionowe

8.1 Reprezentacja zespolenie sprzężona

Załóżmy, że mamy reprezentację π na przestrzeni $\mathbb{C}^n$. Reprezentację sprzężoną do π nazywamy reprezentację $\overline{\pi}$ zadaną przez

$$\overline{\pi}(g) := \overline{\pi(g)}.$$

Niewątpliwie, definicja ta zależy od wyboru bazy. Zależność ta nie jest jednak zbyt istotna. Jeśli zmienimy bazę, dostaniemy reprezentację równoważną.

8.2 Przestrzeń zespolenie sprzężona

Można do zagadnienia reprezentacji sprzężonej podejść w bardziej abstrakcyjny sposób, który jest jawnie niezależny od bazy.

Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią zespoloną. *Przestrzeń zespolenie sprzężona do* $\mathcal{V}$ jest oznaczona przez $\overline{\mathcal{V}}$ i jest to jakakolwiek ustalona przestrzeń zespolona wyposażona w odwzorowanie antyliniowe

$$\mathcal{V} \ni v \mapsto \overline{v} \in \overline{\mathcal{V}}. \tag{8.32}$$

Odwzorowanie odwrotne również oznaczamy przez kreskę, tak że mamy $\overline{\overline{v}} = v$. Odwzorowanie (8.32) nazywamy *sprzężeniem zespolonym.*

Jeśli $A \in L(\mathcal{V})$, to $\overline{A} \in L(\overline{\mathcal{V}})$ jest zdefiniowany przez

$$\overline{A} := \overline{A\overline{v}} \tag{8.33}$$

Jeśli $\mathcal{V}$ ma iloczyn skalarny, to $\overline{\mathcal{V}}$ też:

$$(\overline{v}|\overline{w}) := \overline{(v|w)}.$$

W praktyce, przestrzeń $\overline{\mathcal{V}}$ realizujemy na różne sposoby. Kanonicznym sposobem jest konstrukcja następująca. Jako grupa abelowa $\overline{\mathcal{V}}$ pokrywa się z $\mathcal{V}$. Odwzorowanie identycznościowe jest oznaczone przez

$$\mathcal{V} \ni v \mapsto \overline{v} \in \overline{\mathcal{V}}. \tag{8.34}$$

Jedyna różnica między $\mathcal{V}$ i $\overline{\mathcal{V}}$ to mnożenie przez $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\lambda\overline{v} := \overline{\lambda v}.$$

Powyższa konstrukcja jest dość abstrakcyjna i dlatego w praktyce nie jest zbyt często używana. Często wolimy bardziej konkretne podejście. W podejściu tym punktem wyjściowym jest odwzorowanie antyliniowe κ na $\mathcal{V}$ spełniające $\kappa^2 = \mathbb{1}$. Takie odwzorowanie nazywamy *sprzężeniem zespolonym wewnętrznym.* Wtedy $\overline{\mathcal{V}}$ i $\mathcal{V}$ pokrywają się jako przestrzenie zespolone, natomiast $\overline{v}$ utożsamiamy z κv.

W szczególności, załóżmy, że $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$. Wtedy mamy oczywiste sprzężenie zespolone, $\overline{v} := \overline{v}_1, \dots, \overline{v}_n$. Jeśli operator na $\mathbb{C}^n$ reprezentujemy macierzą, to sprzężenie zespolone w sensie (8.33) daje macierz zespolenie sprzężoną w naiwnym sensie.

Jeśli $(\pi, \mathcal{V})$ jest reprezentacją grupy G, to *reprezentacją sprzężoną* nazywamy reprezentację $(\overline{\pi}, \overline{\mathcal{V}})$

$$\overline{\pi}(g) := \overline{\pi(g)}.$$

8.3 Reprezentacje zespolone

Jak dotychczas, G jest grupą skończoną a $\mathcal{V}$ zespoloną przestrzenią Hilberta.

Mówimy, że κ jest operatorem antyunitarnym, jeżeli jest antyliniowy, odwracalny i

$$\overline{(v|w)} = (\kappa v|\kappa w).$$

Oczywiście, jeśli $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$, to operatory antyunitarne pokrywają się z operatorami postaci $\kappa v = U\overline{v}$, gdzie U jest unitarny.

Niech $\pi : G \to \mathcal{V}$ będzie unitarną reprezentacją nieprzywiedlną. Mówimy, że jest ona zespolona, jeśli reprezentacja $\overline{\pi}$ nie jest unitarnie równoważna reprezentacji π. Równoważna definicja: nie istnieje operator antyunitarny κ taki, że $g \mapsto \kappa\pi(g)\kappa^{-1}$ jest równoważna z π.

Załóżmy, że π nie jest zespolona. Niech κ będzie operatorem antyunitarnym takim, że $\kappa\pi\kappa^{-1} \sim \pi$. Wtedy κ^2 jest unitarny i splata π z sobą. Zatem z Lematu Schura, $\kappa^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathbb{1}$. Mamy

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\kappa = \kappa\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \kappa^3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\kappa.$$

Zatem $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} = 1$. Mówimy, że π jest rzeczywista, jeśli $\kappa^2 = \mathbb{1}$ i kwaternionowa, jeśli $\kappa^2 = -\mathbb{1}$

Jeśli reprezentacja jest rzeczywista, reprezentację można obciąć do przestrzeni $\mathcal{V}^\kappa := \{v \in \mathcal{V} : \kappa v = v\}$ dostając reprezentację nieprzywiedlną na rzeczywistej przestrzeni. Jeśli reprezentacja jest kwaternionowa lub zespolona, nie posiada żadnej nietrywialnej rzeczywistej podprzestrzeni niezmienniczej.

Jeśli reprezentacja jest kwaternionowa, możemy nadać przestrzeni strukturę prawej przestrzeni kwaternionowej kładąc $\mathrm{j} := \kappa$ i $\mathrm{k} := \mathrm{i}\kappa$. Dostajemy reprezentację na przestrzeni kwaternionowej. Jest to niemożliwe w przypadku rzeczywistym i zespolonym.

Twierdzenie 8.1 (Twierdzenie Frobeniusa i Schura) *Niech π będzie reprezentacją nieprzywiedlną grupy skończonej G. Wtedy*

$$\frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\chi_\pi(g^2) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \pi \text{ jest rzeczywiste,} \\ 0 & \text{jeśli } \pi \text{ jest zespolone,} \\ -1 & \text{jeśli } \pi \text{ jest kwaternionowe.} \end{cases}$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\chi_\pi(g^2) &= \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\sum_{i=1}^{d_\pi}\pi_{ii}(g^2) \\ &= \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\sum_{i,j=1}^{d_\pi}\pi_{ij}(g)\pi_{ji}(g) \\ &= \sum_{i,j=1}^{d_\pi}(\overline{\pi}_{ij}|\pi_{ji}). \end{aligned} \tag{8.35}$$

Dla zespolonej reprezentacji jest to równe zero z relacji ortogonalności.

W przypadku rzeczywistym bądź kwaternionowym niech $[r_{ij}]$ będzie unitarną macierzą transformacji κ. Wtedy

$$(\kappa v)_i = \sum_{j=1}^{d_\pi} r_{ij}\overline{v}_j, \quad (\kappa^{-1}v)_i = \sum_{j=1}^{d_\pi} r_{ji}\overline{v}_j,$$

$$\pi_{ij} = \sum_{p,q=1}^{d_\pi} r_{ip}\overline{\pi}_{pq}\overline{r}_{jq}.$$

Zatem, (8.35) jest równe

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j,p,q=1}^{d_\pi} r_{jp}\overline{r}_{iq}(\overline{\pi}_{ij}|\overline{\pi}_{pq}) \\
=\ &\frac{1}{d_\pi}\sum_{i,j,p,q=1}^{d_\pi} r_{jp}\overline{r}_{iq}\delta_{ip}\delta_{jq} \ =\ \frac{1}{d_\pi}\sum_{i,j=1}^{d_\pi} r_{ji}\overline{r}_{ij} \ =\ \frac{\mathrm{Tr}\kappa^2}{d_\pi} \ =\ \pm 1.
\end{aligned}
$$

□

Dla grupy $\mathbb{Z}_n$ wszystkie reprezentacje są zespolone z wyjątkiem reprezentacji odpowiadającej 0 oraz $n/2$ jeśli n jest parzyste.

Reprezentacja grupy kwaternionowej $\{\pm 1, \pm \mathrm{i}, \pm \mathrm{j}, \pm \mathrm{k}\}$, w $\mathbb{C}^2$ jest kwaternionowa.

8.4 Splatacze w iloczynach tensorowych

Niech $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi. Jeśli $A \in L(\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2, \mathbb{K})$, możemy zdefiniować $A_{1\to 2} \in L(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2^{\#})$ spełniający

$$
A v_1 \otimes v_2 = \langle v_2 | A_{1\to 2} v_1\rangle, \quad v_1 \in \mathcal{V},\ v_2 \in \mathcal{V}_2.
$$

Załóżmy, że $(\pi_i, \mathcal{V}_i)$, $i = 1, 2$ są reprezentacjami grupy G. Jeśli A splata $\pi_1 \otimes \pi_2$ z reprezentacją trywialną, to $A_{1\to 2}$ splata π_1 z reprezentacją π_2^{ct}, (Reprezentaca kontragradientna względem reprezentacji ρ jest zdefiniowana przez $\rho^{\mathrm{ct}}(g) = \rho(g)^{-1\#}$.)

Rozważmy na przykład $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}$, $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}^{\#}$. Wtedy mamy naturalny element $\mathrm{Tr} \in L(\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^{\#}, \mathbb{K})$. Używając notacji powyższej mamy wtedy

$$
\mathrm{Tr}_{1\to 2} = 1\!\!1_{\mathcal{V}} \in L(\mathcal{V}, \mathcal{V}).
$$

Drugi Lemat Schura mówi wtedy, że jeśli π jest nieprzywiedlna to operatory splatające $\pi \otimes \pi^{\mathrm{ct}}$ z reprezentacją trywialną są proporcjonalne do Tr.

9 Elementy krystalografii

9.1 Grupy punktowe

Grupą punktową nazywamy skończoną podgrupę $O(n)$. Mówimy, że jest ona chiralna, jeśli jest podgrupą $SO(n)$.

Poniżej klasyfikujemy grupy punktowe w wymiarze 2 i 3 z dokładnością do sprzężenia.

W wymiarze 2 mamy

(1) grupy cykliczne C_n, $n = 1, 2, \ldots$ (chiralne) abstrakcyjnie izomorficzne z $\mathbb{Z}_n$,

(2) dihedralne D_n, $n = 1, 2, \ldots$, abstrakcyjnie izomorficzne z $\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$. ($\mathbb{Z}_2$ jest generowane przez symetrię osiową wokół dowolnie wybranej osi).

W wymiarze 3 mamy 7 serii grup punktowych i 7 grup puktowych dodatkowych.

Każda z grup 7 serii posiada maksymalną podgrupę obrotów względem ustalonej osi C_n. Jest to podgrupa normalna. Po podzieleniu grupy przez C_n dostajem skończoną grupę ilorazową. Tą grupą może być C_1, $D_{1\mathrm{v}}$, $D_{1\mathrm{h}}$, C_2 i D_2. Dostajemy zatem 5 rodzin serii. W obręie każdej rodziny jedna seria to iloczyny półproste.

$D_{1\mathrm{v}}$ oznacza grupę D_1 wertykalną, generowaną przez odbicie względem płaszczyzny prostopadłej do płaszczyzny obrotu. $D_{1\mathrm{h}}$ oznacza grupę D_1 horyzontalną, generowaną przez odbicie względem płaszczyzny obrotu.

Serie grup punktowych są analogiczne do 7 grup fryzowych, w których rolę C_n odgrywa $\mathbb{Z}$.

(1) C_1 (chiralna)

- grupa cykliczna C_n, $n = 1, 2, \ldots$, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z}_n$,

(2) $D_{1\mathrm{h}}$

- $C_{n\mathrm{h}} = C_n \times D_{1\mathrm{h}}$, $n = 1, 2, \ldots$, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$.
- S_{2n}, $n = 1, 2, \ldots$, grupa generowana przez obrót z odbiciem, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z}_{2n}$,

(3) $D_{1\mathrm{v}}$

- grupa piramidalna lub biradialna $C_{n\mathrm{v}} = C_n \rtimes D_{1\mathrm{v}}$, $n = 2, 3, \ldots$, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$,

(4) C_2 (chiralna)

- grupa dihedralna $D_n = C_n \rtimes C_2$, $n = 2, 3, \ldots$, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$

(5) D_2

- grupa pryzmatyczna $D_{n\mathrm{h}} = C_n \rtimes D_2 \simeq D_n \times D_{1\mathrm{h}}$, $n = 2, 3, \ldots$, abstrakcyjnie izomorficzna z $(\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2$.
- grupa antypryzmatyczna $D_{n\mathrm{d}} = S_{2n} \times D_{1\mathrm{v}}$, $n = 2, 3, \ldots$, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z}_{2n} \rtimes \mathbb{Z}_2$.

Na szczególną uwagę zasługują następujące grupy punktowe:

S_2 jest grupą składającą się z identyczności i symetrii środkowej (inwersji). Bywa czasem oznaczana C_{i}.

S_{4n+2} jest generowana przez C_{2n+1} i symetrię środkową. Bywa oznaczana przez $C_{2n+1,i}$

$C_{1\mathrm{h}}(= C_{1\mathrm{v}} = D_1)$ jest grupą składającą się z identyczności i obrotu o $180°$. Bywa czasem oznaczana C_{s}.

$C_{2\mathrm{h}}(= D_{1\mathrm{d}})$, izomorficzna z $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Zawiera odbicie, obrót o $180°$ w osi prostopadłej i inwersję.

$C_{2\mathrm{v}}(= D_{1\mathrm{h}})$, izomorficzna z $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Zawiera 2 odbicia w dwóch prostopadłych płaszczyznach i obrót o $180°$.

$D_{2\mathrm{h}}$, izomorficzna z $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, generowana przez odbicia w 3 prostopadłych płaszczyznach

Oprócz tego mamy 7 dodatkowych grup punktowych:

(1) chiralna grupa tetraedralna T, izomorficzna z A_4,

(2) pełna grupa tetraedralna T_{d}, izomorficzna z S_4,

(3) grupa pirytoedralna $T_{\mathrm{h}} = T \times S_2$, izomorficzna z $A_4 \times \mathbb{Z}_2$,

(4) chiralna grupa oktaedralna O, izomorficzna z S_4

(5) pełna grupa oktaedralna $O_{\mathrm{h}} = O \times S_2$, izomorficzna z $S_4 \times \mathbb{Z}_2$

(6) chiralna grupa ikosaedralna I, izomorficzna z A_5

(7) pełna grupa ikosaedralna $I_{\mathrm{h}} \simeq I \times S_2$, izomorficzna z $A_5 \times \mathbb{Z}_2$

T jest podgrupą O.

T_{d} i T_{h} są podgrupami O_{h}.

9.2 Sieci

Siecią nazywamy dyskretną podgrupę $\mathbb{R}^n$. Jeśli dla sieci $\mathcal{L}$ istnieje zwarty podzbiór $K \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $\mathcal{L} + K = \mathbb{R}^n$, to mówimy, że jest to sieć krystalograficzna.

Twierdzenie 9.1 *Niech $\mathcal{L}$ będzie siecią w $\mathbb{R}^n$. Wtedy istnieją liniowo niezależne wektory $e_1, \ldots, e_d$, $d \leq n$, takie, że $\mathcal{L} = \{m_1 e_1 + \cdots + m_d e_d \ : \ (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{Z}^d\}$. Sieć jest krystalograficzna wtedy i tylko wtedy gdy $d = n$.*

Grupa automorfizmów sieci $\mathbb{Z}^d$ jest izomorficzna z $GL(\mathbb{Z}^d)$, czyli macierzami o elementach całkowitych i wyznaczniku ± 1. Jest to oczywiste – macierz musi być odwracalna, mieć wyznacznik całkowitoliczbowy i jej odwrotność musi być macierzą tego samego typu.

W szczególności, $SL(\mathbb{Z}^d)$ jest podgrupą w $GL(\mathbb{Z}^d)$ o indeksie 2.

9.3 Grupa ruchów euklidesowych

W grupie ruchów euklidesowych $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$ wyróżniamy podgrupę translacji $\mathbb{R}^n$ i podgrupę obrotów niewłaściwych $O(n)$. Mamy kanoniczny homomorfizm $\phi : \mathbb{R}^n \rtimes O(n) \to O(n)$. Czyli mamy krótki ciąg dokładny

$$\{0\} \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \rtimes O(n) \to O(n) \to \{1\}$$

Niech G będzie podgrupą w $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$. Wtedy $\phi(G) =: H$ jest podgrupą w $O(n)$. Jądro homomorfizmu kanonicznego ϕ obciętego do G, czyli podgrupa translacji zawartych w G, jest równa $\mathcal{L} := \mathbb{R}^n \cap G$. Mamy krótki ciąg dokładny

$$\{0\} \to \mathcal{L} \to G \to H \to \{1\}. \tag{9.36}$$

Stwierdzenie 9.2 *Dla $h \in H$ i $\phi(g) = h$, wzór*

$$\mathcal{L} \ni t \mapsto ht := gtg^{-1} \in \mathcal{L}.$$

definiuje działanie grupy H działa przez automorfizmy na $\mathcal{L}$.

Dowód. Wystarczy pokazać jednoznaczność definicji. Niech $\phi(g_1) = \phi(g_2)$. Wtedy $g_2^{-1}g_1 \in \mathcal{L}$. Z abelowości $\mathcal{L}$ wynika

$$g_2^{-1}g_1t = tg_2^{-1}g_1.$$

Zatem $g_1tg_1^{-1} = g_2tg_2^{-1}$. □

Jeśli $G = \mathcal{L} \rtimes H$, mówimy, że G jest symmorficzna.

9.4 Grupy fryzowe

Grupą fryzową nazywamy dyskretną podgrupę grupy $\mathbb{R}^2 \rtimes O(2)$, której podgrupa translacji jest izomorficzna z $\mathbb{Z}$. Iloraz grupy fryzowej przez jej podgrupę translacji jest skończoną podgrupą grupy obrotów. Działa ona na jednowymiarową sieć $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$. Latwo widzieć, że mamy dokładnie pięć podgrup $O(2)$, które zachowują $\mathbb{Z}$: C_1, $D_{1\mathrm{h}}$ (horyzontalna, działająca na $\mathbb{Z}$ trywialnie), $D_{1\mathrm{v}}$ (wertykalna, działająca na $\mathbb{Z}$ przez odbicia), C_2 i D_2. Odpowiada im pięć symmorficznych grup fryzowych. Oprócz tego istnieją jeszcze dwie niesymmorficzne grupy fryzowe:

(1) C_1

- "hop" C_∞, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z}$,

(2) $D_{1\mathrm{h}}$

- "jump" $C_{\infty\mathrm{h}} = C_\infty \times D_{1\mathrm{h}}$, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$,
- "step" S_∞, grupa generowana przez translację z poślizgiem, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z}$,

(3) $D_{1\mathrm{v}}$

- "sidle" $C_{\infty\mathrm{v}} = C_\infty \rtimes D_{1\mathrm{v}}$, , abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$,

(4) C_2

- "spinning hop" $D_\infty = C_\infty \rtimes C_2$, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$,

(5) D_2

- "spinning jump" $D_{\infty\mathrm{h}} = C_\infty \rtimes D_2$, abstrakcyjnie izomorficzna z $(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2$,
- "spinning sidle"$D_{\infty\mathrm{d}}$, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$.

Każda grupa fryzowa jest odpowiednikiem jednej serii grup punktowych w 3 wymiarach.

9.5 Punktowe grupy krystalograficzne

Mówimy, że grupa punktowa jest krystalograficzna, jeśli istnieje sieć krystalograficzna niezmiennicza względem tej grupy. Twierdzenie o ograniczeniu krystalograficznym mówi, że punktowe grupy krystalograficzne w wymiarze 2 i 3 to te grupy punktowe, które posiadają osie 1,2,3,4 lub 6-krotne.

W wymiarze 2 mamy 10 punktowych grup krystalograficznych:

(1) C_1, C_2, C_3, C_4, C_6,

(2) D_1, D_2, D_3, D_4, D_6.

W wymiarze 3 mamy 32 punktowych grup krystalograficznych:

$$\begin{array}{ccccc}
C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_6, \\
C_{1\mathrm{h}} & C_{2\mathrm{h}} & C_{3\mathrm{h}} & C_{4\mathrm{h}} & C_{6\mathrm{h}} \\
 & S_2 & & S_4 & S_6 \\
 & C_{2\mathrm{v}} & C_{3\mathrm{v}} & C_{4\mathrm{v}} & C_{6\mathrm{v}} \\
 & D_2 & D_3 & D_4 & D_6 \\
 & D_{2\mathrm{h}} & D_{3\mathrm{h}} & D_{4\mathrm{h}} & D_{6\mathrm{h}} \\
 & & & D_{2\mathrm{d}} & D_{3\mathrm{d}},
\end{array}$$

T, T_d, T_h, O, O_h.

9.6 Sieci Bravais'go

Każda sieć krystalograficzna $\mathcal{L} \simeq \mathbb{Z}^n$ w przestrzeni euklidesowej w $\mathbb{R}^n$ wyznacza grupę punktową $H \subset O(n)$, która ją zachowuje, jej maksymalną grupę symetrii. Nie każda grupa punktowa jest maksymalną grupą symetrii pewnej sieci: w szczególności musi zawierać ona inwersję. Sieci posiadające tę samą grupę należą do tego samego *systemu sieciowego*.

Grupa symetrii sieci na nią działa. Rozważmy dwie sieci posiadające takie same maksymalne grupy symetrii. Mówimy, że mają one izomorficzne działania grupy symetrii, jeśli jedno działanie możemy przekształcić na drugie przez zamianę bazy w sieci. Każda zamiana bazy jest zadana przez macierz z $GL(\mathbb{Z}^n)$. Klasę abstrakcji względem izomorficzności działania nazywamy siecią Bravais'go.

W wymiarze 2 mamy 5 systemów Bravais'go zgrupowanych w 4 systemy:

(1) sieć skośna C_2,

(2) system prostokątny D_2

  (i) sieć prostokątna (prostokątna prosta),

  (ii) sieć rombowa (prostokątna centrowana),

(3) sieć kwadratowa D_4,

(4) sieć heksagonalna D_6.

W szczególności, rozważmy grupę D_2. Jest ona generowana przez dwie prostopadłe do siebie odbicia

$$r_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{9.37}$$

W sieci prostokątnej możemy wybrać bazę w $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, tak że r_1, r_2 są zadane poprzez (9.37). W sieci rombowej, bazę wybierzmy jako $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Wtedy działanie D_2 jest zadane przez

$$r_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{9.38}$$

W wymiarze 3 mamy 14 sieci Bravais'go zgrupowanych w 7 systemów. Litery oznaczają rodzaj centrowania.

(1) trójskośna S_2,

(2) jednoskośna $C_{2\mathrm{h}}$,

  (i) P

  (ii) C

(3) rombowa (ortorombiczna) $D_{2\mathrm{h}}$,

  (i) P,

  (ii) C,

  (iii) I,

  (iv) F,

(4) tetragonalna $D_{4\mathrm{h}}$,

  (i) P,

  (ii) I,

(5) romboedralna (trygonalna) $D_{3\mathrm{d}}$

(6) heksagonalna $D_{6\mathrm{h}}$.

(7) regularna (kubiczna) O_{h},

  (i) P,

  (ii) I,

  (iii) F,

9.7 Grupy krystalograficzne

Grupą krystalograficzną nazywamy dyskretną podgrupę grupy $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$, dla której istnieje zwarty zbiór $K \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $\bigcup_{g\in G} gK = \mathbb{R}^n$.

Można pokazać, że równoważną definicję: grupa krystalograficzna to podgrupa grupy $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$, której podgrupa translacji jest siecią krystalograficzną, i podgrupa ta ma skończony indeks.

Można rozważać kilka różnych pojęć równoważności grup krystalograficznych.

(1) Mówimy, że dwie grupy krystalograficzne są sobie równoważne bez zachowania orientacji, gdy istnieje macierz w $GL(n)$ względem której te grupy są sprzężone.

(2) Mówimy, że z zachowaniem orientacji, gdy istnieje macierz w $GL(n)$ o dodatnim wyznaczniku, względem której te grupy są sprzężone.

Możemy klasyfikować grupy krystalograficzne ze względu na

(1) Grupę obrotów będącą grupą ilorazową przez podgrupę translacji.

(2) Sieć Bravais'go.

9.8 Grupy tapetowe

Grupy krystalograficzne w wymiarze 2 zwane są tapetowymi. Na poniższej liscie podajemy postać grupy w przypadkach symmorficznych. Grupa obrotów determinuje sieć Bravais'go. Równoważność z zachowaniem i bez zachowania orientacji w wymiarze 2 się pokrywają.

(1) system skośny,
  - (i) grupa punktowa C_1
    - $p1 = \mathbb{Z}^2$,
  - (ii) grupa punktowa C_2
    - $p2 = \mathbb{Z}^2 \rtimes C_2$,

(2) system prostokątny,
  - (i) grupa punktowa D_1,
    - sieć prostokątna: $pm = \mathbb{Z}^2_{\text{rect}} \rtimes D_1$, pg,
    - sieć rombowa: $cm = \mathbb{Z}^2_{\text{romb}} \rtimes D_1$,
  - (i) grupa punktowa D_2
    - sieć prostokątna, $pmm = \mathbb{Z}^2_{\text{rect}} \rtimes D_2$, pmg, pgg,
    - sieć rombowa, $cmm = \mathbb{Z}^2_{\text{romb}} \rtimes D_2$,

(3) system regularny,
  - (i) grupa punktowa C_4
    - $p4 = \mathbb{Z}^2_{\text{reg}} \rtimes C_4$,
  - (ii) grupa punktowa D_4
    - $p4m = \mathbb{Z}^2_{\text{reg}} \rtimes D_4$, $p4g$,

(4) system heksagonalny,
  - (i) grupa punktowa C_3
    - $p3 = \mathbb{Z}^2_{\text{hex}} \rtimes C_3$,
  - (ii) grupa punktowa D_3
    - $p3m1 = \mathbb{Z}^2_{\text{hex}} \rtimes D_3$, $p31m$,
  - (iii) grupa punktowa C_6
    - $p6 = \mathbb{Z}^2_{\text{hex}} \rtimes C_6$,
  - (iv) grupa punktowa D_6
    - $p6m = \mathbb{Z}^2_{\text{hex}} \rtimes D_6$,

9.9 Grupy przestrzenne

Grupy krystalograficzne w wymiarze 3 zwane są przestrzennymi. Jeśli dopuścimy równoważność zmieniającą orientację, to jest ich 219, w tym 54 chiralnych. Jeśli rozróżniamy orientację, to jest ich 230, w tym 65 chiralnych.

Grupy te są poklasyfikowane na klasy krystaliczne zgodnie z ich grupami punktowymi. Klasy te są pogrupowane w systemy krystaliczne.

W większości wypadków, przynależność do systemu krystalicznego determinuje system sieciowy Bravais'go, o tej samej nazwie. Wyjątkiem jest system trygonalny, w której każdej grupie punktowej odpowiadają zarówno grupy krystalograficzne z siecią romboedryczną, jak i z siecią heksagonalną.

(1) trójskośny

- (i) C_1: P,
- (ii) S_2: P,

(2) jednoskośny

- (i) C_2: P, C,
- (ii) $C_{1\mathrm{h}}$: P, C,
- (iii) $C_{2\mathrm{h}}$: P, C,

(3) rombowy (ortorombiczny)

- (i) D_2: P, C, F, I,
- (ii) $C_{2\mathrm{v}}$: P, C, A, F, I,
- (iii) $D_{2\mathrm{h}}$: P, C, F, I,

(4) tetragonalny

- (i) C_4: P, I,
- (ii) S_4: P, I,
- (iii) $C_{4\mathrm{h}}$: P, I,
- (iv) D_4: P, I,
- (v) $C_{4\mathrm{v}}$: P, I,
- (vi) $D_{2\mathrm{d}}$: P, I,
- (vii) $D_{4\mathrm{h}}$: P, I,

(5) trygonalny

- (i) C_3: P, R,
- (ii) S_6: P, R,
- (iii) D_3: P, R,
- (iv) $C_{3\mathrm{v}}$: P, R,
- (v) $D_{3\mathrm{d}}$: P, R, :

(6) heksagonalny

(i) C_6: P,
(ii) $C_{3\mathrm{h}}$: P,
(iii) $C_{6\mathrm{h}}$: P,
(iv) D_6: P,
(v) $C_{6\mathrm{v}}$: P,
(vi) $D_{3\mathrm{h}}$: P,
(vii) $D_{6\mathrm{h}}$, P,

(7) regularny (kubiczny)

(i) O_h: P, F, I,
(ii) T: P, F, I,
(iii) T_h: P, F, I,
(iv) O: P, F, I,
(v) T_d: P, F, I,
(vi) O_h: P, F, I.

Nazwa systemu krystalicznego pokrywa się z nazwą systemu sieci Bravais'go, z wyjątkiem systemu trygonalnego. W tym systemie, grupy oznaczone przez P odpowiadają heksagonalnej sieci Bravais'go, zaś oznaczone przez R odpowiadają trygonalnej sieci Bravais'go.