Teoria grup

Jan Dereziński

Katedra Metod Matematycznych Fizyki
Uniwersytet Warszawski
Hoża 74, 00-682, Warszawa
e-mail jan.derezinski@fuw.edu.pl

15 maja 2012

rok 2010/11

1 Podstawowe własności grup

1.1 Definicja

Grupa to niepusty zbiór G wyposażony w

(1) działanie $G \times G \ni (g, h) \mapsto g \cdot h \in G$ mające własność *łączności*

$$(gh)k = g(hk), \quad g, h, k \in G.$$

(2) wyróżniony element $e \in G$, zwany elementem neutralnym, spełniający

$$eg = ge = g, \quad g \in G.$$

(3) odwzorowanie $G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$, zwane odwrotnością spełniające

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e, \quad g \in G.$$

Czyli grupa jest czwórką $(G, \cdot, e, ^{-1})$. Notacja powyższa nosi nazwę *multiplikatywnej*.

Mówimy, że grupa jest *nietrywialna*, gdy jest różna od grupy składającej się jedynie z elementu neutralnego.

Element neutralny w notacji multiplikatywnej jest często oznaczany przez 1 lub $\mathbb{1}$.

Możliwe jest też sformułowanie słabszych aksjomatów, w ktorych grupa jest zbiorem wyposażonym jedynie w łączne działanie i dwa warunki zapewniające istnienie elementu neutralnego i odwrotności.

Mówimy, że grupa jest *przemienna* lub *abelowa*, gdy

$$gh = hg, \quad g, h \in G.$$

Dla grup abelowych stosujemy często notację *addytywną*, w której grupa to $(G, +, 0, -)$.

1.2 Podgrupy

Niech G będzie grupą. Niepusty podzbiór $H \subset G$ nazywamy *podgrupą* gdy jest zamknięty ze względu na mnożenie i branie odwrotności. Zawiera wtedy element neutralny i ze względu na mnożenie i odwrotność dziedziczone z G jest grupą.

Mówimy, że podgrupa jest *nietrywialna*, gdy jest różna od grupy składającej się jedynie z elementu neutralnego, jak również od grupy G.

Jeśli rodzina $H_\alpha \subset G$ składa się z podgrup, to $\cap_\alpha H_\alpha$ jest też podgrupą. Dlatego, dla dowolnego podzbioru $X \subset G$ istnieje najmniejsza podgrupa zawierająca X. Oznaczamy ją przez $\mathrm{Gr}(X)$ i nazywamy *podgrupą generowaną przez* X.

Grupę generowaną przez jeden element nazywamy *grupą cykliczną*. Są to grupy $\mathbb{Z}_n$, $n \in \mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$.

Liczbę elementów zbioru X oznaczamy przez $\#X$ w szczególności. Liczbę elementów grupy nazywamy *rzędem grupy*.

Mówimy, że $g \in G$ ma *rząd* $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, gdy $n = \#\mathrm{Gr}(g)$. Jeśli rząd g jest równy $n \in \mathbb{N}$, to $\mathrm{Gr}(g) = \{e, g, \dots, g^{n-1}\}$ jest podgrupą w G izomorficzną z $\mathbb{Z}_n$. Jeśli rząd g jest równy ∞, to $\mathrm{Gr}(g) = \{\dots, g^{-1}, e, g, g^2, \dots\}$ jest podgrupą izomorficzną z $\mathbb{Z}$.

Jeśli H jest podgrupą i $g \in G$, to $gHg^{-1} := \{ghg^{-1} \ : \ h \in H\}$ jest też podgrupą zwaną *podgrupą sprzężoną do* H.

1.3 Homomorfizmy

Niech G, H będą grupami. Odwzorowanie $\phi : G \to H$ jest *homomorfizmem*, gdy

$$\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2), \quad g_1, g_2 \in G.$$

Stwierdzenie 1.1 *Jeśli ϕ jest homomorfizmem, to*

$$\phi(e_G) = e_H, \quad \phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}.$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \phi(e_G)e_H &= \phi(e_G^2)\phi(e_G)^{-1} = \phi(e_G)\phi(e_G)^{-1} = e_H. \\ \phi(g^{-1}) &= \phi(g^{-1})\phi(g)\phi(g)^{-1} = \phi(g^{-1}g)\phi(g)^{-1} \\ = \phi(e_G)\phi(g)^{-1} &= e_H\phi(g)^{-1} = \phi(g)^{-1}. \end{aligned}$$

□

Bijektywny homomorfizm nazywamy *izomorfizmem*.

Jeśli $G = H$, to homomorfizm nazywamy *endomorfizmem* a izomorfizm *automorfizmem*. Automorfizmy grupy G tworzą grupę oznaczaną $\mathrm{Aut}(G)$.

1.4 Działanie

Niech X będzie zbiorem. Przez $S(X)$ oznaczamy zbiór bijekcji na zbiorze X. Wtedy $S(X)$ jest grupą ze składaniem i elementem neutralnym równym id, gdzie $\mathrm{id}(x) = x$, $x \in X$.

Niech G będzie grupą. Homomorfizm $G \to S(X)$ nazywamy *działaniem grupy G na zbiorze X*.

Innymi słowy, odwzorowanie

$$G \times X \ni (g, x) \mapsto \tau_g(x) \in X \tag{1.1}$$

jest działaniem, gdy

$$\tau_g(\tau_h(x)) = \tau_{gh}(x), \quad g, h \in G.$$

Stosujemy też często notację uproszczoną:

$$G \times X \ni (g, x) \mapsto gx \in X.$$

W tej notacji własności homomorficzności i łączności naturalnie się zapisują:

$$g(hx) = (gh)x, \quad ((gh)k)x = (g(hk))x, \quad g, h, k \in G, \ x \in X.$$

Dlatego też, zbyteczne jest pisanie nawiasów.

Jeśli $x \in X$, to

$$G^x := \{g \in G \ : \ \tau_g(x) = x\}$$

jest podgrupą w G zwaną *grupą izotropii elementu x*.

Niech $\tau : G \times X \to X$, $\tilde{\tau} : G \times \tilde{X} \to \tilde{X}$, będą działaniami. Mówimy, że bijekcja $\phi : X \to \tilde{X}$ jest *izomorfizmem działań τ i $\tilde{\tau}$*, gdy

$$\tilde{\tau}_g(\phi(x)) = \phi\left(\tau_g(x)\right), \quad g \in G, \ x \in X.$$

1.5 Orbity

Niech $\tau : G \to X$ będzie działaniem. Definiujemy relację

$$x \sim_\tau y \ \Leftrightarrow \exists_{g \in G} \tau_g(x) = y.$$

Stwierdzenie 1.2 *$\sim_\tau$ jest relacją równoważności.*

Klasy abstrakcji tej relacji nazywamy *orbitami działania τ*. Klasę abstrakcji dla elementu $x \in X$ nazywamy *orbitą elementu x* i oznaczamy $\tau_G(x)$. Zbiór orbit oznaczamy przez $G\mathcal{X}$.

Jeśli x, y należą do tej samej orbity, to grupy izotropii G^x i G^y są do siebie *sprzężone*, to znaczy istnieje $g \in G$ takie, że $G^x = gG^y g^{-1}$.

Mówimy, że działanie τ jest *tranzytywne*, gdy posiada dokładnie jedną orbitę. Mówimy też wtedy, że X jest *przestrzenią jednorodną* dla grupy G.

1.6 Warstwy

Niech H będzie podgrupą grupy G. Wtedy H działa na G przez *lewe mnożenie*

$$\lambda_h(g) := hg, \quad g \in G, \ h \in H.$$

Orbity tego działania mają postać

$$Hg := \{hg \ : \ h \in H\}, \ g \in G,$$

i są nazywane *lewymi warstwami podgrupy* H. Zbiór lewych warstw jest oznaczany przez $H\backslash G$.

H działa na G również przez *prawe mnożenie*

$$\rho_h(g) := gh^{-1}, \ \ g \in G, \ h \in H.$$

Orbity tego działania mają postać

$$gH := \{gH \ : \ h \in H\}, \ g \in G,$$

i są nazywane *prawymi warstwami podgrupy* H. Zbiór prawych warstw jest oznaczany przez G/H.

$G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$ jest izomorfizmem dla tych działań.

Lewe i prawe mnożenie jest bijekcją, tak samo odwrotność. Dlatego też wszystkie lewe warstwy mają tę samą liczbę elementów równą rzędowi H Jako wniosek dostajemy

Twierdzenie 1.3 (Lagrange) *Jeśli G jest grupą skończoną i H jej podgrupą, to*

$$\#G = (\#H)(\#G/H).$$

Dowód. Stosujemy Twierdzenie 1.5 do działania G na G/H, zauważając, że $G^e = H$. □

Liczbę $\#G/H$ nazywamy *indeksem podgrupy* H.

W szczególności, G działa na sobie samej. Jest to działanie tranzytywne. Każdemu elementowi $g \in G$ odpowiada inna bijekcja na G. Dlatego też dostajemy

Twierdzenie 1.4 (Cayley) *Każda grupa jest izomorficzna z podgrupą w $S(G)$.*

Następujący wzór definiuje działanie grupy G na G/H:

$$g(kH) := (gk)H, \quad g, k \in G.$$

Działanie to jest tranzytywne. Grupą izotropii elementu jednostkowego jest H.

Twierdzenie 1.5 (Podstawowe twierdzenie o przestrzeniach jednorodnych) *Niech $\tau : G \times X \to X$ będzie działaniem tranzytywnym i $x \in X$. Wtedy wzór*

$$\phi(gG^x) := \tau_g(x)$$

definiuje izomorfizm działania G na przestrzeni warstw G/G^x i τ Jeśli X jest zbiorem skończonym, to $\#G = \#X \ \#G^x$.

Dowód. **Dobra okreloność**. Niech $g, k \in G$.

$$\begin{aligned} gG^x = kG^x &\Rightarrow k^{-1}gG^x = G^x \\ \Rightarrow k^{-1}g \in G^x &\Rightarrow x = \tau_{k^{-1}g}(x) \\ \Rightarrow \tau_k^{-1}\tau_g(x) = x &\Rightarrow \tau_k(x) = \tau_g(x). \end{aligned}$$

Injektywność Rozumowanie przeciwne do poprzedniego: pokazuje, że

$$\tau_k(x) = \tau_g(x) \Rightarrow gG^x = kG^x.$$

Surjektywność wynika z tranzytywności.
Izomorficzność działań:

$$\phi(gkG^x) = \tau_{gk}(x) = \tau_g(\tau_k x)) = \tau_g(\phi(kG^x).$$

□

Twierdzenie 1.6 *Niech H i K będą podgrupami. Wtedy działania G na G/H i G/K są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy H jest sprzężona do K.*

Dowód. $\Leftarrow$ Niech $K = mHm^{-1}$. Definiujemy

$$\phi(gH) = gm^{-1}K = kHm^{-1}.$$

Trywialnie sprawdzamy, że ϕ jest dobrze określone, bijektywne i splata działania.
$\Rightarrow$ Niech $\phi : G/H \to G/K$ będzie izomorfizmem. Wtdy $\phi(H) = m^{-1}K$. Dla $h \in H$

$$hm^{-1}K = h\phi(H) = \phi(hH) = \phi(H) = m^{-1}K.$$

Czyli $mhm^{-1}K = K$. Zatem, $mHm^{-1} \subset K$. Odwracając role dostajemy $mHm^{-1} = K$ □

1.7 Klasy sprzężoności

Niech $g \in G$. Kładziemy

$$\mathrm{Inn}_g(h) := ghg^{-1}, \quad h \in G.$$

Wtedy Inn_g jest automorfizmem grupy G nazywanym *automorfizmem wewnętrznym.*

$$G \ni g \mapsto \mathrm{Inn}_g \in \mathrm{Aut}(G)$$

jest homomorfizmem.

Grupa G działa na sobie samej przez automorfizmy wewnętrzne. Orbity względem tego działania nazywają się *klasami sprzężoności.*

1.8 Iloczyn grup

Niech K, H będą grupami. Wtedy $K \times H$ jest grupą z iloczynem

$$(k_1, h_1)(k_2, h_2) := (k_1 k_2, h_1 h_2).$$

$K \times H$ z takim iloczynem nazywamy *iloczynem (zewnętrznym) grupy K i H*. Zauważmy, że $K \times \{e_H\}$, $\{e_K\} \times H$ są podgrupami, które komutują, ich przecięcie to $\{(e_K, e_H)\}$ i generują razem $K \times H$.

Latwo pokazać, że jeśli n, m są liczbami względnie pierwszymi, to

$$\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \ni (i, j) \mapsto (in + jm) \in \mathbb{Z}_{nm}$$

jest izomorfizmem. Każda skończona grupa abelowa jest iloczynem grup postaci $\mathbb{Z}^{p^k}$, gdzie p są liczbami pierwszymi.

1.9 Podgrupy normalne

Niech N będzie podgrupą w G. Mówimy, że N jest *podgrupą normalną*, gdy

$$g \in G,\ n \in N \ \Rightarrow\ gng^{-1} \in N.$$

Równoważny warunek:

$$gN = Ng, \quad g \in G$$

Czyli nie ma wtedy potrzeby rozróżniać lewych i prawych warstw.

Grupę która nie posiada nietrywialnych podgrup normalnych nazywamy *grupą prostą*. Przykładami grup prostych są $\mathbb{Z}_p$ dla pierwszych p i A_n dla $n \geq 5$.

Wszystkie grupy proste skończone zostały sklasyfikowane. Dowód prostoty A_5 jako pierwszy podał Galois w 1831 r. Pełna lista jest znana od 1981 r., kiedy skonstruowano *Grupę Monstrum*. Dowód kompletności tej klasyfikacji ogłoszono w 1983 r. Za datę, kiedy powszechnie zgodzono się z tym, że dowód ten został ukończony uznaje się 2004.

Jeśli $\phi : G \to H$ jest homomorfizmem, to $\phi(G)$ jest podgrupą w H i

$$\mathrm{Ker}\phi = \{g \in G \ : \ \phi(g) = e_H\}$$

jest podgrupą normalną.

Wzór

$$(g_1 N)(g_2 N) := g_1 g_2 N$$

definiuje w G/N strukturę grupy. Odwzorowanie

$$G \ni g \mapsto gN \in G/N$$

jest homomorfizmem, którego jądrem jest N.

Jeśli $\phi : G \to H$ jest surjektywnym homomorfizmem, którego jądrem jest też N, to

$$\psi(gN) := \phi(g)$$

definiuje izomorfizm $\psi : G/N \to H$.

1.10 Iloczyn półprosty

Niech H, N będą grupami i homomorfizm $H \ni h \mapsto \alpha_h \in \mathrm{Aut}(N)$. Definiujemy *(zewnętrzny) iloczyn półprosty* $N \rtimes_\alpha H$ jako $N \times H$ wyposażone w działanie

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) := (n_1 \alpha_{h_1}(n_2), h_1 h_2),$$

element neutralny (e_N, e_H), i odwrotność

$$(n, h)^{-1} = (\alpha_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1}).$$

Zauważmy, że $N \times e_H$ jest podgrupą normalną, zaś $e_N \times H$ jest podgrupą, ich przecięcie jest równe $\{(e_N, e_H)\}$ oraz $\mathrm{Gr}(N \cup H) = N \rtimes_\alpha H$.

Odwzorowanie

$$N \rtimes_\alpha H \ni (n, h) \mapsto h \in H$$

jest surjektywnym homomorfizmem, którego jądrem jest N.

Sytuację, gdy $\phi : G \to H$ jest surjektywnym homomorfizmem, dla którego N jest jądrem, często zapisujemy w skrócie

$$1 \to N \to G \to H \to 1. \tag{1.2}$$

Mówimy wtedy, że G *jest rozszerzeniem* N *przez* H, albo że mamy *krótki ciąg dokładny (1.2)*. Zachodzi pytanie, kiedy G jest izomorficzne iloczynowi półprostemu N i H? Zachodzi to wtedy, gdy istnieje homomorfizm injektywny $\psi : H \to G$ taki, że $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$, $\psi(H)$ i N generują G i $\psi(H) \cap N = e_G$. Nie zawsze to ma miejsce: Weźmy

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \to 0.$$

2 Przykłady grup

2.1 Permutacje

Jeśli X jest zbiorem skończonym, bijekcję na X często nazywamy *permutacją*. Pamiętamy, że przez $S(X)$ oznaczamy grupę bijekcji na X. Piszemy $S_n := S(\{1, 2, \ldots, n\})$. Oczywiście, jeśli X ma n elementów, to $S(X)$ jest izomorficzne z S_n.

Permutację $\pi \in S_n$ nazywamy *cyklem k-elementowym*, gdy istnieją parami różne $x_1, \ldots, x_k \in \{1, \ldots, n\}$ takie, że

$$\pi x_i = x_{i+1}, \ i = 1, \ldots, k,$$

(rozumiejąc, że $k + 1 = 1$). Cykl oznaczamy przez $(x_1, \ldots, x_k)$. Dwa cykle $(x_1, \ldots, x_k)$ i $(y_1, \ldots, y_m)$ nazywamy *rozłącznymi* jeśli zbiory $\{x_1, \ldots, x_k\}$, $\{y_1, \ldots, y_m\}$ są rozłączne.

Każdą permutację możemy przedstawić jako iloczyn cykli rozłącznych. Rozkład ten jest jednoznaczny (z dokładnością do kolejności). W szczególności, wyznacza on ciąg $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ liczb z $\{0, 1, \ldots\}$ takich, że $\sum_j j\lambda_j = n$ i w rozkładzie na cykle rozłączne występuje λ_j cykli j-elementowych.

Wielomian Vandermonda stopnia n definiujemy jako

$$V(x_1, \ldots, x_n) := \prod_{i<j} (x_i - x_j).$$

Latwo sprawdzić, że dla $\pi \in S_n$,

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \pm V(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}).$$

Definiujemy

$$\mathrm{sgn}\pi := \frac{V(x_1, \ldots, x_n)}{V(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})}.$$

sgn : $S_n \to \{1, -1\}$. jest homomorfizmem. Jądro tego homomorfizmu nazywamy *grupą alternującą* i oznaczamy przez A_n.

2.2 Iloczyn półprosty z grupą $\mathbb{Z}_2$

Niech K będzie grupą abelową z zapisem addytywnym. Odwzorowanie $K \ni k \mapsto \beta(k) := -k \in K$ jest automorfizmem grupy K.

Dla grup $\mathbb{Z}_2^n$ jest to automorfizm identycznościowy. Jeśli nie wszystkie elementy grupy K są rzędu 2 lub 1, to jest to automorfizm nietrywialny. Możemy zdefiniować grupę $K \rtimes_\beta \mathbb{Z}_2$. W szczególności, grupa

$$D_n := \mathbb{Z}_n \rtimes_\beta \mathbb{Z}_2$$

nosi nazwę *grupy dwuściennej (dihedralnej)*. Jest ona nieabelowa dla $n \geq 3$.

2.3 Grupa permutacji 3 elementów

Mamy izomorfizm $A_3 \simeq \mathbb{Z}_3$:

$$A_3 = \{\mathrm{id},\ (123),\ (132)\}.$$

Mamy też izomorfizm $S_3 \simeq D_3 = \mathbb{Z}_3 \rtimes_\beta \mathbb{Z}_2$

S_3 posiada następujące nietrywialne podgrupy: jedną podgrupę (normalną) $\mathbb{Z}_3$ i 3 sprzężone do siebie podgrupy $\mathbb{Z}_2$. Mamy zatem 4 nieizomorficzne tranzytywne działania S_3: na zbiorze 6-, 3-, 2- i 1-elementowym

2.4 Grupa permutacji 4 elementów

Elementy grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ można oznaczyć jako $\{e, a, b, ab\}$. Automorfizmy tej grupy polegają na permutacjach $\{a, b, ab\}$. Czyli

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \simeq S_3.$$

Grupę $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ można włożyć w $A_4 \subset S_4$

$$\{\mathrm{id},\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\}.$$

Jest ona normalna w A_4 i w S_4. Mamy izomorfizmy

$$\begin{aligned}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes A_3 &\simeq A_4,\\ (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes S_3 &\simeq S_4.\end{aligned}$$

2.5 Grupa obrotów $SO(3)$

Przez $SO(3)$ będziemy oznaczać grupę obrotów przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Lemat 2.1 *Dla każdego $A \in SO(3)\backslash\{\mathbb{1}\}$ istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez* 0 *i $\theta \in [0, 2\pi[$ takie, że A jest obrotem wokół A o kąt θ. A jest skończonego rzędu, gdy $\theta = \frac{2\pi j}{n}$, $j = 1, \ldots, n-1$.*

Prostą opisaną w powyższym lemacie nazywamy *osią obrotu* A. Jeśli wybierzemy zwrot tej prostej, będziemy mówili o *osi skierowanej*.

Następnie opiszemy wszystkie skończone podgrupy grupy obrotów.

Lemat 2.2 *Niech G będzie skończoną podgrupą $SO(3)$. Niech α będzie osią pewnego obrotu z G. Wtedy obroty wokół osi α należące do G stanowią grupę izomorficzną z $\mathbb{Z}_n$.*

Oś taką jak w powyższym lemacie nazywamy *osią n-krotną*.

2.6 Grupa obrotów właściwych $C_n \simeq \mathbb{Z}_n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{2\pi j}{n} & \sin\frac{2\pi j}{n} \\ 0 & -\sin\frac{2\pi j}{n} & \cos\frac{2\pi j}{n} \end{bmatrix}, \quad j = 0, \ldots, n-1. \tag{2.3}$$

2.7 Grupa dihedralna $D_n \simeq \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$

Do (2.3) dołączamy

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\frac{\pi j}{n} & \sin\frac{\pi j}{n} \\ 0 & \sin\frac{\pi j}{n} & \cos\frac{\pi j}{n} \end{bmatrix}, \quad j = 0, \ldots, n-1. \tag{2.4}$$

2.8 Grupa czworościanu $T \simeq A_4$

Grupa symetrii czworościanu. Permutuje

(1) 4 wierzchołki,

(2) 4 ściany,

(3) 6 krawędzi.

Ma

(1) 4 osie 3-krotne, między wierzchołkiem a przeciwległą ścianą,

(2) 3 osie 2-krotne, między środkami przeciwległych krawędzi.

2.9 Grupa sześcianu/ośmiościanu $C \simeq S_4$

Grupa symetrii sześcianu. Permutuje

(1) 8 wierzchołków/ścian,

(2) 6 ścian/wierzchołków,

(3) 12 krawędzi.

Ma

(1) 4 osie 3-krotne, między przeciwległymi wierzchołkami/ścianami,

(2) 3 osie 4-krotne, między środkami przeciwległych ścian/wierzchołków,

(3) 6 osi 2-krotnych, między środkami przeciwległych krawędzi.

2.10 Grupa dwudziestościanu/dwunastościanu) $I \simeq A_5$

Grupa symetrii dwudziestościanu. Permutuje

(1) 10 wierzchołków/ścian,

(2) 20 ścian/wierzchołków,

(3) 30 krawędzi.

Ma

(1) 6 osi 5-krotnych, między przeciwległymi wierzchołkami/ścianami,

(2) 10 osi 3-krotnych, między środkami przeciwległych ścian/wierzchołków,

(3) 15 osie 2-krotne, między środkami przeciwległych krawędzi.

2.11 Skończone podgrupy grupy obrotów

Twierdzenie 2.3 *Lista powyższa zawiera wszystkie skończone podgrupy obrotów.*

Dowód. Niech G będzie skończoną podgrupą grupy obrotów. Niech S będzie zbiorem osi skierowanych elementów z G, czyli

$$S = \{\alpha \in S^2 \;:\; g\alpha = \alpha \text{ dla pewnego } g \in G\}$$

Dla $\alpha \in S$ niech $G^{(\alpha)}$ będzie podzbiorem w G składającym się z obrotów o osi α, czyli

$$G^{(\alpha)} := \{g \in G \;:\; g\alpha = \alpha\}.$$

$$G \times S \ni (g, \alpha) \mapsto g\alpha \in S$$

jest działaniem grupy G na S. Działanie zachowuje krotność. Niech $O_1, \ldots, O_k$ będzie rozbiciem S na orbity. Niech n_i będzie krotnością elementów orbity O_i. Zakładamy, że $n_1 \leq \cdots \leq n_k$.

Zachodzi wzór

$$\sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\#G}\right). \tag{2.5}$$

Aby go dowieść, rozważmy

$$P := \{(\alpha, g) \in S \times (G \backslash \{\mathbb{1}\}) \ : \ g\alpha = \alpha\}.$$

Dla każdego $g \in G \backslash \{\mathbb{1}\}$ mamy dwa przecięcia osi obrotu i sfery. Dlatego

$$\#P = 2(\#G - 1). \tag{2.6}$$

Dla każdego $\alpha \in O_j$ jest $n_j - 1$ obrotów $g \in G \backslash \{\mathbb{1}\}$ takich, że $g\alpha = \alpha$. Dlatego

$$\#P = \sum_{i=1}^{k} \#O_i(n_i - 1). \tag{2.7}$$

Ale grupa izotropii $\alpha \in O_i$ jest izomorficzna z $\mathbb{Z}_{n_i}$. Dlatego

$$\#O_i = \frac{\#G}{n_i}. \tag{2.8}$$

(2.6), (2.7) i (2.8) dają razem (2.5).

Rozwiązujemy więc równanie (2.5).

$\#G \geq 2$ implikuje $2\left(1 - \frac{1}{\#G}\right) \in [1, 2[$.

$n_i \geq 2$ implikuje $1 - \frac{1}{n_i} \in [\frac{1}{2}, 1[$. Dla $k = 1$ lewa strona (2.5) < 1. Dla $k \geq 4$ lewa strona (2.5) ≥ 1. Dlatego $k = 2, 3$.

Rozważmy $k = 2$. Możemy przepisać (2.5) jako

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} = \frac{2}{\#G}. \tag{2.9}$$

Wiemy, że $n_i \leq \#G$. Więc jedyne rozwiązania (2.9) to $n_1 = n_2 = \#G \in \mathbb{N}$

Rozważmy $k = 3$. Możemy przepisać (2.5) jako

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1 + \frac{2}{\#G}. \tag{2.10}$$

Jeśli $n_1 \geq 3$, to lewa strona (2.10) ≤ 1, co jest niemożliwe. Więc $n_1 = 2$.

Jeśli $n_2 \geq 4$, to znów lewa strona (2.10) ≤ 1, co jest niemożliwe. Więc $n_2 = 2$ lub $n_2 = 3$.

Jeśli $n_2 = 2$, to

$$n_1 = n_2 = 2, \quad n_3 = \frac{\#G}{2}.$$

Jeśli $n_2 = 3$, to dla $n_3 \geq 6$ lewa strona (2.10) ≤ 1. Dlatego $n_3 = 3$, $n_3 = 4$ lub $n_3 = 5$.

Następnie identyfikujemy powstałe możliwości z poszczególnymi grupami

- $n_1 = n_2 = n = \#G$.

  Mamy $\frac{\#G}{n_1} = \frac{\#G}{n_2} = 1$. Zatem mamy tylko jedną oś. Jest ona n-krotna. Zatem $G = C_n$.

- $n_1 = n_2 = 2$, $n_3 = n$, $\#G = 2n$.

  Mamy $\frac{\#G}{n_1} = \frac{\#G}{n_2} = n$, $\frac{\#G}{n_3} = 2$. Zatem mamy tylko jedną oś n-krotną. Zatem G zawiera C_n. Osie 2-krotne muszą być prostopadłe do niej. Jedyna możliwość to D_n.

- $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 3$, $\#G = 12$. Mamy $\frac{\#G}{n_1} = 6$, $\frac{\#G}{n_2} = 4$, $\frac{\#G}{n_3} = 4$. Wybierzmy oś 3-krotną. Musi ona przecinać sferę w dwóch różnych orbitach. Pozostałe punkty 3-krotne tworzą dwa trójkąty równoboczne w płaszczyznach prostopadłych do tej osi.

- $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$, $\#G = 24$.

  Mamy $\frac{\#G}{n_1} = 12$, $\frac{\#G}{n_2} = 8$, $\frac{\#G}{n_3} = 6$. Wybierzmy oś 4-krotną. Przecina ona sferę w dwóch elementach orbity O_3. Pozostałe punkty 4-krotne tworzą kwadrat w płaszczyźnie prostopadłej do tej osi.

- $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$, $\#G = 60$.

  Mamy $\frac{\#G}{n_1} = 30$, $\frac{\#G}{n_2} = 20$, $\frac{\#G}{n_3} = 12$. Wybierzmy oś 5-krotną. Przecina ona sferę w dwóch elementach orbity O_3. Pozostałe punkty 5-krotne tworzą dwa pięciokąty foremne w dwóch płaszczyznach prostopadłych do tej osi.

3 Grupy macierzowe

3.1 Ciała

Mówimy, że $(\mathbb{K}, +, \cdot, 1, 0\}$ jest *ciałem*, gdy $(\mathbb{K}, +, 0, -\}$ i $(\mathbb{K}^\times, \cdot, 1, {}^{-1})$ są grupami abelowymi spełniającymi

$$x(y + z) = xy + xz,$$

gdzie $\mathbb{K}^\times := \mathbb{K}\backslash\{0\}$.

Definiujemy homomorfizmy, izomorfizmy, etc. ciał w oczywisty sposób.

Najważniejszymi ciałami dla nas są $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$. $\mathbb{R}$ ma jedynie automorfizm trywialny. $\mathbb{C}$ ma jeden nietrywialny automorfizm: *sprzężenie zespolone* $\mathbb{C} \ni z \mapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$.

3.2 Przestrzenie wektorowe

Mówimy, że $(\mathcal{V}, +, 0, -)$ jest *przestrzenią wektorową nad ciałem* $\mathbb{K}$, gdy jest to grupa abelowa wyposażona w działanie $\mathbb{K} \times \mathcal{V} \ni (x, v) \mapsto xv \in \mathcal{V}$ takie, że

$$(x + y)v = xv + yv, \quad (xy)v = x(yv), \quad x, y \in \mathbb{K}, \quad v \in \mathcal{V},$$

$$x(u + v) = xu + xv, \quad x \in \mathbb{K}, \quad u, v \in \mathcal{V}.$$

Przykładem przestrzeni nad $\mathbb{K}$ są $\mathbb{K}^n$. Przestrzenie wektorowe izomorficzne z $\mathbb{K}^n$ nazywamy *przestrzeniami wymiaru n*

3.3 Odwzorowania liniowe

Homomorfizmy przestrzeni wektorowych nazywamy *odwzorowaniami liniowymi.*

Jeśli $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ są przestrzeniami, to $L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ będzie oznaczało zbiór odwzorowań liniowych z $\mathcal{V}$ do $\mathcal{W}$. Będziemy pisać $L(\mathcal{V}) := L(\mathcal{V}, \mathcal{V})$.

$L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ będziemy utożsamić z macierzami o n wierszach i m kolumnach. Dla $A \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ przez A^*, $\overline{A}$ i $A^\#$ będziemy oznaczać macierz *hermitowsko sprzężoną, zespolenie sprzężoną i transponowaną do A.*

3.4 Ogólna grupa liniowa

Niech $A \in L(\mathbb{K}^n)$. Wzór

$$\det A := \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}\pi A_{1,\pi(1)} \cdots A_{n,\pi(n)} \in \mathbb{K}$$

definiuje *wyznacznik* spełniający

$$\det AB = \det A \det B.$$

$GL(\mathbb{K}^n)$ definiujemy jako

$$GL(\mathbb{K}^n) := \{A \in L(\mathbb{K}^n) \ : \ \det A \neq 0\}.$$

Jest to grupa. Piszemy też

$$GL(\mathbb{K}^n) = GL(n, \mathbb{K}).$$

Wyznacznik definiuje homomorfizm

$$\det GL(\mathbb{K}^n) \to \mathbb{K}^\times.$$

Definiujemy

$$SL(\mathbb{K}^n) = SL(n, \mathbb{K}) := \{A \in GL(\mathbb{K}^n) \ : \ \det A = 1\}.$$

Można też podejść do grupy GL bardziej abstrakcyjnie. Niech $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{K}$. Zbiór bijekcji liniowych z $\mathcal{V}$ w $\mathcal{W}$ oznaczamy przez $Gl(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. W szczególności $GL(\mathcal{V}) := GL(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ jest grupą. Dla $\mathcal{V} = \mathbb{K}^n$ pokrywa się to z poprzednią definicją.

3.5 Grupa ortogonalna w skończonym wymiarze

$O(\mathbb{K}^n)$ definiujemy jako

$$O(\mathbb{K}^n) := \{A \in L(\mathbb{K}^n) \ : \ A^\# A = \mathbb{1}\}.$$

(Automatycznie elementy $O(\mathbb{K}^n)$ spełniają $AA^\# = \mathbb{1}$). Jest to podgrupa w $GL(\mathbb{K}^n)$. Piszemy też

$$O(\mathbb{R}^n) = O(n).$$

Macierze ortogonalne zachowują standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{K}^n$.

Latwo pokazać, że wyznacznik macierzy ortogonalnych może mieć wartość ± 1, Definiujemy

$$SO(\mathbb{K}^n) := SL(\mathbb{K}^n) \cap O(\mathbb{K}^n).$$

W przypadku zespolonym piszemy też $O(n, \mathbb{C}) = O(\mathbb{C}^n)$, $SO(n, \mathbb{C}) = SO(\mathbb{C}^n)$.

W przypadku rzeczywistym piszemy też $O(n) = O(\mathbb{R}^n)$, $SO(n) = SO(\mathbb{R}^n)$. Grupa $O(n)$ ma dwie składowe spójne. Składowa spójna zawierająca jedność pokrywa się z $SO(n)$.

3.6 Grupa pseudo-ortogonalna

Rozważmy dalej przypadek rzeczywisty. Niech $q, p \in 0, 1, \ldots$. Przez $\mathbb{R}^{q,p}$ będziemy rozumieć przestrzeń $\mathbb{R}^{q+p} = \mathbb{R}^q \oplus \mathbb{R}^p$ z iloczynem zadanym przez tensor $I_{q,p} := \begin{bmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}$. To znaczy,

$$vI_{q,p}v' = -\sum_{i=1}^{q} v_i v_i' + \sum_{j=q+1}^{q+p} v_j v_j'. \tag{3.11}$$

$O(\mathbb{R}^{q,p})$ definiujemy jako zbiór macierzy spełniających

$$A^{\#} I_{q,p} A = I_{q,p}.$$

(Automatycznie spełniają one $AI_{q,p}A^{\#} = I_{q,p}$). Jest to grupa. Piszemy też

$$O(\mathbb{R}^{q,p}) = O(q, p).$$

Macierze pseudoortogonalne zachowują iloczyn pseudoskalarny w $\mathbb{R}^{q,p}$.

Wyznacznik macierzy pseudo-ortogonalnych może mieć wartość ± 1, Definiujemy

$$SO(\mathbb{R}^{q,p}) = SO(q, p) := \{A \in O(\mathbb{R}^{q,p}) \ : \ \det A = 1\}.$$

Grupę $O(\mathbb{R}^{1,p})$ nazywamy grupą Lorentza. Ma ona cztery składowe spójne. Spójna składowa jedności jest nazywana ortoczasową grupą Lorentza i jest oznaczana $SO^{\uparrow}(\mathbb{R}^{1,p})$.

3.7 Abstrakcyjne podejście do grup (pseudo-)ortogonalnych

Można też podejść bardziej abstrakcyjnie. Niech $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ będą przestrzeniami wektorowymi z formą symetryczną, którą dla $v, v' \in \mathcal{V}$ oznaczamy $v \cdot v'$. Zbiór bijekcji liniowych z $\mathcal{V}$ w $\mathcal{W}$ spełniających

$$Av \cdot \, Av' = v \cdot v'$$

oznaczamy przez $O(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. W szczególności $O(\mathcal{V}) := O(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ jest grupą.

Dla $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ każdą niezdegenerowaną formę symetryczną można sprowadzić do postaci (3.11), i wtedy $\mathcal{V}$ nazywamy $\mathbb{R}^{q,p}$. Więc obie definicje sie w tym wypadku pokrywają.

Dla $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$ każdą niezdegenerowaną formę można sprowadzić do postaci (3.11) z $q = 0$.

Dla przestrzenie nieskończenie wymiarowych z reguły zakładamy, że forma symetryczna jest dodatnio określona i nazywamy ją iloczynem skalarnym. Zakładamy też z reguły, że przestrzenie są zupełne, czyli że są *rzeczywistymi przestrzeniami Hilberta.*

3.8 Grupa unitarna w skończonym wymiarze

$U(\mathbb{C}^n)$ definiujemy jako

$$U(\mathbb{C}^n) := \{A \in L(\mathbb{C}^n) \ : \ A^*A = \mathbb{1}\}.$$

(Automatycznie elementy $U(\mathbb{C}^n)$ spełniają $AA^* = \mathbb{1}$). Jest to podgrupa w $GL(\mathbb{C}^n)$. Piszemy też

$$U(\mathbb{C}^n) = U(n).$$

Macierze unitarne zachowują standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{C}^n$.

Latwo pokazać, że wyznacznik macierzy unitarnych ma moduł 1. Definiujemy

$$SU(\mathbb{C}^n) := SL(\mathbb{C}^n) \cap U(\mathbb{C}^n).$$

3.9 Grupa pseudo-unitarna

Niech $q, p \in 0, 1, \ldots$. Przez $\mathbb{C}^{q,p}$ będziemy rozumieć przestrzeń $\mathbb{C}^{q+p} = \mathbb{C}^q \oplus \mathbb{C}^p$ z iloczynem zadanym przez tensor $I_{q,p} := \begin{bmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}$. To znaczy,

$$\overline{v} I_{q,p} v' = -\sum_{i=1}^{q} \overline{v}_i v'_i + \sum_{j=q+1}^{q+p} \overline{v}_j v'_j. \tag{3.12}$$

$U(\mathbb{C}^{q,p})$ definiujemy jako zbiór macierzy spełniających

$$A^* I_{q,p} A = I_{q,p}.$$

(Automatycznie spełniają one $A I_{q,p} A^* = I_{q,p}$). Jest to grupa. Piszemy też

$$U(\mathbb{C}^{q,p}) = U(q, p).$$

Macierze pseudo-unitarne zachowują iloczyn pseudoskalarny w $\mathbb{C}^{q,p}$.

Wyznacznik macierzy pseudo-unitarnych ma moduł 1. Definiujemy

$$SU(\mathbb{C}^{q,p}) = SU(q, p) := \{A \in U(\mathbb{C}^{q,p}) \ : \ \det A = 1\}.$$

3.10 Abstrakcyjne podejście do grup (pseudo-)unitarnych

Można też podejść bardziej abstrakcyjnie. Niech $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ będą zespolonymi przestrzeniami wektorowymi z wyróżnioną formą hermiowską, którą dla $v, v' \in \mathcal{V}$ oznaczamy $\overline{v} \cdot v'$. Zbiór bijekcji liniowych z $\mathcal{V}$ w $\mathcal{W}$ spełniających

$$\overline{Av} \cdot Av' = \overline{v} \cdot v'$$

oznaczamy przez $U(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. W szczególności $U(\mathcal{V}) := U(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ jest grupą.

Dla $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$ każdą niezdegenerowaną formę hermitowską można sprowadzić do postaci (3.12), i wtedy $\mathcal{V}$ nazywamy $\mathbb{C}^{q,p}$. Więc obie definicje sie w tym wypadku pokrywają.

Dla przestrzenie nieskończenie wymiarowych z reguły zakładamy, że forma hermitowska jest dodatnio określona i nazywamy ją iloczynem skalarnym. Zakładamy też z reguły, że przestrzenie są zupełne, czyli że są *(zespolonymi) przestreniami Hilberta*

3.11 Grupa symplektyczna w skończonym wymiarze

W przestrzeni $\mathbb{K}^{2n} = \mathbb{K}^n \oplus \mathbb{K}^n$ wprowadzamy macierz $J = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix}$. Grupa $Sp(\mathbb{K}^n) = Sp(n, \mathbb{K})$ jest zdefiniowana jako

$$Sp(\mathbb{K}) := \{A \in L(\mathbb{K}^n) \ : \ A^{\#} J A = J\}$$

(Automatycznie elementy $Sp(\mathbb{K}^n)$ spełniają $AJA^{\#} = J$). Jest to podgrupa w $GL(\mathbb{K}^n)$. Macierze symplektyczne zachowują standardową formę symplektyczną w $\mathbb{K}^n$.

$$\omega(v, v') = \sum_{i=1}^{n} (v_i v'_{i+n} - v_{i+n} v'_i) = v \cdot J v'. \tag{3.13}$$

Możemy też zapisać

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} y_i \wedge y_{n+i},$$

gdzie $y_1, \dots, y_{2n}$ jest bazą dualną do $v_1, \dots, v_{2n}$. Mamy $\omega(Av, Av') = \omega(v, v')$ dla $v, v' \in \mathbb{K}^{2n}$ Dlatego

$$\omega \wedge \cdots \wedge \omega(Av_1, \dots, Av_{2n}) = \omega \wedge \cdots \wedge \omega(v_1, \dots, v_{2n}).$$

$$\omega \wedge \cdots \wedge \omega(v_1, \dots, v_{2n}) = \det[v_1, \dots, v_{2n}].$$

Dlatego $Sp(\mathbb{K}^n)$ jest podgrupą w $SL(\mathbb{K}^n)$.

3.12 Abstrakcyjne podejście do grup symplektycznych

Można też podejść bardziej abstrakcyjnie. Niech $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ będą przestrzeniami wektorowymi z formą symetryczną, którą np. dla $v, v' \in \mathcal{V}$ oznaczamy $v\omega v'$. Zbiór bijekcji liniowych z $\mathcal{V}$ w $\mathcal{W}$ spełniających

$$Av\omega\, Av' = v\omega v'$$

oznaczamy przez $Sp(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. W szczególności $Sp(\mathcal{V}) := Sp(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ jest grupą.

Każdą niezdegenerowaną formę symetryczną można sprowadzić do postaci (3.13). Więc obie definicje się w tym wypadku pokrywają.

3.13 Grupy afiniczne

Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią wektorową. Odwzorowaniem afinicznym na $\mathcal{V}$ nazywamy odwzorowanie postaci

$$\mathcal{V} \ni v \mapsto w + Av \in \mathcal{V}$$

gdzie $w \in \mathcal{V}$ i $A \in L(\mathcal{V})$. Odwzorowania afiniczne dla których $A \in GL(\mathcal{V})$ tworzą grupę z działaniem

$$(w_1, A_1)(w_2, A_2) := (w_1 + A_1 w_2, A_1 A_2)$$

elementem neutralnym $(0, \mathbb{1})$ i odwrotnością $(w, A)^{-1} = (A^{-1}w, A^{-1})$. Grupę tę nazywamy *afinicznym rozszerzeniem grupy* $GL(\mathcal{V})$.

Grupa $GL(\mathcal{V})$ działa na elementy z $\mathcal{V}$ w oczywisty sposób. Czyli dostajemy homomorfizm

$$GL(\mathcal{V}) \ni A \mapsto A \in \mathrm{Aut}(\mathcal{V}),$$

gdzie z prawej $\mathcal{V}$ jest traktowana jako grupa z dodawaniem. Latwo widzimy, że grupa afiniczna jest iloczynem półprostym $\mathcal{V} \rtimes GL(\mathcal{V})$.

Często w zastosowaniach spotykamy grupy w których $GL(\mathcal{V})$ jest zastąpione jej podgrupą. Na przykład, grupa Poincarego jest afinicznym rozszerzeniem grupy Lorentza $\mathbb{R}^{1,3} \rtimes O(1,3)$.

3.14 Grupy Liego

Mówimy, że G jest *grupą Liego*, jeśli jest to grupa będąca rozmaitością (gładką) i odwzorowania

$$\begin{aligned} G \times G \ni (g,h) &\mapsto gh \in G \\ G \ni g &\mapsto g^{-1} \in G \end{aligned}$$

są gładkie.

Wszystkie rozważane w tej sekcji grupy dla skończenie wymiarowych $\mathcal{V}$ nad ciałem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ są grupami Liego.

Oto wymiary wybranyh grup Liego

(1) $\dim SL(\mathbb{R}^n) = \dim SU(\mathbb{C}^n) = n^2 - 1$,

(2) $\dim SO(\mathbb{R}^n) = \frac{n(n-1)}{2}$,

(3) $\dim Sp(\mathbb{R}^{2n} = \frac{2n(2n+1)}{2}$.

4 Koincydencje wśród grup macierzowych

4.1 $SL(2, \mathbb{K}) \simeq Sp(2, \mathbb{K})$

Niech

$$J := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że dla $A \in L(\mathbb{K}^2)$ mamy

$$AJA^{\#} = (\det A)J.$$

4.2 $SU(2)/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(3)$

Utożsamiamy $\mathbb{R}^3$ z macierzami hermitowskimi 2×2 o śladzie 0:

$$\mathbb{R}^3 \ni (x,y,x) \mapsto X = \begin{bmatrix} z & x + \mathrm{i}y \\ x - \mathrm{i}y & -z \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$-\det X = x^2 + y^2 + z^2,$$

czyli wyznacznik zadaje standardowy iloczyn skalarny.

Dla $A \in SU(2)$ kładziemy

$$\rho_A X := AXA^*.$$

Wtedy

$$\det \rho_A X = \det X.$$

Zatem ρ_A zachowuje iloczyn skalarny.

$$SU(2) \ni A \mapsto \rho_A \in SO(3).$$

jest surjektywnym homomorfizmem. Jego jądrem jest $\pm\mathbb{1}$.

4.3 $SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(1,2)$, $SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(3,\mathbb{C})$,

Utożsamiamy $\mathbb{K}^3$ z macierzami 2×2 o śladzie 0:

$$\mathbb{K}^3 \ni (x,y,x) \mapsto X = \begin{bmatrix} z & x+y \\ x-y & -x \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$-\det X = -x^2 + y^2 + z^2.$$

Dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wyznacznik zadaje iloczyn pseudoskalarny o sygnaturze $(1,2)$. Dla $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ jest to zwykły iloczyn skalarny.

Dla $A \in SL(2,\mathbb{K})$ kładziemy

$$\rho_A X := AXA^{-1}.$$

Wtedy

$$\det \rho_A X = \det X.$$

Zatem ρ_A zachowuje iloczyn (pseudo-)skalarny.

$$SL(2,\mathbb{R}) \ni A \mapsto \rho_A \in SO(1,2),$$
$$SL(2,\mathbb{C}) \ni A \mapsto \rho_A \in SO(3,\mathbb{C}),$$

są surjektywnymi homomorfizmami. Ich jądrem jest $\pm\mathbb{1}$.

4.4 $SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(1,3)$

Utożsamiamy $\mathbb{R}^4$ z macierzami 2×2 hermitowskimi

$$\mathbb{R}^3 \ni (t,x,y,x) \mapsto X = \begin{bmatrix} t+z & x+\mathrm{i}y \\ x-\mathrm{i}y & t-z \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$-\det X = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2,$$

czyli wyznacznik zadaje iloczyn pseudo-skalarny.

Dla $A \in SL(2,\mathbb{C})$ kładziemy

$$\rho_A X := AXA^*.$$

Wtedy

$$\det \rho_A X = \det X.$$

Zatem ρ_A zachowuje iloczyn pseudo-skalarny.

$$SL(2,\mathbb{C}) \ni A \mapsto \rho_A \in SO^{\uparrow}(1,3).$$

jest surjektywnym homomorfizmem. Jego jądrem jest $\pm\mathbb{1}$.

4.5 $\left(SL(2,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R})\right)/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(2,2)$, $\left(SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{C})\right)/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(4,\mathbb{C})$,

Utożsamiamy $\mathbb{K}^4$ z macierzami 2×2:

$$\mathbb{K}^3 \ni (t,x,y,x) \mapsto X = \begin{bmatrix} t+z & x+y \\ x-y & t-z \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$-\det X = -t^2 - x^2 + y^2 + z^2.$$

Dla $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ wyznacznik zadaje iloczyn pseudoskalarny o sygnaturze $(2,2)$. Dla $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ jest to zwykły iloczyn skalarny.

Dla $(A,B)\in SL(2,\mathbb{K})$ kładziemy

$$\rho_{(A,B)}X := AXB^{-1}.$$

Wtedy

$$\det \rho_{(A,B)}X = \det X.$$

Zatem $\rho_{(A,B)}$ zachowuje iloczyn (pseudo-)skalarny.

$$SL(2,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R}) \ni (A,B) \mapsto \rho_{(A,B)} \in SO(2,2),$$
$$SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{R}) \ni (A,B) \mapsto \rho_{A} \in SO(4,\mathbb{C}),$$

są surjektywnymi homomorfizmami. Ich jądrem jest $\pm\mathbb{1}$.

4.6 $\left(SU(2)\times SU(2)\right)/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(4)$

Utożsamiamy $\mathbb{R}^4$ z macierzami zespolonymi 2×2 spełniającymi $\overline{X} = JXJ$ w następujący sposób:

$$\mathbb{R}^4 \ni (t,x,y,x) \mapsto X = \begin{bmatrix} \mathrm{i}t+z & x+\mathrm{i}y \\ x-\mathrm{i}y & \mathrm{i}t-z \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$-\det X = t^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

Czyli zadaje standardowy iloczyn skalarny.

Dla $(A,B)\in SU(2)\times SU(2)$ kładziemy

$$\rho_{(A,B)}X := AXB^{-1}.$$

Wtedy

$$\det \rho_{(A,B)}X = \det X.$$

Zatem $\rho_{(A,B)}$ zachowuje iloczyn skalarny.

$$SU(2)\times SU(2) \ni (A,B) \mapsto \rho_{(A,B)} \in SO(4).$$

jest surjektywnym homomorfizmem. Jego jądrem jest $\pm\mathbb{1}$.

5 Reprezentacje grup

5.1 Definicja

Niech G będzie grupą a $\mathcal{V}$ przestrzenią liniową. *Reprezentacją grupy G na przestrzeni $\mathcal{V}$* nazywamy homomorfizm $\pi : G \to Gl(\mathcal{V})$. Będziemy też często pisać, że para $(\pi, \mathcal{V})$ jest reprezentacją grupy G.

Innymi słowy, $G \ni g \mapsto \pi(g) \in L(\mathcal{V})$ jest reprezentacją, gdy

$$\pi(g_1 g_2) = \pi(g_1)\pi(g_2), \quad g_1, g_2 \in G.$$

Jeśli $\mathcal{V}$ jest przestrzenią Hilberta, to *reprezentacją unitarną grupy G na przestrzeni $\mathcal{V}$* nazywamy homomorfizm $\pi : G \to U(\mathcal{V})$.

W szczególności, $G \ni g \mapsto 1\!\!1_{\mathcal{V}} \in L(\mathcal{V})$ jst reprezentacją. Nazywamy ją *reprezentacją trywialną*.

5.2 Suma prosta

Niech $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ będą przestrzeniami liniowymi. Wtedy $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ ma strukturę przestrzeni wektorowej, oznaczane przez $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$ i nazywanej *sumą prostą przestrzeni $\mathcal{V}_1$ i $\mathcal{V}_2$.*

Jeśli $A_i \in L(\mathcal{V}_i)$, to $A_1 \oplus A_2 \in L(\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2)$ jest zdefiniowany jako

$$(A_1 \oplus A_2)(v_1, v_2) := (A_1 v_1, A_2 v_2).$$

Niech $(\pi_i, \mathcal{V}_i)$ będą reprezentacjami na przestrzeniach $\mathcal{V}_i$. Wtedy

$$\pi_1 \oplus \pi_2(g) := \pi_1(g) \oplus \pi_2(g)$$

definiuje reprezentację na przestrzeni $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$ zwaną *sumą prostą reprezentacji π_1 i π_2*. Będziemy pisać

$$m\pi = \underbrace{\pi \oplus \cdots \oplus \pi}_{m \text{ razy}}.$$

5.3 Równoważność

Niech $(\pi, \mathcal{V}_\pi)$, $(\rho, \mathcal{V}_\rho)$ będą reprezentacjami G. Mówimy, że operator U *splata* π i ρ, jeśli

$$U\pi(g) = \rho(g)U, \quad g \in G. \tag{5.14}$$

Mówimy, że π, ρ są reprezentacjami *równoważnymi*, gdy istnieje $U \in Gl(\mathcal{V}_\pi, \mathcal{V}_\rho)$ splatający π i ρ. Piszemy wtedy $\pi \simeq \rho$.

Jeśli dodatkowo przestrzenie te są przestrzeniami Hilberta, mówimy, że π, ρ są *unitarnie równoważne*, gdy istnieje $U \in U(\mathcal{V}_\pi, \mathcal{V}_\rho)$ splatający π i ρ.

Twierdzenie 5.1 *Niech $\mathcal{V}_\pi$, $\mathcal{V}_\rho$ będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami Hilberta. Niech $(\pi, \mathcal{V}_\pi)$, $(\rho, \mathcal{V}_\rho)$ będą reprezentacjami unitarnymi. Wtedy ich równoważność jest równoważna unitarnej równoważności.*

Dowód. Niech $A \in GL(\mathcal{V}_\pi, \mathcal{V}_\rho)$ splata π i ρ. Wtedy $A^* \in GL(\mathcal{V}_\rho, \mathcal{V}_\pi)$ splata ρ i π. Zatem $A^*A \in GL(\mathcal{V}_\pi)$ splata π z sobą. To samo jest prawdą dla $(A^*A)^{-1/2}$. Zatem operator unitarny $(AA^*)^{-1/2}A$ splata π z ρ. $\square$

5.4 Nieprzywiedlność

Niech $(\pi, \mathcal{V})$ będzie reprezentacją G. Mówimy, że podprzestrzeń $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$ jest *niezmiennicza dla* $(\pi, \mathcal{V})$, gdy jest niezmiennicza względem $\pi(g)$, $g \in G$. Połóżmy $\pi_1 := \pi\Big|_{\mathcal{V}_1}$. Wtedy $(\pi_1, \mathcal{V}_1)$ jest też reprezentacją. Mówimy, że $(\pi_1, \mathcal{V}_1)$ jest *podreprezentacją* reprezentacji $(\pi, \mathcal{V})$.

Twierdzenie 5.2 *Jeśli $(\pi, \mathcal{V})$ jest unitarna i $\mathcal{V}_1$ jest niezmiennicza dla $(\pi, \mathcal{V})$, to $\mathcal{V}_1^{\perp}$ jest też niezmiennicza dla $(\pi, \mathcal{V})$.*

Mówimy, że $(\pi, \mathcal{V})$ jest *nieprzywiedlna*, gdy nie istnieje nietrywialna podprzestrzeń w $\mathcal{V}$ niezmiennicza względem π.

Mówimy, że $(\rho, \mathcal{V})$ jest *całkowicie rozkładalna*, gdy $\rho \simeq \oplus_{i=1}^{n} \pi_i$, gdzie π_i są nieprzywiedlne.

Twierdzenie 5.3 *Niech $(\pi, \mathcal{V})$ będzie reprezentacją unitarną w skończenie wymiarowej przestrzeni. Wtedy $(\pi, \mathcal{V})$ jest całkowicie rozkładalna.*

Dowód. Załóżmy, że $\mathcal{V}$ jest przywiedlna. Wtedy posiada nietrywialną podprzestrzeń niezmienniczą $\mathcal{V}_1$. $\mathcal{V}_2 := \mathcal{V}_1^{\perp}$ jest też niezmiennicza. Kontynuując dostaniemy rozkład. □

Jeśli weźmiemy reprezentację $\mathbb{R} \ni t \mapsto \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in L(\mathbb{C}^2)$, to $\mathbb{C} \oplus \{0\}$ jest przestrzenią niezmienniczą, która nie posiada dopełniającej niezmienniczej. Dlatego jest to reprezentacja przywiedlna, ale nie jest całkowicie rozkładalna. Nie jest natomiast unitarna.

5.5 Reprezentacje jednowymiarowe

Rozważmy reprezentacje w jednowymiarowej przestrzeni zespolonej. Takie reprezentacje mają wartości w grupie $GL(\mathbb{C})$, która pokrywa się z multiplikatywną grupą liczb zespolonych $\mathbb{C}^{\times}$. W $\mathbb{C}$ mamy z dokładnością do proporcjonalności tylko jeden iloczyn skalarny. Reprezentacja jest unitarna (bądź unitaryzowalna) gdy ma wartości w $U(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$.

Każda reprezentacja jednowymiarowa jest nieprzywiedlna. Jeśli $G \ni g \mapsto \chi(g) \in \mathbb{C}^{\times}$ jest jednowymiarową reprezentacją zaś $G \ni g \mapsto \pi(g)$ jest dowolną reprezentacją, to

$$\chi\pi(g) := \chi(g)\pi(g)$$

jest też reprezentacją. Jeśli π jest nieprzywiedlne, to $\chi\pi$ też. W szczególności, reprezentacje jednowymiarowe dowolnej grupy tworzą grupę ze względu na mnożenie.

Dla grupy $\mathbb{Z}_n$, dla $m = 0, \dots, n-1$,

$$\mathbb{Z}_n \ni k \mapsto \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi km}{n}} \in \mathbb{C}^{\times}$$

jest reprezentacją. Jest ona zawsze unitarna. Ogólniej

$$\mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_p} \ni (k_1, \dots, k_p) \mapsto \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi k_1 m_1}{n_1}} \cdots \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi k_p m_p}{n_p}} \in \mathbb{C}^{\times}$$

jest reprezentacją unitarną. Latwo się przekonać, że wszystkie nieprzywiedlne reprezentacje grupy $\mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_p}$ są tej postaci.

Dla grupy $\mathbb{Z}$, dla dowolnego $\mu \in \mathbb{C}$

$$\mathbb{Z} \ni k \mapsto \mathrm{e}^{k\mathrm{i}\mu} \in \mathbb{C}^\times$$

jest reprezentacją. Jest ona unitarna wtedy i tylko wtedy gdy μ jest rzeczywiste. W szczególności, nie wszystkie reprezentacje $\mathbb{Z}$ są unitaryzowalne.

5.6 Reprezentacje permutacyjne

Niech grupa G działa na zbiorze X. Niech δ_x będzie bazą kanoniczną w $l^2(X)$. Wtedy

$$\pi(g)\delta_x := \delta_{gx}, \quad g \in G,\ x \in X,$$

lub równoważnie

$$\pi(g)f(x) := f(g^{-1}x), \quad g \in G,\ x \in X,$$

definiuje reprezentację unitarną na $l^2(X)$.

Jeśli X jest skończone, to reprezentacja ta jest przywiedlna, bo przesrtrzeń rozpięta na wektorze $\sum_x \delta_x$ jest niezmiennicza.

5.7 Podstawowe reprezentacje grupy permutacji

Rozważmy powyższą konstrukcję dla grupy S_n działającej na $\{1, \dots, n\}$. Zatem rozważamy S_n działającą na $\mathbb{C}^n$,

$$\pi\delta_i := \delta_{\pi i}.$$

Niech $\mathcal{V}_n = \{f \in \mathbb{C}^n \ :\ f_1 + \ldots + f_n = 0\} = \{(1, \dots, 1)\}^\perp$. Reprezentacja π obcięta do $\mathcal{V}$ bywa nazywana *reprezentacją standardową grupy S_n.*

Twierdzenie 5.4 *Reprezentacja standardowa jest nieprzywiedlna dla $n \geq 2$*

Dowód. Twierdzenie jest oczywiste dla grupy S_2, dla której wymiar reprezentacji jest równy 1.

Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n-1$. Bazą przestrzeni $\mathcal{V}_n$ jest $e_1 = \delta_1 - \delta_n, \dots, e_{n-1} := \delta_{n-1} - \delta_n$. Rozważmy grupę $S_{n-1} \subset S_n$. Działa one na bazę $e_1, \dots, e_{n-1}$ jak reprezentacja permutacyjna. Dlatego też, z założenia indukcyjnego, jej jedyne nietrywialne podprzestrzenie niezmiennicze są rozpięte przez $e_1 + \ldots + e_{n-1} = \delta_1 + \ldots + \delta_{n-1} - (n-1)\delta_n$ oraz jej dopełnienie ortogonalne. Latwo się przekonać, że jakikolwiek element $S_n \backslash S_{n-1}$ nie zachowuje obu podprzestrzeni. $\square$

Zauważmy, że dla grupy A_3, reprezentacja standardowe na $\mathcal{V}_3$ jest przywiedlna. Dla A_4, reprezentacja standardowa jest nieprzywiedlna na $\mathcal{V}_3$. Dlatego też, Twierdzenie 5.4 jest słuszne jeśli zastąpimy S_n przez A_n i $n \geq 4$ (z takim samym dowodem).

Zatem dla dowolnej grupy permutacji znamy już 4 reprezentacje nieprzywiedlne.

(1) trywialna, (1-wymiarowa),

(2) sgn, (1-wymiarowa),

(3) standardowa, ($d-1$-wymiarowa),

(4) sgn$\times$standardowa, ($d-1$-wymiarowa).

Dla małych n niektóre z nich się pokrywają: Dla S_2, (1)=(4), (2)=(3). Dla S_3, (3)=(4).

Począwszy od S_4, wszystkie cztery reprezentacje są różne.

5.8 Lematy Schura

Twierdzenie 5.5 (Pierwszy Lemat Schura) *Niech $(\pi, \mathcal{V})$ będzie nieprzywiedlną unitarną reprezentacją G. Niech A splata $(\pi, \mathcal{V})$ z samą sobą. Wtedy $A = c\mathbb{1}$ dla pewnego $c \in \mathbb{C}$.*

Dowód. Niech A będzie niezerowym operatorem splatającym $(\pi, \mathcal{V})$ z sobą. A^* też splata. Jeden z operatorów $A + A^*$ i $\mathrm{i}(A - A^*)$ jest niezerowy i oba splatają. Zatem można założyć, że A jest samosprzężony. Jeśli A nie jest równy $\lambda\mathbb{1}$, to znaczy, że istnieją $\lambda_1 \neq \lambda_2$ w spektrum A. Załóżmy dla uproszczenia, że $\dim \mathcal{V} < \infty$. Wtedy $\mathrm{Ker}(A - \lambda_1)$ jest nietrywialną podprzestrzenią niezmienniczą, co jest sprzecznością. □

Twierdzenie 5.6 (Drugi Lemat Schura) *Niech $(\pi, \mathcal{V}_\pi)$, $(\rho, \mathcal{V}_\rho)$ będą nieprzywiedlnymi unitarnymi reprezentacjami G. Jeśli istnieje $A \neq 0$ splatający $(\pi, \mathcal{V}_\pi)$ z $(\rho, \mathcal{V}_\rho)$, to $(\pi, \mathcal{V}_\pi)$ jest unitarnie równoważna $(\rho, \mathcal{V}_\rho)$.*

Dowód. Niech $A \neq 0$. $A^*A \neq 0$ splata $(\pi, \mathcal{V}_\pi)$ z sobą. Dlatego $A^*A = \lambda_1\mathbb{1}$, $\lambda_1 \neq 0$. Podobnie, AA^* splata $(\rho, \mathcal{V}_\rho)$ z sobą. Dlatego $AA^* = \lambda_2\mathbb{1}$. Mamy $\lambda_1^2\mathbb{1} = A^*AA^*A = \lambda_2 A^*A = \lambda_2\lambda_1\mathbb{1}$. Zatem $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$. Więc $U := \lambda^{-\frac{1}{2}}A$ jest unitarny. □

5.9 Iloczyn tensorowy I

Najpierw wprawadźmy iloczyn tensorowy w "naiwny" sposób.

Oznaczmy bazę kanoniczną $\mathbb{C}^n$ przez e_i, $i = 1, \ldots, n$, zaś bazę kanoniczną $\mathbb{C}^m$ przez f_j, $j = 1, \ldots, m$. Przestrzeń $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ można zdefiniować jako $\mathbb{C}^{nm}$ z bazą $e_i \otimes f_j$, $i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$. Czyli elementy $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ są postaci $\sum_{i,j=1}^n t_{ij} e_i \otimes f_j$.

Jeśli $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$, $w = \sum_{j=1}^m w_j f_j$, to kładziemy

$$v \otimes w := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m v_i w_j e_i \otimes f_j.$$

Niech A będzie operatorem na $\mathbb{C}^n$ a B operatorem na $\mathbb{C}^m$. Przez $A \otimes B$ rozumiemy operator na $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$, którego macierz jest równa

$$(A \otimes B)_{ij,kl} = A_{ik} B_{jl}.$$

Jeśli A i B są unitarne/hermitowskie, to $A \otimes B$ też.

5.10 Iloczyn tensorowy II

Wprowadźmy teraz iloczyn tensorowy w sposób niezależny od bazy. Niech $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ będą przestrzeniami. Dla uproszczenia, będziemy zakładać, że są skończenie wymiarowe.

Niech $\mathcal{Z}$ będzie przestrzenią skończonych kombinacji liniowych wektorów (v, w), $v \in \mathcal{V}$, $w \in \mathcal{W}$. W przestrzeni tej wyróżniamy podprzestrzeń $\mathcal{Z}_0$ rozpiętą na wektorach

$$\begin{aligned} (\lambda v, w) - \lambda(v, w), &\qquad (v, \lambda w) - \lambda(v, w), \\ (v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w), &\qquad (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2). \end{aligned}$$

Definiujemy $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W} := \mathcal{Z}/\mathcal{Z}_0$. Jeśli $v\in\mathcal{V}$, $w\in\mathcal{W}$, to definiujemy $v\otimes w := (v,w)+\mathcal{Z}_0$.

$\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$ jest przestrzenią wektorową. $\otimes$ jest działaniem spełniającym warunki

$$\begin{aligned} (\lambda v)\otimes w = \lambda v\otimes w, &\qquad v\otimes(\lambda w) - \lambda v\otimes w, \\ (v_1+v_2)\otimes w - v_1\otimes w - v_2\otimes w, &\qquad v\otimes(w_1+w_2) - v\otimes w_1 - v\otimes w_2. \end{aligned}$$

Wektory postaci $v\otimes w$ nazywają się *tensorami prostymi*. Nie są to wszystkie wektory w $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$, ale rozpinają $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$.

Pokażmy, że powyższa definicja jest rółnoważna definicji "naiwnej".

Twierdzenie 5.7 *Jeśli e_i, $i=1,\dots,n$ jest bazą w $\mathcal{V}$, zaś f_j, $j=1,\dots,m$ bazą w $\mathcal{W}$, to $e_i\otimes f_j$, $i=1,\dots,n, j=1,\dots,m$. jest bazą w $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$.*

Dowód. Latwo sprawdzamy, że $e_i\otimes f_j$ rozpinają $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$. Trzeba pokazać ich liniową niezależność. Niech

$$\sum_{i,j} t^{ij} e_i\otimes f_j = 0. \tag{5.15}$$

Niech $e^1,\dots,e^n$ będzie bazą dualną do $e_1,\dots,e_n$, tzn

$$\langle e^i|e_j\rangle = \delta^i_j.$$

Podobnie, niech $f^1,\dots,f^m$ będzie bazą dualną do $f_1,\dots,f_m$. Zdefiniujmy funkcjonał p^{ij} na $\mathcal{Z}$ wzorem

$$\langle p^{ij}|(v,w)\rangle = \langle e^i|v\rangle\langle f^j|w\rangle.$$

Sprawdzamy, że $p^{ij}=0$ na $\mathcal{Z}_0$. Zatem p^{ij} jest dobrze określony na $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W} = \mathcal{Z}/\mathcal{Z}_0$. Stosując p^{ij} do (5.15) dostajemy $t^{ij}=0$. $\Box$

Twierdzenie 5.8 *Jeśli $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ są przestrzeniami Hilberta, to $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$ posiada jedyny iloczyn skalarny taki, że*

$$(v_1\otimes w_1|v_2\otimes w_2) = (v_1|v_2)(w_1|w_2). \tag{5.16}$$

Jeśli e_i, $i=1,\dots,n$ jest bazą ortonormalną w $\mathcal{V}$, zaś f_j, $j=1,\dots,m$ bazą ortonormalną w $\mathcal{W}$, to $e_i\otimes f_j$, $i=1,\dots,n, j=1,\dots,m$. jest bazą ortonormalną w $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$.

Dowód. Najpierw sprawdzamy, że jeśli iloczyn skalarny o własności (5.16) istnieje, to część twierdzenia o bazach ortonormalnych musi być prawdziwa. $\Box$

Twierdzenie 5.9 *Niech A będzie operatorem na $\mathcal{V}$ i B operatorem na $\mathcal{W}$. Wtedy istnieje dokładnie jeden operator $A\otimes B$ na $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$ taki, że*

$$(A\otimes B)v\otimes w := (Av)\otimes(Bw).$$

Dowód. Wystarczy zdefiniować $A \otimes B$ w bazie:

$$(A \otimes B)e_i \otimes f_j := (Ae_i) \otimes (Bf_j).$$

□

Niech $(\pi, \mathcal{V})$, $(\rho, \mathcal{W})$ będą reprezentacjami. *Iloczynem tensorowym tych reprezentacji* nazywamy reprezentację $\pi \otimes \rho$ w przestrzeni $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$

$$(\pi \otimes \rho)(g) = \pi(g) \otimes \rho(g).$$

Zauważmy, że $m\pi$ jest równoważne $\pi \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{C}^m}$.

5.11 Reprezentacja grupy permutacji

Twierdzenie 5.10 *Dla $\sigma \in S_n$ istnieje dokładnie jeden operator $\Theta(\sigma) \in L(\otimes^n \mathcal{V})$, dla którego*

$$\Theta(\sigma)v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = v_{\sigma^{-1}1} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}n}.$$

$$S_n \ni \sigma \mapsto \Theta(\sigma) \in L(\mathcal{V}^{\otimes n})$$

jest reprezentacją.

Dowód. Wystarczy wybrać bazę $e_1, \ldots, e_m$ w $\mathcal{V}$ i położyć

$$\Theta(\sigma)e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} = e_{i_{\sigma^{-1}1}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma^{-1}n}}$$

To definiuje jednoznacznie operator $\Theta(\sigma)$.

Pokażmy, że $\Theta(\pi)\Theta(\sigma) = \Theta(\pi\sigma)$. Niech $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{V}$ i $w_i := v_{\sigma^{-1}i}$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\Theta(\pi)\Theta(\sigma)v_1 \otimes \cdots \otimes v_n &= \Theta(\pi)w_1 \otimes \cdots \otimes w_n \\
&= w_{\pi^{-1}1} \otimes \cdots \otimes w_{\pi^{-1}n} \\
&= v_{\sigma^{-1}\pi^{-1}1} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}\pi^{-1}n} \\
&= v_{(\pi\sigma)^{-1}1} \otimes \cdots \otimes v_{(\pi\sigma)^{-1}n}.
\end{aligned}$$

Jeśli $\mathcal{V}$ jest przestrzenią Hilberta, jest to reprezentacja unitarna.

Jest to reprezentacja przywiedlna. W szczególności, można podać rzuty ortogonalne na podprzestrzenie na których reprezentacja jest trywialna i znakową:

$$\begin{aligned}
\Theta_{\mathrm{s}}^n &:= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \Theta(\sigma), \\
\Theta_{\mathrm{a}}^n &:= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\sigma\Theta(\sigma).
\end{aligned}$$

Kładziemy $\otimes_{\mathrm{s/a}}^n \mathcal{V} := \Theta_{\mathrm{s/a}}^n \otimes^n \mathcal{V}$.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\Theta^2_{\mathrm{s}} &:= \frac{1}{2}(\mathbb{1}+\Theta(\tau)),\\ \Theta^2_{\mathrm{a}} &:= \frac{1}{2}(\mathbb{1}-\Theta(\tau)).\end{aligned}$$

Zatem $\mathbb{1} = \Theta^2_{\mathrm{s}} + \Theta^2_{\mathrm{a}}$. Czyli każdy 2-tensor można rozłożyć na część symetryczną i antysymetryczną: $\otimes^2\mathcal{V} = \otimes^2_{\mathrm{s}}\mathcal{V} \oplus \otimes^2_{\mathrm{a}}\mathcal{V}$.

Jeśli $t \in \otimes^n\mathcal{V}$, to

$$t = \sum t_{i_1,\dots,i_n} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned}\Theta_{\mathrm{s}} t &= \sum t_{(i_1,\dots,i_n)} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n},\\ \Theta_{\mathrm{a}} t &= \sum t_{[i_1,\dots,i_n]} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n},\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}t_{(i_1,\dots,i_n)} &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} t_{i_{\sigma i},\dots,i_{\sigma n}},\\ t_{[i_1,\dots,i_n]} &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}\sigma\, t_{i_{\sigma i},\dots,i_{\sigma n}}.\end{aligned}$$

Mamy

$$\dim \otimes^n_{\mathrm{s}}\mathbb{C}^d = \frac{(d+n-1)!}{(d-1)!n!}, \quad \dim \otimes^n_{\mathrm{s}}\mathbb{C}^d = \frac{n!}{d!(n-d)!}.$$

5.12 Charaktery

Załóżmy, że π jest reprezentacją na skończenie wymiarowej przestrzeni $\mathcal{V}$. Charakterem reprezentacji π nazywamy funkcję na G równą

$$\chi_\pi(g) := \mathrm{Tr}\pi(g).$$

Mamy $\dim\mathcal{V} = \chi_\pi(e)$,

$$\begin{aligned}\chi_\pi(g) &= \chi_\pi(hgh^{-1}), \quad g,h\in G;\\ \chi_{\pi\oplus\rho} &= \chi_\pi + \chi_\rho,\\ \chi_{n\pi} &= n\chi_\pi,\\ \chi_{\pi\otimes\rho} &= \chi_\pi\chi_\rho,\\ \chi_{\overline{\pi}} &= \overline{\chi}_\pi,\\ \chi_{\otimes^2_{\mathrm{s}}\pi} &= \frac{1}{2}\left(\chi_\pi(g)^2 + \chi_\pi(g^2)\right);\\ \chi_{\otimes^2_{\mathrm{a}}\pi} &= \frac{1}{2}\left(\chi_\pi(g)^2 - \chi_\pi(g^2)\right).\end{aligned}$$

6 Reprezentacje grup skończonych

W tej sekcji wszystkie grupy są skończone.

6.1 Unitaryzowalność

Twierdzenie 6.1 *Niech G będzie grupą skończoną a $(\rho, \mathcal{V}_\rho)$ jej reprezentacją. Wtedy istnieje iloczyn skalarny na $\mathcal{V}_\rho$ taki, że ρ jest reprezentacją unitarną.*

Dowód. Wybierzmy dowolny iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot)_0$ w $\mathcal{V}_\rho$. Wtedy

$$(v|w) := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} (\rho(g)v|\rho(g)w)_0$$

jest też iloczynem skalarnym. Mamy

$$(\rho(h)v|\rho(h)w) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} (\rho(gh)v|\rho(gh)w)_0 = (v|w).$$

Zatem ρ jest reprezentacją unitarną. □

Stąd wniosek, że każda reprezentacja grupy skończonej w skończenie wymiarowej przestrzeni jest całkowici rozkładalna.

6.2 Relacje ortogonalności

Unitarna równoważność reprezentacji jest relacją równoważności. Przez $\hat{G}$ będziemy oznaczali zbiór klas abstrakcji reprezentacji nieprzywiedlnych względem tej relacji. W praktyce dla każdego elementu $\hat{G}$ wybierzemy reprezentanta $(\pi, \mathcal{V}_\pi)$. Wybierzemy również bazę ortonormalną $e_{\pi,1}, \ldots, e_{\pi,d_\pi}$, gdzie $d_\pi := \dim \mathcal{V}_\pi$. Możemy wtedy zapisać π jako macierz

$$[\pi_{ij}(g)]_{i,j=1,\ldots,d_\pi}, \quad g \in G.$$

Czyli

$$\pi_{ij}(g) = (e_{\pi,i}|\pi(g)e_{\pi,j}).$$

Mamy też charaktery nieprzywiedlne

$$\chi_\pi(g) := \sum_{i=1}^{d_\pi} \pi_{ii}(g) = \mathrm{Tr}\pi(g)$$

W $l^2(G)$ będziemy używać iloczynu skalarnego

$$(f|f') := \frac{1}{\#G} \sum \overline{f(g)} f'(g).$$

Twierdzenie 6.2 *Niech $\pi, \pi' \in \hat{G}$.*

$$(\pi_{ij}|\pi'_{km}) = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\overline{\pi_{ij}(g)}\pi'_{km}(g) \quad = \quad \frac{1}{d_\pi}\delta_{\pi,\pi'}\delta_{ik}\delta_{jm}, \tag{6.17}$$

$$(\chi_\pi|\chi_{\pi'}) = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\overline{\chi_\pi(g)}\chi_{\pi'}(g) \quad = \quad \delta_{\pi,\pi'}. \tag{6.18}$$

Lemat 6.3 *Niech π, π' będą reprezentacjami. Niech H będzie operatorem z $\mathcal{V}_{\pi'}$ do $\mathcal{V}_\pi$. Zdefiniujmy*

$$\langle H\rangle := \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\pi(g^{-1})H\pi'(g).$$

Wtedy $\langle H\rangle$ splata π' i π. W szczególności, jeśli π, π' są nieprzywiedlne, to $\langle H\rangle$ jest niezerowe jedynie, gdy są one równoważne i wtedy (przyjmując, że $\mathcal{V}_\pi = \mathcal{V}_{\pi'}$) mamy

$$\langle H\rangle = \frac{\mathrm{Tr}H}{d_\pi}1\!\!1_{\mathcal{V}_\pi}. \tag{6.19}$$

Dowód.

$$\begin{aligned}\pi(h)\langle H\rangle &= \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\pi(hg^{-1})H\pi'(g)\\ &= \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\pi((gh^{-1})^{-1})H\pi'(gh^{-1})\pi'(h) \;=\; \langle H\rangle\pi'(h).\end{aligned}$$

Następnie stosujemy Lemat Schura. Pokażmy na koniec (6.19). Wiemy, że $\langle H\rangle = c1\!\!1_{\mathcal{V}_\pi}$. Zatem

$$cd_\pi = \mathrm{Tr}\langle H\rangle = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}\pi(g^{-1})H\pi(g) = \mathrm{Tr}H.$$

□

Dowód Twierdzenia 6.2 Stosujemy Lemat 6.3 do $H = |e_{\pi,j})(e_{\pi',m}|$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\pi(g^{-1})|e_{\pi,j})(e_{\pi',m}|\pi'(g) &= \frac{1}{d_\pi}1\!\!1_{\mathcal{V}_\pi}\delta_{\pi,\pi'}\mathrm{Tr}|e_{\pi j})(e_{\pi,m}|\\ &= \frac{1}{d_\pi}1\!\!1_{\mathcal{V}_\pi}\delta_{\pi,\pi'}\delta_{jm}.\end{aligned}$$

Następnie obkładamy obie strony przez $(e_{\pi,i}|\cdots|e_{\pi',k})$, dostając (6.17). Aby pokazać (6.18), liczymy:

$$(\chi_\pi|\chi_{\pi'}) \;=\; \sum_{i=1}^{d_\pi}\sum_{j=1}^{d_{\pi'}}(\pi_{ii}|\pi'_{jj}) = \delta_{\pi\pi'}\sum_{i=1}^{d_\pi}(\pi_{ii}|\pi_{ii}) = \delta_{\pi\pi'}\frac{d_\pi}{d_\pi}.$$

□

6.3 Rozkład reprezentacji

Niech $(\rho, \mathcal{W})$ będzie reprezentacją grupy G na przestrzeni wymiaru d_ρ. Wiemy, że

$$\rho \simeq \underset{\pi \in \hat{G}}{\oplus} m_\pi \pi. \tag{6.20}$$

Zatem

$$d_\rho = \sum_{\pi \in \hat{G}} m_\pi d_\pi. \tag{6.21}$$

Jeśli ρ jest reprezentacją unitarną, to można założyć, że suma (6.20) jest ortogonalna. Mamy też rozkład przestrzeni $\mathcal{W}$ na sumę prostą ortogonalną $\mathcal{W} = \underset{\pi \in \hat{G}}{\oplus} \mathcal{W}_\pi$ taki, że $\rho\Big|_{\mathcal{W}_\pi}$ jest równoważna $m_\pi \pi$, oraz rzuty ortogonalne Q_π na $\mathcal{W}_\pi$. Oczywiście, $\mathcal{W}_\pi = \mathrm{Ran} Q_\pi$,

$$\sum_{\pi \in \hat{G}} Q_\pi \quad = \quad \mathbb{1}, \quad Q_\pi^* = Q_\pi, \quad Q_\pi Q_{\pi'} = Q_\pi \delta_{\pi\pi'}.$$

Pokażemy, że liczby m_π, podprzestrzenie $\mathcal{W}_\pi$ i rzuty Q_π są wyznaczone jednoznacznie. Pokażemy, jak je łatwo znajdować.

Pamiętamy, że charakter ρ jest zdefiniowany jako $\chi_\rho(g) := \mathrm{Tr}\rho(g)$, $g \in G$.

Twierdzenie 6.4 *Dla* $\pi \in \hat{G}$

$$\begin{aligned} m_\pi &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \overline{\chi_\pi(g)} \chi_\rho(g) && (6.22) \\ &= (\chi_\pi | \chi_\rho), && (6.23) \\ Q_\pi &= \frac{d_\pi}{\#G} \sum_{g \in G} \overline{\chi_\pi(g)} \rho(g). && (6.24) \end{aligned}$$

Dowód. Niech ρ spełnia (6.20). Wtedy

$$\rho = \sum m_\pi \rho_\pi.$$

Następnie relacja ortogonalności charakterów implikuje (6.22).

Możemy znaleźć bazę ortonormalną w $\mathcal{W}_\pi$ $e_{\pi,i,p}$, $i = 1, \ldots, d_\pi$, $p = 1, \ldots, m_\pi$ taką, że

$$\rho(g) e_{\pi,i,p} = \sum_{j=1}^{d_\pi} \pi_{ji}(g) e_{\pi,j,p}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{d_\pi}{\#G} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{\pi'}(g)} \rho(g) e_{\pi,i,p} &= \frac{d_\pi}{\#G} \sum_{g \in G} \sum_{k=1}^{d_{\pi'}} \sum_{j=1}^{d_\pi} \overline{\pi'_{kk}(g)} \pi_{ji}(g) e_{\pi,j,p} \\ &= \delta_{\pi,\pi'} \sum_{k,j=1}^{d_\pi} \delta_{kj} \delta_{ki} e_{\pi,j,p} \;=\; \delta_{\pi,\pi'} e_{\pi,i,p}. \end{aligned}$$

6.4 Reprezentacja regularna

Jeśli grupa G działa na zbiorze X, to wiąże się z tym unitarna reprezentacja grupy G na przestrzeni $l^2(X)$ zadana przez

$$\lambda(g)f(x) := f(g^{-1}x), \quad g \in G, \ x \in X.$$

W szczególności, rozważmy $X = G$. Iloczyn skalarny w $l^2(G)$ normalizujemy

$$(f|f') := \frac{1}{\#G} \sum \overline{f(g)} f'(g).$$

Dostajemy reprezentację na $l^2(G)$ zwaną *(lewą) reprezentacją regularną*. Mamy też *prawą reprezentację regularną*

$$\rho(g)f(h) := f(hg), \quad g, h \in G.$$

Twierdzenie 6.5 (1) $\lambda \simeq \underset{\pi\in\hat{G}}{\oplus} d_\pi \pi$.

(2) $\#G = \sum_{\pi\in\hat{G}} d_\pi^2$. *Funkcje* $\sqrt{d_\pi}\pi_{ij}$ *stanowią bazę ortonormalną w* $l^2(G)$.

Dowód. Charakter reprezentacji regularnej jest równy

$$\chi_\lambda(g) = \#G \ \delta_e(g).$$

Stąd

$$m_\pi = (\chi_\lambda|\chi_\pi) = \chi_\pi(e) = d_\pi.$$

To pokazuje (1), z którego na mocy (6.21) wynika (2).

Wiemy, że $\{\sqrt{d_\pi}\pi_{ij} \ : \ \pi \in \hat{G}, \ i, j = 1, \dots, d_\pi\}$ stanowią układ ortonormalny. (2) oznacza, że liczba jego elementów równa jest wymiarowi $l^2(G) = \#G$. Zatem jest to baza ortonormalna. □

6.5 Liczba reprezentacji nieprzywiedlnych

Twierdzenie 6.6 *Liczba klas sprzężoności jest równa liczbie reprezentacji nieprzywiedlnych.*

Dowód. Niech $l^2_{\mathrm{cent}}(G)$ będzie podprzesterzenią $l^2(G)$ składającą się z funkcji stałych na klasach sprzężoności. Wiemy, że χ_π, $\pi \in \hat{G}$, stanowią układ ortonormalny w $l^2_{\mathrm{cent}}(G)$. Pokażemy, że jest to baza ortonormalna.

Najpierw zauważmy, że z Lematu 6.3 wynika, że

$$\langle \pi(g) \rangle = \frac{\chi_\pi(g)}{d_\pi} 1\!\!1_{\mathcal{V}_\pi}. \tag{6.25}$$

Niech $f \in l^2_{\mathrm{cent}}(G)$.

$$f(g) \quad = \quad \sum_{\pi\in\hat{G}} \sum_{i,j}^{d_\pi} f_{\pi,ij}\pi_{ij}(g)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \sum_{\pi \in \hat{G}} \sum_{i,j}^{d_\pi} f_{\pi,ij} \pi_{ij}(hgh^{-1}) \\
&= \sum_{\pi \in \hat{G}} \sum_{i,j}^{d_\pi} f_{\pi,ij} (e_{\pi,i} | \langle \pi(g) \rangle e_{\pi,j}) \\
&= \sum_{\pi \in \hat{G}} \sum_{i}^{d_\pi} f_{\pi,ii} \frac{\chi_\pi(g)}{d_\pi},
\end{aligned}
$$

gdzie w ostatnim kroku skorzystaliśmy z (6.25). Zatem $l^2_{\mathrm{cent}}(G)$ jest rozpięte przez χ_π, $\pi \in \hat{G}$. $\square$

7 Algebry łączne

7.1 Definicja

Niech $\mathfrak{A}$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$. Mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest *algebrą* jeśli jest wyposażona w działanie

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \ni (A, B) \mapsto AB \in \mathfrak{A}$$

spełniające

$$
\begin{aligned}
&A(B + C) = AB + AC, \quad (B + C)A = BA + CA, \\
&(\alpha\beta)(AB) = (\alpha A)(\beta B).
\end{aligned}
$$

Jeśli w dodatku

$$A(BC) = (AB)C,$$

to mówimy, że jest to *algebra łączna.* (W praktyce, skracamy nazwę, przez *algebrę* rozumiejąc algebrę łączną).

Mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest *algebrą przemienną* gdy $A, B \in \mathfrak{A}$ implikuje $AB = BA$.

Centrum algebry $\mathfrak{A}$ jest zdefiniowane jako

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{A}) = \{A \in \mathfrak{A} \ : \ AB = BA, \ B \in \mathfrak{A}\}.$$

7.2 Podalgebry

Ustalmy algebrę $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ nazywmy *podalgebrą* gdy jest to podprzestrzeń liniowa i $A, B \in \mathfrak{B} \Rightarrow AB \in \mathfrak{B}$. Oczywiście, podalgebra jest również algebrą.

Jeśli rodzina $\mathfrak{B}_\alpha \subset \mathfrak{A}$ składa się z podalgebr, to $\cap_\alpha \mathfrak{B}_\alpha$ jest też podalgebrą. Dlatego, dla dowolnego podzbioru $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ istnieje najmniejsza podalgebra zawierająca $\mathfrak{B}$. Oznaczamy ją przez $\mathrm{Alg}(\mathfrak{B})$ i nazywamy *podalgebrą generowaną przez* $\mathfrak{B}$.

Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$. Oczywiście, zbiór liniowych odwzorowań w $\mathcal{V}$, oznaczany przez $L(\mathcal{V})$, jest algebrą.

Podalgebry w $L(\mathcal{V})$ nazywane są *konkretnymi algebrami.*

7.3 Identyczność

Identyczność algebry $\mathfrak{A}$ to element $\mathbb{1} \in \mathfrak{A}$ taki, że

$$A = \mathbb{1}A = A\mathbb{1}, \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Każda algebra ma najwyżej jedną identyczność. W rzeczy samej, jeśli $\mathbb{1}_1, \mathbb{1}_2$ są identycznościami, to

$$\mathbb{1}_1 = \mathbb{1}_1\mathbb{1}_2 = \mathbb{1}_2.$$

Mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest *unitalna* albo *z jedynką*, jeśli posiada identyczność. W dalszym ciągu, dla $\lambda \in \mathbb{C}$ będziemy po prostu pisać λ zamiast $\lambda\mathbb{1}$.

Zawsze można do algebry $\mathfrak{A}$ dołączyć jedynkę. Dostajemy wtedy algebrę $\mathfrak{A}_{\mathbf{1}}$, jako przestrzeń wektorow równą $\mathfrak{A} \oplus \mathbb{C}$ z działaniem

$$(A, \lambda)(B, \mu) := (AB + \lambda B + \mu A, \lambda\mu).$$

7.4 Idempotenty

$P \in \mathfrak{A}$ nazywa się *idempotentem* gdy $P^2 = P$. $P\mathfrak{A}P$ jest podalgebrą zwaną *algebrą zredukowaną*.

Identyczność jest idempotentem.

Idempotent P nazywa się *minimalnym* gdy $P\mathfrak{A}P$ jest jednowymiarowa.

7.5 Sumy proste

Jeśli $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ są algebrami, możemy zdefiniować $\mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_2$.

Jeśli $\mathfrak{A}$ jest algebrą i $P \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$ jest idempotentem, to oczywiście $P\mathfrak{A} = P\mathfrak{A}P$ jest podalgebrą. $\mathfrak{A}$ jest naturalnie izomorficzna z $P\mathfrak{A} \oplus (1 - P)\mathfrak{A}$.

7.6 Homomorfizmy

Niech $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ będą algebrami. Odwzorowanie $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ nazywa się *homomorfizmem* gdy jest liniowe i zachowuje mnożenie, to znaczy

(1) $\phi(\lambda A) = \lambda\phi(A)$;

(2) $\phi(A + B) = \phi(A) + \phi(B)$;

(3) $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$.

Jeśli ϕ jest homomorfizmem i P jest idempotentem, to $\phi(P)$ jest idempotentem.

Homomorfizm $\mathfrak{A}$ w $L(\mathcal{V})$ jest nazywany *reprezentacją* $\mathfrak{A}$ *na* $\mathcal{V}$.

Jeśli $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ są algebrami unitalnymi i $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ jest homomorfizmem, mówimy, że ϕ jest *unitalny* gdy

$$\phi(\mathbb{1}_{\mathfrak{A}}) = \mathbb{1}_{\mathfrak{B}}.$$

7.7 Lewa regularna reprezentacja

Regularna reprezentacja

$$\mathfrak{A} \ni A \mapsto \lambda(A) \in L(\mathfrak{A})$$

jest zdefiniowana przez

$$\lambda(A)B := AB, \quad A, B \in \mathfrak{A}.$$

Jeśli $\mathfrak{A}$ jest unitalna, to λ jest injektywna. Jeśli $\mathfrak{A}$ nie jest unitalna, to λ może być rozszerzona do reprezentacji

$$\mathfrak{A} \ni A \mapsto \lambda_{\mathbf{1}}(A) \in L(\mathfrak{A}_{\mathbf{1}})$$

w oczywisty sposób. $\lambda_{\mathbf{1}}$ jest injektywna.

W obu przypadkach widzimy, że każda algebra jest izomorficzna z konkretną algebrą.

7.8 Ideały

$\mathfrak{B}$ jest *lewym ideałem* algebry $\mathfrak{A}$ jeśli jest liniową podprzestrzenią w $\mathfrak{A}$ i $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B} \Rightarrow AB \in \mathfrak{B}$. Podobnie definiujemy prawy ideał.

Jeśli $A \in \mathfrak{A}$, to $\mathfrak{A}A$ jest lewym ideałem

$\mathfrak{B}$ nazywa się *ideałem dwustronnym*, lub po prostu *ideałem*, gdy jest lewym i prawym ideałem.

Mówimy, że ideał $\mathfrak{I}$ jest *właściwy* gdy $\mathfrak{I} \neq \mathfrak{A}$. Mówimy, że ideał $\mathfrak{I}$ jest *nietrywialny* gdy $\mathfrak{I} \neq \mathfrak{A}$ i $\mathfrak{I} \neq \{0\}$.

Twierdzenie 7.1 *Jądro homomorfizmu jest ideałem. Jeśli $\mathfrak{I}$ jest ideałem w $\mathfrak{A}$, to $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ ma naturalną strukturę algebry. Odwzorowanie*

$$\mathfrak{A} \ni A \mapsto A + \mathfrak{I} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{I}$$

jest homomorfizmem, którego jądro jest równe $\mathfrak{I}$.

Algebra, która nie posiada nietrywialnych ideałów i jest różna od $\mathbb{K}$ z zerowym iloczynem nazywa się algebrą prostą.

7.9 Przykłady podalgebr w $L(\mathbb{K}^n)$

(1) Algebra górnotrójkątna.

(2) Algebra nil-górnotrójkątna.

(3) Algebra blokowa $L(\mathbb{K}^{p_1}) \oplus \cdots \oplus L(\mathbb{K}^{p_k})$, $n = p_1 + \cdots p_k$.

(4) Algebra $L(\mathbb{K}^p) \otimes \mathbb{1}_q$, $n = pq$.

(5) Lewa regularna reprezentacja $L(\mathbb{K}^{d_1}) \oplus \cdots \oplus L(\mathbb{K}^{d_k})$ działa w $L(\mathbb{K}^n)$ dla $n = d_1^2 + \cdots d_k^2$.

7.10 $*$-algebry

Załóżmy, że $\mathbb{K}$ jest $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$.

Definicja 7.2 *Mówimy, że algebra $\mathfrak{A}$ jest* $*$-algebrą *gdy jest wyposażona w antyliniowe odwzorowanie $\mathfrak{A} \ni A \mapsto A^* \in \mathfrak{A}$ takie, że $(AB)^* = B^*A^*$, $A^{**} = A$ i $A \neq 0$ implikuje $A^*A \neq 0$. $*$ nazywa się* inwolucją.

Mówimy, że ideał $\mathfrak{I}$ jest $*$-ideałem, *gdy jest $*$-niezmienniczy.*

Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią Hilberta. Zbiór operatorów ograniczonych na $\mathcal{V}$, oznaczany $B(\mathcal{V})$ ze sprzężeniem hermitowskim tworzy $*$-algebrę. Każda podalgebra w $B(\mathcal{V})$ niezmiennicza względem $*$ jest też $*$-algebrą.

Definicja 7.3 *$*$-Algebry takie są zwane* konkretnymi $*$-algebrami.

Definicja 7.4 *Jeśli $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ są $*$-algebrami, to homomorfizm $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ spełniający $\pi(A^*) = \pi(A)^*$ nazywa się* $*$-homomorfizmem. *(Również definiujem* $*$-izomorfizmy, $*$-automorfizmy,*, etc.)*

Twierdzenie 7.5 *Każda skończenie wymiarowa zespolona $*$-algebra $\mathfrak{N}$ jest $*$-izomorficzna z*

$$\bigoplus_{i=1}^{k} B(\mathbb{C}^{p_i}).$$

W szczególności, $\mathfrak{N}$ posiada jedynkę i $*$ pokrywa się ze zwykłym sprzężeniem hermitowskim .

Zdefiniujmy $\dim(\mathfrak{N}) = [p_1, \dots, p_k]$. $\mathfrak{N}$ jest przemienna jeśli p_i są równe 1 lub 0.

Niech P_i będzie rzutem na $L(\mathbb{C}^{p_i})$. Centrum algebry $\mathfrak{N}$ składa się z elementów postaci

$$\sum_i c_i P_i, \quad c_i \in \mathbb{C}.$$

P_i są nazywane *minimalnymi rzutami centralnymi.*

Mówimy, że $P \in \mathfrak{A}$ jest rzutem ortogonalnym, jeśli $P = P^2$ i $P = P^*$. Mówimy, że U jest częściową izometrią, jeśli $UU^*UU^* = UU^*$ i $U^*UU^*U = U^*U$. Wtedy rzuty ortogonalne U^*U i UU^* nazywamy rzutem początkowym i końcowym.

7.11 Reprezentacje skończenie wymiarowych $*$-algebr

Lemat 7.6 *Niech $\phi : L(\mathbb{C}^p) \to L(\mathbb{C}^n)$ będzie unitalnym $*$- homomorfizmem. Wtedy $n = qp$, $q \in \mathbb{N}$, i ϕ jest unitarnie równoważny homomorfizmowi*

$$L(\mathbb{C}^p) \ni A \mapsto A \otimes 1\!\!1_q \in L(\mathbb{C}^p \otimes \mathbb{C}^q).$$

Dowód. Niech $e_1, \dots, e_p$ będzie bazą w $\mathbb{C}^p$. $L(\mathbb{C}^p)$ jest rozpięta przez częściowe izometrie $|e_i)(e_j|$. Niech $q := \mathrm{Tr}\phi\,(|e_1)(e_1|)$ i niech $f_{11}, \dots, f_{1q}$ będzie bazą w $\mathrm{Ran}\phi\,(|e_1)(e_1|)$. Niech $f_{ij} := \phi\,(|e_i)(e_1|)\, f_{1j}$. Wtedy $f_{i1}, \dots, f_{iq}$ stanowią bazę w $\mathrm{Ran}\phi\,(|e_i)(e_i|)$. Mamy

$$|e_1)(e_1| + \dots + |e_p)(e_p| = 1\!\!1_p.$$

Zatem
$$\phi\left(|e_1)(e_1|\right) + \cdots + \phi\left(|e_p)(e_p|\right) = \mathbb{1}_n.$$
Więc f_{ij}, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$ stanowią bazę w $\mathbb{R}^n$. Oczywiście
$$\phi\left(|e_i)(e_j|\right) f_{kl} = \delta_{jk} f_{il}.$$

□

Twierdzenie 7.7 *Każda unitalna reprezentacja algebry* $\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} L(\mathbb{C}^{p_i})$ *na* $\mathbb{C}^n$ *jest unitarnie równoważna reprezentacji w* $\oplus_{i=1}^k \mathbb{C}^{p_i} \otimes \mathbb{C}^{q_i}$
$$\phi(A_1, \ldots, A_k) := \oplus_{i=1}^k A_i \otimes \mathbb{1}_{q_i}.$$
Mamy $n = \sum_{i=1}^k p_i q_i$ *oraz* $q_i = \frac{1}{p_i} \mathrm{Tr}\phi(P_i)$.

Dla reprezentacji regularnej mamy $p_i = q_i$. W szczególności, w tym wypadku
$$n = \sum_i p_i^2.$$

7.12 $*$-homomorfizmy skończenie wymiarowych $*$-algebr

Niech $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$ będą skończenie wymiarowymi $*$-algebrami. Niech $P_1, \ldots$, $Q_1, \ldots$ będą minimalnymi rzutami centralnymi $\mathfrak{N}$ i odpowiednio $\mathfrak{M}$.

Każdy homomorfizm $\alpha : \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$, gdzie $\dim \mathfrak{N} = [n_1, \ldots, n_p]$, $\dim \mathfrak{M} = [m_1, \ldots, m_q]$, określony jest przez macierz $[t_{ij}]$, gdzie $i = 1, \ldots, q$, $j = 1, \ldots, p$ i
$$\sum_j t_{ij} n_j \leq m_i.$$
Mamy $=$ zamiast $\leq$ jeśli α jest unitalna. Będziemy pisać $\mathrm{Diag}(\alpha) = [t_{ij}]$. Mamy $t_{ij} = \mathrm{Tr} Q_i \phi(P_j)$.

8 Algebra grupowa

8.1 Algebra grupowa

Niech G będzie skończoną grupą. Przez $C(G)$ będziemy oznaczali zbiór funkcji zespolonych na G. Jest on rozpięty przez funkcje δ_g, $g \in G$,
$$\delta_g(h) := \begin{cases} 1, & g = h, \\ 0, & g \neq h. \end{cases}$$
Czasami zamiast δ_g pisze się po prostu g.

$C(G)$ jest wyposażone w dwa łączne iloczyny: mnożenie punktowe i splot:
$$\begin{aligned} FG(g) &:= F(g)G(g), \\ F * G(g) &:= \sum_h F(gh^{-1})G(h). \end{aligned}$$

Mamy również inwolucję

$$F^*(g) := \overline{F(g^{-1})}. \tag{8.26}$$

Twierdzenie 8.1 *$C(G)$ ze splotem i sprzężeniem (8.26) jest $*$-algebrą.*

Dowód. Niech $F \in C(G)$ będzie różne od zera. Liczymy

$$F^* * F(g) = \sum_{h \in G} \overline{F(hg^{-1})} F(h).$$

W szczególności,

$$F^* * F(e) = \sum_{h \in G} = |F(h)|^2 \neq 0.$$

Zatem $F^* F \neq 0$. □

Mamy naturalne zanurzenie $G \in g \mapsto \delta_g \in C(G)$, przy czym mnożenie przechodzi na splot:

$$\delta_g * \delta_h \quad := \quad \delta_{gh}.$$

Niech π będzie reprezentacją G na $\mathcal{V}$. Wtedy istnieje dokładnie jedna reprezentacja $\tilde{\pi} : C(G) \to L(\mathcal{V})$ spełniająca

$$\tilde{\pi}(\delta_g) := \pi(g).$$

Jeśli reprezentacja jest unitarna, to $\tilde{\pi}$ jest $*$-reprezentacją.

W przyszłości będziemy po prostu pisać π zamiast $\tilde{\pi}$.

8.2 Postać algebry splotowej

Zdefiniujmy reprezentację $\phi := \underset{\pi \in \hat{G}}{\oplus} \pi$. Rozszerza się ona do reprezentacji algebry splotowej spełniającej

$$\begin{aligned} \phi(\delta_g) \quad &:= \quad \underset{\pi \in \hat{G}}{\oplus} \pi(g) \\ &= \quad \underset{\pi \in \hat{G}}{\oplus} \sum_{i,j=1}^{d_\pi} \pi_{ij}(g) |e_{\pi,i})(e_{\pi,j}| \end{aligned}$$

Twierdzenie 8.2 *ϕ jest $*$-izomorfizmem*

$$\phi : C(G) \to \underset{\pi \in \hat{G}}{\oplus} L(\mathcal{V}_\pi) \subset L\left(\underset{\pi \in \hat{G}}{\oplus} \mathcal{V}_\pi \right).$$

Dowód. Oczywiste jest, że $|e_{\pi,i})(e_{\pi,j}|$, $i, j = 1, \ldots, d_\pi$, $\pi \in \hat{G}$ rozpinają $\underset{\pi \in \hat{G}}{\oplus} L(\mathcal{V}_\pi)$. Ale $\phi^{-1}\left(|e_{\pi,i})(e_{\pi,j}|\right)(g) = \pi_{ij}(g)$, które jak pokazaliśmy, stanowią bazę $l^2(G)$. □

Niech $\mathbb{1}_\pi$ oznacza rzut na $\mathcal{V}_\pi$. Niech

$$C_{\text{cent}}(G) := \{F \in C(G) \ : \ F(ghg^{-1}) = F(h), \quad h, g \in G\}$$

Innymi słowy, $C_{\text{cent}}(G)$ składa się z funkcji stałych na klasach sprzężoności grupy G.

Twierdzenie 8.3 *$C_{\text{cent}}(G)$ jest centrum algebry splotowej $C(G)$. Jest rozpięte przez $\phi^{-1}(\mathbb{1}_\pi)$, $\pi \in \hat{G}$. Mamy*

$$\mathbb{1}_\pi \quad = \quad \phi\left(\frac{d_\pi}{\#G}\sum_{g\in G}\overline{\chi_\pi(g)}\delta_g\right).$$

Dowód. Niech $F = \sum_{h\in G} F_h\delta_h$ należy do centrum $C(G)$. Wtedy

$$\delta_g F = F\delta_g.$$

Zatem

$$\delta_g F\delta_{g^{-1}} = F.$$

To oznacza, że

$$\sum_{h\in G} F_{g^{-1}hg}\delta_h = \sum_h F_h\delta_h.$$

To pokazuje, że F jest stałe na klasach sprzężoności. □

Grupa $\mathbb{Z}_n$ ma reprezentacje z charakterami

$$\chi_m(k) = \mathrm{e}^{\frac{ikm2\pi}{n}}, \quad k \in \mathbb{Z}_n,\ m \in \hat{\mathbb{Z}}_n \simeq \mathbb{Z}_n.$$

Odpowiadające im rzuty centralne to

$$\mathbb{1}_m = \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}_n} \mathrm{e}^{-\frac{ikm2\pi}{n}}\delta_k.$$

Grupa S_n ma reprezentację trywialną/znakową z charakterem $\chi_{\mathrm{s}}(\sigma) = 1/\chi_{\mathrm{a}} = \mathrm{sgn}\sigma$ i rzutem centralnym

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{\mathrm{s}} &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\delta_\sigma,\\
\mathbb{1}_{\mathrm{a}} &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}\sigma\delta_\sigma.
\end{aligned}$$

Ma również reprezentacje standardową, dla której $\chi_{\mathrm{st}}(\sigma)$ jest równe liczbie punktów stałych -1 oraz znakową×standardową z rzutami centralnymi

$$\frac{n-1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\chi_{\mathrm{st}}(\sigma)\delta_\sigma,$$
$$\frac{n-1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}\sigma\chi_{\mathrm{st}}(\sigma)\delta_\sigma.$$

8.3 Reprezentacja regularna

Rozważmy lewą reprezentację regularną λ grupy G na $l^2(G)$. Rozszerza się ona do reprezentacji $\lambda : C(G) \to L(l^2(G))$.

Twierdzenie 8.4 *W poniższym wzorze z lewej F, F' są traktowane jako elementy $l^2(G)$, z prawej, jako elementy algebry $C(G)$:*

$$(F|F') = \tfrac{1}{(\#G)^2}\mathrm{Tr}\lambda\left((F^* * F')\delta_e\right).$$

Dowód. Mamy $(\delta_g^* * \delta_{g'})\delta_e = \delta_e\delta_{g,g'}$. Dlatego też

$$\begin{aligned}
(F|F') &= \sum_{\pi\in\hat{G}} \frac{d_\pi}{\#G}(F|F')\mathrm{Tr}\pi(\delta_e) \\
&= \sum_{\pi\in\hat{G}} \frac{d_\pi}{(\#G)^2} \sum_{g,g'\in G} \overline{F(g)}F'(g')\mathrm{Tr}\pi\left((\delta_g^* * \delta_{g'})\delta_e\right) \\
&= \sum_{\pi\in\hat{G}} \frac{d_\pi}{(\#G)^2}\mathrm{Tr}\pi\left((F^* * F')\delta_e\right) \\
&= \frac{1}{(\#G)^2}\mathrm{Tr}\lambda\left((F^* * F')\delta_e\right).
\end{aligned}$$

9 Kwaterniony

9.1 Definicje

Algebra nad $\mathbb{R}$ oznaczana przez $\mathbb{H}$ z bazą $1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ spełniająca relacje

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1, \quad \mathrm{ij} = \mathrm{k}, \quad \mathrm{jk} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{ki} = \mathrm{j},$$

nazywa się algerą *kwaternionów*. Jest wyposażona w $*$ działającą jako

$$1^* = 1, \quad \mathrm{i}^* = -\mathrm{i}, \quad \mathrm{j}^* = -\mathrm{j}, \quad \mathrm{k}^* = -\mathrm{k}.$$

$*$ jest *inwolucją*: $x^{**} = x$, $(xy)^* = y^*x^*$, $x, y \in \mathbb{H}$.

Dla $x \in \mathbb{H}$ kładziemy

$$\mathrm{Re}x := \frac{1}{2}(x + x^*), \quad |x| := \sqrt{x^*x}.$$

(Zauważmy, że x^*x jest zawsze dodatnie rzeczywiste)

Jeśli $x = x_1 + x_\mathrm{i}\mathrm{i} + x_\mathrm{j}\mathrm{j} + x_\mathrm{k}\mathrm{k}$, gdzie $x_1, x_\mathrm{i}, x_\mathrm{j}, x_\mathrm{k} \in \mathbb{R}$, to

$$\mathrm{Re}x = x_1, \qquad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_\mathrm{i}^2 + x_\mathrm{j}^2 + x_\mathrm{k}^2}.$$

Zauważmy, że $|\cdot|$ jest normą na $\mathbb{H}$. Jeśli $x, y \in \mathbb{H}$, to $|xy| = |x||y|$.

$\mathbb{H}$ posiada rzeczywisty iloczyn skalarny

$$\langle x|y\rangle := \mathrm{Re}x^*y = x_1y_1 + x_\mathrm{i}y_\mathrm{i} + x_\mathrm{j}y_j + x_\mathrm{k}y_\mathrm{k}, \quad x, y \in \mathbb{H}.$$

$\mathbb{H}$ ma tę własność, że wszystkie niezerowe elementy są odwracalne. Algebry z tą własnością są zwane *algebrami z dzieleniem.*

Kwaterniony jednostkowe, czyli $\{x \in \mathbb{H} \ : \ |x| = 1\}$ tworzą grupę izomorficzną z $SU(2)$. Grupa automorfizmów kwaternionów jest izomorficzna z $SO(3)$. Każdy automorfizm jest postaci

$$\mathbb{H} \ni x \mapsto uxu^{-1} \in \mathbb{H}, \tag{9.27}$$

gdzie u jest jednostkowym kwaternionem.

9.2 Zanurzanie liczb zespolonych w kwaternionach

Oczywiście, istnieje dokładnie jeden ciągły injektywny homomorfizm $\mathbb{R} \to \mathbb{H}$. Jego obrazem jest centrum algebry $\mathbb{H}$, które identyfikujemy z $\mathbb{R}$.

Ale istnieje wiele ciągłych injektywnych homomorfizmów $\mathbb{C} \to \mathbb{H}$. Aby go ustalić, trzeba wybrać $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ w $\mathbb{H}$. Też go nazywamy i.

Ustalmy homomorfzm $\mathbb{C} \to \mathbb{H}$. $\mathbb{H}$ staje się przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{C}$ o wymiarze 2. Odwzorowanie

$$\mathbb{H} \ni x \mapsto \frac{1}{2}(x - \mathrm{i}x\mathrm{i}) \in \mathbb{C} \tag{9.28}$$

jest rzutem. $\mathbb{H}$ ma zespolony półtoraliniowy iloczyn skalarny

$$(x|y) := \frac{1}{2}(yx^* - \mathrm{i}yx^*\mathrm{i}) \tag{9.29}$$

(W rzeczy samej, na mocy (9.28), wartości tego iloczynu skalarnego są w $\mathbb{C}$. Rachunek

$$\begin{aligned} (x|zy) &= \frac{1}{2}(zyx^* - \mathrm{i}zyx^*\mathrm{i}) = z(x|y), \\ (zx|y) &= \frac{1}{2}(yx^*\overline{z} - \mathrm{i}yx^*\overline{z}\mathrm{i}) = (x|y)\overline{z}, \quad z \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

pokazuje, że (9.28) jest półtoraliniowy.

$1, \mathrm{j}$ jest przykładem bazy ortonormalnej w $\mathbb{H}$ ze względu na (9.29).

9.3 Macierzowa reprezentacja kwaternionów

Kwaterniony mogą być reprezentowane przez macierze Pauliego pomnożone przez i:

$$\pi(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \pi(\mathrm{i}) = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix}, \quad \pi(\mathrm{j}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pi(\mathrm{k}) = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}.$$

W ten sposób dostajemy reprezentację kwaternionów w przestrzeni Hilberta $\mathbb{C}^2$

$$\pi : \mathbb{H} \to B(\mathbb{C}^2). \tag{9.30}$$

W tej reprezentacji,

$$\pi(x^*) = \pi(x)^*, \quad |x| = \sqrt{\det \pi(x)}. \tag{9.31}$$

Mamy
$$\pi(\mathbb{H}) = \{\lambda U \ : \ U \in SU(2), \quad \lambda \in [0, \infty[\}.$$

Inną użyteczną relacją, która zależy od powyższej reprezentacji jest

$$\pi(\mathbb{H}) = \{A \in B(\mathbb{C}^2) \ : \ A = R\overline{A}R^{-1}\}, \tag{9.32}$$

gdzie $\overline{A}$ oznacza zwykłe zespolone sprzężenie macierzy A i $R = \pi(\mathrm{j})$. Zauważmy, że $R\overline{R} = -\mathbb{1}$.

Zastępując (9.30) przez $W\pi(\cdot)W^*$ dla jakiegoś unitarnego W, zastępujemy R przez $R_W := WR\overline{W}^*$. Zauważmy, że mamy też $R_W\overline{R}_W = -\mathbb{1}$.

Jeśli $A \in L(\mathbb{H}^n)$, to możemy zdefiniować *wyznacznik kwaternionowy* jako

$$\det A := \det \pi(A),$$

gdzie z prawej strony mamy zwykły wyznacznik (w sensie macierzy zespolonej). Zauważmy, że $\det AB = \det A \det B$. $\det A$ nie zależy od zanurzenia $\mathbb{C}$ w $\mathbb{H}$ i ma zawsze wartość rzeczywistą ≥ 0.

9.4 Rzeczywiste proste algebry

Dobrze wiadomo, że można sklasyfikować wszystkie proste skończenie wymiarowe algebry nad $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$. Przypadek zespolony jest szczególnie łatwy:

Twierdzenie 9.1 *Niech $\mathfrak{A}$ będzie zespoloną skończenie wymiarową algebrą prostą. Wtedy istnieje $n \in \mathbb{N}$ taki, że $\mathfrak{A}$ jest izomorficzny do $L(\mathbb{C}^n)$.*

Odpowiadająca temu klasyfikacja rzeczywista jest bardziej skomplikowana:

Twierdzenie 9.2 *Niech $\mathfrak{A}$ będzie rzeczywistę skończenie wymiarową algebrą prostą. Wtedy istnieje $n \in \mathbb{N}$ taki, że $\mathfrak{A}$ jest izomorficzna z $L(\mathbb{C}^n)$, $L(\mathbb{R}^n)$ lub $L(\mathbb{H}^n)$.*

W szczególności, można zanurzyć $L(\mathbb{R}^n)$ w $L(\mathbb{C}^n)$:

$$L(\mathbb{R}^n) = \{A \in L(\mathbb{C}^n) \ : \ A = \overline{A}\}.$$

$L(\mathbb{H}^n)$ można zanurzyć w $L^2(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^n)$. wtedy

$$L(\mathbb{H}^n) = \{A \in L(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^n) \ : \ RA = \overline{A}R\},$$

gdzie $R = \pi(\mathrm{j}) \otimes \mathbb{1}$.

9.5 Kwaternionowe przestrzenie wektorowe

Mówimy, że $(\mathcal{V}, +, 0, -)$ jest *kwaternionową przestrzenią wektorową*, gdy jest to grupa abelowa wyposażona w działania

$$\mathbb{H} \times \mathcal{V} \ni (x, v) \mapsto xv \in \mathcal{V}, \quad \mathcal{V} \times \mathbb{H} \ni (v, x) \mapsto vx \in \mathcal{V},$$

takie, że

$$(x+y)v = xv + yv, \quad (xy)v = x(yv), \quad x, y \in \mathbb{H}, \quad v \in \mathcal{V}.$$

$$v(x+y) = vx + vy, \quad v(xy) = (vx)y, \quad x, y \in \mathbb{H}, \quad v \in \mathcal{V}.$$

Przykładem kwaternionowych przestrzeni są $\mathbb{H}^n$. Kwaternionowe przestrzenie wektorowe izomorficzne z $\mathbb{H}^n$ nazywamy *przestrzeniami wymiaru n*

Transformacje $\mathbb{H}$-liniowe z prawej/z lewej na kwaternionowej przestrzeni wektorowej mają oczywistą definicję. Zbiór transformacji $\mathbb{H}$-liniowych z prawej z $\mathcal{V}$ do $\mathcal{W}$ oznaczamy przez $L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Jak zwykle $L(\mathcal{V}) := L(\mathcal{V}, \mathcal{V})$.

Transformacje z $L(\mathbb{H}^n, \mathbb{H}^m)$ można w oczywisty sposób reprezentować macierzami $m \times n$ o elementach kwaternionowych.

Niech $\mathcal{V}$ będzie kwaternionową przestrzenią wektorową. $\mathbb{R}$-liniowe odwzorowanie

$$\mathcal{V} \ni v \mapsto f(v) \in \mathbb{H}$$

jest antyliniowe z prawej/z lewej gdy

$$f(v\lambda) = f(v)\lambda^* \ / \ f(\lambda w) = \lambda^* f(v), \quad v \in \mathcal{V}, \quad \lambda \in \mathbb{H}.$$

Mówimy, że

$$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \ni (v, w) \mapsto (v|w) \in \mathbb{H}$$

jest *kwaternionową formą hermitowską* jeśli jest ono anty-liniowe z prawej ze względu na pierwszy argument i liniowe ze względu na drugi argument i

$$(v|w) = (w|v)^* \tag{9.33}$$

Jeśli zamiast (9.33) mamy

$$(v|w) = -(w|v)^* \tag{9.34}$$

Mówimy, że jest ona *antyhermitowska.*

Formę hermitowską spełniającą $(v|v) \geq 0$ nazywamy *dodatnio określoną.* Jeśli jest w dodatku niezdegenerowana, nazywamy ją *kwaternionowym iloczynem skalarnym.* Każda skończenie wymiarowa przestrzeń kwaternionowa z kwaternionowym iloczynem skalarnym jest izomorficzna z $\mathbb{H}^n$ i

$$\langle v|w\rangle := \sum v_i^* w_i, \quad v, w \in \mathbb{H}^n.$$

Kwaternionowy i zespolony iloczyn skalarny są ze sobą zgodne: $\langle x|y\rangle = \mathrm{Re}(x|y)$.

Jeśli ustalimy zanurzenie (9.28), wtedy kwaternionowe przestrzenie wektorowe można zreinterpretować jako zespolone przestrzenie wektorowe, zaś kwaternionowe przestrzenie Hilberta jako zespolone przestrzenie Hilberta

Jeśli $\mathcal{V}$ jest kwaternionową przestrzenią wektorową, to $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ będzie oznaczało $\mathcal{V}$ rozumianą jako zespoloną przestrzeń. Będzie ona zwana *zespoloną formą przestrzeni $\mathcal{V}$.*

10 Reprezentacje zespolone, rzeczywiste i kwaternionowe

10.1 Reprezentacja zespolenie sprzężona

Załóżmy, że mamy reprezentację π na przestrzeni $\mathbb{C}^n$. Reprezentację sprzężoną do π nazywamy reprezentację $\overline{\pi}$ zadaną przez

$$\overline{\pi}(g) := \overline{\pi(g)}.$$

Niewątpliwie, definicja ta zależy od wyboru bazy. Zależność ta nie jest jednak zbyt istotna. Jeśli zmienimy bazę, dostaniemy reprezentację równoważną.

10.2 Przestrzeń zespolenie sprzężona

Można do zagadnienia reprezentacji sprzężonej podejść w bardziej abstrakcyjny sposób, który jest jawnie niezależny od bazy.

Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią zespoloną. *Przestrzeń zespolenie sprzężona do* $\mathcal{V}$ jest oznaczona przez $\overline{\mathcal{V}}$ i jest to jakakolwiek ustalona przestrzeń zespolona wyposażona w odwzorowanie antyliniowe

$$\mathcal{V} \ni v \mapsto \overline{v} \in \overline{\mathcal{V}}. \tag{10.35}$$

Odwzorowanie odwrotne również oznaczamy przez kreskę, tak że mamy $\overline{\overline{v}} = v$. Odwzorowanie (10.35) nazywamy *sprzężeniem zespolonym.*

Jeśli $A \in L(\mathcal{V})$, to $\overline{A} \in L(\overline{\mathcal{V}})$ jest zdefiniowany przez

$$\overline{A} := \overline{A\overline{v}} \tag{10.36}$$

Jeśli $\mathcal{V}$ ma iloczyn skalarny, to $\overline{\mathcal{V}}$ też:

$$(\overline{v}|\overline{w}) := \overline{(v|w)}.$$

W praktyce, przestrzeń $\overline{\mathcal{V}}$ realizujemy na różne sposoby. Kanonicznym sposobem jest konstrukcja następująca. Jako grupa abelowa $\overline{\mathcal{V}}$ pokrywa się z $\mathcal{V}$. Odwzorowanie identycznościowe jest oznaczone przez

$$\mathcal{V} \ni v \mapsto \overline{v} \in \overline{\mathcal{V}}. \tag{10.37}$$

Jedyna różnica między $\mathcal{V}$ i $\overline{\mathcal{V}}$ to mnożenie przez $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\lambda\overline{v} := \overline{\overline{\lambda}v}.$$

Powyższa konstrukcja jest dość abstrakcyjna i dlatego w praktyce nie jest zbyt często używana. Często wolimy bardziej konkretne podejście. W podejściu tym punktem wyjściowym jest odwzorowanie antyliniowe κ na $\mathcal{V}$ spełniające $\kappa^2 = \mathbb{1}$. Takie odwzorowanie nazywamy *sprzężeniem zespolonym wewnętrznym.* Wtedy $\overline{\mathcal{V}}$ i $\mathcal{V}$ pokrywają się jako przestrzenie zespolone, natomiast $\overline{v}$ utożsamiamy z κv.

W szczególności, załóżmy, że $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$. Wtedy mamy oczywiste sprzężenie zespolone, $\overline{v} := \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n$. Jeśli operator na $\mathbb{C}^n$ reprezentujemy macierzą, to sprzężenie zespolone w sensie (10.36) daje macierz zespolenie sprzężoną w naiwnym sensie.

Jeśli $(\pi, \mathcal{V})$ jest reprezentacją grupy G, to *reprezentacją sprzężoną* nazywamy reprezentację $(\overline{\pi}, \overline{\mathcal{V}})$

$$\overline{\pi}(g) := \overline{\pi(g)}.$$

10.3 Reprezentacje zespolone

Jak dotychczas, G jest grupą skończoną a $\mathcal{V}$ przestrzenią zespoloną.

Mówimy, że κ jest operatorem antyunitarnym, jeżeli jest antyliniowy, odwracalny i

$$\overline{(v|w)} = (\kappa v|\kappa w).$$

Oczywiście, jeśli $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$, to operatory antyunitarne pokrywają się z operatorami postaci $\kappa v = U\overline{v}$, gdzie U jest unitarny.

Niech $\pi : G \to \mathcal{V}$ będzie unitarną reprezentacją nieprzywiedlną. Mówimy, że jest ona zespolona, jeśli reprezentacja $\overline{\pi}$ nie jest równoważna reprezentacji π. Równoważna definicja: nie istnieje operator antyunitarny κ taki, że $g \mapsto \kappa\pi(g)\kappa^{-1}$ jest równoważna z π.

Załóżmy, że π nie jest zespolona. Niech κ będzie operatorem antyunitarnym takim, że $\kappa\pi\kappa^{-1} \sim \pi$. Wtedy κ^2 jest unitarny i splata π z sobą. Zatem z Lematu Schura, $\kappa^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathbb{1}$. Mamy

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\kappa = \kappa\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \kappa^3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\kappa.$$

Zatem $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} = 1$. Mówimy, że π jest rzeczywista, jeśli $\kappa^2 = \mathbb{1}$ i kwaternionowa, jeśli $\kappa^2 = -\mathbb{1}$

Jeśli $\mathcal{V}$ nie jest przestrzenią Hilberta, a tylko skończenie wymiarową przestrzenią zespoloną, to, jak wiemy, można zunitaryzować reprezentację. W definicji zaś, można zastąpić słowo "antyunitarny" przez "niezerowy antyliniowy". Sprawdźmy, że $(\kappa\overline{v}|\kappa\overline{w})$ jest iloczynem skalarnym zachowanym przez $\overline{\pi}$:

$$(\kappa\overline{\overline{\pi}(g)v}|\kappa\overline{\overline{\pi}(g)w}) = (\kappa\pi(g)\overline{v}|\kappa\pi(g)\overline{w}) = (\pi(g)\kappa\overline{v}|\pi(g)\kappa\overline{w}) = (\kappa\overline{v}|\kappa\overline{w}).$$

Wiemy, że $\overline{\pi}$ jest reprezentacją nieprzywiedlną. Dlatego ma jednoznacznie ustalony, z dokładnością do czynnika, iloczyn skalarny, dla którego $\overline{\pi}$ jest unitarna. Prosty rachunek

$$(\overline{\pi}(g)v|\overline{\pi}(g)w) = (\overline{\pi(g)\overline{v}} \mid \overline{\pi(g)\overline{w}}) = \overline{(\pi(g)\overline{v}|\pi(g)\overline{w})} = \overline{(\overline{v}|\overline{w})}$$

pokazuje, że takim lioczynem skalarnym jest również $\overline{(\overline{v}|\overline{w})}$. Zatem, dla pewnej stałej $\lambda > 0$,

$$\overline{(\overline{v}|\overline{w})} = \lambda(\kappa\overline{v}|\kappa\overline{w}).$$

Stąd, $\sqrt{\lambda}\kappa$ jest antyunitarny.

Jeśli reprezentacja jest rzeczywista, reprezentację można obciąć do przestrzeni $\mathcal{V}^\kappa := \{v \in \mathcal{V} : \kappa v = v\}$ dostając reprezentację nieprzywiedlną na rzeczywistej przestrzeni. Jeśli reprezentacja jest kwaternionowa lub zespolona, nie posiada żadnej nietrywialnej rzeczywistej podprzestrzeni niezmienniczej.

Jeśli reprezentacja jest kwaternionowa, możemy nadać przestrzeni strukturę prawej przestrzeni kwaternionowej kładąc $\mathrm{j} := \kappa$ i $\mathrm{k} := \mathrm{i}\kappa$. Dostajemy reprezentację kwaternionową. Jest to niemożliwe w przypadku rzeczywistym i zespolonym.

Twierdzenie 10.1 (Twierdzenie Frobeniusa i Schura) *Niech π będzie reprezentacją nieprzywiedlną grupy skończonej G. Wtedy*

$$\frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\chi_\pi(g^2) = \begin{cases} 1 & \textit{jeśli } \pi \textit{ jest rzeczywiste,} \\ 0 & \textit{jeśli } \pi \textit{ jest zespolone,} \\ -1 & \textit{jeśli } \pi \textit{ jest kwaternionowe.} \end{cases}$$

Dowód.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\chi_\pi(g^2) &= \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\sum_{i=1}^{d_\pi}\pi_{ii}(g^2)\\ &= \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\sum_{i,j=1}^{d_\pi}\pi_{ij}(g)\pi_{ji}(g)\\ &= \sum_{i,j=1}^{d_\pi}(\overline{\pi}_{ij}|\pi_{ji}).\end{aligned}$$

Dla zespolonej reprezentacji jest to równe zero z relacji ortogonalności.

W przypadku rzeczywistym bądź kwaternionowym dostajemy

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j,p,q=1}^{d_\pi}\kappa_{ip}\overline{\kappa}_{qj}(\pi_{pq}|\pi_{ji})\\ =\ &\frac{1}{d_\pi}\sum_{i,j,p,q=1}^{d_\pi}\kappa_{ip}\overline{\kappa}_{qj}\delta_{pj}\delta_{qi} = \frac{\mathrm{Tr}\kappa^2}{d_\pi} = \pm 1.\end{aligned}$$

□

Dla grupy $\mathbb{Z}_n$ wszystkie reprezentacje są zespolone z wyjątkiem reprezentacji odpowiadającej 0 oraz $n/2$ jeśli n jest parzyste.

Reprezentacja grupy kwaternionowej $\{\pm 1, \pm \mathrm{i}, \pm \mathrm{j}, \pm \mathrm{k}\}$, w $\mathbb{C}^2$ jest kwaternionowa.

11 Elementy krystalografii

11.1 Grupy punktowe

Grupą punktową nazywamy skończoną podgrupę $O(n)$. Mówimy, że jest ona chiralna, jeśli jest podgrupą $SO(n)$.

W wymiarze 2 mamy

(1) grupy cykliczne C_n, $n = 1, 2, \ldots$ (chiralne) abstrakcyjnie izomorficzne z $\mathbb{Z}_n$,

(2) dihedralne D_n, $n = 1, 2, \ldots$, abstrakcyjnie izomorficzne z $\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$,

W wymiarze 3 mamy 7 serii

(1) grupy cykliczne (chiralne) C_n, $n = 1, 2, \ldots$, abstrakcyjnie izomorficzne z $\mathbb{Z}_n$.

(2) $C_{n\mathrm{h}} = C_n \times D_1$, $n = 1, 2, \ldots$, (D_1 horyzontalna), abstrakcyjnie izomorficzne z $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$,

(3) grupy generowana przez obrót z odbiciem, S_{2m}, $m = 1, \ldots$, abstrakcyjnie izomorficzne z $\mathbb{Z}_{2m}$,

(4) grupy piramidalne lub biradialne $C_{n\mathrm{v}} = C_n \rtimes D_1$, $n = 2, 3, \ldots$, (D_1 wertykalna), abstrakcyjnie izomorficzne z D_n,

(5) grupy dihedralne (chiralne) $D_n = C_n \rtimes C_2$, $n = 2, 3, \ldots$,

(6) grupy pryzmatyczne $D_{n\mathrm{h}} = C_n \rtimes D_2 = D_n \times D_1$, $n = 2, 3, \ldots$, abstrakcyjnie izomorficzne z $D_n \times \mathbb{Z}_2$,

(7) grupy antypryzmatyczne $D_{n\mathrm{d}}$, $n = 2, 3, \ldots$, abstrakcyjnie izomorficzne z D_{2n}, zawierają osie $2n$-krotne,

i 7 grup dodatkowych:

(1) chiralna grupa tetraedralna T,

(2) pełna grupa tetraedralna T_d,

(3) grupa pirytoedralna $T_\mathrm{h} \simeq T \times S_2$,

(4) chiralna grupa oktaedralna O,

(5) pełna grupa oktaedralna $O_\mathrm{h} \simeq O \times S_2$,

(6) chiralna grupa ikosaedralna I,

(7) pełna grupa ikosaedralna $I_\mathrm{h} \simeq I \times S_2$,

T jest podgrupą O.

T_d i T_h są podgrupami O_h.

S_2 jest grupą składającą się z identyczności i symetrii środkowej.

$C_{1\mathrm{h}}(= C_{1\mathrm{v}} = D_1)$ jest grupą składającą się z identyczności i obrotu o $180°$.

$C_{2\mathrm{h}}(= D_{1\mathrm{d}})$, izomorficzna z $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, jest generowana przez odbicie i obrót o $180°$ w osi prostopadłej.

$C_{2\mathrm{v}}(= D_{1\mathrm{h}})$, izomorficzna z $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, jest generowana przez odbicia w dwóch prostopadłych płaszczyznach.

Na uwagę też zasługuje $D_{2\mathrm{h}}$, izomorficzna z $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, generowana przez odbicia w 3 prostopadłych płaszczyznach

11.2 Sieci

Siecią nazywamy dyskretną podgrupę $\mathbb{R}^n$. Jeśli dla sieci $\mathcal{L}$ istnieje zwarty podzbiór $K \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $\mathcal{L} + K = \mathbb{R}^n$, to mówimy, że jest to sieć krystalograficzna.

Twierdzenie 11.1 *Niech $\mathcal{L}$ będzie siecią w $\mathbb{R}^n$. Wtedy istnieją liniowo niezależne wektory $e_1, \ldots, e_d$, $d \leq n$, takie, że $\mathcal{L} = \{m_1 e_1 + \cdots + m_d e_d \ : \ (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{Z}^d\}$. Sieć jest krystalograficzna wtedy i tylko wtedy gdy $d = n$.*

Grupa automorfizmów sieci $\mathbb{Z}^d$ jest izomorficzna z $GL(\mathbb{Z}^d)$, czyli macierzami o elementach całkowitych i wyznaczniku ± 1.

11.3 Punktowe grupy krystalograficzne

Mówimy, że grupa punktowa jest krystalograficzna, jeśli istnieje sieć krystalograficzna niezmiennicza względem tej grupy. Twierdzenie o ograniczeniu krystalograficznym mówi, że punktowe grupy krystalograficzne w wymiarze 2 i 3 to te grupy punktowe, które posiadają osie 1,2,3,4 lub 6-krotne.

W wymiarze 2 mamy 10 punktowych grup krystalograficznych

(1) C_1, C_2, C_3, C_4, C_6,

(2) D_1, D_2, D_3, D_4, D_6.

W wymiarze 3 mamy 32 punktowych grup krystalograficznych

(1) C_1, C_2, C_3, C_4, C_6,

(2) $C_{1\mathrm{h}}, C_{2\mathrm{h}}, C_{3\mathrm{h}}, C_{4\mathrm{h}}, C_{6\mathrm{h}}$,

(3) $C_{2\mathrm{v}}, C_{3\mathrm{v}}, C_{4\mathrm{v}}, C_{6\mathrm{v}}$,

(4) D_2, D_3, D_4, D_6.

(5) $D_{2\mathrm{h}}, D_{3\mathrm{h}}, D_{4\mathrm{h}}, D_{6\mathrm{h}}$,

(6) $D_{2\mathrm{d}}, D_{3\mathrm{d}}$,

(7) S_2, S_4, S_6,

(8) $T, T_{\mathrm{d}}, T_{\mathrm{h}}, O, O_{\mathrm{h}}$.

11.4 Sieci Bravais'go

Każda sieć krystalograficzna $\mathcal{L} \simeq \mathbb{Z}^n$ w przestrzeni euklidesowej w $\mathbb{R}^n$ yznacza grupę punktową $H \subset O(n)$, , która ją zachowuje. Nie każda grupa punktowa jest maksymalną grupą zachowującą sieć: w szczególności musi zawierać inwersję. Sieci posiadające tę samą grupę należą do tego samego systemu sieciowego.

Grupa symetrii takiej sieci na nią działa. Mówimy, że te działania są izomorficzne, jeśli jedno możemy przekształcić na drugie przez zamianę bazy w sieci. Każda zamiana bazy jest zadana przez macierz z $GL(\mathbb{Z}^n)$. Klasę abstrakcji względem izomorficzności działania nazywamy siecią Bravais'go.

W wymiarze 2 mamy 5 sieci Bravais'go zgrupowanych w 4 systemy:

(1) skośna C_2,

(2) prostokątna D_2,

  (i) prostokątna (prostokątna prosta),

  (ii) rombowa (prostokątna centrowana)

(3) kwadratowa D_4,

(4) heksagonalna D_6.

W szczególności, rozważmy grupę D_2. Jest ona generowana przez dwie prostopadłe do siebie odbicia

$$r_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{11.38}$$

W sieci prostokątnej możemy wybrać bazę w $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, tak że r_1, r_2 są zadane poprzez (11.38). W sieci rombowej, bazę wybierzmy jako $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Wtedy działanie D_2 jest zadane przez

$$r_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{11.39}$$

W wymiarze 3 mamy 14 sieci Bravais'go zgrupowanych w 7 systemów. Litery oznaczają rodzaj centrowania.

(1) trójskośna S_2,

(2) jednoskośna $C_{2\mathrm{h}}$,

  (i) P

  (ii) C

(3) rombowa (ortorombiczna) $D_{2\mathrm{h}}$,

  (i) P,

  (ii) C,

  (iii) I,

  (iv) F,

(4) tetragonalna $D_{4\mathrm{h}}$,

  (i) P,

  (ii) I,

(5) romboedralna (trygonalna) $D_{3\mathrm{d}}$

(6) heksagonalna $D_{6\mathrm{h}}$.

(7) regularna (kubiczna) O_{h},

  (i) P,

  (ii) I,

  (iii) F,

11.5 Grupa ruchów euklidesowych

W grupie ruchów euklidesowych $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$ wyróżniamy podgrupę translacji $\mathbb{R}^n$ i podgrupę obrotów niewłaściwych $O(n)$. Mamy kanoniczny homomorfizm $\phi : \mathbb{R}^n \rtimes O(n) \to O(n)$

Niech G będzie podgrupą w $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$. Wtedy $\phi(G) =: H$ jest podgrupą w $O(n)$. Jej jądro jest równe $\mathcal{L} := \mathbb{R}^n \cap G$, podgrupie translacji zawartych w G. Mamy ciąg dokładny

$$1 \to \mathcal{L} \to G \to H \to 1. \tag{11.40}$$

Grupa H działa przez automorfizmy na $\mathcal{L}$. Jest to ogólny fakt, jeśli mamy ciąg dokładny postaci (11.40) w którym $\mathcal{L}$ jest abelowa. Działanie to jest zdefinowane następująco: Jeśli $h \in H$ i $\phi(g) = h$, to

$$\mathcal{L} \ni t \mapsto ht := gtg^{-1}.$$

Jednoznaczność tej definicji dowodzimy korzystając z abelowości $\mathcal{L}$.

Jeśli $G = \mathcal{L} \rtimes H$, mówimy, że G jest symmorficzna.

11.6 Grupy fryzowe

Grupą fryzową nazywamy podgrupę grupy $\mathbb{R}^2 \rtimes O(2)$, której podgrupa translacji jest izomorficzna z $\mathbb{Z}$ i ma skończony indeks. Wyróżniamy następujące grupy fryzowe – po każda jest odpowiednikiem jednej serii grup punktowych w 2 wymiarach.

(1) C_1

- "hop" C_∞, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z}$,

(2) D_1 horyzontalna

- "jump" $C_{\infty\mathrm{h}} = \mathbb{Z} \times D_1$,
- "step" S_∞, grupa generowana przez translację z poślizgiem, izomorficzna z $\mathbb{Z}$,

(3) D_1 wertykalna

- "sidle" $C_{\infty\mathrm{v}} = \mathbb{Z} \rtimes D_1$, , abstrakcyjnie izomorficzna z D_∞,

(4) C_2

- "spinning hop" $D_\infty = \mathbb{Z} \rtimes C_2$,

(5) D_2

- "spinning jump" $D_{\infty\mathrm{h}} = \mathbb{Z} \rtimes D_2$, abstrakcyjnie izomorficzna z $D_\infty \times \mathbb{Z}_2$,
- "spinning sidle"$D_{\infty\mathrm{d}}$, abstrakcyjnie izomorficzna z D_∞.

11.7 Grupy krystalograficzne

Grupą krystalograficzną nazywamy dyskretną podgrupę grupy $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$, dla której istnieje zwarty zbiór $K \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $\bigcup_{g\in G} gK = \mathbb{R}^n$.

Można pokazać, że równoważną definicję: grupa krystalograficzna to podgrupa grupy $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$, której podgrupa translacji jest siecią krystalograficzną, i podgrupa ta ma skończony indeks.

Mówimy, że dwie grupy krystalograficzne są sobie równoważne, gdy istnieje macierz w $GL(n)$ o dodatnim wyznaczniku, względem której te grupy są sprzężone.

Możemy klasyfikować grupy krystalograficzne ze względu na

(1) Grupę obrotów będącą grupą ilorazową przez podgrupę translacji.

(2) Sieć Bravais'go.

11.8 Grupy tapetowe

Grupy krystalograficzne w wymiarze 2 zwane są tapetowymi. Na poniższej liscie podajemy postać grupy w przypadkach symmorficznych. Grupa obrotów determinuje sieć Bravais'go.

(1) sieć skośna, C_1

- $p1$, $\mathbb{Z}^2$,

(2) sieć skośna, C_2

- $p2$, $\mathbb{Z}^2 \rtimes C_2$,

(3) sieć prostokątna, D_1

- pm, $\mathbb{Z}^2_{\text{rect}} \rtimes D_1$,
- pg,

(4) sieć rombowa, D_1

- cm, $\mathbb{Z}^2_{\text{romb}} \rtimes D_1$,

(5) sieć prostokątna, D_2

- pmm, $\mathbb{Z}^2_{\text{rect}} \rtimes D_2$,
- pmg,
- pgg,

(6) sieć rombowa, D_2

- cmm, $\mathbb{Z}^2_{\text{romb}} \rtimes D_2$,

(7) sieć regularna, C_4

- $p4$, $\mathbb{Z}^2_{\text{reg}} \rtimes C_4$,

(8) sieć regularna, D_4

- $p4m$, $\mathbb{Z}^2_{\text{reg}} \rtimes D_4$,
- $p4g$,

(9) sieć heksagonalna, C_3

- $p3$, $\mathbb{Z}^2_{\text{hex}} \rtimes C_3$,

(10) sieć heksagonalna, D_3

- $p3m1$, $\mathbb{Z}^2_{\text{hex}} \rtimes D_3$,
- $p31m$,

(11) sieć heksagonalna, C_6

- $p6$, $\mathbb{Z}^2_{\text{hex}} \rtimes C_6$,

(12) sieć heksagonalna, D_6

- $p6m$, $\mathbb{Z}^2_{\text{hex}} \rtimes D_6$,

11.9 Grupy przestrzenne

Grupy krystalograficzne w wymiarze 3 zwane są przestrzennymi. Jeśli dopuścimy równoważność zmieniającą orientację, to jest ich 219, w tym 54 chiralnych. Jeśli rozróżniamy orientację, to jest ich 230, w tym 65 chiralnych.

Grupy te są poklasyfikowane na klasy krystaliczne zgodnie z ich grupami punktowymi. Klasy te są pogrupowane w klasy krystaliczne.

W większości wypadków, przynaleność do klasy krystalicznej determinuje system sieciowy Bravais'go, o tej samej nazwie. Wyjątkiem jest klasa trygonalna, w której każdej grupie punktowej odpowiadają zarówno grupy krystalograficzne z siecią romboedryczną, jak i z siecią heksagonalną.

(1) trójskośna
   - (i) C_1: P,
   - (ii) S_2: P,

(2) jednoskośna
   - (i) C_2: P, C,
   - (ii) $C_{1\mathrm{h}}$: P, C,
   - (iii) $C_{2\mathrm{h}}$: P, C,

(3) rombowa (ortorombiczna)
   - (i) D_2: P, C, F, I,
   - (ii) $C_{2\mathrm{v}}$: P, C, A, F, I,
   - (iii) $D_{2\mathrm{h}}$: P, C, F, I,

(4) tetragonalna
   - (i) C_4: P, I,
   - (ii) S_4: P, I,
   - (iii) $C_{4\mathrm{h}}$: P, I,
   - (iv) D_4: P, I,
   - (v) $C_{4\mathrm{v}}$: P, I,
   - (vi) $D_{2\mathrm{d}}$: P, I,
   - (vii) $D_{4\mathrm{h}}$: P, I,

(5) trygonalna
   - (i) C_3: P, R,
   - (ii) S_6: P, R,
   - (iii) D_3: P, R,
   - (iv) $C_{3\mathrm{v}}$: P, R,
   - (v) $D_{3\mathrm{d}}$: P, R, :

(6) heksagonalna

(i) C_6: P,
(ii) $C_{3\mathrm{h}}$: P,
(iii) $C_{6\mathrm{h}}$: P,
(iv) D_6: P,
(v) $C_{6\mathrm{v}}$: P,
(vi) $D_{3\mathrm{h}}$: P,
(vii) $D_{6\mathrm{h}}$, P,

(7) regularna (kubiczna)

(i) O_h: P, F, I,
(ii) T: P, F, I,
(iii) T_h: P, F, I,
(iv) O: P, F, I,
(v) T_d: P, F, I,
(vi) O_h: P, F, I.

12 Algebry Liego

12.1 Definicja

Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą nad ciałem $\mathbb{K}$ z działaniem oznaczanym przez

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (A, B) \mapsto [A, B] \in \mathfrak{g}.$$

Mówimy, że $\mathfrak{g}$ jest *algebrą Liego* jeśli jej działnie jest *antysymetryczne*, czyli

$$[A, B] = -[A, B], \quad A, B \in \mathfrak{g},$$

i spełnia *tożsamość Jacobiego*

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

Działanie w algebrze Liego często nazywamy *nawiasem*.

Każda przestrzeń wektorowa z zerowym nawiasem jest algebrą Liego. O takich algebrach Liego mówimy, że są *przemienne*.

Centrum algebry $\mathfrak{g}$ jest zdefiniowane jako

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{A \in \mathfrak{g} \ : \ AB = BA, \ B \in \mathfrak{g}\}.$$

12.2 Algebry łączne a algebry Liego

Niech $\mathfrak{A}$ będzie algebrą łączną nad $\mathbb{K}$. Wtedy $\mathfrak{A}$ ma naturalną strukturę algebry Liego zadaną przez komutator

$$[A, B] := AB - BA.$$

W szczególności, jeśli $\mathcal{V}$ jest przestrzenią wektorową to zbiór liniowych odwzorowań w $\mathcal{V}$, czyli $L(\mathcal{V})$, jest algebrą Liego. $L(\mathcal{V})$ wyposażone w komutator oznaczamy przez $gl(\mathcal{V})$.

12.3 Homomorfizmy

Niech $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$ będą algebrami. Odwzorowanie $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{b}$ nazywa się *homomorfizmem* gdy jest liniowe i zachowuje nawias, to znaczy

(1) $\phi(\lambda A) = \lambda\phi(A)$;

(2) $\phi(A + B) = \phi(A) + \phi(B)$;

(3) $\phi([A, B]) = [\phi(A), \phi(B)]$.

Zbiór automorfizmów algebry $\mathfrak{g}$ oznaczamy przez $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Jest to grupa.

Homomorfizm $\mathfrak{g}$ w $gl(\mathcal{V})$ jest nazywany *reprezentacją* $\mathfrak{g}$ *na* $\mathcal{V}$.

12.4 Reprezentacja dołączona

Reprezentacja dołączona

$$\mathfrak{g} \ni A \mapsto \mathrm{ad}(A) \in gl(\mathfrak{A})$$

jest zdefiniowana przez

$$\mathrm{ad}(A)B := [A, B], \quad A, B \in \mathfrak{g}.$$

Żeby sprawdzić, że jest to reprezentacja, czyli

$$\mathrm{ad}([A, B]) = [\mathrm{ad}(A), \mathrm{ad}(B)]$$

korzystamy z tożsamości Jacobiego.

12.5 Różniczkowania

Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Odwzorowanie liniowe $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ nazywamy *różniczkowaniem* jeśli spełnia *tożsamość Leibniza*:

$$\mathcal{D}[A, B] = [\mathcal{D}A, B] + [A, \mathcal{D}B].$$

Przykładem różniczkowania jest $\mathrm{ad}(C)$ zdefinowany jako

$$\mathrm{ad}(C)A := [C, A].$$

Wynika to z tożsamości Jacobiego. Mówimy, że jest to *różniczkowanie wewnętrzne.*

Oznaczmy przez $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ zbiór różniczkowań algebry $\mathfrak{g}$. Jeśli $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, to $[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2] \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Zatem $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ jest algebrą Liego. $\mathfrak{g} \ni A \mapsto \mathrm{ad}(A) \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ jest homomorfizmem, którego jądrem jest $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Jeśli $\mathcal{D} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ i $A \in \mathfrak{g}$, to $[\mathcal{D}, \mathrm{ad}(A)] = \mathrm{ad}(\mathcal{D}A)$.

Jeśli $\mathbb{R} \ni t \mapsto \sigma_t \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ jest różniczkowalnym homomorfizmem (*jednoparametrową grupą*), to

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma_t(B)\Big|_{t=0} =: \mathcal{D}B \tag{12.41}$$

definiuje różniczkowanie. I na odwrót, jeśli $\mathcal{D}$ jest różniczkowaniem, to

$$\sigma_t(B) := \exp(t\mathcal{D})B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathcal{D}^n B$$

jest jednoparametrową grupą spełniającą (12.41).

Jako przykład rozważmy algebrę przemienną $\mathbb{K}^n$. Wszystkie odwzorowania liniowe $\mathbb{K}^n$ są różniczkowaniami. Nie są one wewnętrzne, poza zerowym. Wszystkie automorfizmy są zadane przez elementy $GL(\mathbb{K}^n)$.

Można pokazać, że w algebrze $gl(\mathbb{K}^n)$ wszystkie różniczkowania są wewnętrzne. Podobnie, wszystkie automorfizmy są postaci $B \mapsto CBC^{-1}$ dla pewnego $C \in GL(\mathbb{K}^n)$.

12.6 Ideały

$\mathfrak{b}$ jest *ideałem* algebry Liego $\mathfrak{g}$, jeśli jest liniową podprzestrzenią w $\mathfrak{g}$ i $A \in \mathfrak{g}$, $B \in \mathfrak{b} \Rightarrow [A, B] \in \mathfrak{b}$. Mówimy, że $\mathfrak{b}$ jest *ideałem charakterystyznym*, gdy dla każdego $\mathcal{D} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, $\mathcal{D}$ przekształca $\mathfrak{b}$ w siebie.

Mówimy, że ideał $\mathfrak{b}$ jest *właściwy* gdy $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{g}$. Mówimy, że ideał $\mathfrak{b}$ jest *nietrywialny* gdy $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{g}$ i $\mathfrak{b} \neq \{0\}$.

Twierdzenie 12.1 *Jądro homomorfizmu jest ideałem. Jeśli $\mathfrak{b}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$, to $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ ma naturalną strukturę algebry Liego. Odwzorowanie*

$$\mathfrak{g} \ni A \mapsto A + \mathfrak{b} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{b}$$

jest homomorfizmem, którego jądro jest równe $\mathfrak{b}$. Jeśli $\mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ jest innym homomorfizmem, którego jądro też jest równe $\mathfrak{b}$, to $\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{b}$.

Twierdzenie 12.2 (1) *Jeśli $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ są ideałami, to $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ i $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ też.*

(2) *Jeśli $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ są ideałami charakterystycznymi, to $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ i $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ też.*

(3) *Jeśli $\mathfrak{a}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{b}$ jest ideałem charakterystycznym w $\mathfrak{a}$, to $\mathfrak{b}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$.*

(4) *Jeśli $\mathfrak{a}$ jest ideałem charakterystycznym w $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{b}$ jest ideałem charakterystycznym w $\mathfrak{a}$, to $\mathfrak{b}$ jest ideałem charakterystycznym w $\mathfrak{g}$.*

(5) *Jeśli $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ są ideałami, to $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ też.*

(6) *Jeśli $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ są ideałami charakterystycznymi, to $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ też.*

(7) *Jeśli $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ jest surjektywnym homomorfizmem, to $\mathfrak{a} \mapsto \phi(\mathfrak{a})$ zadaje bijekcję między ideałami algebry $\mathfrak{g}$ zawierającymi* $\mathrm{Ker}\phi$ *a ideałami algebry $\mathfrak{h}$.*

(8) *Jeśli $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ jest surjektywnym homomorfizmem i* $\mathrm{Ker}\phi$ *jest ideałem charakterystycznym, to $\mathfrak{a} \mapsto \phi(\mathfrak{a})$ zadaje bijekcję między ideałami charakterystycznymi algebry $\mathfrak{g}$ zawierającymi* $\mathrm{Ker}\phi$ *a ideałami charakterystycznymi algebry $\mathfrak{h}$.*

Twierdzenie 12.3 *Centrum jest ideałem charakterystycznym.*

Dowód. Dla $Z \in \mathfrak{z}$, $A \in \mathfrak{g}$ mamy $0 = [A, Z]$. Dlatego

$$0 = [\mathcal{D}A, Z] + [A, \mathcal{D}Z].$$

Stąd $\mathcal{D}Z \in \mathfrak{z}$. □

W przemiennej algebrze Liego $\mathbb{K}^n$ wszystkie podprzestrzenie liniowe są ideałami, ale tylko ideały trywialne są charakterystyczne.

Mówiąc, że

$$\mathfrak{b} \xrightarrow{\phi} \mathfrak{g} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{h}$$

jest ciągiem dokładnym mamy na myśli, że $\mathrm{Ker}\psi = \mathrm{Ran}\phi$.

W szczególności

$$0 \to \mathfrak{b} \xrightarrow{\phi} \mathfrak{g} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{h} \to 0 \tag{12.42}$$

oznacza, że ϕ jest injektywny, ψ jest surjektywny i $\mathrm{Ker}\psi = \mathrm{Ran}\phi$. Wtedy ψ generuje izomorfizm $\mathfrak{g}/\phi(\mathfrak{b})$ z $\mathfrak{h}$. (12.42) nazywamy *krótkim ciągiem dokładnym.* Mówimy, że $\mathfrak{g}$ jest *rozszerzeniem* $\mathfrak{b}$ *poprzez* $\mathfrak{h}$.

Stwierdzenie 12.4 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ *jest ideałem w* $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

Dowód. Niech $\mathcal{D} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, $A, B \in \mathfrak{g}$. Wtedy

$$\mathcal{D}\mathrm{ad}(A) - \mathrm{ad}(A)\mathcal{D} = \mathrm{ad}(\mathcal{D}A).$$

□

Stwierdzenie 12.5 *Niech* $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *będzie homomorfizmem. Wtedy* $\mathrm{Ker}\phi$ *jest ideałem. Poza tym, następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mathrm{Ker}\phi$ *jest ideałem charakterystycznym*

(2) *Jeśli* $\mathcal{D} \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}$, *to* $\phi(A) = \phi(A') \Leftrightarrow \phi(\mathcal{D}A) = \phi(\mathcal{D}A')$.

Dlatego też można wtedy zdefiniować $\phi(\mathcal{D}) \in \mathrm{Der}\mathfrak{h}$ *wzorem* $\phi(\mathcal{D})\phi(A) := \phi(\mathcal{D}A)$. *Mamy homomorfizm algebr Liego* $\phi : \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Der}(\mathfrak{h})$.

12.7 Iloczyn półprosty

Niech $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{h}$ będą algebrami Liego.

Niech $\mathfrak{h} \ni H \mapsto \alpha_H \in \mathrm{Der}(\mathfrak{a})$ będzie homomorfizmem algebr Liego. Wtedy iloczyn półprosty $\mathfrak{a} \rtimes_\alpha \mathfrak{h}$ jest zdefiniowany jako $\mathfrak{a} \times \mathfrak{h}$ z nawiasem

$$[(A_1, H_1), (A_2, H_2)] = ([A_1, A_2] + \alpha_{H_1}(A_2) - \alpha_{H_2}(A_1), [H_1, H_2]) .$$

$\mathfrak{a} \rtimes_\alpha \mathfrak{h}$ jest algebrą Liego. $\{0\} \times \mathfrak{h}$ jest jej podalgebrą Liego, $\mathfrak{a} \times \{0\}$ jest jej ideałem.

Jeśli $\mathfrak{g}$ zawiera podalgebrę $\mathfrak{a}$ i ideał $\mathfrak{h}$ takie, że $\mathfrak{g}$ jest sumą prostą $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{h}$ w sensie przestrzeni wektorowych, to mamy wtedy homomorfizm $\mathfrak{h} \ni H \mapsto [H, \cdot] =: \alpha_H \in \mathrm{Der}(\mathfrak{a})$ i $\mathfrak{g}$ jest izomorficzna z iloczynem półprostym $\mathfrak{a} \rtimes_\alpha \mathfrak{h}$.

Oznaczmy przez $t(\mathbb{K}^n)$ macierze górnotrójkątne, przez $n(\mathbb{K}^n)$ macierze ściśle górnotrójkątne, a przez $d(\mathbb{K}^n)$ macierze diagonalne. Wtedy $n(\mathbb{K}^n)$ jest ideałem charakterystycznym w $t(\mathbb{K}^n)$. $t(\mathbb{K}^n)$ jest iloczynem półprostym $n(\mathbb{K}^n) \rtimes d(\mathbb{K}^n)$. Jeśli $t(\mathbb{K}^n) \supset \mathfrak{a} \supset n(\mathbb{K}^n)$ jest dowolną podprzestrzenią, to jest to też ideał w $t(\mathbb{K}^n)$ (zresztą, charakterystyczny).

12.8 Reprezentacje

Rozważmy reprezentację $\rho : \mathfrak{g} \to gl(\mathcal{V})$. Mówimy, że reprezentacja jest *przywiedlna*, gdy posiada nietrywialną podprzestrzeń niezmienniczą. W przeciwnym razie mówimy, że jest *nieprzywiedlna.*

Mówimy, że reprezentacja jest *rozkładalna*, gdy posiada nietrywialny rozkład na sumę prostą podprzestrzeni niezmienniczych. W przeciwnym razie mówimy, że jest *nierozkładalna.*

Każda reprezentacja rozkładalna jest przywiedlna.

W oczywisty sposób definiujemy *sumę prostą. Iloczyn tensorowy* reprezentacji ρ_1 i ρ_2 działa w $\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2$ i jest równy $\rho_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \rho_2$.

Mówimy, że reprezentacja jest *całkowicie rozkładalna*, gdy istnieje rozkład $\mathcal{V} = \oplus_{j=1}^{n} \mathcal{V}_j$ takie, że reprezentacja ograniczona do $\mathcal{V}_j$ jest nieprzywiedlna.

(Zauważmy następującą niekonsekwencję terminologiczną: reprezentacja nieprzywiedlna jest całkowicie rozkładalna, ale nierozkładalna).

Jeśli $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$ jest podprzestrzenią niezmienniczą, to $\rho_1 := \rho\Big|_{\mathcal{V}_1}$ nazywamy *podreprezentacją* reprezentacji ρ. Mamy również naturalną *reprezentację ilorazową* $\rho^1 : \mathfrak{g} \to L(\mathcal{V}/\mathcal{V}_1)$ zadaną przez $\rho^1(A)(v + \mathcal{V}_1) = \rho(A) + \mathcal{V}_1$. Wybierając bazę w $\mathcal{V}$ tak, by pierwsze wektory należały do $\mathcal{V}_1$, możemy wtedy napisać

$$\rho(A) = \begin{bmatrix} \rho_1(A) & ? \\ 0 & \rho^1(A) \end{bmatrix}.$$

Jeśli istnieje podprzestrzeń niezmiennicza $\mathcal{V}^1$ dopełniająca do $\mathcal{V}_1$, i bazy dostosujemy do rozkładu $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}^1$, to ? znika.

Zauważmy, że jeśli $\mathcal{W}$ jest podprzestrzenią niezmienniczą dla reprezentacji ilorazowej ρ^1, to $\mathcal{W} + \mathcal{V}_1$ jest podprzestrzenią niezmienniczą dla ρ.

Dla każdej reprezentacji skończenie wymiarowej znajdziemy niezerową podprzestrzeń niezmienniczą. Przez indukcję, konstruujemy ciąg przestrzeni niezmienniczych $\{0\} = \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \cdots \subset \mathcal{V}_n = \mathcal{V}$ takich, że reprezentacja ilorazowa na $\mathcal{V}_{n+1}/\mathcal{V}_n$ jest nieprzywiedlna. Ciąg taki nazywamy *ciągiem Jordana-Höldera*. Robimy to indukcyjnie: dla reprezentacji na $\mathcal{V}/\mathcal{V}_n$ szukamy podreprezentacji nieprzywiedlnej.

13 Macierzowe algebry Liego

13.1 Funkcje macierzowe

Rozważmy przestrzeń $\mathbb{K}^n$, gdzie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wprowadźmy w tej przestrzeni normę (jakąkolwiek). Mamy wtedy również normę na $L(\mathbb{K}^n)$. Spełnia one warunki

$$\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|, \quad \|A + B\| \le \|A\| + \|B\|, \quad \|AB\| \le \|A\|\|B\|.$$

Niech $z \mapsto f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ będzie funkcją holomorficzną zadaną przez szereg zbieżny w kole $|z| < R$. Pamiętamy, że oznacza to, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n||z|^n$ jest zbieżny dla $|z| < R$.

Możemy wtedy dla $\|A\| < R$ zdefiniować funkcję macierzową

$$f(A) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n A^n.$$

Latwo sprawdzić, że funkcja ta jest ciągła.

Przykładami takich funkcji są

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^A &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n, \quad A \in L(\mathbb{C}^n) \\ \log(1 + A) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} A^n, \quad \|A\| < 1. \end{aligned}$$

Mamy tożsamości

$$e^{\log B} = B, \quad \|B - \mathbb{1}\| < 1.$$

$$AB = BA \ \Rightarrow\ e^A e^B = e^{A+B}.$$

13.2 Algebra Liego macierzy bezśladowych

Niech $A \in L(\mathbb{K}^n)$. Wzór

$$\mathrm{Tr}A := \sum_{i=1}^{n} A_{ii} \in \mathbb{K}$$

definiuje *ślad* spełniający

$$\mathrm{Tr}AB = \mathrm{Tr}BA, \quad \det e^A = e^{\mathrm{Tr}A}.$$

Zauważmy, że $\mathrm{Tr}[A, B] = 0$.

Pamiętamy, że $gl(\mathbb{K}^n)$ oznacza algebrę Liego złożoną z macierzy $n \times n$ z komutatorem.

$sl(\mathbb{K}^n)$ definiujemy jako

$$sl(\mathbb{K}^n) := \{A \in gl(\mathbb{K}^n) \ : \ \mathrm{Tr}A = 0\}.$$

Jest to algebra Liego. Piszemy też

$$sl(\mathbb{K}^n) = sl(n, \mathbb{K}).$$

Oczywiście, $A \in sl(n, \mathbb{K})$ implikuje $e^A \in SL(n, \mathbb{K})$.

Każdą $B \in SL(\mathbb{C}^n)$ można przedstawić w postaci $B = e^A$ dla $A \in sl(\mathbb{C}^n)$. Każdą $B \in SL(\mathbb{R}^n)$ z otoczenia $\mathbb{1}$ można przedstawić w postaci e^A, $A \in sl(\mathbb{R}^n)$. Są jednak takie elementy $sl(\mathbb{R}^n)$, których nie można przedstawić jako e^A dla $A \in sl(\mathbb{R}^n)$. Przykładem takim jest $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

13.3 Ortogonalna algebra Liego

Mówimy, że $A \in L(\mathcal{V})$ zachowuje iloczyn skalarny gdy $\langle Av|Aw\rangle = \langle v|w\rangle$. Równoważny warunek: $A^{\#}A = \mathbb{1}$. Mówimy, że $A \in L(\mathcal{V})$ infinitezymalnie zachowuje iloczyn skalarny gdy $\langle(\mathbb{1}+A)v|(\mathbb{1}+A)w\rangle = \langle v|w\rangle + o(A)$, czyli $\langle Av|w\rangle + \langle v|Aw\rangle = 0$. Równoważny warunek: $A^{\#} + A = 0$.

$so(\mathbb{K}^n)$ definiujemy jako

$$so(\mathbb{K}^n) := \{A \in gl(\mathbb{K}^n) \ : \ A^{\#} + A = 0\}.$$

Jest to podalgebra Liego w $sl(\mathbb{K}^n)$. Piszemy też

$$so(\mathbb{R}^n) = so(n).$$

W przypadku zespolonym piszemy też $so(n, \mathbb{C}) = so(\mathbb{C}^n)$.

Jeśli $A \in so(\mathbb{K}^n)$, to $e^A \in SO(\mathbb{K}^n)$. Każdą $B \in SO(\mathbb{K}^n)$ można przedstawić w postaci $B = e^A$ dla $A \in so(\mathbb{K}^n)$.

13.4 Pseudo-ortogonalna algebra Liego

Rozważmy dalej przypadek rzeczywisty. $so(\mathbb{R}^{q,p})$ definiujemy jako zbiór macierzy spełniających

$$A^{\#} I_{q,p} + I_{q,p} A = 0.$$

Jest to podalgebra Liego w $sl(\mathbb{R}^{q+p})$. Piszemy też

$$so(\mathbb{R}^{q,p}) = so(q,p).$$

Jeśli $A \in so(\mathbb{R}^{q,p})$, to $\mathrm{e}^A \in SO(\mathbb{R}^{q,p})$. Dla sygnatury Lorentzowskiej mamy $\mathrm{e}^A \in SO^{\uparrow}(\mathbb{R}^{q,p})$
Każdą $B \in SO(\mathbb{R}^{q,p})$ z otoczenia $\mathbb{1}$ można przedstawić w postaci e^A, $A \in so(\mathbb{R}^{q,p})$.

13.5 Unitarna algebra Liego

$u(\mathbb{C}^n)$ definiujemy jako

$$u(\mathbb{C}^n) := \{A \in gl(\mathbb{C}^n) \ : \ A^* + A = 0\}.$$

Jest to algebra Liego. Piszemy też

$$u(\mathbb{C}^n) = u(n).$$

Definiujemy

$$su(n) = su(\mathbb{C}^n) := sl(\mathbb{C}^n) \cap u(\mathbb{C}^n).$$

Jeśli $A \in su(\mathbb{K}^n)$, to $\mathrm{e}^A \in SU(\mathbb{K}^n)$. Każdą $B \in SU(\mathbb{K}^n)$ można przedstawić w postaci $B = \mathrm{e}^A$ dla $A \in su(\mathbb{K}^n)$.

13.6 Pseudo-unitarna algebra Liego

$u(\mathbb{C}^{q,p})$ definiujemy jako zbiór macierzy spełniających

$$A^* I_{q,p} + I_{q,p} A = 0.$$

Jest to algebra Liego w $gl(\mathbb{C}^{q+p})$. Piszemy też

$$u(\mathbb{C}^{q,p}) = u(q,p).$$

Macierze pseudo-unitarne zachowują iloczyn pseudoskalarny w $\mathbb{C}^{q,p}$. Jeśli $A \in u(q,p)$, to $\mathrm{e}^A \in U(q,p)$.

Definiujemy

$$su(\mathbb{C}^{q,p}) = su(q,p) := u(\mathbb{C}^{q,p}) \cap sl(\mathbb{C}^{q+p}).$$

$A \in su(\mathbb{C}^{q,p})$ implikuje $\mathrm{e}^A \in SU(\mathbb{C}^{q,p})$.
Każdą $B \in SU(\mathbb{C}^{q,p})$ z otoczenia $\mathbb{1}$ można przedstawić w postaci $B = \mathrm{e}^A$ dla $A \in su(\mathbb{C}^{q,p})$.

13.7 Symplektyczna algebra Liego

Definiujemy

$$sp(\mathbb{K}^{2n}) := \{A \in L(\mathbb{K}^{2n}) \ : \ A^{\#}J + JA = 0\}$$

Latwo pokazać, że ślad macierzy symplektycznych jest równy 0. Dlatego $sp(\mathbb{K}^{2n})$ jest podalgebrą Liego w $sl(\mathbb{K}^{2n})$.

Jeśli $A \in sp(\mathbb{K}^{2n})$, to $\mathrm{e}^A \in SU(\mathbb{K}^{2n})$. Każdą $B \in Sp(\mathbb{C}^n)$ można przedstawić w postaci e^A, $A \in sp(\mathbb{C}^n)$.

Każdą $B \in Sp(\mathbb{R}^n)$ z otoczenia $\mathbb{1}$ można przedstawić w postaci e^A, $A \in sp(\mathbb{R}^n)$.

13.8 Afiniczne algebry Liego

Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią wektorową. Odwzorowania afiniczne na $\mathcal{V}$ tworzą algebrę Liego z działaniem

$$[(w_1, A_1), (w_2, A_2)] := (A_1 w_2 - A_2 w_1, [A_1, A_2])$$

Tę algebrę Liego nazywamy *afinicznym rozszerzeniem* $gl(\mathcal{V})$.

$\mathcal{V}$ można traktować jako przemienną algebrę Liego. Każde odwzorowanie liniowe na $\mathcal{V}$ jest różniczkowaniem, czyli $\mathrm{Der}(\mathcal{V}) = L(\mathcal{V}) = gl(\mathcal{V})$. Latwo widzimy, że afiniczne rozszerzenie $gl(\mathcal{V})$ jest iloczynem półprostym $\mathcal{V} \rtimes gl(\mathcal{V})$.

Często w zastosowaniach spotykamy grupy w których $gl(\mathcal{V})$ jest zastąpione jej podgrupą. Na przykład, algebra Liego grupy Poincarego jest afinicznym rozszerzeniem algebry Liego grupy Lorentza $\mathbb{R}^{1,3} \rtimes so(1,3)$.

14 Struktura algebr Liego

14.1 Nilpotentne i rozwiązalne algebry Liego

Niższą serią centralną nazywamy podalgebry $\mathcal{D}_k\mathfrak{g}$ zdefiniowane indukcyjnie

$$\mathcal{D}_1\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad \mathcal{D}_k\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathcal{D}_{k-1}\mathfrak{g}].$$

Serią pochodną nazywamy podalgebry

$$\mathcal{D}^1\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad \mathcal{D}^k\mathfrak{g} := [\mathcal{D}^{k-1}\mathfrak{g}, \mathcal{D}^{k-1}\mathfrak{g}].$$

$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathcal{D}\mathfrak{g} = \mathcal{D}_1\mathfrak{g} = \mathcal{D}^1\mathfrak{g}$ nazywamy *pochodną algebry* $\mathfrak{g}$.

Na przykład, $\mathcal{D}t(\mathbb{K}^n) = n(\mathbb{K}^n)$.

Twierdzenie 14.1 *$\mathcal{D}^k\mathfrak{g}$ i $\mathcal{D}_k\mathfrak{g}$ są ideałami charakterystycznymi w $\mathfrak{g}$. Jeśli $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ jest homomorfizmem, to $\phi(\mathcal{D}^k\mathfrak{g}) = \mathcal{D}^k\phi(\mathfrak{g})$, $\phi(\mathcal{D}_k\mathfrak{g}) = \mathcal{D}_k\phi(\mathfrak{g})$.*

Stwierdzenie 14.2 (1) *Jeśli $\mathfrak{a}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ jest przemienna, to $\mathfrak{a} \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

(2) *Jeśli $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{a} \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest przestrzenią liniową, to $\mathfrak{a}$ jest ideałem i $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ jest przemienna.*

Dowód. (1): Jeśli $A+\mathfrak{a}, B+\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, to $[A+\mathfrak{a}, B+\mathfrak{a}] = \mathfrak{a}$ oznacza $[A,B] \in \mathfrak{a}$. Więc $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$.
(2) wynika z $[\mathfrak{a},\mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$.□

Mówimy, że algebra $\mathfrak{g}$ jest *nilpotentna*, jeśli $\mathcal{D}_k\mathfrak{g} = \{0\}$ dla pewnego k i *rozwiązalna*, jeśli $\mathcal{D}^k\mathfrak{g} = \{0\}$ dla pewnego k. Mówimy, że $\mathfrak{g}$ jest półprosta, jeśli nie ma rozwiązalnych ideałów.

Algebra $\mathfrak{n}(\mathbb{K}^n)$ ściśle górnotrójkątnych macierzy jest nilpotentna, jak również każda jej podalgebra. Można pokazać, że każda algebra nilpotentna jest izomorficzna do podalgebry $\mathfrak{n}(\mathbb{K}^n)$.

Twierdzenie 14.3 (1) *Każda podalgebra, obraz homomorficzny, suma prosta algebr nilpotentnych jest nilpotentna.*

(2) *Niech $\mathfrak{a}$ będzie podprzestrzenią w $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (a więc ideałem w $\mathfrak{g}$). Jeśli $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ jest nilpotentna, to $\mathfrak{g}$ też.*

(3) *$\mathfrak{g}$ jest nilpotentna $\Leftrightarrow$ $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ jest nilpotentna.*

Dowód. (2) Wiemy, że dla pewnego n, $\mathcal{D}_n(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) = \{0\}$. Z tego wynika, że $\mathcal{D}_n\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}$. Zatem $\mathcal{D}_{n+1}\mathfrak{g} = \{0\}$.
(3) $\Rightarrow$ jest oczywiste. By pokazać $\Leftarrow$ zauważmy, że $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ i zastosujmy (2). □

Algebra $t(\mathbb{K}^n)$ górnotrójkątnych macierzy jest rozwiązalna jak również każda jej podalgebra. Można pokazać, że każda algebra rozwiązalna jest izomorficzna do podalgebry $t(\mathbb{K}^n)$. Każda reprezentacja algebry rozwiązalnej na przestrzeni $\mathcal{V}$ ma obraz izomorficzny do podalgebry w $\mathfrak{t}(\mathcal{V})$.

Twierdzenie 14.4 (1) *Każda podalgebra, obraz homomorficzny, suma prosta algebr rozwiązalnych jest rozwiązalny.*

(2) *Niech $\mathfrak{a}$ będzie ideałem w $\mathfrak{g}$. Jeśli $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ są rozwiązalne, to $\mathfrak{g}$ też.*

(3) *$\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna $\Leftrightarrow$ $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ jest rozwiązalna.*

Dowód. (2) Niech $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ będzie kanonicznym homomorfizmem.
Niech $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) = 0$. Mamy $\pi(\mathcal{D}^n\mathfrak{g}) \subset \mathcal{D}^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$. Zatem $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) \subset \ker\pi = \mathfrak{a}$.
Niech $\mathcal{D}^k\mathfrak{a} = \{0\}$. Wtedy $\mathcal{D}^{k+n}\mathfrak{g} = \mathcal{D}^k\mathcal{D}^n\mathfrak{g} \subset \mathcal{D}^k\mathfrak{a} = \{0\}$.
(2) implikuje (3). □

W twierdzeniu tym nie można zamienić "rozwiązalny" przez "nilpotentny", co pokazuje przykład $0 \to n(\mathbb{K}^n) \to t(\mathbb{K}^n) \to d(\mathbb{K}^n) \to 0.$.

Twierdzenie 14.5 *Niech $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ będą ideałami w $\mathfrak{g}$.*

(1) *Jeśli $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ są rozwiązalne, to $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ też.*

(2) *Jeśli $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ są nilpotentne, to $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ też.*

Dowód. (1) Z rozwiązalności $\mathfrak{a}$ wynika rozwiązalność $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$. Mamy $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b} \simeq \mathfrak{a}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$, zatem $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ jest rozwiązalna. W ciągu dokładnym $0 \to \mathfrak{b} \to \mathfrak{a}+\mathfrak{b} \to (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ wyrazy brzegowe są rozwiązalne, więc wyraz środkowy też.
(2) Rozważmy A_i, $i = 1,\dots 2k+1$, z których każdy należy do $\mathfrak{a}$ lub $\mathfrak{b}$. Pokażemy, że

$$[A_1.[A_2,\cdots[A_{2k},A_{2k+1}]\cdots]$$

należy do $\mathcal{D}_k\mathfrak{a}$ lub $\mathcal{D}_k\mathfrak{b}$.

Rzeczywiście, wtedy co najmniej $k+1$ wyrazów należy do $\mathfrak{a}$ lub $\mathfrak{b}$. Załóżmy, że do $\mathfrak{a}$. Korzystamy następnie z tego, że $\mathcal{D}_j\mathfrak{a}$ jest ideałem charakterystycznym w $\mathfrak{a}$.

Zatem, jeśli $\mathcal{D}_k\mathfrak{a} = \mathcal{D}_k\mathfrak{b} = \{0\}$, to $\mathcal{D}_{2k+1}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \{0\}$. □

Zatem w każdej alebrze Liego istnieje największy ideał rozwiązalny, zwany *radykałem*, i największy ideał nilpotentny.

14.2 Twierdzenie Liego

Twierdzenie 14.6 (Liego) *Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią zespoloną a $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie rozwiązalną algebrą Liego. Wtedy istnieje $\alpha \in \mathfrak{g}^{\#}$ taki, że*

$$\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{g}) := \bigcap_{A\in\mathfrak{g}} \mathrm{Ker}\,(A - \alpha(A)) \neq \{0\}. \tag{14.43}$$

Przestrzeń $\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{g})$ nazwiemy *przestrzenią własną algebry $\mathfrak{g}$ dla pierwiastka α.* $\alpha \in \mathfrak{g}^{\#}$ dla którego ta przestrzeń jest niezerowa nazywamy *pierwiastkiem algebry $\mathfrak{g}$*.

Dowód Twierdzenia Liego opiera się na następującym stwierdzeniu.

Stwierdzenie 14.7 *Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią zespoloną, $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego i $\alpha \in \mathfrak{g}^{\#}$. Niech $B \in gl(\mathcal{V})$ spełnia*

$$[B, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}.$$

Wtedy B zachowuje podprzestrzeń $\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{g})$ zdefiniowaną w (14.43).

Dowód. Niech x należy do $\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{g})$ i $x_j := B^j x$, $j = 0, 1, \ldots$. Niech k będzie najmniejszą liczbą taką , że x_m jest kombinacją liniową $x_0, \ldots, x_{m-1}$. Wykażemy, że istnieje macierz $\alpha_{ij} \in \mathfrak{g}^{\#}$ taka, że $\alpha_{ij} = 0$, $i < j$, $\alpha_{ii} = \alpha$ i

$$Ax_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}(A) x_j. \tag{14.44}$$

Jest to oczywiste dla $i = 1$. Załóżmy, że to prawda dla $i = k$.

$$\begin{aligned} Ax_{k+1} = ABx_k &= [A, B]x_k + BAx_k \\ &= \sum_i \alpha_{ki}([A, B])x_i + \alpha_{ki}(A)x_{i+1}. \end{aligned}$$

Czyli

$$\alpha_{k+1,i}(A) = \alpha_{k,i}([A, B]) + \alpha_{k,i-1}(A),$$

co kończy dowód (14.44).

Niech $\mathcal{X}$ będzie przestrzenią rozpiętą przez $x_0, \ldots, x_k$. Jest ona B-niezmiennicza i $\mathfrak{g}$-niezmiennicza. Macierz $\mathfrak{g}$ obcięta do $\mathcal{X}$ jest górnotrójkątna i na diagonali ma α. Zatem, dla $A \in \mathfrak{g}$,

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{X}} A = k\alpha(A), \quad A \in \mathfrak{g}.$$

W szczególności,

$$0 = \mathrm{Tr}_{\mathcal{X}}[A, B] = k\alpha([A, B]).$$

Zatem $\alpha([A, B]) = 0$. Dlatego też, $\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij}$. Więc,

$$ABx = \alpha(A)Bx.$$

Dowód Tw. 14.6. Stosujemy indukcję względem $\dim \mathfrak{g}$. Dla $\dim \mathfrak{g} = 1$ jest to znany fakt.

Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $\dim \mathfrak{g} = k-1$. Niech $\dim \mathfrak{g} = k$. $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$ kowymiaru $j > 0$. Dowolna podprzestrzeń $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$ jest ideałem. W szczególności, niech $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathbb{C}B = \mathfrak{g}$. Z założenia indukcyjnego istnieje funkcjonał pierwiastkowy α_1 na $\mathfrak{g}_1$. $\mathrm{ad}(B)$ zachowuje $\mathfrak{g}_1$. Zatem, ze Stw. 14.7 wynika, że B zachowuje $\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{g})$. B posiada wektor własny $v \in \mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{g})$, czyli $Bv = \mu v$. Każdy $A \in \mathfrak{g}$ jest postaci $A = A_1 + tB$, $A_1 \in \mathfrak{g}_1$, $t \in \mathbb{K}$. Wtedy

$$(A_1 + tB)v = (\alpha_1(A) + t\mu)v.$$

□

Twierdzenie 14.8 *Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią zespoloną a $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(1) *$\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna.*

(2) *Istnieje ciąg niezmienniczych przestrzeni $\{0\} = \mathcal{V}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{V}_n = \mathcal{V}$, $\dim \mathcal{V}_j = j$.*

(3) *Istnieje baza w $\mathcal{V}$ taka, że $\mathfrak{g}$ jest zawarta w macierzach górnotrójkątnych.*

Dowód. (1)⇒(2) Stosujemy indukcję względem $\dim \mathcal{V}$. Dla $\dim \mathcal{V} = 1$ jest to oczywiste. Niech będzie prawdziwe dla $\dim \mathcal{V} = n$. Niech $\dim \mathcal{V} = n + 1$. Na mocy Tw. Liego istnieje pierwiastek $\alpha \in \mathfrak{g}^\#$ z wektorem własnym $v \in \mathcal{V}$. Przestrzeń $\mathbb{C}v$ jest niezmiennicza. Dlatego mamy reprezentację ilorazową w $\mathcal{V}/\mathbb{C}v$, $\dim \mathcal{V}/\mathbb{C}v = n$. Zatem istnieją przestrzenie $\{0\} = \mathcal{W}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{W}_n = \dim \mathcal{V}/\mathbb{C}v$, $\dim \mathcal{W}_j = j$ niezmiennicze względem tej reprezentacji. Niech $\mathcal{V}_{j+1}$ będzie przeciwobrazem $\mathcal{W}_j$ względem homomorfizmu kanonicznego.

(2)⇒(3) Wybieramy bazę $e_1, \ldots, e_n$ taką, że $\mathcal{V}_j = \mathrm{Span}\{e_1, \ldots, e_j\}$.

(3)⇒(1) Podalgebra algebry rozwiązalnej jest rozwiązalna. □

Twierdzenie 14.9 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie zespoloną algebrą Liego. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(1) *$\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna.*

(2) *Istnieje ciąg ideałów $\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ taki, że $\dim \mathfrak{g}_j = j$.*

(3) *$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest nilpotentna.*

Dowód. (1)⇒(2) Rozważmy reprezentację $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g})$. $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset gl(\mathfrak{g})$ jest algebrą rozwiązalną. Zatem istnieje ciąg podprzestrzeni $\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$, $\dim \mathfrak{g}_j = j$, które są $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$-niezmiennicze. $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$-niezmienniczość oznacza bycie ideałem.

(2)⇒(1) Z tego, że $\mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_{j-1}$ jest 1-wymiarowa, wynika, że jest przemienna. Dlatego, ze Stw. 14.2 (1) dostajemy $[\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{j-1}$. Stąd $\mathcal{D}^k\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_{n-k}$.

(3)$\Rightarrow$(1) $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ jest nilpotentne, więc rozwiązalna. $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ jest przemienna wiąc rozwiązalna. Zatem $\mathfrak{g}$ iest rozwiązalna.

(1)$\Rightarrow$(3) Rozważmy $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset gl(\mathfrak{g})$. W pewnej bazie, $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset t(\mathbb{C}^n)$. Zatem $[\mathrm{ad}(\mathfrak{g}), \mathrm{ad}(\mathfrak{g})] \subset n(\mathbb{C}^n)$. Więc $\mathrm{ad}([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = [\mathrm{ad}(\mathfrak{g}), \mathrm{ad}(\mathfrak{g})]$ jest nilpotentna. Czyli, z Tw. 14.4 (3) wynika, że $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ jest nilpotentna. □

Stwierdzenie 14.10 *Każda nietrywialna skończenie wymiarowa reprezentacja nieprzywiedlna algebry rozwiązalnej jest* 1*-wymiarowa.*

Dowód. Zgodnie z Tw. Liego, każda algebra Liego działająca na skończenie wymiarowej przestrzeni posiada wektor własny. □

14.3 Dolny ciąg centralny

Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. *Dolny ciąg centralny* $\mathcal{C}_j\mathfrak{g}$ definiujemy indukcyjnie w sposób następujący: $\mathcal{C}_0\mathfrak{g} = \{0\}$. Jeśli zdefiniowaliśmy $\mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g}$, $\pi_{k-1}\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g}$ jest homomorfizmem kanonicznym, to

$$\mathcal{C}_k\mathfrak{g} := \pi_{k-1}^{-1}\left(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}/\mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g})\right).$$

(Automatycznie, $\mathcal{C}_k$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$, jako przeciwobraz ideału względem homomorfizmu).

Twierdzenie 14.11 *Niech* $\mathfrak{g}$ *będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mathfrak{g}$ *jest nilpotentna.*

(2) *Istnieje ciąg ideałów* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_n = \{0\}$ *takich, że* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{j+1}$.

(3) *Istnieje* m *takie, że* $\mathcal{C}_m\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$.

Dowód. (1)$\Rightarrow$(2) jest oczywiste, jeśli położyć $\mathfrak{g}_j = \mathcal{D}_j\mathfrak{g}$.

(2)$\Rightarrow$(1). Pokazujemy indukcyjnie, że $\mathcal{D}_j\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_j$.

(2)$\Rightarrow$(3) Pokażemy indukcyjnie, że $\mathfrak{g}_{m-k} \subset \mathcal{C}_k\mathfrak{g}$. Dla $k = 0$, $\mathfrak{g}_m = \mathcal{C}_0\mathfrak{g} = \{0\}$.

Załóżmy, że $\mathfrak{g}_{m-(k-1)} \subset \mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g}$. Mamy

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{g}/\mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g}, \pi_{k-1}(\mathfrak{g}_{m-k})] &= \pi_{k-1}\left([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{m-k}]\right) \\
\subset \pi_{k-1}(\mathfrak{g}_{m-(k-1)}) &\subset \pi_{k-1}(\mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g}) = \{0\}.
\end{aligned}$$

Zatem $\pi_{k-1}(\mathfrak{g}_{m-k}) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g}/\mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g})$. Więc, $\mathfrak{g}_{m-k} \subset \mathcal{C}_k\mathfrak{g}$.

(3)$\Rightarrow$(2).

$$\pi_{k-1}\left([\mathfrak{g}, \mathcal{C}_k\mathfrak{g}]\right) = [\pi_{k-1}(\mathfrak{g}), \pi_{k-1}(\mathcal{C}_k\mathfrak{g})] = [\mathfrak{g}/\mathcal{C}_k\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{g}/\mathcal{C}_k\mathfrak{g})] = \{0\}.$$

Zatem $[\mathfrak{g}, \mathcal{C}_k\mathfrak{g}] \subset \ker \pi_{k-1} = \mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g}$. Stąd,

$$\mathcal{C}_m\mathfrak{g} \subset \cdots \subset \mathcal{C}_0\mathfrak{g}_0$$

spełnia warunki (2). □

14.4 Formy niezmiennicze na algebrze Liego

Mówimy, że forma dwuliniowa $\langle\cdot|\cdot\rangle$ na przestrzeni wektorowej $\mathfrak{g}$ jest *niezmiennicza*, gdy

$$\langle [B,A]|C\rangle + \langle A|[B,C]\rangle = 0.$$

Inny równoważny warunek:

$$\langle [A,B]|C\rangle = \langle A|[B,C]\rangle.$$

Jeśli $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$, to Tr AB jest formą niezmienniczą. Ogólniej, z każdą reprezentacją π algebry Liego $\mathfrak{g}$ w skończenie wymiarowej przestrzeni mamy związaną niezmienniczą formę dwuliniową

$$\langle B|C\rangle_\pi := \mathrm{Tr}\ \pi(B)\pi(C).$$

Jeśli $\pi = \mathrm{ad}$ formę tę nazywamy *formą Killinga* i oznaczamy czasem $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$.

Twierdzenie 14.12 *Niech $\perp$ będzie dopełnieniem ortogonalnym dla formy niezmienniczej $\langle\cdot|\cdot\rangle$ Niech $\mathfrak{b}$ będzie ideałem w $\mathfrak{g}$.*

(1) *$\mathfrak{b}^\perp$ też jest ideałem.*

(2) *Jeśli forma zeruje się na $\mathfrak{b}$, to $[\mathfrak{b},\mathfrak{b}] \subset \mathfrak{g}^\perp$.*

(3) *Jeśli forma jest niezdegenerowana, to $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}^\perp$ jest przemiennym ideałem.*

Dowód. (1) Niech $A \in \mathfrak{g}$, $B \in \mathfrak{b}$, $C \in \mathfrak{b}^\perp$.

$$\langle [C,A]|B\rangle = \langle C|[A,B]\rangle = 0.$$

Zatem, $[A,C] \in \mathfrak{b}^\perp$.

(2) Niech $B_1, B_2 \in \mathfrak{b}$. Wtedy

$$\langle [B_1,B_2]|A\rangle = \langle B_1|[B_2,A]\rangle = 0.$$

Zatem $[B_1,B_2] \in \mathfrak{b}^\perp$.

(3) $\mathfrak{g}^\perp = \{0\}$ Zatem, na mocy (2), $[\mathfrak{b},\mathfrak{b}] = \{0\}$. □

Stwierdzenie 14.13 *Niech $\mathfrak{a}$ będzie ideałem algebry Liego $\mathfrak{g}$. Niech $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ i $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathfrak{a}}$ będą formami Killinga względem $\mathfrak{g}$ i i $\mathfrak{a}$. Wtedy obcięcie $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ do $\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}$ jest równe $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathfrak{a}}$.*

Dowód. Niech $A, B \in \mathfrak{a}$. Wybieramy bazę w $\mathfrak{g}$ tak, aby początkowe elementy tworzyły bazę $\mathfrak{a}$. Wtedy

$$\mathrm{ad}(A) \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}(B) \sim \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\mathrm{ad}(A)\mathrm{ad}(B) \sim \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd

$$\langle A|B\rangle_{\mathfrak{g}} = \mathrm{Trad}(A)\mathrm{ad}(B) = \mathrm{Tr}a_{11}b_{11} = \langle A|B\rangle_{\mathfrak{a}}.$$

□

14.5 Kryteria Cartana rozwiązalności

Twierdzenie 14.14 (Kryterium Cartana dla formy śladowej.) *Niech $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *$\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna.*

(2) $\mathrm{Tr}AB = 0$, $A \in \mathfrak{g}$, $B \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

(3) $\mathrm{Tr}AB = 0$, $A, B \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Lemat 14.15 *Niech $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ będą podprzestrzeniami w $L(\mathcal{V})$. Połóżmy*

$$\mathfrak{b} := \{B \in L(\mathcal{V}) \ : \ \mathrm{ad}(B)\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}\}.$$

Niech $A \in \mathfrak{b}$. Jeśli

$$\mathrm{Tr}AB = 0, \quad B \in \mathfrak{b},$$

to A jest nilpotentny.

Dowód. Niech $A = S + N$ będzie kanonicznym rozkładem na część półprostą i nilpotentną. Niech $e_1, \dots, e_n$ będzie bazą diagonalizującą S, tak że $Ae_j = \lambda_j e_j$. Niech $e^1, \dots, e^n$ będzie bazą dualną.

Niech $\mathbb{L}$ będzie podzbiorem $\mathbb{K}$

$$\mathbb{L} := \{\sum r_j \lambda_j \ : \ r_j \in \mathbb{Q}\}.$$

Niech $f : \mathbb{L} \to \mathbb{Q}$ będzie funkcją $\mathbb{Q}$-liniową. Zdefiniujmy P przez $Pe_j = f(\lambda_j)e_j$. Mamy

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}(S)|e_i)(e_j| &= (\lambda_i - \lambda_j)|e_i)(e_j|, \\
\mathrm{ad}(P)|e_i)(e_j| &= (f(\lambda_i) - f(\lambda_j))\,|e_i)(e_j| = f(\lambda_i - \lambda_j)|e_i)(e_j|.
\end{aligned}$$

Zatem $\mathrm{ad}(P) = f(\mathrm{ad}(S)$. Można dobrać wielomian p o wolnym wyrazie zero taki, że $f(\lambda_i - \lambda_j) = p(\lambda_i - \lambda_j)$. Wtedy $\mathrm{ad}(P) = p(\mathrm{ad}(S))$. Ze Stw. 15.8 wynika, że $\mathrm{ad}(S)$ jako część półprosta $\mathrm{ad}(A)$ jest też wielomianem (bez wyrazu wolnego) od $\mathrm{ad}(A)$, tj. $\mathrm{ad}(S) = s(\mathrm{ad}(A))$. Ostatecznie, $\mathrm{ad}(P) = s(p(\mathrm{ad}(S)) = t(\mathrm{ad}(A)$, gdzie t jest wielomianem bez wyrazu wolnego. Z tego, że $\mathrm{ad}(A)\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}$ wynika, że $t(\mathrm{ad}(A))\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}$. Zatem $P \in \mathfrak{b}$. Więc P taki, że $Pe_j = \overline{\lambda}_j e_j$ należy do $\mathfrak{b}$. Dlatego,

$$0 = \mathrm{Tr}AP = \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j)\lambda_j. \tag{14.45}$$

Prawa strona (14.45) należy do $\mathbb{L}$, można więc na nią zadziałać funkcją f. Dostajemy

$$0 = \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j)^2.$$

Zatem $f(\lambda_1) = \dots = f(\lambda_n) = 0$ (bo $f(\lambda_j) \in \mathbb{Q}$). Więc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. □

Dowód Tw. 14.14. (1)⇒(2) wynika z faktu, że znajdziemy bazę, w której $\mathfrak{g}$ są górnotrójkątne.

(2)⇒(1). Niech

$$\mathfrak{n} := \{C \in L(\mathcal{V}) \ : \ [C, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}.$$

Wtedy $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{n}$. Więc dla $A, B \in \mathfrak{g}$, $C \in \mathfrak{n}$,

$$\mathrm{Tr}[A, B]C = \mathrm{Tr}A[B, C] = 0.$$

Zatem

$$\mathrm{Tr}DC = 0, \ \ D \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \ \ C \in \mathfrak{n}.$$

Na podstawie Lematu 14.15, z (2) wynika, że wszystkie elementy $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ są nilpotentne. Zatem $\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna.

(2)⇒(3) jest oczywiste.

(3)⇒(2). Na mocy (2)⇒(1), $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest rozwiązalna. Ale $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest przemienna, więc rozwiązalna. Zatem $\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna. □

Twierdzenie 14.16 (Kryterium Cartana dla formy Killinga.) *Niech $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mathfrak{g}$ *jest rozwiązalna.*

(2) $\langle A|B\rangle_{\mathrm{ad}} = 0$, $A \in \mathfrak{g}$, $B \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

(3) $\langle A|B\rangle_{\mathrm{ad}} = 0$, $A, B \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Dowód. (1)⇒(2). $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset gl(\mathfrak{g})$ jest rozwiązalną algebrą Liego. Możemy zatem do niej zastosować Tw. 14.14 (1)⇒(2).

(2)⇒(1). Z Tw. 14.14 (2)⇒(1) wynika, że $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ jest rozwiązalna. Ale to jest równoważne temu, że $\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna.

(2)⇒(3) jest oczywiste.

(3)⇒(2). Z tego, że $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$ wynika, że form Killinga dla $\mathfrak{g}$ obcięta do $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ pokrywa sie z formą Killinga dla $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Zatem możemy zastosować (2)⇒(1) do $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ i wnioskować, że $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest rozwiązalna. Następnie powtarzamy argument, który używaliśmy w dowodzie Tw. 14.14, który implikuje rozwiązalność $\mathfrak{g}$. □

Dla $gl(n) = \mathbb{C}\mathbb{1}_n \oplus sl(n)$ forma Killinga jest równa

$$\langle A|B\rangle_{\mathrm{ad}} = 2n\mathrm{Tr}AB - 2\mathrm{Tr}A\mathrm{Tr}B.$$

Czyli

$$\mathrm{Tr}A_{ij}A_{ji} = 2n, \ \mathrm{Tr}A_{ii}A_{jj} = 2n - 2, \ \ \mathrm{Tr}A_{ii}A_{jj} = -2, \ i \neq j.$$

Mamy bowiem

$$\mathrm{ad}(A)\mathrm{ad}(B)X = ABX + XBA - AXB - BXA.$$

Niezerowe wyrazy diagonalne dla reprezentacji dołączonej są równe

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(A_{ij})\mathrm{ad}(A_{ji})A_{ik} &= A_{ik}, \\ \mathrm{ad}(A_{ij})\mathrm{ad}(A_{ji})A_{kj} &= A_{kj}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ad}(A_{ij})\mathrm{ad}(A_{ji})A_{ij} &= 2A_{ij}, \\
\\
\mathrm{ad}(A_{ii})\mathrm{ad}(A_{ii})A_{ik} &= A_{ik}, \\
\mathrm{ad}(A_{ii})\mathrm{ad}(A_{ii})A_{ki} &= A_{ki}, \\
\\
\mathrm{ad}(A_{ii})\mathrm{ad}(A_{jj})A_{ij} &= -A_{ij}, \\
\mathrm{ad}(A_{ii})\mathrm{ad}(A_{jj})A_{ji} &= -A_{ji}.
\end{aligned}
$$

Rozważmy przemienną algebrę $\mathbb{K}^n$ z bazą $e_1, \ldots, e_n$. Dowolny operator $P \in L(\mathbb{K}^n)$ definiuje różniczkowanie na $\mathbb{K}^n$. Dlatego $\mathbb{R} \ni t \mapsto tP \in \mathrm{Der}(\mathbb{K}^n)$ jest homomorfizmem algebr Liego. Niech $f = 1 \in \mathbb{R}$ będzie bazą w $\mathbb{R}$. Rozważmy iloczyn półprosty $\mathbb{K}^n \rtimes_P \mathbb{K}$. Mamy

$$[e_i, f] = Pe_i, \quad [e_i, e_j] = 0, \quad [f, f] = 0.$$

Forma Killinga ma jedyny niezerowy wyraz dla

$$\langle f|f\rangle = \mathrm{Tr}P^2.$$

Aby to pokazać, liczymy

$$\mathrm{ad}(f) = -\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}(e_i) = -\begin{bmatrix} 0 & Pe_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oczywiście, $\mathcal{D}(\mathbb{K}^n \rtimes_P \mathbb{K}) = P\mathbb{K}^n$, która jest przemienna. Zatem algebra jest rozwiązalna.

Poza tym, łatwo sprawdzamy, że $\mathcal{D}_m(\mathbb{K}^n \rtimes_P \mathbb{K}) = P^m\mathbb{K}^n$. Dltego algebra jest nilpotentna wtedy i tylko wtedy gdy P jest nilpotentny.

14.6 Algebry półproste

Przypomnijmy, że algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest półprosta gdy nie posiada niezerowych ideałów przemiennych.

Twierdzenie 14.17 *Niech $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie półprosta. Wtedy form śladowa jest niezdegenerowana.*

Dowód. $\mathfrak{g}^\perp$ jest ideałem, na którym forma śladowa się zeruje. Zatem z Kryterium Cartana dla formy śladowej (Tw. 14.14) $\mathfrak{g}^\perp$ jest rozwiązalna. Zatem $\mathfrak{g}^\perp = \{0\}$. □

Twierdzenie 14.18 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mathfrak{g}$ *jest algebrą półprostą.*

(2) $\mathfrak{g}$ *nie posiada niezerowych ideałów rozwiązalnych.*

(3) *Radykał algebry* $\mathfrak{g}$ *jest równy* $\{0\}$.

(4) *Forma Killinga na* $\mathfrak{g}$ *jest niezdegenerowana.*

(5) $\mathfrak{g}$ *jest sumą prostą ideałów prostych*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n.$$

Dowód. (2)⇒(1) jest oczywiste

(1)⇒(2). Niech $\mathfrak{a}$ będzie niezerowym ideałem rozwiązalnym. Wtedy istnieje k takie, że $\mathcal{D}^{k-1}\mathfrak{a} \neq \{0\}$ i $\mathcal{D}^k\mathfrak{a} = \{0\}$. $\mathcal{D}^{k-1}\mathfrak{a}$ jest więc przemienne. Poza tym, jest to ideał charakterystyczny w $\mathfrak{a}$. Zatem jest to ideał w $\mathfrak{g}$.

(2)⇒(3) Radykał jest ideałem rozwiązalnym.

(3)⇒(1) Załóżmy, że $\mathfrak{a}$ jest niezerowym ideałem przemiennym. Radykał zawiera $\mathfrak{a}$, więc jest niezerowy.

(4)⇒(1). Niech $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathrm{ad}}$ będzie nieosobliwa. Niech $\mathfrak{a}$ będzie ideałem przemiennym. Dobierzmy bazę w $\mathfrak{g}$ tak, aby początkowe elementy stanowiły bazę w $\mathfrak{a}$. Niech $B \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathfrak{a}$. Mamy

$$\mathrm{ad}(B) \sim \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}(A) \sim \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\mathrm{ad}(A)\mathrm{ad}(B) \sim \begin{bmatrix} 0 & a_{12}b_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Czyli

$$\langle A|B\rangle_{\mathrm{ad}} = \mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}(A)\mathrm{ad}(B) = 0.$$

Zatem $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}^{\perp} = \{0\}$.

(1)⇒(4). Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprosta. Rozważmy $\mathfrak{g}^{\perp}$ (względem formy Killinga). Wtedy $\mathfrak{g}^{\perp}$ jest ideałem dla którego forma Killinga jest równa 0. Zatem z Kryterium Cartana dla formy Killinga (Tw. 14.16) $\mathfrak{g}^{\perp}$ jest rozwiązalny. Z półprostoty $\mathfrak{g}^{\perp} = \{0\}$. Zatem forma Killinga jest niezdegenerowana.

(1)⇒(5). Niech $\mathfrak{a}$ będzie nietrywialnym ideałem. Wiemy już, że z (1) wynika, że forma Killinga jest niezdegenerowana. Z Tw. 14.12 wynika, że $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$ jest ideałem przemiennym. Z półprostoty $\mathfrak{g}$ wynika, że $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp} = \{0\}$. Kontynuując ten proces dostajemy rozkład na ideały proste.

(5)⇒(1) $\mathfrak{a}_i$ jako proste algebry Liego posiadają niezdegenerowaną formę Killinga. (Wynika to z (1)⇒(4)). Więc to samo jest prawdą dla $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$. □

Twierdzenie 14.19 *Niech* $\mathfrak{g}$ *będzie półprosta i*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n \tag{14.46}$$

będzie jej rozkładem na proste ideały.

(1) *Dowolny ideał ma postać* $\mathfrak{a}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_{i_k}$, *gdzie* $1 \leq i_1 < \cdots i_k \leq n$.

(2) *Rozkład (14.46) jest jedyny z dokładnością do permutacji.*

(3) *Obraz* $\mathfrak{g}$ *względem homomorfizmu jest półprosty.*

(4) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

Dowód. (1) Niech $\mathfrak{h}$ będzie ideałem w $\mathfrak{g}$. Niech $I_1 = \{i \ : \ \mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{h} \neq \{0\}$ i $I_2 = \{i \ : \ \mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{h} = \{0\}$. Połóżmy $\mathfrak{g}_1 := \underset{i\in I_1}{\oplus} \mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{g}_2 := \underset{i\in I_2}{\oplus} \mathfrak{a}_i$. Oczywiście, $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{h}$. Niech $H \in \mathfrak{h}$. $H = B_1 + B_2$, $B_i \in \mathfrak{g}_i$. Wtedy $B_2 \in \mathfrak{h}$. Oczywiście, $[B_2, \mathfrak{a}_j] \in \{0\}$, $j \in I_1$. Poza tym, $[B_2, \mathfrak{a}_j] \in \mathfrak{a}_j$, $j \in I_2$, i $[B_2, \mathfrak{h}] \in \mathfrak{h}$. Ale $\mathfrak{a}_j \cap \mathfrak{h} = \{0\}$. Zatem $[B_2, \mathfrak{a}_j] = \{0\}$. Czyli $[B_2, \mathfrak{g}] = \{0\}$. Zatem B_2 należy do centrum algebry $\mathfrak{g}$. Czyli $B_2 = 0$.

(2) Na mocy (1), jeśli $\mathfrak{a}$ jest prostym ideałem zawartym w $\mathfrak{g}$, to jest on równy jednemu z ideałów w (14.46). □

Twierdzenie 14.20 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie dowolną algebrą Liego i $\mathfrak{r}$ jej radykałem. Wtedy istnieje podalgebra półprosta $\mathfrak{a}$ taka, że $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \rtimes \mathfrak{a}$.*

Dowód. Udowodnimy tylko słabszy fakt, który mówi, że $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ jest pólprosta. Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy istnieje ideał rozwiązalny $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$. Niech $\mathfrak{r}_1$ będzie jego przeciwobrazem w $\mathfrak{g}$. Wtedy mamy $0 \to \mathfrak{r} \to \mathfrak{r}_1 \to \mathfrak{h} \to 0$. Ponieważ $\mathfrak{r}$ i $\mathfrak{h}$ są rozwiązalne, taki jest $\mathfrak{r}_1$. Ale $\mathfrak{r}$ jest największym ideałem rozwiązalnym w $\mathfrak{g}$. Zatem $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}$. Zatem $\mathfrak{h} = 0$. □

14.7 Algebry reduktywne

Mówimy, że algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest *reduktywna* gdy jest sumą prostą półprostej i przemiennej algebry Liego.

Twierdzenie 14.21 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *$\mathfrak{g}$ jest algebrą reduktywną.*

(2) *$\mathfrak{g}$ nie posiada nieprzemiennych ideałów rozwiązalnych.*

(3) *Radykał algebry $\mathfrak{g}$ jest przemienny.*

(4) *Istnieje niezdegenerowana forma niezmiennicza na $\mathfrak{g}$.*

(5) *$\mathfrak{g}$ jest sumą prostą ideałów prostych lub równych $\mathbb{K}$.*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n.$$

14.8 Związek zespolonych i rzeczywistych przestrzeni wektorowych

(1) Niech $\mathcal{V}$ będzie zespoloną przestrzenią wektorową. Jak zrobić z niej przestrzeń rzeczywistą?

   (i) $\mathbb{R}$ jest podciałem w $\mathbb{C}$. Można "zapomnieć" o mnożeniu przez nierzeczywiste liczby. Dostajemy przestrzeń $\mathcal{V}$ – *realifikację przestrzeni* $\mathcal{V}$.

   (ii) Niech κ będzie *sprzężeniem*, tzn. antyliniową inwolucją. Wtedy

$$\mathcal{V}^\kappa := \{v \in \mathcal{V} \ : \ \kappa v = v\}$$

   jest rzeczywistą podprzestrzenią zwaną *formą rzeczywistą przestrzeni* $\mathcal{V}$. Zauważmy, że

$$\mathrm{i}\mathcal{V}^\kappa = \{v \in \mathcal{V} \ : \ \kappa v = -v\}, \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}^\kappa \oplus \mathrm{i}\mathcal{V}^\kappa.$$

(2) Niech $\mathcal{X}$ będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową. Jak zrobić z niej przestrzeń zespoloną?

(i) Przestrzeń $\mathbb{C}\mathcal{X} := \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ wyposażamy w mnożenie

$$(\lambda + \mathrm{i}\mu)(x_{\mathrm{R}}, x_{\mathrm{I}}) := (\lambda x_{\mathrm{R}} - \mu x_{\mathrm{I}}, \lambda x_{\mathrm{I}} + \mu x_{\mathrm{R}}).$$

Zamiast $(x_{\mathrm{R}}, x_{\mathrm{I}})$ będziemy pisali $x_{\mathrm{R}} + \mathrm{i}x_{\mathrm{I}}$. Nazywamy tę przestrzeń *kompleksyfikacją przestrzeni* $\mathcal{X}$.

(ii) Niech $j \in L(\mathcal{X})$ będzie *antyinwolucją* (albo *strukturą zespoloną*), czyli niech spełnia $j^2 = -\mathbb{1}$. Wyposażamy $\mathcal{X}$ w mnożenie

$$(\lambda + \mathrm{i}\mu)x := (\lambda + \mu j)x.$$

Tak uzyskaną przestrzeń zespoloną oznaczamy przez $\mathcal{X}^{\mathbb{C}}$ i czasami nazywamy *formą zespoloną przestrzeni* $\mathcal{X}$.

W kompleksyfikacji rzeczywistej przestrzeni $\mathcal{X}$ mamy naturalne sprzężenie:

$$\kappa(x_{\mathrm{R}} + \mathrm{i}x_{\mathrm{I}}) = (\overline{x_{\mathrm{R}} + \mathrm{i}x_{\mathrm{I}}} = x_{\mathrm{R}} - \mathrm{i}x_{\mathrm{I}}.$$

Oczywiście, $(\mathbb{C}\mathcal{X})^{\kappa} = \mathcal{X}$.

Jeśli zrealifikujemy zespoloną przestrzeń $\mathcal{V}$ dostając $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$, to w $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ mamy naturalną antyinwolucję zadaną przez i. Mamy $(\mathcal{V}_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} = \mathcal{V}$.

Jeśli skompleksyfikujemy rzeczywistą przestrzeń $\mathcal{X}$, a potem ją zrealifikujemy, dostajemy $(\mathbb{C}\mathcal{X})_{\mathbb{R}} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$.

Jeśli zrealifikujemy zespoloną przestrzeń $\mathcal{V}$, a potem ją skompleksyfikujemy, dostajemy $\mathbb{C}(\mathcal{V}_{\mathbb{R}}) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$.

14.9 Związek zespolonych i rzeczywistych algebr Liego

(1) Niech $\mathfrak{g}$ będzie zespoloną algebrą Liego.

(i) $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ jest rzeczywistą algebrą Liego.

(ii) Niech κ będzie *sprzężeniem*, które jest jednocześnie homomorfizmem. Wtedy $\mathfrak{g}^{\kappa}$ jest rzeczywistą algebrą Liego.

(2) Niech $\mathfrak{h}$ będzie rzeczywistą algebrą Liego.

(i) $\mathbb{C}\mathfrak{h}$ jest zespoloną algebrą Liego.

(ii) Niech j antyinvolutywnym automorfizmem algebry $\mathfrak{h}$. Wtedy $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ jest zespoloną algebrą Liego.

Stwierdzenie 14.22 *Niech $\mathfrak{h}$ będzie rzeczywistą algebrą Liego.*

(1) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$ *jest ideałem (charakterystycznym)* $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}\mathfrak{a} \subset \mathbb{C}\mathfrak{h}$ *jest ideałem (charakterystycznym).*

(2) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \mathfrak{h}$ *implikuje* $[\mathbb{C}\mathfrak{a}, \mathbb{C}\mathfrak{b}] = \mathbb{C}[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$.

(3) $\mathfrak{h}$ *jest rozwiązalna* $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}\mathfrak{h}$ *jest rozwiązalna.*

(4) $\mathfrak{h}$ *jest nilpotentna* $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}\mathfrak{h}$ *jest nilpotentna.*

(5) $\mathfrak{h}$ *jest półprosta* $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}\mathfrak{h}$ *jest półprosta.*

Dowód. 5) $\Leftarrow$. Niech $\mathfrak{a}$ będzie niezerowym ideałem rozwiązalnym w $\mathbb{C}\mathfrak{h}$. Wtedy $\bar{\mathfrak{a}}$ też. Również $\mathfrak{b} := \mathfrak{a} + \bar{\mathfrak{a}}$ jest rozwiązalny. Wtedy $\mathbb{C}(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}) = \mathfrak{b}$. $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}$ jest niezerowym ideałem rozwiązalnym w $\mathfrak{h}$. □

14.10 Operator Casimira

Niech $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego a $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ jej ideałem. Wybierzmy bazę $B_1, \ldots, B_n$ w $\mathfrak{b}$. Załóżmy, że macierz

$$b_{ij} = \mathrm{Tr}\ B_i B_j.$$

jest nieosobliwa. Niech $[b^{ij}]$ będzie jej odwrotnością. *Operator Casimira dla ideału* $\mathfrak{b}$ jest zdefiniowany jako

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{b}} := \sum_{ij=1}^{n} B_i B_j b^{ij}.$$

Zauważmy, że operator Casimira nie zależy od wyboru bazy w $\mathfrak{b}$.

Twierdzenie 14.23 (1) *Operator Casimira komutuje z* $\mathfrak{g}$.

(2) $\mathrm{Tr}\mathcal{C}_{\mathfrak{b}} = \dim \mathfrak{b}$, *w szczególności* $\mathcal{C}_{\mathfrak{b}} \neq 0$.

(3) *Jeśli* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *i algebra* $\mathfrak{g}$ *działa nieprzywiedlnie w* $\mathcal{V}$, *to* $\mathcal{C}_{\mathfrak{b}} = \frac{\dim \mathfrak{b}}{\dim \mathcal{V}} \mathbb{1}$.

Dowód. (1). Niech $A \in \mathfrak{g}$. Z tego, że $\mathfrak{b}$ jest ideałem wynika, że

$$[A, B_i] = \sum_{k=1}^{n} t_i^k B_k.$$

Z niezmienniczości formy $\langle \cdot | \cdot \rangle_\rho$ wynika, że

$$\begin{aligned} 0 &= \langle [A, B_i] | B_j \rangle_\rho + \langle B_i | [A, B_j] \rangle_\rho \\ &= t_i^k b_{kj} + b_{ik} t_j^k. \end{aligned}$$

W skrótowym zapisie, $t^\# b - bt = 0$. Mnożąc przez odwrotność b z obu stron dostajemy $b^{-1} t^\# + t b^{-1} = 0$, czyli

$$0 = b^{ik} t_k^j + t_k^i b^{kj}.$$

Dlatego

$$\begin{aligned} [A, \mathcal{C}_{\mathfrak{b}}] &= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\rho([A, B_i]) \rho(B_j) + \rho(B_i) \rho([A, B_j]) \right) b^{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \left(t_i^k B_k B_j + B_i t_j^k B_k \right) b^{ij} \ = \ 0. \end{aligned}$$

□

14.11 Reprezentacje algebr półprostych

Stwierdzenie 14.24 *Algebry półproste Liego nie posiadają nietrywialnych reprezentacji 1-wymiarowych.*

Dowód. Jądro takiej reprezentacji musiałoby być ideałem kowymiaru 1. Musiałby istnieć zatem ideał wymiaru 1, który byłby z konieczności przemienny, co jest niemożliwe. $\Box$

Stwierdzenie 14.25 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Wtedy $\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna $\Leftrightarrow$ wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne algebry $\mathfrak{g}$ są jednowymiarowe.*

Dowód. $\Rightarrow$. Niech $\pi : \mathfrak{g} \to L(\mathcal{V})$ będzie nietrywialną reprezentacją zespoloną. Wtedy istnieje $v \in \mathcal{V}$ i $\alpha \in \mathfrak{g}^{\#}$ takie, że $Av = \alpha(A)v$. Zatem $\mathbb{C}v$ jest podprzestrzenią niezmienniczą. Zatem jeśli $\mathcal{V}$ jest nieprzywiedlna, to $\dim \mathcal{V} = 1$.

$\Leftarrow$. Niech $\mathfrak{g}$ nie będzie rozwiązalna. Niech $\mathfrak{r}$ będzie radykałem $\mathfrak{g}$. Wtedy $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ jest nietrywialną algebrą półprostą. Niech $\mathfrak{g}/\mathfrak{r} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \mathfrak{a}_n$ będzie rozkładem na proste składniki. Wtedy $(\mathfrak{g}/\mathfrak{r})/(\mathfrak{a}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n) \simeq \mathfrak{a}_1$. Reprezentacja dołączona $\mathfrak{a}_1 \to gl(\mathfrak{a}_1)$ jest nieprzywiedlna i $\dim \mathfrak{a}_1 > 1$. Podnosi się ona do reprezentacji (oczywiście, również nieprzywiedlnej) alfgebry $\mathfrak{g}$. $\Box$

Mówimy, że reprezentacja jest *półprosta*, jeśli dla każdej podprzestrzeni niezmienniczej znajdziemy dopełniającą podprzestrzeń niezmienniczą.

Stwierdzenie 14.26 *Jeśli reprezentacja jest półprosta i skończenie wymiarowa, to daje się rozłożyć na sumę prostą reprezentacji nierzywiedlnych.*

Każda niezerowa przemienna algebra posiada niepółproste reprezentacje. Np

$$\mathbb{K} \ni \alpha \mapsto \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 14.27 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *$\mathfrak{g}$ jest półprosta.*

(2) *Każda reprezentacja $\mathfrak{g}$ jest półprosta.*

Dowód. (2)$\Rightarrow$(1). Niech $\mathfrak{b}$ będzie ideałem przemiennym w $\mathfrak{g}$. Reprezentacja $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g})$ jest półprosta. $\mathfrak{b}$ jest podprzestrznią niezmienniczą. Zatem istnieje rozkład na podprzestrzenie niezmiennicze $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. Niezmienniczość względem ad oznacza bycie ideałem. Czyli $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Więc reprezentacje $\mathfrak{b}$ podnoszą się do reprezentacji $\mathfrak{g}$. Każda niezerowa przemienna algebra posiada niepółproste reprezentacje.

(1)$\Rightarrow$(2) Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego.

Krok 1. Załóżmy, że $\mathcal{Y}$ jest podprzestrzenią niezmienniczą kowymiaru 1 dla reprezentacji $\rho : \mathfrak{g} \to gl(\mathcal{X})$ i ρ obcięta do $\mathcal{Y}$ jest nieprzywiedlna. Pokażemy, że istnieje rozkład $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{T}$ na podprzestrzenie niezmiennicze.

Najpierw zauważmy, ża Stw. 14.24 pokazuje, że reprezentacja ilorazowa na $\mathcal{X}/\mathcal{Y}$ jest zerowa. Zatem $\rho(\mathcal{X}) \subset \mathcal{Y}$.

Oznaczmy ograniczenie ρ do $\mathcal{Y}$ przez ρ_0. Jeśli $\rho_0 = 0$, to $\rho(\mathfrak{g})\rho(\mathfrak{g})\mathcal{X} \subset \rho(\mathfrak{g})\mathcal{Y} = \{0\}$. Więc $\rho([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])\mathcal{X} = \{0\}$. Z półprostoty $\mathfrak{g}$ wynika, że $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, więc $\rho = 0$

Załóżmy więc, że $\rho_0 \neq 0$. Niech $\mathfrak{a} := \mathrm{Ker}\rho_0$. Z półprostoty $\mathfrak{g}$ wynika, że istnieje ideał $\mathfrak{b} \neq \{0\}$ taki, że $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. Reprezentacja ρ_0 (czyli też ρ) ograniczona do $\mathfrak{b}$ jest injektywna. Zatem forma śladowa na $\mathfrak{b}$

$$\langle A|B\rangle_\rho = \mathrm{Tr}\ \rho(A)\rho(B), \quad A, B \in \mathfrak{b},$$

jest nieosobliwa. Niech $\mathcal{C}_{\rho(\mathfrak{b})}$ będzie operatorem Casimira dla ideału $\rho(\mathfrak{b})$. Wtedy $\mathcal{C}_{\rho_0(\mathfrak{b})} = \mathcal{C}_{\rho(\mathfrak{b})}\Big|_{\mathcal{Y}}$ jest operatorem Casimira dla ideału $\rho_0(\mathfrak{b})$. Mamy $\mathrm{Tr}\mathcal{C}_{\rho_0(\mathfrak{b})} = \dim\mathfrak{b} \neq 0$,

$$\mathcal{C}_{\rho_0(\mathfrak{b})}\rho_0(A) = \rho_0(A)\mathcal{C}_{\rho_0(\mathfrak{b})}\rho_0(A), \quad A \in \mathfrak{g}.$$

Reprezentacja ρ_0 jest nieprzewiedlna, więc $\mathcal{C}_{\rho_0(\mathfrak{b})}$ jest skalarny. Więc $\mathrm{Ker}\mathcal{C}_{\rho_0(\mathfrak{b})} = \{0\}$. Obraz $\mathcal{C}_{\rho(\mathfrak{b})}$ leży w $\mathcal{Y}$. Więc $\mathcal{C}_{\rho(\mathfrak{b})}$ musi mieć nietrywialne jądro, które jest podprzestrzenią niezmienniczą dopełniającą do $\mathcal{Y}$.

Krok 2. Tak jak w Kroku 1, z tą różnicą, że nie zakładamy nieprzywiedlności ρ na $\mathcal{Y}$.

Stosujemy indukcję względem wymiaru $\mathcal{X}$. Niech $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Y}$ będzie nieprzywiedlną niezerową podprzestrzenią ρ-niezmienniczą. Rozważmy reprezentację ilorazową ρ' na $\mathcal{X}' := \mathcal{X}/\mathcal{Z}$ z podprzestrzenią niezmienniczą $\mathcal{Y}' := \mathcal{Y}/\mathcal{Z}$. Mamy $\dim\mathcal{X}' < \mathcal{X}$, $\dim\mathcal{X}'/\mathcal{Y}' = 1$. Zatem z założenia indukcyjnego wynika rozkład $\mathcal{X}' = \mathcal{Y}' \oplus \mathcal{R}'$ na sumę prostą podprzestrzeni ρ'-niezmienniczych. Niech $\mathcal{Y}, \mathcal{T}$ będą przeciwobrazami $\mathcal{Y}', \mathcal{T}'$ względem kanonicznej projekcji $\mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{Z}$. Wtedy, korzystając z tego, że $\rho(\mathfrak{g})\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$, dostajemy rozkład $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{T}$ na podprzestrzenie ρ-niezmiennicze.

Krok 3. Pokażemy, że dowolna reprezentacja jest półprosta.

Rozważmy reprezentację $\tau : \mathfrak{g} \to gl(\mathcal{V})$ i podprzestrzeń niezmienniczą $\mathcal{W}$. Zdefiniujmy nową reprezentację $\sigma : \mathfrak{g} \to gl(gl(\mathcal{V}))$

$$\sigma(A) := \mathrm{ad}(\tau(A)), \quad A \in \mathfrak{g}.$$

Niech

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &:= \{B \in gl(\mathcal{V}) \ : \ B\mathcal{V} \subset \mathcal{W},\ B\Big|_{\mathcal{W}} = \lambda 1\!\!1_{\mathcal{W}}\}, \\ \mathcal{N} &:= \{B \in gl(\mathcal{V}) \ : \ B\mathcal{V} \subset \mathcal{W},\ B\Big|_{\mathcal{W}} = 0\}. \end{aligned}$$

Jeśli wprowadzimy dowolny rozkład $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{U}$, to elementy $\mathcal{M}$ mają rozkład

$$B = \begin{bmatrix} \lambda 1\!\!1 & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oczywiście, $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$, $\dim\mathfrak{M}/\mathfrak{N} = 1$. Niech $A \in \mathfrak{g}$. Mamy

$$\tau(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \sigma(A)B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda 1\!\!1 & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda 1\!\!1 & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a_{11}b_{12} - \lambda a_{12} - b_{12}a_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zatem $\sigma(\mathfrak{g})\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$. Ograniczając σ do $\mathfrak{M}$ dostajemy reprezentację spełniającą założenia Kroku 2. Zatem $\mathcal{M} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{T}$, gdzie $\mathcal{T}$ jest niezmiennicze. Niech B będzie niezerowym elementem $\mathcal{T}$. Wtedy

$$B = \begin{bmatrix} \lambda \mathbb{1} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda \neq 0.$$

Zatem $\mathrm{Ker} B \cap \mathcal{W} = \{0\}$. Mamy $B\mathcal{V} = \mathcal{W}$, dlatego $\dim \mathrm{Ker} B + \dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{V}$. Zatem $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathrm{Ker} B$. Mamy

$$\sigma(A)B = 0, \quad A \in \mathfrak{g},$$

Zatem

$$\tau(A)B = B\tau(A), \quad A \in \mathfrak{g}.$$

Stąd $\tau(A)\mathrm{Ker} B \subset \mathrm{Ker} B$. Czyli $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathrm{Ker} B$ jest rozkładem na podprzestrzenie τ-niezmiennicze. □

14.12 Różniczkowania półprostej algebry Liego

Stwierdzenie 14.28 *Niech $\mathfrak{a}$ będzie półprostym idałem algebry Liego $\mathfrak{g}$. Wtedy $\mathfrak{a}$ jest ideałem charakterystycznym.*

Dowód. Mamy $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{a}$. Niech $\mathcal{D} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Wtedy

$$\mathcal{D}\mathfrak{a} = \mathcal{D}[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = [\mathcal{D}\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] + [\mathfrak{a}, \mathcal{D}\mathfrak{a}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] + [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}.$$

□

Stwierdzenie 14.29 *Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią zespoloną i $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego. Załóżmy, że*

(1) $\mathfrak{g}$ *nie posiada nietrywialnych niezmienniczych podprzestrzeni*

(2) $\mathbb{1} \notin \mathfrak{g}$.

Wtedy $\mathfrak{g}$ jest półprosta.

Dowód. Załóżmy, że $\mathfrak{g}$ posiada ideał rozwiązalny $\mathfrak{a}$. Na mocy Tw. Liego istnieje funkcjonał pierwiastkowy $\alpha \in \mathfrak{a}^{\#}$ taki, że

$$\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{a}) := \{v \in \mathcal{V} \ : \ Av = \alpha(A)v, \quad A \in \mathfrak{a}\} \neq \{0\}.$$

Ze Stwierdzenia 14.7 wynika i tego, że $\mathfrak{a}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$, wynika, że $\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{a})$ jest podprzestrzenią niezmienniczą dla $\mathfrak{g}$. Zatem z (1), $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{a})$. Stąd $A = \alpha(A)\mathbb{1}$, $A \in \mathfrak{a}$. Z (2) wynika, że $\alpha = 0$. Więc $\mathfrak{a} = \{0\}$, co oznacza, że $\mathfrak{g}$ jest półprosta. □

Lemat 14.30 *Jeśli $\mathfrak{g}$ jest półprosta, a $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$ jej rozkładem na proste ideały, to* $\mathrm{Der}\mathfrak{g} = \mathrm{Der}\mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Der}\mathfrak{a}_n$.

Dowód. Inkluzja $\subset$ jest oczywista.

Niech $\mathcal{D} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Ze Stw. 14.28 wynika, że ideały $\mathfrak{a}_i$ są niezmiennicze względem $\mathcal{D}$. Zatem $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{D}_n$. □

Twierdzenie 14.31 *Niech* $\mathfrak{g}$ *będzie półprostą algebrą Liego. Wtedy* $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ *jest izomorfizmem.*

Dowód. Jądro homomorfizmu dołączonego jest centrum. Centrum jest zerowe. Zatem ad jest injekcją.

Pokażmy surjektywność ad.

Załóżmy najpierw, że $\mathfrak{g}$ jest prosta. $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ jest podalgebrą w $gl(\mathfrak{g})$ nie zawierającą identyczności i nie posiadającą podprzestrzeni niezmienniczych. Dlatego, na podstawie Stwierdzenia 14.29 wnioskujemy, że $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ jest półprosta.

Jeśli $\mathfrak{g}$ jest półprosta, i $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$ jej rozkładem na proste ideały, to na mocy Lematu 14.30, $\mathrm{Der}\mathfrak{g} = \mathrm{Der}\mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Der}\mathfrak{a}_n$. Zatem $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ jest półproste.

$\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ jest ideałem w $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Z półprostoty $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ wynika, że istnieje ideał $\mathfrak{h}$ w $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ taki, że $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}$. Niech $\mathcal{D} \in \mathfrak{h}$, $A \in \mathfrak{g}$. Wtedy

$$0 = [\mathcal{D}, \mathrm{ad}(A)] = \mathrm{ad}(\mathcal{D}A).$$

Z injektywności ad wynika, że $\mathrm{ad}(\mathcal{D}A) = 0$. To implikuje $\mathcal{D}A = 0$. Zatem $\mathcal{D} = 0$. Czyli, $\mathfrak{h} = 0$. □

15 Nilpotentne algebry Liego

15.1 Struktura endomorfizmu liniowego

Niech $A \in L(\mathcal{V})$, gdzie $\mathcal{V}$ jest skończenie wymiarowa zespolona.

Twierdzenie 15.1 *Niech* $\lambda \in \mathbb{C}$ *Następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mathrm{Ker}(\lambda 1\!\!1 - A) \neq \{0\}$.

(2) $\mathrm{Ran}(\lambda 1\!\!1 - A) \neq \mathcal{V}$.

(3) $\det(\lambda 1\!\!1 - A) = 0$.

Zbiór λ spełniających powyższe warunki nazywamy *spektrum* operatora A i oznaczamy $\mathrm{spec}A$.

Mówimy, że D jest *półprosty* (*diagonalizowalny*), gdy posiada bazę złożoną z wektorów własnych. Czyli jeśli $\mathrm{spec}D = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, to $\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(\lambda_i 1\!\!1 - D)$ i względem tego rozkładu $D = \bigoplus_{i=1}^{k} \lambda_i 1\!\!1_i$.

Mówimy, że N jest *nilpotentny*, gdy dla pewnego p, $N^p = 0$. Najmniejszą taką liczbę, że $N^p = 0$ nazywamy jego *stopniem nilpotencji.*

Twierdzenie 15.2 *Niech* $\mathcal{V}$ *będzie przestrzenią nad* $\mathbb{C}$. *Wtedy istnieje jednoznaczny rozkład* $A = D + N$ *na część półprostą i nilpotentną takie, że* $DN = ND$.

Dowód. Niech $\lambda \in \mathrm{spec}A$. Ciąg podprzestrzeni $\mathrm{Ker}(A-\lambda_i)^j$ jest rosnący, więc się stabilizuje dla dostatecznie dużych j. Niech p będzie najmniejszą liczbą taką, że $\mathrm{Ker}(A-\lambda)^p = \mathrm{Ker}(A-\lambda_i)^{p+1}$. Zdefiniujmy wtedy

$$\mathcal{V}^\lambda(A) := \mathrm{Ker}(A-\lambda)^p = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathrm{Ker}(A-\lambda)^j.$$

Pokazujemy wtedy, że $\mathcal{V} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{spec}A} \mathcal{V}^\lambda(A)$. Kładąc $D = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{spec}A} \lambda$ i $N := A - D$ dostajemy rozkład. □

Operator N na n wymiarowej przestrzeni taki, że $N^{p-1} \neq 0$ i $N^p = 0$ nazywamy *elementarnym operatorem nilpotentnym p-tego stopnia.* Każdy taki operator można w odpowiedniej bazie przedstawić w postaci macierzy z jedynkami bezpośrednio nad diagonalą, którą oznaczymy N_p.

Twierdzenie 15.3 *Jeśli N jest nilpotentny, to istnieje rozkład $\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{V}_i$ taki, że N zachowuje $\mathcal{V}_i$ i $N\Big|_{\mathcal{V}_i}$ jest elementarnym operatorem nilpotentnym.*

Twierdzenie 15.4 *Niech $BD = DB$. Wtedy B zachowuje rozkład na podprzestrzenie własne operatora D.*

Twierdzenie 15.5 *Niech $\mathbb{R} \ni t \mapsto \phi(t) \in gl(\mathcal{V})$ będzie reprezentacją algebr Liego. Wtedy reprezentację możemy rozłożyć na nierozkładalne składowe postaci $t \mapsto t(\lambda\mathbb{1} + N_k)$.*

Twierdzenie 15.6 (1) *Niech $N \in L(\mathcal{V})$ będzie nilpotentny. Wtedy $\mathrm{ad}_N \in L(L(\mathcal{V}))$ też.*

(2) *Niech $D \in L(\mathcal{V})$ będzie nilpotentny. Wtedy $\mathrm{ad}_D \in L(L(\mathcal{V}))$ też.*

(3) *Niech $A \in L(cV)$ i niech $A = B + N$ będzie rozkładem na komutujące ze sobą operator półprosty i nilpotentny. Wtedy $\mathrm{ad}_A = \mathrm{ad}_D + \mathrm{ad}_N$ jest również takim rozkładem.*

Stwierdzenie 15.7 *Niech $A, B \in L(\mathcal{V})$. Jeśli istnieje k takie, że $\mathrm{ad}(A)^k B = 0$, to B zachowuje $\mathcal{V}^\lambda(A)$.*

Dowód. Niech

$$\mathcal{V}^\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A-\lambda)^m \ni x.$$

Załóżmy, że teza zachodzi, jeśli k zastąpimy przez $k-1$. Mamy

$$(A-\lambda)^n Bx = \sum_{i=1}^{n} (A-\lambda)^j [B, A](A-\lambda)^{n-j+1} x. \tag{15.47}$$

Mamy $\mathrm{ad}(A)^{k-1}[B, A] = 0$. Zatem na mocy założenia indukcyjnego, $[B, A]$ zachowuje $\mathrm{Ker}(A - \lambda)^m$.

Jeśli $n = 2m+1$, to w sumie (15.47) wszystkie składniki są równe zero, bo albo $n-j-1 \geq m$, i wtedy $(A-\lambda)^{n-j+1}x = 0$, albo $j \geq m$, i wtedy $y = [B, A](A-\lambda)^{n-j+1}x \in \mathrm{Ker}(A-\lambda)^m$, więc $(A-\lambda)^j y = 0$. □

Stwierdzenie 15.8 (1) *Niech $D \in gl(\mathcal{V})$ będzie półprosty. Wtedy* $\mathrm{ad}(D) \in gl(gl(\mathcal{V}))$ *jest półprosty.*

(2) *Niech $N \in gl(\mathcal{V})$ będzie półprosty. Wtedy* $\mathrm{ad}(N) \in gl(gl(\mathcal{V}))$ *jest półprosty.*

Dowód. (1) Niech $e_1, \dots, e_n$ będzie bazą taką, że $De_i = \lambda_i e_i$. Wtedy

$$\mathrm{ad}(D)|e_i\rangle\langle e_j| = (\lambda_i - \lambda_j)|e_i\rangle\langle e_j|.$$

(2) Niech $N^p = 0$. Wtedy $\mathrm{ad}(N)^{2p-1} = 0$. □

Stwierdzenie 15.9 *Niech $A = S + N$ będzie rozkładem $A \in L(\mathcal{V})$ na część półprostą i nilpotentną.*

(1) $\mathrm{ad}(A) = \mathrm{ad}(S) + \mathrm{ad}(N)$ *jest kanonicznym rozkładem* $\mathrm{ad}(A) \in gl(gl(\mathcal{V}))$ *na część półprostą i nilpotentną.*

(2) *Niech* $0 = [B, A]$. *Wtedy* $0 = [B, S] = [B, N]$.

Dowód. (1) Sprawdzamy, że $\mathrm{ad}(S)$ komutuje z $\mathrm{ad}(N)$.

(2) Istnieje wielomian s taki, że $S = s(A)$. Dlatego też, istnieje wielomian $\tilde{s}$ taki, że $\mathrm{ad}(S) = \tilde{s}(\mathrm{ad}(A))$. □

15.2 Twierdzenie Engela

Twierdzenie 15.10 *Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią zespoloną i $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego składającą się z operatorów nilpotentnych. Wtedy*

(1) *(**Twierdzenie Engela**) 0 jest funkcjonałem pierwiastkowym dla $\mathfrak{g}$, czyli istnieje $v \in \mathcal{V}$, $v \neq 0$ taki, że $Av = 0$, $A \in \mathfrak{g}$.*

(2) *Istnieje baza w $\mathcal{V}$ dla której $\mathfrak{g}$ jest podalgebrą macierzy ściśle górnotrójkątnych.*

(3) *$\mathfrak{g}$ jest nilpotentna.*

Lemat 15.11 *Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią zespoloną. Niech $\mathfrak{A} \subset L(\mathcal{V})$ będzie algebrą łączną składającą się z operatorów nilpotentnych. Wtedy istnieje $v \in \mathcal{V}$, $v \neq 0$ taki, że $Av = 0$, $A \in \mathfrak{A}$.*

Dowód. Można założyć, że $\mathfrak{A} \neq \{0\}$. Pokażemy najpierw, że $\mathfrak{A}$ posiada nietrywialną podprzestrzeń niezmienniczą. Załóżmy, że tak nie jest. Znajdziemy $y \in \mathcal{V}$, $B \in \mathfrak{A}$ takie, że $z := By \neq 0$. Wedy $\mathfrak{A}z$ jest niezerową podprzestrzenią niezmienniczą. Zatem $\mathfrak{A}z = \mathcal{V}$. Stąd istnieje $C \in \mathfrak{A}$ taki, że $Cz = y$. Czyli $CBy = y$, co oznacza, że CB nie jest nilpotentny. Ale $CB \in \mathfrak{A}$ (bo $\mathfrak{A}$ jest algebrą) – sprzeczność.

Stosując teraz indukcję względem wymiaru dostajemy jednowymiarową podprzestrzeń niezmienniczą. Z powodu nilpotentności, elementy $\mathfrak{A}$ muszą się na niej zerować. □

Lemat 15.12 *Niech $\mathfrak{A}$ będzie algebrą łączną generowaną przez algebrę Liego $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$. Wtedy dla każdego $C \in \mathfrak{A}$ istnieją $A_1, \ldots, A_k \in \mathfrak{g}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ i $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ takie, że*

$$C = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i^{n_i}. \tag{15.48}$$

Dowód. Każdy element $\mathfrak{A}$ jest kombinacją liniową wyrażeń postaci.

$$B_1 \cdots B_n, \qquad B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{g}. \tag{15.49}$$

Wyrażenia typu (15.49) nazwiemy wyrażeniami długości n.

Niech $\phi \in \mathfrak{A}^{\#}$ zeruje się na wyrazach postaci (15.48). Trzeba pokazać, że $\phi = 0$. Pokażemy indukcyjnie, że ϕ zeruje się na wyrażeniach długości n

Załóżmy, że jest to prawda dla $n-1$. Oczywiście,

$$\phi\left(\sum_{\sigma \in S_n} B_{\sigma(1)} \cdots B_{\sigma(n)}\right) = \partial_{t_1} \ldots \partial_{t_n} \phi\left((t_1 B_1 + \cdots + t_n B_n)^n\right)\Big|_{t_1 = \cdots = t_n = 0} = 0. \tag{15.50}$$

Ale

$$\sum_{\sigma \in S_n} B_{\sigma(1)} \cdots B_{\sigma(n)} = n! B_1 \cdots B_n + C$$

gdzie C jest kombinacją liniową wyrażeń długości $\leq n-1$. Więc $\phi(B_1 \cdots B_n) = 0$. $\square$

Lemat 15.13 *Niech* $\dim \mathcal{V} = n$ *i* $A \in L(\mathcal{V})$. *Wtedy natępujące warunki są równoważne:*

(1) *A jest nilpotentny.*

(2) $\mathrm{Tr} A^k = 0$, $k = 1, \ldots, n$.

Dowód. (1)⇒(2) jest oczywisty.

(2)⇒(1). Niech $\mathrm{spec} A = \{\lambda_1, \ldots \lambda_k\}$ z krotnościami $m_1, \ldots, m_k$. Wtedy (2) oznacza

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \lambda_i^j = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{15.51}$$

Połóżmy $\mu_i := m_i \lambda_i$. (15.51) implikuje

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i \lambda_i^j = 0, \quad j = 0, \ldots, m-1. \tag{15.52}$$

Macierz $[\lambda_i^j]$ to macierz Vandermonda z wyznacznikiem $\prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j)$. Istnienie niezerowego rozwiązania (15.52) oznacza, że $\prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j) = 0$, czyli wszystkie λ_i są równe jakiemuś λ, Ale wtedy $\mathrm{Tr} A^k = n\lambda^k = 0$, więc $\lambda = 0$. Zatem (15.52) ma tylko zerowe rozwiązanie, zatem $\lambda_i = 0$. $\square$

Lemat 15.14 *Niech $\mathfrak{A} \subset L(\mathcal{V})$ będzie algebrą łączną. Jeśli* $\mathrm{Tr}A = 0$*,* $A \in \mathfrak{A}$*, to wszystkie elementy $\mathfrak{A}$ są nilpotentne.*

Dowód. Natychmiastowa konsekwencja z Lematu 15.13. □

Lemat 15.15 *Niech $\mathfrak{A} \subset L(\mathcal{V})$ będzie algebrą łączną generowaną przez algebrę Liego $\mathfrak{g}$ składającą się z operatorów nilpotentnych. Wtedy wszystkie elementy $\mathfrak{A}$ są nilpotentne.*

Dowód. Potęgi operatorów nilpotentnych są nilpotentne. Więc z Lematu 15.12 wynika, że $\mathfrak{A}$ składa się ona z kombinacji liniowych operatorów nilpotentnych. Wobec tego, wszystkie operator w $\mathfrak{A}$ mają ślad równy 0. Wystarczy więc zastosować Lemat 15.14. □

Dowód Twierdzenia 15.10. (1) Niech $\mathfrak{A}$ będzie algebrą łączną generowaną przez $\mathfrak{g}$. Z lematu 15.11 wynika, że istnieje wspólny zerowy wektor własny dla $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{g}$.

(1) implikuje (2) przez indukcję.

(2) pociąga za sobą (3). □

15.3 Przestrzenie pierwiastkowe algebry nilpotentnej

Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią zespoloną a $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego. Dla $\alpha \in \mathfrak{g}^{\#}$ definiujemy

$$\mathcal{V}_j^{\alpha}(\mathfrak{g}) := \bigcap_{A\in\mathfrak{g}} \mathrm{Ker}(A - \alpha(A)\mathbb{1})^j.$$

Jest to rodzina rosnąca ze względu na j. Definiujemy

$$\mathcal{V}^{\alpha}(\mathfrak{g}) := \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{V}_j^{\alpha}(\mathfrak{g}).$$

Przez spec $\mathfrak{g}$ oznaczamy zbiór pierwiastków algebry $\mathfrak{g}$, to znaczy $\alpha \in \mathfrak{g}^{\#}$ dla których $\mathcal{V}^{\alpha}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$.

Twierdzenie 15.16 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie nilpotentną algebrą Liego. Wtedy*

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{spec}\ \mathfrak{g}} \mathcal{V}^{\alpha}(\mathfrak{g}).$$

Dla $A \in \mathfrak{g}$ zdefiniujmy

$$A_{\mathrm{nil}} := A - \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{spec}\ \mathfrak{g}} \alpha(A)\mathbb{1}_{\mathcal{V}^{\alpha}(\mathfrak{g})}.$$

Wtedy $\mathfrak{g} \ni A \mapsto A_{\mathrm{nil}} \in gl(\mathcal{V})$ jest reprezentacją o wartościach w operatorach nilpotentnych. Poza tym, $\alpha([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 0$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że wszystkie $A \in \mathfrak{g}$ mają widmo jednopunktowe. Kładąc

$$\langle\alpha|A\rangle := \frac{\mathrm{Tr}A}{\dim\mathcal{V}}$$

mamy wtedy $\mathrm{spec}A = \{\langle\alpha|A\rangle\}$. Więc $A - \langle\alpha|A\rangle$ ma widmo zerowe, więc są nilpotentne.

Niech istnieje $A \in \mathfrak{g}$ i $\mathrm{spec}A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Wtedy na mocy Tw. 15.7, każdy $B \in \mathfrak{g}$ zachowuje rozkład $\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{V}^{\lambda_i}(A)$. Zatem możemy zastosować skończoną indukcję. □

15.4 Przestrzenie pierwiastkowe w algebrach Liego

Stwierdzenie 15.17 *Niech* $\mathfrak{g}$ *będzie algebrą Liego i* $\mathcal{D} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$*. Niech*

$$\mathfrak{g}^{\lambda}(\mathcal{D}) := \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathrm{Ker}(\mathcal{D}-\lambda)^{j}$$

tak że

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{g}^{\lambda_i}(\mathcal{D}).$$

Wtedy

$$\left[\mathfrak{g}^{\lambda}(\mathcal{D}), \mathfrak{g}^{\mu}(\mathcal{D})\right] \subset \mathfrak{g}^{\lambda+\mu}(\mathcal{D}).$$

Dowód. Iterując

$$(\mathcal{D}-\lambda-\mu)[A,B] = [(\mathcal{D}-\lambda)A, B] + [A(\mathcal{D}-\mu)B],$$

dostajemy

$$(\mathcal{D}-\lambda-\mu)^{n}[A,B] = \sum \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} \left[(\mathcal{D}-\lambda)^{j}A, (\mathcal{D}-\mu)^{n-j}B\right].$$

Więc jeśli $(\mathcal{D}-\lambda)^{k}A = 0$ i $(\mathcal{D}-\mu)^{m}B = 0$, to $(\mathcal{D}-\lambda-\mu)^{k+m}[A,B] = 0$. □

Twierdzenie 15.18 *Niech* $\mathfrak{g}$ *będzie algebrą Liego. Niech* $\mathfrak{h}$ *będzie nilpotentną algebrą Liego i* $\rho : \mathfrak{h} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ *reprezentacją. Niech*

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{spec}\rho} \mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h})$$

będzie rozkładem na przestrzenie pierwiastkowe. Wtedy

$$[\mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h}), \mathfrak{g}^{\beta}(\mathfrak{h})] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}(\mathfrak{h}).$$

W szczególności, możemy założyć, że $\mathfrak{h}$ jest nilpotentną podalgebrą $\mathfrak{g}$ i reprezentacja jest zadana przez

$$\mathfrak{h} \ni H \mapsto \mathrm{ad}(H) \in gl(\mathfrak{g}).$$

Wśród pierwiastków mamy wtedy 0. Oczywiście, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^{0}(\mathfrak{h})$. Zarówno $\mathfrak{h}$ jak i $\mathfrak{g}^{0}(\mathfrak{h})$ są podprzestrzeniami niezmienniczymi.

15.5 Algebry Cartana–przypadek ogólny

Niech $\mathfrak{a}$ będzie podalgebrą algebry Liego $\mathfrak{g}$. *Normalizatorem* $\mathfrak{a}$ nazywamy

$$\mathrm{Nor}\mathfrak{a} := \{A \in \mathfrak{g} \ : \ [A, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}\}.$$

Stwierdzenie 15.19 Nor$\mathfrak{a}$ *jest największą z podalgebr algebry* $\mathfrak{g}$ *zawierającą* $\mathfrak{a}$ *jako ideał.*

Mówimy, że $\mathfrak{h}$ jest podalgebrą Cartana algebry Liego $\mathfrak{g}$, gdy

(1) $\mathfrak{h}$ jest algebrą nilpotentną.

(2) $\mathrm{Nor}\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$.

Stwierdzenie 15.20 *Niech $\mathfrak{h}$ będzie nilpotentą podalgebrą w $\mathfrak{g}$. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *$\mathfrak{h}$ jest podalgebrą Cartana w $\mathfrak{g}$.*

(2) *$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$.*

Dowód. (1)$\Rightarrow$(2). Oczywiście, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. Załóżmy, że nie ma równości. Oznaczmy przez ρ reprezentację

$$\mathfrak{h} \ni H \mapsto \mathrm{ad}(H) \in gl(\mathfrak{g}).$$

Reprezentacja ρ ograniczona do $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ składa się z samych endomorfizmów nilpotentnych. Tak samo, reprezentacja ilorazowa ρ' w $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$. Na mocy Tw. Engela (Tw. 15.10), istnieje $B + \mathfrak{h} \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$, $B + \mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}$, dla którego $\rho'(\mathfrak{h})(B + \mathfrak{h}) = 0$. Oznacza to, że $B \notin \mathfrak{h}$ i $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})B \subset \mathfrak{h}$. Zatem algebra generowana przez $\mathfrak{h}$ i B jest zawarta w normalizatorze $\mathfrak{h}$ i jest większa od $\mathfrak{h}$. Więc $\mathfrak{h}$ nie jest algebrą Cartana.

(2)$\Rightarrow$(1). Niech $C \in \mathrm{Nor}\mathfrak{h}$, $C = \sum_\alpha C_\alpha$, $C_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h})$. Dla $B \in \mathfrak{h}$ mamy $\mathrm{ad}(B)C_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h})$ i

$$\mathrm{ad}(B)C = \sum_\alpha \mathrm{ad}(B)C_\alpha \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}).$$

Dlatego $C_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$, czyli $C_\alpha = 0$, $\alpha \neq 0$. Zatem $C = C_0 \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. Czyli $\mathrm{Nor}\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. $\square$

Stwierdzenie 15.21 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Każda jej podalgebra Cartana jest jej maksymalną podalgebrą nilpotentną.*

Dowód. Niech $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$, gdzie $\mathfrak{h}$ jest Cartana a $\mathfrak{n}$ jest nilpotentna. Rozważmy wstępujący ciąg centralny $\{0\} = \mathcal{C}_0\mathfrak{n} \subset \cdots \subset \mathcal{C}_m\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$. Niech k będzie najmniejszą z liczb dla których $\mathcal{C}_k\mathfrak{n} \not\subset \mathfrak{h}$. Niech $A \in \mathcal{C}_k\mathfrak{n}\backslash\mathfrak{h}$. Mamy

$$[A, \mathfrak{n}] \subset \mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{n} \subset \mathfrak{h},$$

zatem $\mathfrak{h}$ jest ideałem algebry $\mathfrak{a}$ generowanej przez $\mathfrak{h}$ i A. Więc $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Nor}\mathfrak{h}$. Oczywście, $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{a}$. Zatem $\mathrm{Nor}\mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}$. $\square$

Twierdzenie 15.22 *Niech $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ będzie formą Killinga na algebrze Liego $\mathfrak{g}$. Niech $\mathfrak{h}$ będzie jej podalgebrą Cartana.*

(1) *Jeśli $\alpha + \beta \neq 0$, to $\mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h})$ i $\mathfrak{g}^\beta(\mathfrak{h})$ są ortogonalne względem $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$.*

(2) *Rozkład*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{(\alpha,-\alpha)} \big(\mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}(\mathfrak{h})\big) \tag{15.53}$$

jest rozkładem na sumę prostą ortogonalnych podprzestrzeni.

Dowód. Niech $A \in \mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h})$, $B \in \mathfrak{g}^{\beta}(\mathfrak{h})$ i $C \in \mathfrak{g}^{\gamma}(\mathfrak{h})$. Wtedy

$$(\mathrm{ad}(A)\mathrm{ad}(B))^n C \in \mathfrak{g}^{(\alpha+\beta)n+\gamma}(\mathfrak{h}).$$

Ponieważ dla dużych n, $\mathfrak{g}^{(\alpha+\beta)n+\gamma}(\mathfrak{h}) = \{0\}$, więc $\mathrm{ad}(A)\mathrm{ad}(B)$ jest nilpotentny. Zatem

$$\langle A|B\rangle = \mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}(A)\mathrm{ad}(B) = 0.$$

15.6 Elementy półproste i nilpotentne w półprostych algebrach Liego

Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego nad $\mathbb{C}$.

Twierdzenie 15.23 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ *jest izomorfizmem.*

Dowód. $\mathrm{Ker ad} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Dla półprostych $\mathfrak{g}$, centrum jest zerowe. Zatem ad jest injekcją.

Pokażemy teraz, że ad jest surjekcją. Niech $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \dots \mathfrak{a}_n$ będzie rozkładem na ideały proste. (...) □

Twierdzenie 15.24 *Niech $A \in \mathfrak{g}$. Wtedy istnieją jedyne elementy $S, N \in \mathfrak{g}$ takie, że $\mathrm{ad}_A = \mathrm{ad}_S + \mathrm{ad}_N$ jest kanonicznym rozkładem na część półprostą i nilpotentną. Mamy $A = S + N$.*

Dowód. Mamy rozkład $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{spec}\ \mathrm{ad}(A)} \mathfrak{g}^{\alpha}(A)$. Zdefiniujmy $\mathcal{S}, \mathcal{N} \in L(\mathfrak{g})$, $\mathcal{S} = \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{spec}\ \mathrm{ad}(A)} \alpha$, $\mathcal{N} := \mathrm{ad}(A) - \mathcal{S}$. Z tego, że $\left[\mathfrak{g}^{\alpha}(A), \mathfrak{g}^{\beta}(A)\right] = \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}(A)$, wynika, że $\mathcal{S} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Dlatego $\mathcal{N} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Z Tw. 15.23 wynika, że istnieją $S, N \in \mathfrak{g}$ takie, że $\mathcal{S} = \mathrm{ad}(S)$, $\mathcal{N} = \mathrm{ad}(N)$. □

Stwierdzenie 15.25 *Niech $A, B \in \mathfrak{g}$ i $A = S + N$ będzie kanonicznym rozkładem na część półprostą i nilpotentną. Jeśli $[A, B] = 0$, to $[S, B] = [N, B] = 0$.*

Dowód. $\mathrm{ad}(A) = \mathrm{ad}(S) + \mathrm{ad}(N)$ jest kanonicznym rozkładem na część półprostą i nilpotentną. Poza tym, $0 = \mathrm{ad}([A, B]) = [\mathrm{ad}(A), \mathrm{ad}(B)]$. Więc $0 = [\mathrm{ad}(S), \mathrm{ad}(B)] = [\mathrm{ad}(N), \mathrm{ad}(B)]$. Ponieważ ad jest izomorfizmem, więc $0 = [S, B] = [N, B]$. □

16 Struktura algebr półprostych

16.1 Podalgebra Cartana dla algebr półprostych

Twierdzenie 16.1 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego nad $\mathbb{C}$ a $\mathfrak{h}$ jej podalgebrą. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *$\mathfrak{h}$ jest algebrą Cartana.*

(2) *$\mathfrak{h}$ jest maksymalną podalgebrą przemienną i wszystkie elementy $\mathfrak{h}$ są półproste.*

Poza tym, jeśli $\langle\cdot|\cdot\rangle$ jest niezdegenerowaną formą niezmienniczą, to jej ograniczenie do $\mathfrak{h}$ jest niezdegenerowane.

Dowód. (2)$\Rightarrow$(1) Niech $H \in \mathfrak{h}$, $B \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. Z półprostoty H wynika, że $[H, B] = 0$. Zatem algebra generowana przez $\mathfrak{h}$ i B jest przemienna. Z maksymalności $\mathfrak{h}$ jako algebry przemiennej wynika, że $B \in \mathfrak{h}$. Więc $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. Więc $\mathfrak{h}$ jest podalgebrą Cartana.

Niech $A, B \in \mathfrak{h}$ i $A = S + N$ będzie kanonicznym rozkładem na część półprostą i nilpotentną. Z przemienności $\mathfrak{h}$ wynika $[A, B] = 0$. Zatem $[N, B] = 0$. Dlatego $(\mathrm{ad}(N)\mathrm{ad}(N))^n = \mathrm{ad}(B)^n \mathrm{ad}(N)^n = 0$. Stąd $\mathrm{ad}(N)\mathrm{ad}(N)$ jest nilpotentny. Czyli, $\langle B|N\rangle = \mathrm{Trad}(B)\mathrm{ad}(N) = 0$. Zatem N jest ortogonalny do $\mathfrak{h}$. Stąd $N = 0$.

(1)$\Rightarrow$(2) Z niezdegenerowania formy i rozkładu (15.53) wynika niezdegenerowanie formy na $\mathfrak{h}$.

Z nilpotentności $\mathfrak{h}$ i kryterium Cartana wynika, że

$$\langle C|[A, B]\rangle = 0, \quad A, B, C \in \mathfrak{h}.$$

Zatem $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ jest ortogonalne do $\mathfrak{h}$. Z niezdegerowania formy na $\mathfrak{h}$ wynika, że $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \{0\}$. Zatem $\mathfrak{h}$ jest przemienna.

Niech $A \in \mathfrak{h}$ i niech $A = S + N$ będzie kanonicznym rozkładem na część półprostą i nilpotentną. .... $\square$

16.2 Zbiór pierwiastków półprostej algebry Liego

Ustalmy zespoloną półprostą algebrę Liego $\mathfrak{g}$ z algebrą Cartana $\mathfrak{h}$. Niech $\mathcal{R} \subset \mathfrak{h}^\#$ oznacza zbiór niezerowych funkcjonałów pierwiastkowych. Dla $\alpha \in \mathcal{R}$, będziemy pisać $\mathfrak{g}^\alpha$ zamiast $\mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h})$

Dla $\alpha \in \mathfrak{h}^\#$ definiujemy $\alpha^\# \in \mathfrak{h}$ wzorem

$$\langle \alpha^\# | A\rangle = \alpha(A).$$

Niech $\mathcal{R}^\# := \{\alpha^\# \ : \ \alpha \in \mathcal{R}\}$.

Przenosimy iloczyn z $\mathfrak{h}$ na $\mathfrak{h}^\#$ przez dualność:

$$\langle \alpha|\beta\rangle := \langle \alpha^\# | \beta^\#\rangle.$$

Dla $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ definiujemy *macierz Cartana* i *macierz Coxetera*

$$\begin{aligned} M(\alpha, \beta) &:= \frac{2\langle \alpha|\beta\rangle}{\langle \alpha|\alpha\rangle}, \\ C(\alpha, \beta) &:= \frac{\langle \alpha|\beta\rangle}{\sqrt{\langle \alpha|\alpha\rangle}\sqrt{\langle \beta|\beta\rangle}}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 16.2 (1) *$\alpha \in \mathcal{R}$ implikuje $-\alpha \in \mathcal{R}$.*

(2) *$A_\pm \in \mathfrak{g}^{\pm\alpha}$ implikuje $[A_+, A_-] = \langle A_+|A_-\rangle \alpha^\#$.*

(3) *$\alpha \in \mathcal{R}$ implikuje $\langle \alpha|\alpha\rangle = \alpha(\alpha^\#) \neq 0$. Zatem możemy zdefiniować $H_\alpha := \frac{2\alpha^\#}{\langle \alpha|\alpha\rangle}$.*

(4) *Jeśli $A_\pm$ są niezerowymi elementami $\mathfrak{g}^{\pm\alpha}$, to podalgebra Liego generowana przez A_+, A_- i $\alpha^\#$ jest izomorficzna z $sl(2)$.*

(5) *$\alpha \in \mathcal{R}$ implikuje $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$.*

(6) $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$ *implikuje*

$$\langle H_1|H_2\rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} \alpha(H_1)\alpha(H_2). \tag{16.54}$$

(7) $\mathcal{R}^\#$ *generuje liniowo* $\mathfrak{h}$.

(8) *Niech* $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$. *Wtedy* $M(\alpha, \beta)$ *jest liczbą całkowitą.*

(9) *Jeśli* $\alpha \in \mathcal{R}$, $t \in \mathbb{C}$ *i* $t\alpha \in \mathcal{R}$, *to* $t = \pm 1$.

(10) *Możliwe niezerowe wartości* $M(\alpha, \beta)$ *to*

 (i) $M(\alpha, \beta) = M(\beta, \alpha) = \pm 2$, *wtedy* $C(\alpha, \beta) = \pm 1$ *i* $\beta = \pm\alpha$

 (ii) $M(\alpha, \beta) = M(\beta, \alpha) = \pm 1$, *wtedy* $C(\alpha, \beta) = \pm\frac{1}{2}$ *i* α, β *mają tę samą długość.*

 (iii) $M(\alpha, \beta) = \pm 2$, $M(\beta, \alpha) = \pm 1$, *wtedy* $C(\alpha, \beta) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ *i* β *jest* $\sqrt{2}$ *razy dłuższy od* α.

 (iv) $M(\alpha, \beta) = \pm 3$, $M(\beta, \alpha) = \pm 1$, *wtedy* $C(\alpha, \beta) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ *i* β *jest* $\sqrt{3}$ *razy dłuższy od* α.

(11) *Niech* $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \mathcal{R}$. *Wtedy* $M(\alpha, \beta) < 0$, *istnieją* $n_\pm \in \mathbb{Z}$ *takie, że* $-M(\alpha, \beta) = n_+ - n_-$, *i*

$$\alpha + k\beta \in \mathcal{R}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n_- \le k \le n_+.$$

(12) $\mathcal{R}$ *jest niezmienniczy względem odbicia w hiperpłaszczyźnie prostopadłej do* $\beta \in \mathcal{R}$. *Czyli* $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ *implikuje* $\alpha - \frac{2\langle\alpha|\beta\rangle\beta}{\langle\beta|\beta\rangle} \in \mathcal{R}$.

Dowód. (1) Forma $\langle\cdot|\cdot\rangle$ jest nieosobliwa na $\mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$, oraz zerowa na $\mathfrak{g}^\alpha$ i $\mathfrak{g}^{-\alpha}$. Zatem $\dim\mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}^{-\alpha}$.

(2) Niech $H \in \mathfrak{h}$.

$$\begin{aligned} \langle [A_+, A_-]|H\rangle &= \langle A_+|[A_-, H]\rangle \\ = \langle A_+|A_-\rangle\alpha(H) &= \langle A_+|A_-\rangle\langle\alpha^\#|H\rangle. \end{aligned}$$

Zatem, $[A_+, A_-] - \langle A_+|A_-\rangle\alpha^\#$ jest ortogonalny do $\mathfrak{h}$, więc równy 0.

(3) Przypuśćmy, że $\alpha(\alpha^\#) = 0$. Niech $A_\pm \in \mathfrak{g}^{\pm\alpha}$, $\langle A_+|A_-\rangle = 1$. Wtedy $[\alpha^\#, A_\pm] = \pm\alpha(\alpha^\#)A_\pm = 0$, $[A_+, A_-] = \alpha^\#$. Zatem A_+, A_- i $\alpha^\#$ rozpinają 3-wymiarową podalgebrę nilpotentną. Rozpatrzmy reprezentację dołączoną tej podalgebry. Operator $\mathrm{ad}(\alpha^\#)$ ma na przekątnej wyrazy zerowe, więc jest nilpotentny. Ale $\alpha^\# \in \mathfrak{h}$, więc $\mathrm{ad}(\alpha^\#)$ jest półprosty. Zatem $\mathrm{ad}(\alpha^\#) = 0$, skąd $\alpha^\# = 0$, co jest niezgodne z założeniem.

(4) Mnożąc $A_\pm$ przez odpowiednie czynniki dostajemy $\langle A_+|A_-\rangle = \frac{2}{\langle\alpha^\#|\alpha^\#\rangle}$. Wtedy dostajemy $[H_\alpha, A_\pm] = \pm 2A_\pm$, $[A_+, A_-] = H_\alpha$.

(5) Załóżmy, że $\dim\mathfrak{g}^\alpha > 1$. Wtedy $\dim\mathfrak{g}^{-\alpha} > 1$. Znajdziemy zatem $A_\pm \in \mathfrak{g}^{\pm\alpha}$, $B \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ takie, że $\langle A_+|A_-\rangle = \frac{2}{\langle\alpha^\#|\alpha^\#\rangle}$ i $\langle A_+|B\rangle = 0$. May $\mathrm{ad}(A^+)B = 0$ i $\mathrm{ad}(H_\alpha)B = -2B$. Zatem B jest wektorem najwyższej wagi dla reprezentacji $\mathrm{Span}(A_+, A_-, H) \simeq sl(2, \mathbb{C})$ z wagą -2. Reprezentacja taka nie jest skończenie wymiarowa. Więc $B = 0$.

(6) Niech $H \in \mathfrak{h}$, $A \in \mathfrak{g}$. Mamy rozkład $A = A_0 + \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} A_\alpha$ i $\mathrm{ad}(H)A = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} \alpha(H)A_\alpha$. Biorąc pod uwagę, że $\dim\mathfrak{g}^\alpha = 1$ dostajemy

$$\mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}(H_1)\mathrm{ad}(H_2) = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} \alpha(H_1)\alpha(H_2).$$

(7) Jeśli wzór (16.54) przepiszemy jako

$$\langle H_1|H_2\rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} \langle H_1|\alpha^{\#}\rangle\langle\alpha^{\#}|H_2\rangle,$$

to widzimy, że $H \perp \mathrm{Span}\mathcal{R}^{\#}$ oznacza $\langle H|H\rangle = 0$.

(8) Z własności skończenie wymiarowych reprezentacji $sl(2\mathbb{C})$ wynika, że $\mathrm{ad}(H_\alpha)$ ma całkowite wartości własne. Dla $B \in \mathfrak{g}^\beta$ mamy

$$\mathrm{ad}(H_\alpha)B = \frac{2\langle\alpha^{\#}|\beta^{\#}\rangle}{\langle\alpha^{\#}|\alpha^{\#}\rangle}B.$$

(8) Niech $\beta = t\alpha$.

$$2t = \frac{2\langle\alpha^{\#}|\beta^{\#}\rangle}{\langle\alpha^{\#}|\alpha^{\#}\rangle}, \quad \frac{2}{t} = \frac{2\langle\alpha^{\#}|\beta^{\#}\rangle}{\langle\beta^{\#}|\beta^{\#}\rangle}$$

są całkowite, więc $t \in \left\{1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$. Wystarczy rozważyć $t = 2$.

Wybierzmy niezerowe $A_\pm$ jak w dowodzie (4) i $B_\pm \in \mathfrak{g}^{\pm 2\alpha}$. Algebra Liego $\mathrm{Span}(A_+, A_-, H) \simeq sl(2, \mathbb{C})$ działa na 5-wymiarową przestrzeń $\mathrm{Span}(A_+, A_-, B_+, B_-, H_\alpha)$ i ma w niej podprzestrzeń niezmienniczą $\mathrm{Span}(A_+, A_-, H)$. Jako algebra półprosta, ma podprzestrzeń dopełniającą 2-wymiarową, w której H_α ma wartości własne $2, -2$, co jest niemożliwe.

(9) Jeśli α i β nie są równoległe, to

$$M(\alpha, \beta)M(\beta, \alpha) = 4C(\alpha, \beta)^2 < 4.$$

Poza tym, $M(\alpha, \beta)$ i $M(\beta, \alpha)$ mają ten sam znak.

(10) Niech

$$n_+ := \sup\left\{n \ : \ \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha} \neq \{0\}\right\}, \quad n_- := \inf\left\{n \ : \ \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha} \neq \{0\}\right\}.$$

Rozważmy przestrzeń

$$\alpha := \bigoplus_{n=n_-}^{n_+} \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha}.$$

Wybierzmy niezerowe $B_\pm \in \mathfrak{g}^{\beta+n_\pm\alpha}$ oraz niech $A_\pm$ będzie jak w dowodzie (4). Mamy

$$[H_\alpha, B_\pm] = \frac{2\langle\alpha^{\#}|\beta^{\#}\rangle + 2n_\pm\langle\alpha^{\#}|\alpha^{\#}\rangle}{\langle\alpha^{\#}|\alpha^{\#}\rangle}B_\pm = (m(\alpha, \beta) + 2n_\pm)B_\pm.$$

Poza tym, $[A_\pm, B_\pm] = 0$, (bo $\mathfrak{g}^{\beta+(n_\pm\pm1)\alpha} = \{0\}$). Niech $\mathfrak{a}_\pm$ będą minimalnymi podprzestrzeniami niezmienniczymi dla $\mathrm{Span}(A_+, A_-, H) \simeq sl(2, \mathbb{C})$ zawierającymi $B_\pm$. Z teorii reprezentacji $sl(2, \mathbb{C})$ wynika, że $\dim\mathfrak{a}_- = -M(\alpha, \beta) - 2n_- + 1$, $\dim\mathfrak{a}_+ = M(\alpha, \beta) + 2n_+ + 1$. Zatem,

$$\begin{aligned} \dim\mathfrak{a}_+ + \dim\mathfrak{a}_- &= -2n_- + 2n_+ + 2 \\ = 2\dim\mathfrak{a} &> \dim\mathfrak{a}. \end{aligned}$$

Zatem $\mathfrak{a}_+ \cap \mathfrak{a}_- \neq \{0\}$. więc $\mathfrak{a}_+ = \mathfrak{a}_- = \mathfrak{a}$. Poza tym, $M(\alpha, \beta) = n_- + n_+$. □

16.3 Układy pierwiastków

Niech $\mathcal{R}$ będzie układem niezerowych wektorów $\mathcal{R}$ w przestrzeni euklidesowej $\mathcal{V}$. Dla $\alpha, \beta \in \mathcal{V}$ zdefiniujmy maierz Cartana i Coxetera tak jak wyżej. Mówimy, że $\mathcal{R}$ jest *układem pierwiastków*, gdy

(1) $\mathcal{R}$ rozpina $\mathcal{V}$.

(2) $\mathcal{R}$ jest niezmienniczy względem odbicia w hiperpłaszczyźnie prostopadłej do $\beta \in \mathcal{R}$. Czyli $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ implikuje $\alpha - \frac{2\langle\alpha|\beta\rangle\beta}{\langle\beta|\beta\rangle} \in \mathcal{R}$.

(3) Macierz Cartana jest całkowitoliczbowa.

(4) $\alpha \in \mathcal{R}$ i $t\alpha \in \mathcal{R}$ implikuje $t = \pm 1$.

Twierdzenie 16.3 *Niech $\mathcal{R}$ będzie układem pierwiastków. Wtedy własności (9) i (10) Twierdzenia 16.2 są spełnione.*

16.4 Pierwiastki dodatnie

Niech $\mathcal{R}$ będzie układem pierwiastków w przestrzeni $\mathcal{V}$. Wybierzmy wektor $v_0 \in \mathcal{V}$ taki, że $\alpha(v_0) \neq 0$, $\alpha \in \mathcal{R}$. To pozwala nam podzielić $\mathcal{R}$ na dwa rozłączne podzbiory

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_+ &:= \{\alpha \in \mathcal{R} \ : \ \alpha(v_0) > 0\}, \\ \mathcal{R}_- &:= \{\alpha \in \mathcal{R} \ : \ \alpha(v_0) < 0\} = -\mathcal{R}_+. \end{aligned}$$

Mówimy, że $\alpha \in \mathcal{R}_+$ jest *nierozkładalny* (lub *prosty*), jeśli nie można go zapisać jako $\alpha = \beta + \gamma$, $\beta, \gamma \in \mathcal{R}_+$.

Mówimy, że $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}$ jest *układem fundamentalnym*, jeśli istnieje $v_0 \in \mathcal{V}$ takie, że $\mathcal{F}$ jest zbiorem pierwiastków nierozkładalnych w $\mathcal{R}$.

Twierdzenie 16.4 (1) *Jeśli $\alpha, \beta \in \mathcal{R}_+$ są nierozkładalne, to $\langle\alpha|\beta\rangle \leq 0$.*

(2) *Każdy $\alpha \in \mathcal{R}_+$ jest liniową kombinacją prostych pierwiastków z całkowitymi nieujemnymi współczynnikami.*

(3) *Zbiór prostych pierwiastów jest bazą przestrzeni $\mathcal{V}$.*

Dowód. (1) Jeśli $\alpha - \beta = \gamma \in \mathcal{R}$, to $\gamma \in \mathcal{R}_+$ lub $\gamma \in \mathcal{R}_-$. W pierwszym przypadku, $\alpha = \gamma + \beta$ nie jest pierwiastkiem prostym, w drugim $\beta = \alpha + (-\gamma)$ nie jest pierwiastkiem prostym. Zatem $\alpha - \beta \notin \mathcal{R}$. A więc, $\langle\alpha|\beta\rangle \leq 0$ wynika z Tw. 16.2.

(2) Jeśli $\alpha \in \mathcal{R}_+$ nie jest prosty, może być zapisany jako $\alpha = \beta + \gamma$, $\beta, \gamma \in \mathcal{R}_+$. Powtarzając ten krok dostajemy w końcu rozkład. Ponieważ $\{\alpha(v_0) \ : \ \alpha \in \mathcal{R}_+\}$ jest zbiorem skończonym, stanie się to po skończonej liczbie kroków.

(3) Wystarczy pokazać liniową niezależność. Załóżmy, że $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są proste i $m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n = 0$. Możemy założyć, że $m_1, \ldots, m_p \geq 0$ a pozostałe współczynniki są ≤ 0 i napisać

$$m_1\alpha_1 + \cdots + m_p\alpha_p = k_{p+1}\alpha_{p+1} + \cdots + k_n\alpha_n =: \gamma,$$

gdzie $k_{p+1}, \dots, k_n \geq 0$. Mamy

$$0 \leq \langle\gamma|\gamma\rangle = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=p+1}^{n} m_i k_j \langle\alpha_i|\alpha_j\rangle \leq 0.$$

Zatem $\gamma = 0$. Stąd

$$0 = \gamma(v_0) = m_1\alpha_1(v_0) + \cdots + m_p\alpha_p(v_0),$$

co oznacza, że $m_i = 0$, $i = 1, \dots, p$. Podobnie pokazujemy, że $m_j = 0$, $j = p+1, \dots, n$. □

16.5 Grupa Weyla

Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią euklidesową. Dla $\alpha \in \mathcal{V}$ definiujemy

$$S_\alpha\beta := \beta - \frac{2\langle\beta|\alpha\rangle\alpha}{\langle\alpha|\alpha\rangle\alpha}.$$

Zauważmy, że jeśli kąt między α i β jest równy θ, to $S_\alpha S_\beta$ jest obrotem o kąt 2θ w płaszczyżnie zadanej przez α, β. W szczególności, jeśli $\theta = \pi/n$, to $(S_\alpha S_\beta)^n = \mathbb{1}$.

Niech $\mathcal{R}$ będzie układem pierwiastkowym. Grupą Weyla związaną z $\mathcal{R}$ nazywamy grupę generowaną przez $\{S_\alpha \ : \ \alpha \in \mathcal{R}\}$. Oznaczamy j a przez $\mathrm{Weyl}_\mathcal{R}$. Oczywiście, $\mathcal{R}$ jest zbiorem na którym działa $\mathrm{Weyl}_\mathcal{R}$.

Mówimy, że $\mathcal{C}$ jest *komórką Weyla*, jeśli jest domknięciem składowej spójnej

$$\mathcal{V}\backslash \bigcup_{\alpha\in\mathcal{R}} \pi_\alpha,$$

gdzie $\pi_\alpha := \{\beta \in \mathcal{V} \ : \ \langle\beta|\alpha\rangle = 0\}$. Mówimy, że π_α jest *ścianą komórki Weyla* $\mathcal{C}$, jeśli jej otwarta niepusta część zawarta w brzegu $\mathcal{C}$. Wtedy α ma określony znak na $\mathcal{C}$.

Twierdzenie 16.5 (1) *Dla każdej pary $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ komórek Weyla istnieje dokładnie jeden $W \in \mathrm{Weyl}_\mathcal{R}$ taki, że $W\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$.*

(2) *Niech $\mathcal{C}$ będzie komórką Weyla. Wtedy*

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}) := \{\alpha \in \mathcal{R} \ : \ \pi_\alpha \textit{ jest ścianą } \mathcal{C} \quad \textit{i} \quad \alpha \geq 0 \quad \textit{na } \mathcal{C}\}$$

jest układem fundamentalnym.

(3) *Niech $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}$ będzie układem fundamentalnym. Wtedy*

$$\mathcal{C}(\mathcal{F}) := \{\beta \in \mathcal{V} \ : \ \langle\beta|\alpha\rangle \geq 0, \ \alpha \in \mathcal{F}\}$$

jest komórką Weyla.

(4) *Niech $\alpha \in \mathcal{R}$. Wtedy $\mathcal{W}\alpha = \mathcal{R}$.*

16.6 Reprezentacje algebr Liego

Rozważmy reprezentację algebry Liego $\mathfrak{g}$ na przestrzeni zespolonej $\mathcal{V}$. Dla uproszczenia notacji będziemy zakładać, że $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$. Ustalmy algebrę Cartana $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. $\beta \in \mathfrak{h}^{\#}$ nazywamy *wagą*, gdy odpowiadająca jej *przestrzeń wagowa*

$$\mathcal{V}^{\beta} := \{v \in \mathcal{V} \ : \ Hv = \beta(H)v, \quad H \in \mathfrak{h}\}$$

jest niezerowa. Zbiór wag oznaczamy przez $\mathcal{W}(\mathcal{V})$. *Krotność wagi* β jest równa $m^{\beta}(\mathcal{V}) := \dim \mathcal{V}^{\beta}$.

Twierdzenie 16.6 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego.*

(1) *Niech $\alpha \in \mathcal{R}$, $\beta \in \mathcal{W}(\mathcal{V})$. Wtedy*

$$\frac{2\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle} \in \mathbb{Z}.$$

(2) *Niech $\alpha \in \mathcal{R}$, $\beta \in \mathcal{W}(\mathcal{V})$ Wtedy istnieją $n_{\pm} \in \mathbb{Z}$ takie, że $-\frac{2\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle} = n_+ - n_-$, i*

$$\alpha + k\beta \in \mathcal{R}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n_- \leq k \leq n_+.$$

(3) *$\mathcal{W}(\mathcal{V})$ jest niezmienniczy względem odbicia w hiperpłaszczyźnie prostopadłej do $\beta \in \mathcal{R}$. Czyli $\alpha \in \mathcal{W}(\mathcal{V})$, $\beta \in \mathcal{R}$ implikuje $\alpha - \frac{2\langle\alpha|\beta\rangle\beta}{\langle\beta|\beta\rangle} \in \mathcal{W}(\mathcal{V})$.*

Niech $L_{\mathcal{R}}$ oznacza kratę rozpiętą przez $\mathcal{R}$ – *kratę pierwiastkową*. Niech $L_{\mathcal{W}}$ oznacza *kratę wagową*, zadaną przez

$$L_{\mathcal{W}} := \left\{\beta \in \mathfrak{h}^{\#} \ : \ \frac{2\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle} \in \mathbb{Z}, \ \alpha \in \mathcal{R}\right\}.$$

Wtedy $L_{\mathcal{R}}$ jest podkratą w $L_{\mathcal{W}}$.

17 Homotopia

17.1 Homotopia krzywych

Niech $\mathcal{X}$ będzie rozmaitością i $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$. Oznaczmy przez $K(x_0, x_1, \mathcal{X})$ zbiór krzywych (gładkich, kawałkami ciągłych) zaczynających się w x_0 i kończących się w x_1, tzn $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$.

Niech $\gamma_0, \gamma_1 \in K(x_0, x_1, \mathcal{X})$. Mówimy, że γ_0 jest homotopijnie równoważna γ_1 i piszemy $\gamma_0 \sim \gamma_1$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje funkcja ciągła $[0,1] \times [0,1] \ni (t,s) \mapsto H(t,s)$ taka, że $H(t,0) = \gamma_0(t)$ i $H(t,1) = \gamma_1(t)$.

Twierdzenie 17.1 *Homotopijna równoważność jest relacją równoważności.*

Dowód. Kładąc $H(t,s) = \gamma_0(t)$ dostajemy $\gamma_0 \sim \gamma_0$.

Kładąc $H_{10}(t,s) := H_{01}(t, 1-s)$ dostajemy $\gamma_0 \sim \gamma_1 \Rightarrow \gamma_1 \sim \gamma_0$.

Kładąc

$$H_{02}(t,s) := \begin{cases} H_{01}(t, 2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}; \\ H_{12}(t, 2s-1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

dostajemy $\gamma_0 \sim \gamma_1, \quad \gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \gamma_0 \sim \gamma_2$. $\square$

Zbiór klas homotopii krzywych zaczynających się w x_0 i kończących w x_1 oznaczany jest przez

$$\Pi(x_0, x_1, \mathcal{X}) := K(x_0, x_1, \mathcal{X}) / \sim .$$

Twierdzenie 17.2 *Niech $\mathcal{X}$ będzie spójna. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $\Pi(x_0, x_1, \mathcal{X})$ *jest jednoelementowy dla każdego* $x_0, x_1 \in \mathcal{X}$.

(2) *Istnieje* $x_0 \in \mathcal{X}$ *taki, że* $\Pi(x_0, x_0, \mathcal{X})$ *jest jednoelementowy.*

Jeśli spełnione są warunki powyższego twierdzenia, mówimy, że zbiór $\mathcal{X}$ jest jednospójny.

17.2 Składanie krzywych i grupa homotopii

Niech $\gamma \in K(x_0, x_1, \mathcal{X})$. Definiujemy $\gamma^{-1} \in K(x_1, x_0, \mathcal{X})$.

$$\gamma^{-1}(t) := \gamma(1 - t).$$

Oczywiście, jeśli $\gamma' \sim \gamma$, to $(\gamma')^{-1} \sim \gamma^{-1}$.

Niech $x_0, x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, $\gamma_0 \in K(x_0, x_1, \mathcal{X})$, $\gamma_1 \in K(x_1, x_2, \mathcal{X})$. Definiujemy $\gamma_0 \circ \gamma_1 \in K(x_0, x_2, \mathcal{X})$:

$$\gamma_0 \circ \gamma_1(t) := \begin{cases} \gamma_0(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ \gamma_1(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Oczywiście, jeśli $\gamma_0 \sim \gamma_0'$, $\gamma_1 \sim \gamma_1'$, to

$$\gamma_0 \circ \gamma_1 \sim \gamma_0' \circ \gamma_1'.$$

Jeśli $\gamma_2 \in K(x_2, x_3, \mathcal{X})$

$$(\gamma_0 \circ \gamma_1) \circ \gamma_2 \sim \gamma_0 \circ (\gamma_1 \circ \gamma_2).$$

Jeśli przez x oznaczamy krzywą stałą równą $x \in \mathcal{X}$, to dla $x_0, x_1 \in \mathcal{X}$, $\gamma \in K(x_0, x_1, \mathcal{X})$,

$$x_0 \circ \gamma \sim \gamma \circ x_1 \sim \gamma.$$

W szczególności, dla każdego $x_0 \in \mathcal{X}$, $\Pi(x_0, x_0, \mathcal{X})$ jest grupą. Jeśli zbiór $\mathcal{X}$ jest spójny, to grupa $\Pi(x_0, x_0, \mathcal{X})$ jest izomorficzna dla różnych $x_0 \in \mathcal{X}$. Nazywamy ją grupą homotopii zbioru $\mathcal{X}$. Oznaczamy ją przez $\Pi(\mathcal{X})$.

Przykłady

(1) $\Pi(\mathbb{R}^n)$ jest grupą jednoelementową.

(2) $\Pi(S^1) = \Pi(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}) = \mathbb{Z}$ (liczba okrążeń wokół zera).

(3) Niech $a, b \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$. Wtedy $\Pi(\mathbb{R}^2 \backslash \{a, b\}) = \mathbb{F}_2$ – grupa wolna o dwóch generatorach. Jako generatory można wybrać τ_0 – okrążenie a, τ_1 – okrążenie b. Grupa $\mathbb{F}_2$ składa się z elementów następujących typów:

$$\begin{array}{ll} \tau_1^{n_p} \tau_0^{m_p} \cdots \tau_1^{n_0} \tau_0^{m_0}, & \tau_0^{m_{p+1}} \tau_1^{n_p} \cdots \tau_1^{n_0} \tau_0^{m_0}, \\ \tau_1^{n_p} \tau_0^{m_p} \cdots \tau_0^{m_1} \tau_1^{n_0}, & \tau_0^{m_{p+1}} \tau_1^{n_p} \cdots \tau_0^{m_1} \tau_1^{n_0}, \end{array} \tag{17.55}$$

gdzie $n_i, m_i \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.

(4) $\Pi(S^n)$ jest trywialna dla $n \geq 2$. Na przykład, $SU(2) \simeq S^3$ jest jednospójna.

(5) W S^n wprowadzamy naturalne działanie grupy $\mathbb{Z}_2$. Przestrzeń orbit $S^n/\mathbb{Z}_2$ nazywa się *n-wymiarową przestrznią projektywną* $P\mathbb{R}^n$. Dla $n \geq 2$ ma ona grupę homotopii $\mathbb{Z}_2$. W szczególności, $SO(3) \simeq SU(2)/\mathbb{Z}_2 \simeq P\mathbb{R}^3$ ma grupę homotopii $\mathbb{Z}_2$.

17.3 Nakrycia

Niech $\mathcal{X}$ będzie rozmaitością spójną z punktem bazowym $x_0 \in \mathcal{X}$. Mówimy, że $(\mathcal{Y}, \Phi, y_0)$ jest nakryciem $(\mathcal{X}, x_0)$, jeśli $\mathcal{Y}$ jest spójną rozmaitością, $\Phi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ jest gładkim odwzorowaniem, $\Phi(y_0) = x_0$ i dla każdego $x \in \mathcal{X}$ istnieje spójne otoczenie $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ zawierające x takie, że $\Phi^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_i \mathcal{W}_i$, gdzie $\mathcal{W}_i$ są spójne, otwarte i nieprzecinające się, oraz $\Phi\Big|_{\mathcal{W}_i}$ jest dyfeomorfizmem $\mathcal{W}_i \to \mathcal{U}$.

17.4 Nakrycie uniwersalne

Nakryciem uniwersalnym $(\mathcal{X}, x_0)$ nazywamy $(\mathcal{X}^{\mathrm{uc}}, \Phi, [x_0])$, gdzie

$$\mathcal{X}^{\mathrm{uc}} := \bigcup_{x \in \mathcal{X}} \Pi(x_0, x, \mathcal{X}),$$

$\Phi^{\mathrm{uc}} : \mathcal{X}^{\mathrm{uc}} \to \mathcal{X}$ jest zadane przez $\Phi^{\mathrm{uc}}([\gamma]) := \gamma(1)$. $\mathcal{X}^{\mathrm{uc}}$ jest wyposażone w naturalną strukturę rozmaitości. $(\mathcal{X}^{\mathrm{uc}}, \Phi^{\mathrm{uc}}, [x_0])$ jest nakryciem $(\mathcal{X}, x_0)$.

Zauważmy, że $\Pi(\mathcal{X}) = (\Phi^{\mathrm{uc}})^{-1}(x_0)$.

17.5 Nakrycie wyznaczone przez podgrupę grupy homotopii

Niech $(\mathcal{Y}, \Phi, y_0)$ będzie nakryciem $(\mathcal{X}, x_0)$. Latwo się przekonać, że Φ indukuje homomorfizm $\Pi(\mathcal{Y}, y_0) \to \Pi(\mathcal{X}, x_0)$.

Niech K będzie podgrupą $\Pi(x_0, x_0, \mathcal{X})$. Dla $x \in \mathcal{X}$, w $\Pi(x_0, z, \mathcal{X})$ wprowadzamy relację: Dla $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \Pi(x_0, x, \mathcal{X})$ piszemy $[\gamma_1] \underset{K}{\sim} [\gamma_2]$, gdy $[\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1] \in K$. Jest to relacja równoważności. Będziemy oznaczali przez $[\gamma]^K$ klasę abstrakcji γ względem tej relacji. Definiujemy

$$\Pi^K(x_0, x, \mathcal{X}) := \Pi(x_0, x, \mathcal{X}) / \underset{K}{\sim},$$

$$\mathcal{X}^K := \bigcup_{x \in \mathcal{X}} \Pi^K(x_0, x, \mathcal{X}),$$

$$\Phi^K([\gamma]^K) = \gamma(1).$$

Wtedy $(\mathcal{X}^K, \Phi^K, [x_0]^K)$ jest nakryciem $(\mathcal{X}, x_0)$, którego grupą homotopii jest K.

Mamy oczywiście naturalne odwzorowanie

$$\Phi_K : \mathcal{X}^{\mathrm{uc}} \to \mathcal{X}^K, \qquad \Phi_K([\gamma]) = [\gamma]^K,$$

spełniające związek $\Phi^K \circ \Phi_K = \Phi$. Czyli $(\mathcal{X}^{\mathrm{uc}}, \Phi_K, [x_0])$ jest nakryciem $(\mathcal{X}^K, [x_0]^K)$.

18 Globalna teoria grup Liego

18.1 Lokalna izomorficzność grup Liego

Będziemy mówili, że grupy Liego G_1 i G_2 są *lokalnie izomorficzne*, gdy istnieją otoczenia identyczności $\mathcal{O}_i \subset G_i$, $i = 1, 2$, i dyfeomorfizm $\Phi : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ taki, że $g_1, g_2, g_1 g_2 \in \mathcal{O}_1$ implikuje $\Phi(g_1)\Phi(g_2) = \Phi(g_1 g_2)$. Jest to relacja równoważności.

Twierdzenie 18.1 *Niech G będzie spójną grupą Liego i $\mathcal{O}$ otwartym podzbiorem zawierającym $\mathbb{1}$. Wtedy $\mathcal{O}$ generuje G, czyli*

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O} \cdots \mathcal{O}.$$

Dowód. Niech G_0 będzie prawą stroną. Jest oczywiście otwarta. Niech $g \in G_0^{\mathrm{cl}}$. Wtedy istnieje ciąg (g_n) w G_0 taki, że $g_n \to g$. Zatem $g g_n^{-1} \to \mathbb{1}$. Czyli dla dostatecznie dużych n, $g g_n^{-1} \in \mathcal{O}$. Zatem $g \in \mathcal{O} g_n \subset G_0$. Stąd G_0 jest domknięta. Ze spójności G wynika, że $G = G_0$. □

$Z(G)$ oznacza centrum grupy, tzn

$$Z(G) := \{z \in G \ : \ zg = gz, \ g \in G\}.$$

Oczywiście, każda podgrupa w centrum dowolnej grupy jest normalna.

Twierdzenie 18.2 *Niech K będzie dyskretną podgrupą normalną w spójnej grupie Liego G.*

(1) *Wtedy K jest zawarte w centrum grupy G.*

(2) *Niech $\Phi : G \to G/K$ będzie kanonicznym homomorfizmem. Wtedy $Z(G/K) = \Phi(Z(G))$. W szczególności, $Z(G/K) \simeq Z(G)/K$.*

(3) *G/K jest lokalnie izomorficzna z G.*

Dowód. (1) Niech $k \in K$. Funkcja $G \ni g \mapsto gkg^{-1} \in K$ jest ciągła. Dla $g = \mathbb{1}$ jej wartością jest k. Ponieważ K jest dyskretna a G spójna, funkcja musi być stała. Więc $gkg^{-1} = k$, $g \in G$.

(2) Oczywiście, korzystając z tego, że $K \subset Z(G)$ dostajemy $Z(G/K) \supset \Phi(Z(G))$.

Niech $b \in G$ i $\Phi(b) \in Z(G/K)$. Dla dowolnego $g \in G$,

$$\mathbb{1}_{G/K} = \Phi(g)\Phi(b)\Phi(g)^{-1}\Phi(b)^{-1} = \Phi(gbg^{-1}b^{-1}). \tag{18.56}$$

Funkcja

$$G \ni g \mapsto gbg^{-1}b^{-1} \tag{18.57}$$

jest ciągła. Na mocy (18.56), ma ona wartości w dyskretnej grupie K. G jest spójne. Więc (18.57) jest stała. Dla $g = \mathbb{1}$, jej wartością jest $\mathbb{1}$. Więc

$$gbg^{-1}b^{-1} = \mathbb{1}, \quad g \in G.$$

□

Twierdzenie 18.3 *Niech G_1 będzie lokalnie izomorficzna z G_2 i $\Phi : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ jest odwzorowaniem, o którym mowa w definicli lokalnej izomorficzności. Załóżmy, że Φ rozszerza się do homomorfizmu $\Phi : G_1 \to G_2$. Wtedy takie rozszerzenie jest jednoznacznie wyznaczone i jego jądro jest dyskretną podgrupą normalną w G_1.*

18.2 Grupa homotopii grupy Liego

Niech G będzie spójną grupą Liego. Rozważając jej grupę homotopii, zawsze będziemy przyjmować, że $\mathbb{1}$ jest punktem bazowym.

Niech G^{uc} będzie nakryciem uniwersalnym G. Wprowadzamy działanie na G^{uc}:

$$[\gamma_1][\gamma_2] := [\gamma_1\gamma_2],$$

gdzie $\gamma_1\gamma_2(t) := \gamma_1(t)\gamma_2(t)$. Niech Φ^{uc} oznacza kanoniczne rzutowanie $\Phi^{\mathrm{uc}} : G^{\mathrm{uc}} \to G$.

Twierdzenie 18.4 *G^{uc} jest grupą Liego i Φ^{uc} jest surjektywnym homomorfizmem. Dlatego, $G = G^{\mathrm{uc}}/\mathrm{Ker}\Phi^{\mathrm{uc}}$. $\Pi(G)$ można utożsamić z $\mathrm{Ker}\Phi^{\mathrm{uc}}$, która jest dyskretną podgrupą normalną, i dlatego jest zawarta w centrum G^{uc}.*

Zatem w rodzinie lokalnie równoważnych ze sobą grup Liego można wyróżnić "maksymalną" G^{uc}, która jest jednospójna.

Pouczające jest sprawdzić niezależnie, że grupa homotopii grupy Liego G jest przemienna.

Dowód. Niech $\gamma_i \in K(\mathbb{1}, \mathbb{1}, G)$. Zdefiniujmy

$$s_1(t) := \begin{cases} (2t, 0), & 0 \le t \le 1/2, \\ (1, 2t-1), & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}, \quad s_2(t) := \begin{cases} (0, 2t), & 0 \le t \le 1/2, \\ (2t-1, 0), & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Niech $\Gamma(t_1, t_2) := \gamma_1(t_1)\gamma_2(t_2)$. Wtedy $[\gamma_1] \circ [\gamma_2]$ jest reprezentowane przez $\Gamma(s_1(t))$ a $[\gamma_2] \circ [\gamma_1]$ jest reprezentowane przez $\Gamma(s_2(t))$.

$\Gamma\left((1-\theta)s_1(t) + \theta s_2(t)\right)$ jest homotopią między nimi. □

Analizę spójnych grup Liego można ograniczyć do grup spójnych jednospójnych. Niech G taka będzie. Oznaczmy przez Z centrum G.

Twierdzenie 18.5 (1) *Każda spójna grupa Liego lokalnie równoważna grupie G jest izomorficzna z G/K, gdzie K jest podgrupą dyskretną grupy Z.*

(2) *Centrum grupy G/K jest równe Z/K.*

(3) *Grupa homotopii G/K jest równa K.*

Dowód. (3) Niech $[\gamma] \in \Pi(G/K)$. Wtedy możemy podnieść γ do krzywej $\tilde{\gamma} \in K(\mathbb{1}, k, G)$, tak że przy homomorfizmie kanonicznym $\Phi : G \to G/K$ mamy $\Phi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$. Oczywiście, $k \in K$. Dostajemy w ten sposób odwzorowanie $\tilde{\Phi}([\gamma]) = k$. Occzywiście, jest to surjektywny homomorfizm. Z jednospójności $\tilde{G}$ sprawdzamy, że jest injektywny. □

W szczególności, jeśli centrum G jest dyskretne, to mamy też grupę minimalną G/Z z trywialnym centrum i grupą homotopii Z.

18.3 Rozmaitości

Niech $\mathcal{P}$ będzie rozmaitością. $\mathcal{P}$ można pokryć zbiorami otwartymi $\mathcal{O}$ i mapami $\phi_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$. Mapy $\phi_{\mathcal{O}}(p) = x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ pozwalają utożsamić $\mathcal{O}$ z otwartym podzbiorem $\phi_{\mathcal{O}}(\mathcal{O})\mathbb{R}^n$.

Niech $\mathrm{Diff}(\mathcal{P})$ oznacza zbiór dyfeomorfimów rozmaitości $\mathcal{P}$. Jest to grupa. Dla $f \in C^\infty(\mathcal{P})$ i $\Phi \in \mathrm{Diff}(\mathcal{P})$kładziemy $\Phi^\# f(p) := f(\Phi(p))$. Piszemy też $\Phi_\# := (\Phi^\#)^{-1}$. $\mathrm{Diff}(\mathcal{P}) \ni \Phi \mapsto \Phi_\#$ jest działaniem grupy.

Niech $p \in \mathcal{P}$. Standardowa definicja wektora stycznego do $\mathcal{P}$ w punkcie p mówi o klasie abstrakcji krzywych. Jeśli krzywa $t \mapsto \gamma_t \in \mathcal{P}$ spełnia zadaje wektor styczny A w $p = \gamma_0$, będziemy pisali $A_t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_0$. Przez $\mathrm{T}_p\mathcal{P}$ będziemy oznaczali przestrzeń styczną do $\mathcal{P}$ w punkcie p. Jeśli $A \in \mathrm{T}_p\mathcal{P}$, to mamy liniowe odwzorowanie $C^\infty(\mathcal{P}) \to \mathbb{C}$ oznaczane przez $A^\# f$ albo $\langle A^\# | \mathrm{d}f\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma_t)\Big|_{t=0}$, dla krzywej γ_t definiującej A.

Zbiór $\bigcup_{p\in\mathcal{P}} \mathrm{T}_p\mathcal{P}$ z naturalną strukturą rozmaitości nazywamy *wiązką styczną*. Funkcję gładką $\mathcal{P} \ni p \mapsto X(p) \in \mathrm{T}\mathcal{P}$ taką, że $X(p) \in \mathrm{T}_p\mathcal{P}$ nazywamy polem wektorowym. Zbiór pól wektorowych na $\mathcal{P}$ oznaczamy przez $C^\infty(\mathcal{P}, \mathrm{T}\mathcal{P})$. Pole wektorowe X zadaje odwzorowanie $X^\# : C^\infty(\mathcal{P}) \to C^\infty(X)$. We współrzędnych ma ono postać

$$X^\# f(x) = X^j(x)\partial_{x^j} f(x).$$

Komutator dwóch pól wektorowych jest też polem wektorowym:

$$[X^\#, Y^\#] = \left(X^j(x)\partial_{x^j} Y^i(x) - Y^j(x)\partial_{x^j} X^i(x)\right)\partial_{x^i}.$$

Pola wektorowe można przenosić przez dyfeomorfizm. Dla $\Phi \in \mathrm{Diff}(\mathcal{P})$, definiujemy $\Phi_\# : C^\infty(\mathcal{P}, \mathrm{T}\mathcal{P}) \to C^\infty(\mathcal{P}, \mathrm{T}\mathcal{P})$ przez

$$\Phi_\#(X^\#) := \Phi_\# X^\# \Phi_\#^{-1},$$

czyli

$$\Phi_\#(X^\#) f(x) = \Big(X^\#(f \circ \Phi)\Big)\left(\Phi^{-1}(x)\right).$$

We współrzędnych:

$$\Phi_\#(X^\#) = X^j(y)\frac{\partial \Phi^i(y)}{\partial y^j}\Big|_{y=\Phi^{-1}(x)} \partial_{x^i}.$$

Jeśli rodzina dyfeomorfizmów Φ_t zależy w sposób gładki od $t \in \mathbb{R}$, to

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t(x) = X_t(\Phi_t(x)). \tag{18.58}$$

zadaje rodzinę pól wektorowych X_t. Równoważnie,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t^\# = \Phi_t^\# X_t^\#.$$

Można zadać rodzinę pól wektorowych $\mathbb{R} \ni t \mapsto X_t$ i rozważać istnienie rozwiązań (18.58) z $\Phi_0 = \mathrm{Id}$. Rozwiązania takie lokalnie (w $\mathcal{P}$ i w czasie) istnieją i są jednoznaczne.

W szczególności, jeśli

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t(x) = X(\Phi_t(x)), \tag{18.59}$$

to Φ_t jest jednoparametrową grupą i piszemy $\Phi_t = \mathrm{e}^{tX}$. Równoważnie,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t^\# = X^\#\Phi_t^\# = \Phi_t^\# X^\#, \tag{18.60}$$

Jeśli X jest zadanym polem wektorowym takim, że istnieje rozwiązanie (18.59 dla małych t, to istnieje dla $t \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 18.6 *Niech $G \subset \mathrm{Diff}(\mathcal{P})$ będzie grupą domkniętą.*

(1) *Niech Φ_t będzie krzywą w G taką, że $\mathrm{Id} = \Phi_0$ i pole wektorowe X niech spełnia $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_0 = X$. Wtedy grupa $\{\mathrm{e}^{tX} \ :\ t \in \mathbb{R}\}$ jest zawarta w G.*

(2) *Niech X, Y będą polami wektorowymi takimi, że e^{tX} i e^{tY} należą do G dla $t \in \mathbb{R}$. Wtedy $\mathrm{e}^{t(\alpha A+\beta B)}$ należy do G dla $t \in \mathbb{R}$.*

(3) *Niech $\{\mathrm{e}^{tA} \ :\ t \in \mathbb{R}\}$ i $\{\mathrm{e}^{tB} \ :\ t \in \mathbb{R}\}$ będą zawarte w G. Wtedy $\{\mathrm{e}^{t[A,B]} \ :\ t \in \mathbb{R}\}$ jest zawarte w G.*

Zatem jeśli G jest grupą Liego w $\mathrm{Diff}(\mathcal{P})$, to przestrzeń styczna do G jest algebrą Liego.

Dowód. Założymy dodatkowo, że $\mathcal{P}$ jest przestrzenią liniową a wszystkie polawektorowe odpowiadają transformacjom liniowym. By pokazać (1), piszemy:

$$G \ni \Phi_{t/n}^n \simeq (\mathbb{1} + X/n)^n \to \mathrm{e}^{tX}.$$

By pokazać (2) wystarczy założyć, że $\alpha = \beta = 1$. Następnie sprawdzamy, że

$$\mathrm{e}^{t(X+Y)} = \mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{tY} + O(t^2).$$

(3) wynika z

$$\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{tY}\mathrm{e}^{-tX}\mathrm{e}^{-tY} = \mathrm{e}^{t^2[X,Y]} + O(t^3),$$

które pokazujemy następująco:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{tY}\mathrm{e}^{-tX}\mathrm{e}^{-tY}\\
= \ & \left(\mathbb{1} + tX + \frac{t^2}{2}X^2\right)\left(\mathbb{1} + tY + \frac{t^2}{2}Y^2\right)\left(\mathbb{1} - tX + \frac{t^2}{2}X^2\right)\left(\mathbb{1} - tX + \frac{t^2}{2}X^2\right) + O(t^3)\\
= \ & \mathbb{1} + tX + tY - tX - tY + \frac{t^2}{2}X^2 + \frac{t^2}{2}Y^2 + + \frac{t^2}{2}X^2 + \frac{t^2}{2}Y^2\\
& -t^2X^2 - t^2Y^2 + t^2XY + t^2XY - t^2XY - t^2YX + O(t^3)\\
= \ & \mathbb{1} + t^2[X,Y] + O(t^3).
\end{aligned}$$

18.4 Algebra Liego grupy Liego

Niech G będzie grupą Liego. Jak zwykle, $\mathbb{1}$ oznacza jej element jednostkowy. Oznaczmy przez $\mathfrak{g}$ przestrzeń styczną do G w punkcie $\mathbb{1}$, czyli $\mathfrak{g} = \mathrm{T}_{\mathbb{1}}G$.

Mamy dyfeomorfizmy

$$\mathrm{L}(g)h := gh, \qquad \mathrm{R}(g)h := hg^{-1}.$$

$$G \ni g \mapsto \mathrm{L}(g), \mathrm{R}(g) \in \mathrm{Diff}(G)$$

są homomorfizmami grup

Mamy również $\mathrm{K}h := h^{-1}$. Oczywiście, $\mathrm{K}^2 = \mathrm{Id}$ i $\mathrm{K}\mathrm{L}(g)\mathrm{K} = \mathrm{R}(g)$.

Mówimy, że $B \in C^\infty(\mathcal{P}, \mathrm{T}\mathcal{P})$. jest lewo- (prawo-)niezmiennicze, gdy

$$\mathrm{L}(g)_\# B^\# = B^\#, \quad \mathrm{R}(g)_\# B^\# = B^\#, \quad g \in G.$$

Twierdzenie 18.7 *Dla każdego $A \in \mathrm{T}_{\mathbb{1}}G$ istnieje dokładnie jedno pole lewo- i prawoniezmiennicze $L_A, R_A \in C^\infty(\mathcal{P}, \mathrm{T}\mathcal{P})$ takie, że $L_A(\mathbb{1}) = R_A(\mathbb{1}) = A$.*

$L_A f(g)$ jest równe wektorowi $A^\#$ działającemu na funkcję $G \ni h \mapsto f(gh)$. Każde pole lewoniezmiennicze jest tej postaci. Pola lewoniezmiennicze tworzą algebrę Liego.

$R_A f(g)$jest równe wektorowi $A^\#$ działającemu na funkcję $G \ni h \mapsto f(hg)$. Każde pole prawoniezmiennicze jest tej postaci. Pola prawoniezmiennicze tworzą algebrę Liego.

Mamy $\mathrm{K}L_A\mathrm{K} = R_{-B}$.

Twierdzenie 18.8 *Niech $A \in \mathrm{T}_{\mathbb{1}}G$. Wtedy istnieje dokładnie jedna krzywa $\mathbb{R} \ni t \mapsto g(t) \in G$ spełniająca równanie*

$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} g(t)^{-1} = A.$$

Równoważnie,

$\mathbb{R} \ni t \mapsto g(t) \in G$ jest homomorfizmem grup.

Równoważnie:

$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = L_A g(t), \qquad \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{L}(g_t) &= L_A(\mathrm{L}(g_t)), \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{R}(g_t) &= -R_A(\mathrm{R}(g_t)). \end{aligned}$$

Będziemy pisać $g(t) =: \mathrm{e}^{tA}$. Daje to równoważną definicję komutatora:

Twierdzenie 18.9 *Niech $A, B \in \mathrm{T}_{\mathbb{1}}G$. Wtedy*

$$[0, \infty[\ni s \mapsto \gamma(s) := \mathrm{e}^{\sqrt{s}A}\mathrm{e}^{\sqrt{s}B}\mathrm{e}^{-\sqrt{s}A}\mathrm{e}^{-\sqrt{s}B}$$

jest różniczkowalne w zerze i $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\gamma(s)\Big|_{s=0} = [A, B]$.

Twierdzenie 18.10 *Niech $\Phi : G \to H$ będzie homomorfizmem grup Liego z algebrami Liego $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$. Wtedy $\phi := \Phi_\# : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ jest homomorfizmem algebr Liego. G i H są lokalnie izomorficzne, wtedy i tylko wtedy gdy $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$ są izomorficzne.*

Twierdzenie 18.11 *Niech $\mathfrak{g}$ jest algebrą Liego. Wtedy istnieje grupa Liego G, której algebra Liego jest izomorficzna z $\mathfrak{g}$.*

Szkic dowodu Z Twierdzenia Ado wynika, że algebrę $\mathfrak{g}$ można zanurzyć w $gl(\mathcal{V})$ dla pewnej przestrzeni $\mathcal{V}$. Definiujemy G jako podgrupę w $GL(\mathcal{V})$ generowaną przez e^A dla $A \in \mathfrak{g}$. Następnie należy pokazać, że G jest rozmaitością i $\mathfrak{g}$ jest jej przestrzenią styczną. □

18.5 Przemienne grupy Liego

Twierdzenie 18.12 *Niech L będzie dyskretną podgrupą w $\mathbb{R}^n$. Niech $\mathrm{Span}L$ będzie k wymiarowe. Wtedy istnieją $e_1, \dots, e_k$ takie, że*

$$L = \{c_1 e_1 + \cdots + c_k e_k,\ (c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{Z}^k\}.$$

Twierdzenie 18.13 *Każda abelowa spójna grupa Liego jest izomorficzna z $\mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^k$.*

18.6 Podgrupy grup Liego

Twierdzenie 18.14 *Niech H będzie domkniętą podgrupą grupy Liego G. Wtedy H jest też grupą Liego. Jeśli $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ są algebrami Liego grup G i H, wtedy nawias w $\mathfrak{h}$ pokrywa się z nawiasem $\mathfrak{g}$ obciętym do $\mathfrak{h}$. W szczególności, $\mathfrak{h}$ jest podalgebrą Liego w $\mathfrak{g}$. Jeśli H jest normalna w G, to $\mathfrak{h}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$.*

Nie każda podalgebra w $\mathfrak{g}$ jest styczna do podgrupy w G.

Twierdzenie 18.15 *Niech G będzie grupą Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$. Jeśli $\mathfrak{h}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$ takim, że istnieje podgrupa H styczna do $\mathfrak{h}$, to spójna składowa jedności H_0 jest podgrupą normalną w G.*

19 Klasyczne proste algebry Liego i ich reprezentacje

19.1 $sl(2,\mathbb{C})$

Niech $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ będą macierzami Pauliego.

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Spełniają one

$$\sigma_i\sigma_j = -\mathrm{i}\epsilon_{ijk}\sigma_k.$$

Stanowią one bazę algebry $sl(2,\mathbb{C})$ i mają relacje komutacyjne

$$[\mathrm{i}\sigma_i, \mathrm{i}\sigma_j] = 2\epsilon_{ijk}\mathrm{i}\sigma_k.$$

Będziemy również używać alternatywnej bazy w $sl(2,\mathbb{C})$

$$H = \sigma_3, \quad A_\pm := \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm \mathrm{i}\sigma_2).$$

Mamy

$$A_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\sigma_1 = A_+ + A_-, \quad \sigma_2 = -\mathrm{i}A_+ + \mathrm{i}A_-,$$
$$[H, A_\pm] = \pm 2A_\pm, \quad [A_+, A_-] = H.$$

Na $sl(2,\mathbb{C})$ mamy iloczyn skalarny śladowy $\mathrm{Tr}XY$, $X, Y \in sl(2,\mathbb{C})$. Możemy go też ograniczyć do rzeczywistej podprzestrzeni macierzy hermitowskich bezśladowych $\mathrm{i}su(2,\mathbb{C})$, wtedy jest dodatnio określony. Alternatywnie, ten iloczyn skalarny możemy dostać z wyznacznika, mamy bowiem tożsamość

$$\det X = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}X^2, \quad X \in gl(2,\mathbb{C}).$$

Mamy tożsamość dla $\vec{\theta} \in \mathbb{C}^3$:

$$\mathrm{e}^{\vec{\theta}\vec{\sigma}} = \cosh\sqrt{\theta^2}\,\mathbb{1} + \frac{\vec{\theta}\vec{\sigma}}{\sqrt{\theta^2}}\sin\sqrt{\theta^2}.$$

Odwzorowanie eksponencjalne przekształca $sl(2,\mathbb{C})$ na $SL(2,\mathbb{C})$ a $su(2)$ na $SU(2)$.

19.2 $so(3, \mathbb{C})$

Pamiętamy, że $A \in SL(2, \mathbb{C})$ możemy przyporządkować

$$\rho_A X := AXA^{-1}, \quad X \in sl(2, \mathbb{C})$$

Zachowuje iloczyn skalarny. Utożsamiając $sl(2, \mathbb{C})$ dostajemy homomorfizm $SL(2, \mathbb{C})$ na $SO(2, \mathbb{C})$ z jądrem $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$.

Biorąc $A \in SU(2)$ i ograniczając się do $X \in \mathrm{i}su(2)$, dostajemy homomorfizm $SU(2)$ na $SO(3)$ z takim samym jądrem.

Mamy też infinitezymalne wersje tych homomorfizmów zadane przez

$$\rho'_A X := [A, X].$$

Zadają one izomorfizm $sl(2, \mathbb{C})$ na $so(3, \mathbb{C})$ orza $su(2)$ na $so(3)$.

Bazę w $so(3)$ stanowią

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$\rho_{\mathrm{i}\sigma_i/2} = E_i, i = 1, 2, 3.$$

19.3 Skończenie wymiarowe reprezentacje $sl(2, \mathbb{C})$.

Rozważmy reprezentację $\pi : sl(2, \mathbb{C}) \to gl(\mathcal{V})$. Będziemy pomijać π i traktować $sl(2, \mathbb{C})$ jako zanurzone w $gl(2, \mathbb{C})$. Wprowadźmy operator Casimira

$$\begin{aligned} C &:= \frac{1}{4}(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) = \frac{1}{4}H^2 + \frac{1}{2}(A_+A_- + A_-A_+) \\ &= \frac{1}{4}H^2 - \frac{1}{2}H + A_+A_- = \frac{1}{4}H^2 + \frac{1}{2}H + A_-A_+. \end{aligned}$$

Sprawdzamy, że C komutuje z $sl(2, \mathbb{C})$. Zatem przestrzenie własne operatora C są niezmiennicze dla $sl(2, \mathbb{C})$.

Twierdzenie 19.1 (1) *Dla każdego $n = 1, 2, \dots$ istnieje jedyna, z dokładnością do równoważności, reprezentacja nieprzywiedlna $sl(2, \mathbb{C})$ w $\mathbb{C}^n$. Nazywamy ją* reprezentacją o spinie *l, gdzie $n = 2l + 1$. Ma ona następujące własności:*

(i) $\mathrm{spec}\frac{1}{2}H = \{-l, -l + 1 \cdots, l - 1, l\}$.

(ii) $C = l(l + 1)$.

(iii) *Istnieje baza $\{v_{-l}, \dots, v_l\}$ taka, że*

$$\begin{aligned} Hv_m &= 2mv_m, \\ A_-v_m &= (l + m)v_{m-1}, \\ A_+v_m &= (l - m)v_{m+1}. \end{aligned} \tag{19.61}$$

(2) *Jeśli $sl(2,\mathbb{C})$ działa w przestrzeni $\mathcal{V}$, to jest ona równoważna reprezentacji o spinie l, gdy spełniony jest jeden z poniższych warunków:*

(i) *Istnieje w $\mathcal{V}$ wektor cykliczny v_+ taki, że $A_+v_+ = 0$ i $\frac{1}{2}Hv_+ = lv_+$. (Wektor ten nazywamy* wektorem najwyższej wagi*).*

(ii) *Istnieje w $\mathcal{V}$ wektor cykliczny v_- taki, że $A_-v_- = 0$ i $\frac{1}{2}Hv_- = -lv_-$. (Wektor ten nazywamy* wektorem najniższej wagi*).*

(iii) *reprezentacja jest nieprzywiedlna i $\max \mathrm{spec}\frac{1}{2}H = l$.*

(iv) *reprezentacja jest nieprzywiedlna i $\min \mathrm{spec}\frac{1}{2}H = -l$.*

Dowód. (1) Latwo sprawdzamy, że podane macierze dają reprezentację $sl(2,\mathbb{C})$. Pokażmy, że jest ona jedyną nieprzywiedlną reprezentacją dla $\dim \mathcal{V} = n$. Załóżmy, że $sl(2,\mathbb{C})$ działa nieprzywiedlnie w skończenie wymiarowej przestrzeni $\mathcal{V}$. Jeśli $2\lambda \in \mathrm{spec}H$, to $\mathrm{spec}H \subset 2\lambda + 2\mathbb{Z}$. W istocie, H posiada wektor własny $v \in \mathcal{V}$:

$$Hv = \lambda v.$$

Ponieważ $\mathcal{V}$ jest nieprzywiedlna, dowolny wektor w $\mathcal{V}$ jest liniową kombinacją $A_1 \cdots A_n v$, gdzie $A_i = A_\pm$ lub $A_i = H$. Poza tym,

$$HA_+v = (\lambda+2)A_+v, \qquad HA_-v = (\lambda+2)A_-v.$$

Korzystając, z tego, że $\mathcal{V}$ jest skończenie wymiarowa, dostajemy $\lambda_\pm$ takie, że $2\lambda_- = \min \mathrm{spec}H$, $2\lambda_+ = \max \mathrm{spec}H$. Niech $Hv_\pm = 2\lambda_\pm v_\pm$, $v_\pm \neq 0$. Mamy $\lambda_+ - \lambda_- \in \mathbb{Z}$ i $A_\pm v_\pm = 0$. Mamy

$$\begin{aligned} Cv_+ &= \left(\frac{1}{4}H^2 + \frac{1}{2}H\right) v_+ = (\lambda_+^2 + \lambda_+)v_+, \\ Cv_- &= \left(\frac{1}{4}H^2 - \frac{1}{2}H\right) v_- = (\lambda_-^2 - \lambda_-)v_-. \end{aligned}$$

Ponieważ reprezentacja jest nieprzywiedlna, C jest liczbą. Równanie

$$\lambda_+^2 + \lambda_+ = \lambda_-^2 - \lambda_-$$

ma dwa rozwiązania: $\lambda_+ = \lambda_- - 1$, które odrzucamy, bo wtedy $\lambda_+ < \lambda_-$ i $\lambda_- = -\lambda_+$. Kładziemy $l := \lambda_+$. Oczywiście, $2l = \lambda_+ - \lambda_- \in \mathbb{Z}$. Rozważmy $\mathrm{Span}(A_-^j v_+,\ j = 0,\dots,2l\}$. Korzystając z relacji komutacyjnych sprawdzamy, że jest to niezmiennicza przestrzeń dla $sl(2,\mathbb{C})$. Zatem jest ona równa $\mathcal{V}$. Poza tym, $A_-^{2l}v_-$ jest proporcjonalny do v_-. Kładziemy

$$v_m := (l+m)! A_-^{l-m} v_+.$$

Oczywiście, $A_-v_m = (l+m)v_{m-1}$ i $Hv_m = 2mv_m$. Poza tym,

$$\begin{aligned} l(l+1)A_-^{l-m-1}v_+ &= \left(\frac{1}{4}H^2 - \frac{1}{2}H + A_+A_-\right) A_-^{l-m-1}v_+ \\ &= m(m+1)A_-^{l-m-1}v_+ + A_+A_-^{l-m}v_+. \end{aligned}$$

Stąd
$$A_+A_-^{l-m}v_+ = (l-m)(l+m+1)A_-^{l-m-1}v_+.$$
Zatem $A_+v_m = (l-m)A_{m+1}$. To dowodzi jedyności w punkcie (1). $\square$

Uwaga: istnieje kilka różnych naturalnych baz dla reprezentacji $sl(2,\mathbb{C})$. Na przykład, kładąc $u_m := \frac{A_-^{l-m}v_+}{(l-m)!}$ dostajemy

$$\begin{aligned} Hv_m &= 2mv_m, \\ A_-v_m &= (l-m+1)v_{m-1}, \\ A_+v_m &= (l+m+1)v_{m+1}. \end{aligned}$$

Rozważmy teraz unitarną reprezentację nieprzywiedlną $su(2)$. Dla każdej z nich operatory σ_i muszą być samosprzężone, czyli H musi być samosprzężony, a $A_+ = A_-^*$. Operator Casimira jest dodatni. Ponieważ $A_+A_- \geq 0$, więc $\frac{1}{4}H^2 - \frac{1}{2}H$ jest ograniczone. To pokazuje, że spec$H$ musi być ograniczone. Zatem Ker$A_+ \neq \{0\}$. Z nieprzywiedlności, operator Casimira jest liczbą. Dlatego na KerA_+ mamy $C = \frac{1}{4}H^2 - \frac{1}{2}H$. H zachowuje KerA_+. Spektrum H na KerA_+ jest najwyżej dwuelementowe. Zatem można zdiagonalizować H. Zatem dostajemy te same przypadki, które były rozważane w Tw. 4.

Baza opisana w tym twierdzeniu jest ortogonalna, ale nie ortonormalna. Mamy relację

$$(A_-^{l-m}v_+|A_-^{l-m}v_+) = (A_-^{l-m-1}v_+|A_+A_-A_-^{l-m-1}v_+) = (l-m)(l+m+1)(A_-^{l-m-1}v_+|A_-^{l-m-1}v_+).$$

Stąd dostajemy

$$(A_-^{l-m}v_+|A_-^{l-m}v_+) = (l-m)\cdots 1(l+m+1)\cdots 2l(v_+|v_+) = \frac{(l-m)!(2l)!}{(l+m)!}(v_+|v_+). \tag{19.62}$$

Żeby dostać bazę ortonormalną, kładziemy

$$w_m := \frac{\sqrt{(l+m)!}}{\sqrt{(l-m)!(2l)!}}A_-^{l-m}v_+.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} Hw_m &= 2mw_m, \\ A_-w_m &= \sqrt{(l+m)(l-m+1)}w_{m-1}, \\ A_+w_m &= \sqrt{(l+m+1)(l-m)}w_{m+1}. \end{aligned} \tag{19.63}$$

Reprezentację tę można zrealizować w przestrzeni $\otimes_{\mathrm{s}}^{2l}\mathbb{C}^2$. Oznaczmy bazę w $\mathbb{C}^2$ przez $|\uparrow)$ i $|\downarrow)$. Wprowadźmy bazę ortonormalną w $\otimes_{\mathrm{s}}^{2l}\mathbb{C}^2$

$$w_m = \frac{\sqrt{(l-m)!(l+m)!}}{\sqrt{(2l)!}}|j_1)\otimes\cdots\otimes|j_{2l}),$$

gdzie mamy $l-m$ wyrazów $|\downarrow)$ i $l+m$ wektorów $|\uparrow)$. Zauważmy, że wektor $\otimes^{2l}|\uparrow)$ jest wektorem najwyższej wagi, zaś

$$\mathrm{d}\Gamma^{2l}(A_-)^{l-m}\otimes^{2l}$$

realizuje reprezentację (19.63).

Inna realizacja reprezentacji o spinie l jest w przestrzeni wielomianów rozpiętych przez $v_m := z_+^{l+m} z_-^{l-m}$ zadana przez operatory

$$\begin{aligned} H &:= z_+\partial_{z_+} - z_-\partial_{z_-}, \\ A^- &:= z_-\partial_{z_+}, \\ A^- &:= z_+\partial_{z_-}. \end{aligned}$$

Dostajemy wtedy reprezentację (19.61).

Mamy $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi H} = (-1)^{2l}$. Dlatego dla $l \in \mathbb{Z}$ reprezentacje $SU(2)$ odpowiadają reprezentacjom $SO(3)$.

Każdy element $SU(2)$ jest postaci

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\theta}\vec{\sigma}} = \cos\theta \mathbb{1} + \mathrm{i}\vec{\theta}\vec{\sigma}\frac{\sin|\theta|}{|\theta|}.$$

Dostajemy zatem parametryzację $SU(2)\backslash\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$ przez $\vec{\theta} \in \mathbb{R}$, $|\theta| \in]0,\pi[\cup]\pi, 2\pi[$. Klasy sprzężoności elementów $SU(2)$ są parametryzowane przez $|\theta| \in [0, 2\pi[$. Charakter reprezentacji o spinie l jest równy

$$\chi_l(|\theta|) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}l|\theta|} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-l+2)|\theta|} + \cdots + \mathrm{e}^{\mathrm{i}l|\theta|} = \frac{\sin((l+1)|\theta|)}{\sin|\theta|}$$

Rozważmy iloczyn tensorowy reprezentacji o spinie l i k. Jej charakter jest równy

$$\rho_l(|\theta|)\rho_k(|\theta|) = \sum_{j=|l-k|}^{l+k} \rho_j(|\theta|).$$

Dlatego też mamy rozkład reprezentacji, jak wyżej.

19.4 Typ reprezentacji grupy $SL(2,\mathbb{C})$

Niech

$$\epsilon := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mamy $\epsilon^2 = -\mathbb{1}$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Zatem jeśli $X \in SL(2,\mathbb{C})$, to

$$\epsilon X \epsilon^{-1} = X^{\#(-1)},$$

zaś jeśli $A \in sl(2,\mathbb{C})$, to

$$\epsilon A \epsilon^{-1} = -A^{\#},$$

Czyli reprezentacja fundamentalna $SL(2,\mathbb{C})$ jest równoważna swojej reprezentacji kontragradientnej. Zatem reprezentacja fundamentalna $SU(2)$ jest równoważna swojej zespolenie sprzężonej. Operator realizujący tę równoważność ma kwadrat $-\mathbb{1}$. Czyli reprezentacja fundamentalna $SU(2)$ jest typu kwaternionowego.

Latwo sprawdzić, że reprezentacje o spinie całkowitym są typu rzeczywistego, a o spinie połówkowym, typu kwaternionowego.

19.5 $sl(n,\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} sl(n,\mathbb{C}) &= \{A \in gl(n,\mathbb{C}) \ : \ \mathrm{Tr}A = 0\}, \\ su(n) &= \{A \in gl(n,\mathbb{C}) \ : \ \mathrm{Tr}A = 0, \quad A^* = -A\}. \end{aligned}$$

$sl(n,\mathbb{C})$ jest kompleksyfikacją $su(n)$. To znaczy,

$$sl(n,\mathbb{C}) = su(n) + \mathrm{i}su(n).$$

$A \in sl(n,\mathbb{C})$ rozkłada się na $A = \frac{1}{2}(A - A^*) + \frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}(A + A^*)$.

Wprowadzamy iloczyn skalarny

$$\langle X|Y\rangle := \mathrm{Tr}XY.$$

Oznaczmy

$$A_{ij} := |i\rangle\langle j|.$$

Niech

$$\mathfrak{h} := \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i A_{ii} \ : \ \sum_{i=1}^{n} c_i = 0 \right\}.$$

$\mathfrak{h}$ jest maksymalną przemienną podalgebrą w $sl(n,\mathbb{C})$ – jest to przykład *algebry Cartana.* Połóżmy

$$H_{ij} := A_{ii} - A_{jj} = -H_{ji}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} [H_{kl}, A_{ij}] &= \alpha_{ij}(H_{kl})A_{ij}, \\ \alpha_{ij}(H_{kl}) &= \delta_{ik} + \delta_{jl} - \delta_{jk} - \delta_{il} = \langle H_{ij}|H_{kl}\rangle. \end{aligned}$$

Czyli A_{ij} są wektorami własnymi dla działania algebry Cartana, a $\alpha_{ij} \in \mathfrak{h}^{\#}$ są wartościami własnymi, zwanymi *pierwiastkami.* Korzystając z dwoistości zadanej przez iloczyn skalarny, można pierwiastki utożsamić z *kopierwiastkami* H_{ij}, elementami algebry Cartana.

W szczególności,

$$\langle H_{ij}|H_{ij}\rangle = 2, \quad \langle H_{ij}|H_{kj}\rangle = 1, \quad i \neq k.$$

19.6 $so(n,\mathbb{C})$

Jeśli przyjmiemy, że iloczyn skalarny ma postać

$$\langle x|y\rangle = \sum x_i y_j,$$

to mamy

$$\begin{aligned} so(n,\mathbb{C}) &= \{A \in gl(n,\mathbb{C}) \ : \ A^{\#} = -A\}, \\ so(n,\mathbb{R}) &= \{A \in gl(n,\mathbb{R}) \ : \ A^{\#} = -A\}. \end{aligned}$$

$so(n,\mathbb{C})$ jest kompleksyfikacją $so(n,\mathbb{R})$:

$$so(n,\mathbb{C}) = so(n,\mathbb{R}) \oplus \mathrm{i}so(n,\mathbb{R}).$$

$A = \mathrm{Re}A + \mathrm{i}\mathrm{Im}A$. Bazę stanowią

$$L_{ij} = |i\rangle\langle j| - |j\rangle\langle i|, \quad 1 \le i < j \le n.$$

Zatem, wymiar $so(n,\mathbb{C})$ jest równy $\frac{n(n-1)}{2}$.

Wygodnie jest przyjąć inną postać iloczynu skalarnego w $\mathbb{C}^n$. Niech współrzędne będą indeksowane przez $\pm i$, $i = 1, \dots m$, jeśli $n = 2m$. Dla $n = 2m+1$ dodatkowo dodajemy współrzędną indeksowaną przez 0.

$$\langle z|w\rangle = \sum_i z_i w_{-i}.$$

Aby przejść do współrzędnych kartezjańskich kładziemy

$$z_{\pm j} = x_{2j-1} \pm \mathrm{i}x_{2j}, \quad \text{ewentualnie} \quad z_0 = x_{2m+1}.$$

Wprowadzamy iloczyn skalarny $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}XY$.

Wprowadźmy operatory

$$B_{ij} := |i\rangle\langle -j| - |j\rangle\langle -i|.$$

Dla $n = 2m+1$ będziemy też pisać

$$B_j := B_{0j} = |0\rangle\langle -j| - |j\rangle\langle 0|, \quad 1 \le |j| \le m.$$

Oczywiście, $B_{ij} = -B_{ji}$. W szczególności, $B_{ii} = 0$. Kładziemy

$$N_i := B_{i-i} = |i\rangle\langle i| - |-i\rangle\langle -i|. \tag{19.64}$$

Niech $\mathfrak{h}$ będzie rozpięta przez N_i, $i = 1, \dots, m$, które stanowią bazę ortonormalną. Jes to algebra Cartana.

Dla $n = 2m$ bazę $so(n,\mathbb{C})$ stanowią N_i, $i = 1, \dots, m$, oraz

$$B_{ij}, \quad 1 \le |i| < |j| \le m.$$

Dla $n = 2m+1$ trzeba dodać

$$B_j, \quad 1 \le |j| \le m.$$

Kładziemy dla $|i| \ne |j|$,

$$M_{ij} = M_{ji} = -M_{-i-j} = -M_{-j-i} = \mathrm{sgn}(i)N_i + \mathrm{sgn}(j)N_j.$$

Mamy

$$\begin{aligned}
[N_k, B_{ij}] &= \beta_{ij}(N_k)B_{ij}, \\
\beta_{ij}(N_k) &= \mathrm{sgn}(i)\delta_{ik} + \mathrm{sgn}(j)\delta_{jk} = \langle M_{ij}|N_k\rangle, \\
[N_k, B_j] &= \beta_j(N_k)B_j, \\
\beta_j(N_k) &= \mathrm{sgn}(j)\delta_{jk} = \langle N_j|N_k\rangle.
\end{aligned}$$

$$\langle N_i|N_i\rangle = 1, \quad \langle N_i|M_{ij}\rangle = 1,$$

$$\langle M_{ij}|M_{ij}\rangle = 2, \ \langle M_{ij}|M_{i-j}\rangle = 0, \ \langle M_{ij}|M_{ik}\rangle = 1, \ |j| \ne |k|.$$

Czyli B_{ij} i ew. B_j są operatorami pierwiastkowymi, β_{ij} i ew. β_j są pierwiastkami, wreszcie M_{ij} i ew. N_j są kopierwiastkami.

19.7 $sp(2m, \mathbb{C})$

Współrzędne będą indeksowane przez $\pm i$, $i = 1, \ldots m$:

$$\omega = \sum_i \mathrm{sgn}(i)|i\rangle\langle -i|.$$

Wprowadźmy operatory

$$C_{ij} := \mathrm{sgn}(i)|i\rangle\langle -j| + \mathrm{sgn}(j)|j\rangle\langle -i|.$$

Zauważmy, że

$$N_i := C_{i-i} = |i\rangle\langle i| - |-i\rangle\langle -i|, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{19.65}$$

$$C_i := C_{ii} = 2|i\rangle\langle -i| = 2B_i, \quad 1 \le |i| \le m.$$

Bazę $sp(2m, \mathbb{C})$ stanowią N_i, $i = 1, \ldots, m$, oraz

$$C_{ij}, \quad 1 \le |i| < |j| \le m, \quad C_j, \quad 1 \le j \le m.$$

Wprowadzamy iloczyn skalarny $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}XY$. Niech $\mathfrak{h}$ będzie rozpięta przez N_i, $i = 1, \ldots, m$, które stanowią bazę ortonormalną. Niech M_{ij} będą zdefiniowane jak dla $so(2m)$. Mamy

$$\begin{aligned}
[N_k, C_{ij}] &= \gamma_{ij}(N_k)C_{ij}, \\
\gamma_{ij}(N_k) &= \mathrm{sgn}(i)\delta_{-|i|k} + \mathrm{sgn}(j)\delta_{|j|k} = \langle M_{ij}|N_k\rangle, \\
[N_k, C_j] &= \gamma_j(N_k)C_j, \\
\gamma_j(N_k) &= 2\mathrm{sgn}(j)\delta_{|j|k} = \langle 2N_j|N_k\rangle.
\end{aligned}$$

$$\langle 2N_i|2N_i\rangle = 4, \quad \langle 2N_i|M_{ij}\rangle = 2,$$

$$\langle M_{ij}|M_{ij}\rangle = 2, \ \langle M_{ij}|M_{i-j}\rangle = 0, \ \langle M_{ij}|M_{ik}\rangle = 1, \ |j| \ne |k|.$$

19.8 Koincydencje

$\phi : so(3, \mathbb{C}) \to sl(2, \mathbb{C})$

$$\phi(M_1) = H_{12}/2, \ \phi(B_1) = A_{12}, \ \phi(B_{-1}) = A_{21}.$$

$\phi : so(4, \mathbb{C}) \to sl(2, \mathbb{C}) \oplus sl(2, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned}
\phi(M_{12}) = H_{12}/2, &\quad \phi(B_{12}) = A_{12}, \ \phi(B_{-1-2}) = A_{21}, \\
\phi(M_{1-2}) = H_{-1-2}/2, &\quad \phi(B_{-12}) = A_{-1-2}, \ \phi(B_{1-2}) = A_{-2-1}.
\end{aligned}$$

$\phi : so(5, \mathbb{C}) \to sp(4, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned}
\phi(M_{12}) = M_{12}, &\quad \phi(B_{12}) = C_{12}, \ \phi(B_{-1-2}) = C_{21}, \\
\phi(M_{1-2}) = M_{1-2}, &\quad \phi(B_{-12}) = C_{-12}, \ \phi(B_{1-2}) = C_{2-1}, \\
&\quad \phi(B_i) = C_i.
\end{aligned}$$

$\phi : so(6,\mathbb{C}) \to sl(4,\mathbb{C})$

Jeśli (ij) jest parą w zbiorze $\{1,2,3,4\}$, wtedy $\overline{(ij)}$ będzie oznaczało taką parę (kl), że $ijkl$ jest parzystą permutacją 1234.

Poniżej, ij są parami w zbiorze $\{1,2,3\}$.

$$\phi(M_{ij}) = H_{ij}/2, \quad \phi(B_{ij}) = A_{ij},\ \phi(B_{-i-j}) = A_{ji},$$
$$\phi(M_{i-j}) = H_{\overline{ij}}/2, \quad \phi(B_{-ij}) = A_{\overline{ij}},\ \phi(B_{i-j}) = A_{\overline{ji}}.$$

19.9 Reprezentacja kontragradientna I

Załóżmy, że mamy reprezentację π na przestrzeni $\mathbb{C}^n$. Reprezentację kontragradientną do π nazywamy reprezentację π^{ct} zadaną przez

$$\pi^{\mathrm{ct}}(g) := \pi(g)^{\#(-1)}.$$

Dla algebr Liego mamy

$$\pi^{\mathrm{ct}}(A) := -\pi(A)^{\#}.$$

Zauważmy, że dla reprezentacji unitarnych, reprezentacja kontragradientna pokrywa się z reprezentacją zespolenie sprzężoną.

19.10 Reprezentacja kontragradientna II

Niech $\mathcal{V}^{\#}$ oznacza przestrzeń dualną do $\mathcal{V}$. Oznacza to przestrzeń funkcjonałów liniowych na $\mathcal{V}$. Jeśli $A \in L(\mathcal{V})$, przez $A^{\#} \in L(\mathcal{V}^{\#})$ oznaczamy odwzorowanie sprzężone do A.

Jeśli $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$, to definicja ta pokrywa się z poprzednią.

Z tą definicją jest pewien problem w wymiarze nieskończonym. Oprócz *algebraicznej przestrzenie dualnej*, jeśli $\mathcal{V}$ ma topologię, jest np. przestrzenią Hilberta, naturalnie jest rozważać *topologiczną przestrzeń dualną*, składającą się z *ciągłych* funkcjonałów liniowych.

19.11 Iloczyn reprezentacji i reprezentacji kontragradientnej

Rozważmy przestrzeń wektorową skończenie wymiarową $\mathcal{V}$. Iloczyn tensorowy $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^{\#}$ jest naturalnie izomorficzny z $L(\mathcal{V})$. Izomorfizm ten jest zadany przez

$$(v \otimes \xi)w := v\langle\xi|w\rangle, \quad v, w \in \mathcal{V}, \quad \xi \in \mathcal{V}^{\#}.$$

Jeśli wybierzemy bazę $(e_1, \dots, e_n)$ w $\mathcal{V}$, to w $\mathcal{V}^{\#}$ mamy bazę dualną. Wektor

$$\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e^i \tag{19.66}$$

odpowiada $\mathbb{1}_{\mathcal{V}}$.

Rozważmy reprezentację grupy $\rho : G \to GL(\mathcal{V})$ lub $\rho : \mathfrak{g} \to gl(\mathcal{V})$. Wtedy mamy reprezentację $\rho \otimes \rho^{\mathrm{ct}}$ lub $\rho \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \rho^{\mathrm{ct}}$ w $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^{\#}$. Wektor (19.66) rozpina 1-wymiarową przestrzeń na której ta reprezentacja jest trywialna. Ma ona reprezentację dopełniającą, zadaną przez jądro śladu, gdzie korzystamy z utożsamienia $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^{\#} \simeq L(\mathcal{V})$.

Na przykład, jeśli rozważymy algebrę $sl(n,\mathbb{C})$ lub $su(n)$ i ρ jest reprezentacją fundamentalną na $\mathbb{C}^n$, to dostaniemy reprezentację dołączoną. Jest ona nieprzywiedlna.

Jeśli rozważymy reprezentację fundamentalną $so(n,\mathbb{C})$ lub $so(n)$ na $\mathbb{C}^n$, to reprezentacja na macierzach bezśladowych rozkłada się na sumę prostą dwóch podreprezentacji nieprzywiedlnych: w macierzach symetrycznych bezśladowych i w macierzach antysymetrycznych. Ta druga jest tożsama z reprezentacją dołączoną.

19.12 Reprezentacje $su(3)$

Wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne $su(3)$ (lub $sl(3,\mathbb{C})$) można opisać następująco. Bierzemy reprezentację fundamentalną na $\mathbb{C}^3$ i antyfundamentalną na $\mathbb{C}^{\#3}$. Tworzymy iloczyn tensorowy

$$\otimes_{\mathrm{s}}^p \mathbb{C}^3 \otimes \otimes_{\mathrm{s}}^q \mathbb{C}^{\#3}.$$

Elementami tej przestrzeni są tensory

$$\sum e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q} t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q},$$

które są w skrócie zapisywane jako $[t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}]$. Mamy zwężenie

$$[t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}] \mapsto [t^{i_1,\dots,i_p,k}_{j_1,\dots,j_{q-1},k}],$$

gdzie stosujemy konwencję sumacyjną Einsteina. Operator zwężenia splata reprezentację na $\otimes_{\mathrm{s}}^p \mathbb{C}^3 \otimes \otimes_{\mathrm{s}}^q \mathbb{C}^{\#3}$ z reprezentacją na $\otimes_{\mathrm{s}}^{p-1} \mathbb{C}^3 \otimes \otimes_{\mathrm{s}}^{q-1} \mathbb{C}^{\#3}$. Jądro tego operatora jest niezmienniczą przestrzenią. Są to wszystkie reprezentacj nieprzywiedlne dla $su(3)$.

Załóżmy, że mamy reprezentację nieprzywiedlną $su(3)$. Wektory, które diagonalizują algebrę Cartana nazywamy wektorami wagowymi. Odpowiadają im funkcjonały liniowe na $\mathfrak{h}$. Elementy $H_{ij} = A_{ii} - A_{jj}$ rozpinają 2-wymiarową algebrę Cartana. Wagi reprezentacji fundamentalnej L_i spełniają dla różnych i, j, k

$$\langle L_i | H_{ij} \rangle = 1, \ \langle L_k | H_{ij} \rangle = -1, \ \langle L_k | H_{ij} \rangle = 0.$$

Zauważmy, że $L_1 + L_2 + L_3 = 0$.

Wektory L_i rozpinają kratę wagową. Wagi dla każdej rerprezentacji są podzbiorem tej kraty.

Zbiór wag reprezentacji nieprzywiedlnej wraz z krotnościami musi spełniać następujące własności:

(1) Jest symetryczny względem odbicia w każdej z osi zadanej przez L_i.

(2) Po przecięciu dowolną prostą prostopałą do L_i dostajemy krotności pewnej reprezentacji $SU(2)$

Wśród operatorów pierwiastkowych wyróżniamy pierwiastki ujemne:

$$A_{12}, \ A_{13}, \ A_{23}$$

Wektor najwyższej wagi to taki, który jest zabijany przez te operatory. Każda reprezentacja nieprzywiedlna posiada dokładnie jeden (z dokładnością do czynnika) wektor najwyższej wagi.

Reprezentacja nieprzywiedlna na $\otimes_{\mathrm{s}}^p \mathbb{C}^3 \otimes \otimes_{\mathrm{s}}^q \mathbb{C}^{\#3}$ ma wektor najwyższej wagi $\otimes^p e_1 \otimes \otimes^q e^1$ z wagą $pL_1 - qL_3 = (p+q)L_1 + qL_2$.

Jeśli utożsamimy $\mathfrak{h}$ z $\mathfrak{h}^\#$ przy pomocy formy śladowej, wtedy mamy $L_i = \frac{1}{2}(H_{ij} + H_{ik})$.

Oto diagramy wagowe przykładowych reprezentacji

$\mathbb{C}^3$: wagi $\{L_i\}$, najwyższa waga L_1

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ & 1 & \end{array}$$

$\otimes_{\mathrm{s}}^2 \mathbb{C}^3$: wagi $\{L_i + L_j\}$, najwyższa waga $2L_1$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 1 & & 1 \\ & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

$\otimes_{\mathrm{s}}^3 \mathbb{C}^3$: wagi $\{L_i + L_j + L_k\}$, najwyższa waga $3L_1$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ & 1 & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

$\mathbb{C}^{\#3}$: wagi $\{-L_i\}$, najwyższa waga $-L_3$

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 1 \end{array}$$

$\otimes_{\mathrm{s}}^2 \mathbb{C}^{\#3}$: wagi $\{-L_i - L_j\}$, najwyższa waga $-2L_3$

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & 1 & & 1 \end{array}$$

$\otimes_{\mathrm{s}}^3 \mathbb{C}^{\#3}$: wagi $\{-L_i - L_j - L_k\}$, najwyższa waga $-3L_3$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & & 1 & \\ 1 & & 1 & & 1 & & 1 \end{array}$$

reprezentacja dołączona, wagi $\{L_i - L_j\}$, najwyższa waga $L_1 - L_3$

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & & 1 & \\ 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 1 & \end{array}$$

Mamy następującą regułę dla krotności wag (wymiaru przestrzeni wagowych). Wagi na obrzeżach mają krotność 1. W każdej następnej warstwie zwiększają się o 1, chyba że dochodzimy do warstwy w formie trójkąta, i wtedy nie zwiększamy krotności. W szczególności, dla reprezentacji w $\otimes_{\mathrm{s}}^n \mathbb{C}^3$ i $\otimes_{\mathrm{s}}^n \mathbb{C}^{\#3}$, które mają obrzeża trójkątne, wszystkie krotności są równe 1.

19.13 Konstrukcja Schura-Weyla

Diagramem Younga będziemy nazywali nierosnący ciąg liczb naturalnych lub zer $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$, od pewnego miejsca zerowy. Czasami bierzemy pod uwagę tylko niezerowe elementy, dostając ciąg skończony. Rysujemy go w postaci ułożonych obok na siebie kwadratów (okienek), po λ_i w $i$tym wierszu. Wielkością diagramu Younga nazywamy $|\lambda| := \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots$.

Dualny diagram Younga jest zdefiniowany jako

$$\lambda'_k := \max\{m \ : \ \lambda_m \geq k\}.$$

Tablicą Younga nazywamy diagram Younga z wpisanymi w okienka kolejne liczby naturalne $1, \ldots, |\lambda|$. Na przykład, można wpisać liczby po kolei. Wtedy będziemy utożsamiać diagram z tablicą.

Dualną tablicą Younga nazywamy tablicę Younga odbitą w przekątnej. Odpowiada ona dualnemu diagramowi Younga.

Niech τ będzie tablicą Younga o wielkości n. Wiążemy z nią dwie podgrupy w S_n:

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{row},\tau} &= \{\text{permutacje z } S_n \text{ nie mieszające elementów w wierszach}\} \\ S_{\mathrm{col},\tau} &= \{\text{permutacje z } S_n \text{ nie mieszające elementów w kolumnach}\}. \end{aligned}$$

Oczywiście,

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{row},\tau} &= S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \cdots, \\ S_{\mathrm{col},\tau} &= S_{\lambda'_1} \times S_{\lambda'_2} \times \cdots. \end{aligned}$$

Definiujemy następujące rzuty w algebrze grupowej $C[S_n]$:

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathrm{row},\tau} &:= \frac{1}{|S_{\mathrm{row},\tau}|} \sum_{\sigma \in S_{\mathrm{row},\tau}} \sigma, \\ \Theta_{\mathrm{col},\tau} &:= \frac{1}{|S_{\mathrm{col},\tau}|} \sum_{\sigma \in S_{\mathrm{col},\tau}} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma. \end{aligned}$$

Niech

$$\mathfrak{A}_\tau = \Theta_{\mathrm{row},\tau}\Theta_{\mathrm{col},\tau}C[S_n]$$

Jest to przestrzeń niezmiennicza dla lewej regularnej reprezentacji. Nazwijmy ją $(\pi_\tau, \mathfrak{A}_\tau)$.

Twierdzenie 19.2 (1) *Reprezentacje π_τ są nieprzywiedlne.*

(2) *Każda nieprzywiedlna reprezentacja S_n jest postaci π_τ.*

(3) *$\pi_{\tau_1} \simeq \pi_{\tau_2}$ wtedy i tylko wtedy gdy diagramy Younga tablic τ_1 i τ_2 są takie same.*

(4) *$\pi_{\tau'}$ jest równoważna iloczynowi reprezentacji znakowej i π_τ.*

19.14 Reprezentacje $SL(n, \mathbb{C})$

Rozważmy przestrzeń $\mathcal{V}$. Rozważmy reprezentację grupy $\rho : G \to GL(\mathcal{V})$, albo algebry Liego $\rho \mathfrak{g} \to gl(\mathcal{V})$. Mamy wtedy naturalne reprezentacje $\otimes^n \rho : G \to GL(\otimes^n \mathcal{V})$, $\mathrm{d} \otimes^n gl(\otimes^n \mathcal{V})$

Mamy naturalną reprezentację S_n na $\otimes^n \mathcal{V}$. Reprezentacja grupy S_n komutuje z $\otimes^n \rho$ i $\mathrm{d}\otimes^n \rho$. Dlatego też komutuje z rzutami $\Theta_{\mathrm{row},\tau}$ i $\Theta_{\mathrm{col},\tau}$. Zdefiniujmy

$$\mathcal{V}_\tau := \Theta_{\mathrm{row},\tau} \Theta_{\mathrm{col},\tau} \otimes^n \mathcal{V},$$

gdzie τ jest pewną tablicą Younga. Jest to podprzestrzeń niezmiennicza dla $\otimes^n \rho$. Niech ρ_λ oznacza reprezentację $\otimes^n \rho$ obciętą do $\mathcal{V}_\lambda$.

W szczególności rozważmy grupę $GL(n)$ i jej reprezentację fundamentalną na $\mathbb{C}^n$. Zauważmy, że dla λ będącego kolumną o wysokości n mamy $\rho_\lambda(g) = \det g$. Dlatego też po obcięciu do $SL(n)$ dostajemy reprezentację trywialną.

Dla λ będącego kolumną wysokości $n - 1$ na $GL(n)$ dostajemy reprezentację, która macierzy przyporządkowuje macierz dopełnień algebraicznych. Dlatego też, na $SL(n)$dostajemy reprezentację kontragradientną.

Widać zatem, że wystarczy ograniczyć się do diagramów Younga, których wszystkie kolumny są niższe niż n.

Niech λ będzie diagramem Younga. Diagram sprzężony defniujemy następująco. Kolumny o długości m zastępujemy przez kolumny o długości $n - m$. Następnie porządkujemy kolumny w kolejności malejącej. Diagram sprzężony oznaczamy przez $\overline{\lambda}$.

Twierdzenie 19.3 (1) *Reprezentacje ρ_τ są nieprzywiedlne.*

(2) *Każda nieprzywiedlna reprezentacja $SU(n)$ jest postaci π_τ.*

(3) *$\pi_{\tau_1} \simeq \pi_{\tau_2}$ wtedy i tylko wtedy gdy diagramy Younga tablic τ_1 i τ_2 są takie same.*

(4) *$\overline{\pi}_\tau = \pi_{\overline{\tau}}$ jest równoważna iloczynowi reprezentacji znakowej i π_τ.*

20 Zastosowania teorii grup w fizyce cząstek

20.1 Symetrie w mechanice kwantowej

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta a $G \ni g \mapsto U(g) \in U(\mathcal{H})$ reprezentacją unitarną grupy.

Najczęstsze zastosowanie teorii grup to *symetrie przybliżone*. Załóżmy, że $A_1, \dots, A_n$ jest układem komutujących samosprzężonych obserwabli, które powoli zmieniają się z czasem. Na przykłąd, jeśli $H = H_0 + V$ będzie Hamiltonianem i V jest w odpowiednim sensie małe, to jedną z tych obserwabli może być H_0. Załóżmy, że $U(g)$, $g \in G$, komutują z $A_1, \dots, A_n$. Wtedy przestrzenie własne H_0 są niezmiennicze dla G.

Inne zastosowanie to *grupy cechowania*. Oznacza to, że H komutuje z $U(g)$, $g \in G$. Wszystkie zresztą obserwable fizyczne komutują z reprezentacją.

20.2 Konwencje

Reprezentacje unitarne $u(1)$ są jednowymiarowe i zadane są przez $q \in \mathbb{R}$, zwany ładunkiem

$$u(1) \ni \theta \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta q}.$$

Przy iloczynie tensorowym ładunki się dodają.

Reprezentacje nieprzywiedlne $su(n)$, $so(n)$ są z reguły oznaczane liczbami odpowiadającymi ich wymiarowi. Dla reprezentacji sprzężonej dopisujemy kreskę. Tak więc reprezentacja fundamentalna $su(n)$ jest oznaczana przez n a antyfundamentalna przez $\overline{n}$.

20.3 Zachowane ładunki

Każda cząstka pozostawiona samej sobie w końcu rozpadnie się na fotony, neutrina, elektrony, protony i ich antycząstki.

Następujące wielkości nie zależą od kanałów rozpadu: ładunek elektryczny

$$Q := \#p + \#\overline{e} - \#\overline{p} - \#e,$$

i ładunek barionowy

$$B := \#p - \#\overline{p}.$$

Są to liczby, które są zawsze zachowane.

20.4 Izospin

Proton i neutron mają podobne masy i własności nie związane z oddziaływaniem elektromagnetycznym. Podobnie mezony π^+, π^0, π^-.

Heisenberg zaproponował, że hamiltonian ma rozkład

$$H = H_{\mathrm{strong}} + H_{\mathrm{em}},$$

gdzie H_{strong} to hamiltonian oddziaływań silnych niezmienniczy względem grupy $SU(2)$, w odróżnieniu od hamiltonianu elektromagnetycznego H_{em}. Oznaczmy przez I_1, I_2, I_3 generatory $su(2)$, zwane izospinem. Oddziaływanie elektromagnetyczne komutuje jedynie z I_3.

Proton p i neutron n byłyby wektorami własnymi I_3 należącymi do reprezentacji fundamentalnej $SU(2)$. Przyjmujemy, że proton i neutron należą do reprezentacji o izospinie $\frac{1}{2}$:

$$I_3 p = \frac{1}{2}p, \quad I_3 n = -\frac{1}{2}n.$$

Podobnie, mezony π należą do reprezentacji o izospinie 1:

$$I_3\pi^+ = \pi^+, \quad I_3\pi^0 = 0, \quad I_3\pi^- = -\pi^-.$$

Cząstki należące do tego samego multipletu izospinowego mają podobne masy i inne własności, z wyjątkiem ładunku elektrycznego.

Dla powyższych cząstek mamy związek

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}B.$$

20.5 Dziwność

Zauważono, że oddziaływania między cząstkami można podzielić na silne, które następują bardzo szybko, słabe, które są znacznie wolniejsze i elektromagnetyczne. Izospin zachowywany jest w oddziaływaniach silnych, ale nie słabych, np:

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu, \quad \mu^+ \to e^+ + \nu_e + \overline{\nu}_\mu.$$

Zauważono, że istnieje jeszcze jedna liczba, która jest zachowana w reakcjach silnych, a w reakcjach słabych zmienia się o ± 1. Nazwano ją dziwnością i oznaczono przez S. Przyjęto, że "standardowe cząstki" takie jak p, n, π, e mają dziwność zero.

Okazało się, że cząstki oddziałujące silnie można pogrupować w multiplety rózniące się o wartość S i I_3. W obrębie multipletów mamy stosunkowo podobne masy, ten sam spin i tę samą liczbę barionową. Okazało się, że multiplety te mają symetryczną postać, jeśli za współrzędne wybierze się I_3 i hiperładunek

$$Y = B + S.$$

Znaleziono też związek zwany formułą Gell-Manna – Nishijimy

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y.$$

Hadrony z zerowym ładunkiem barionowym nazywane są mezonami. Na poniższych diagramach na osi pionowej odkładamy Y, na osi poziomej I_3.

Najważniejsze multiplety mezonów ($B = 0$):

Nonet pseudoskalarny składa się z oktetu

$$\begin{array}{ccccc} & K^0 & & K^+ & \\ \pi^- & & \pi^0, \eta & & \pi^+ \\ & K^- & & K^{\overline{0}} & \end{array}$$

i sigletu η'

Nonet pseudowektorowy składa się z oktetu

$$\begin{array}{ccccc} & K^{*0} & & K^{*+} & \\ \rho^- & & \rho^0, \omega & & \rho^+ \\ & K^{*-} & & K^{*\overline{0}} & \end{array}$$

i singletu ω.

Oto podstawowe multiplety barionów ($B = 1$):

Oktet ze spinem $\frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{ccccc} & n & & p & \\ \Sigma^- & & \Sigma^0, \Lambda^0 & & \Sigma^+ \\ & \Xi^- & & \Xi^0 & \end{array}$$

Dekuplet ze spinem $\frac{3}{2}$:

$$\begin{array}{ccccccc} \Delta^- & & \Delta^0 & & \Delta^+ & & \Delta^{++} \\ & \Sigma^{*-} & & \Sigma^{*0} & & \Sigma^{*+} & \\ & & \Xi^{*-} & & \Xi^{*0} & & \\ & & & \Omega^- & & & \end{array}$$

20.6 Kwarki

Wprowadźmy 3 kwarki: u, d i s. Traktujemy je jako wektory wagowe dla fundamentalnej reprezentacji $SU(3)$:

$$\begin{array}{ccc} d & & u \\ & s & \end{array}$$

Mamy też antykwarki odpowiadające reprezentacji antyfundamentalnej:

$$\begin{array}{ccc} & \overline{s} & \\ \overline{u} & & \overline{d} \end{array}$$

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{3}(\#u + \#d - 2\#s), \\ I_3 &= \frac{1}{2}(\#u - \#d), \\ B &= \frac{1}{3}(\#u + \#d + \#s), \\ S &= -\#s, \\ Q &= \frac{1}{3}(2\#u - \#d - \#s). \end{aligned}$$

Rozważmy grupę $SU(3)_{\text{fl}}$ opisującą flavory u, d, s, grupę $SU(2)_{\text{spin}}$ opisującą spin i $SU(3)_{\text{col}}$ odpowiedzialna za kolor. Kwarki można traktować jako elementy $\mathbb{C}^3_{\text{fl}} \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3_{\text{col}}$, na której działa grupa $SU(3)_{\text{fl}} \times SU(2)_{\text{spin}} \times SU(3)_{\text{col}}$

Przyjmujemy, że stany fizyczne ze względu na kolor są "bezbarwne", czyli są postaci

$$\Psi \otimes \Phi,$$

gdzie Φ odpowiada "kolorowym" stopniom swobody i jest singletem względem $SU(3)$.

W szczególności, mezony są elementami

$$\begin{aligned} & \otimes^2_{\text{a}}(\mathbb{C}^3_{\text{fl}} \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3_{\text{col}} \oplus \overline{\mathbb{C}}^3_{\text{fl}} \otimes \overline{\mathbb{C}}^2 \otimes \overline{\mathbb{C}}^3_{\text{col}}), \\ \simeq\ & \otimes^2_{\text{a}}(\mathbb{C}^3_{\text{fl}} \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3_{\text{col}}) \\ & \oplus \mathbb{C}^3_{\text{fl}} \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3_{\text{col}} \otimes \overline{\mathbb{C}}^3_{\text{fl}} \otimes \overline{\mathbb{C}}^2 \otimes \overline{\mathbb{C}}^3_{\text{col}} \\ & \oplus\ \otimes^2_{\text{a}}(\overline{\mathbb{C}}^3_{\text{fl}} \otimes \overline{\mathbb{C}}^2 \otimes \overline{\mathbb{C}}^3_{\text{col}}). \end{aligned}$$

Warunek bezbarwności daje

$$\Psi \otimes \frac{1}{\sqrt{3}}(|1,\overline{1}\rangle + |2,\overline{2}\rangle + |2,\overline{2}\rangle),$$

gdzie 1,2,3 odpowiada 3 kolorom i

$$\Psi \in \mathbb{C}^3_{\text{fl}} \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \overline{\mathbb{C}}^3_{\text{fl}} \otimes \overline{\mathbb{C}}^2.$$

Dla reprezentacji $SU(2)_{\text{spin}}$ mamy $2 \otimes 2 = 3 + 1$, co daje spin 0 i 1. Dla reprezentacji $SU(3)_{\text{fl}}$ mamy $3 \otimes \overline{3} = 8 + 1$. Zatem dostajemy oba nonety mezonów.

Bariony są elementami

$$\otimes^3_{\text{a}}(\mathbb{C}^3_{\text{fl}} \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3_{\text{col}}).$$

Warunek bezbarwności daje

$$\Psi \otimes \frac{1}{\sqrt{3!}}(|1,2,3\rangle + |2,3,1\rangle + |3,1,2\rangle - |1,3,2\rangle - |3,2,1\rangle - |1,3,2\rangle),$$

Ψ musi być elementem $\otimes^3_{\text{s}}(\mathbb{C}^3_{\text{fl}} \otimes \mathbb{C}^2)$, która ma wymiar $\frac{6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 56$. Ze względu na działanie grupy $SU(3)_{\text{fl}} \times SU(2)_{\text{spin}}$ rozkłada sie ta przestrzeń na

$$\mathbb{C}^{10} \otimes \mathbb{C}^4 \oplus \mathbb{C}^8 \otimes \mathbb{C}^2,$$

co odpowiada dekupletowi (reprezentacji $\otimes^3_{\text{s}}\mathbb{C}^3$) o spinie $\frac{3}{2}$ i oktetowi (reprezentacji dołączonej) o spinie $\frac{1}{2}$.

20.7 Model standardowy

Model standardowy oparty jest na grupie cechowania $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

Oznaczmy (samosprzężone) generatory $su(2)$ przez T_1, T_2, T_3. Stanowią one generatory tzw. słabego izospinu. Samosprzężony generator $u(1)$ przez Y (słaby hiperładunek, nie mylić z hiperładunkiem, który ma to samo oznaczenie). Ladunek elektryczny jest równy

$$Q = T_3 + Y.$$

(Stosujemy konwencję z podręcznika Srednicki'ego. Często zastępuje się Y przez $2Y$, tak by był spełniony wzór $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$, analogiczny do wzoru Gell-Manna – Nishijimy).

Poza bozonami cechowania – odpowiadającymi algebrze Liego $su(3) \oplus su(2) \oplus u(1)$ – w lagranżjanie występują naładowane cząstki odpowiadające różnym nieprzywiedlnym reprezentacjom (multipletom) grupy $SU(3) \oplus SU(2) \oplus U(1)$. Każda z nich posiada antycząstki posiadające odwrotną chiralność i ładunki. Można je podzielić następująco:

(1) Multiplet (albo więcej multipletów) zespolonych skalarnych bozonów (Higgsa) służących do złamania symetrii cechowania $SU(2) \times U(1)$.

(2) Kilka multipletów weylowskich (chiralnych) fermionów. Każdy multiplet występuje w 3 generacjach. Multiplety fermionów można podzielić na dwie rodziny

(i) Leptony, które nie uczestniczą w oddziaływaniach silnych, czyli są singletami ze względu na $SU(3)$.

(ii) Kwarki, które transformują się nietrywialnie względem $SU(3)$.

(Multiplet – nieprzywiedlna, na ogół wielowymiarowa reprezentacja grupy cechowania).

Istnieją dwie wersje modelu standardowego: pierwotna wersja, którą oznaczamy SM, nie zawierała neutrin prawochiralnych. W nowszej wersji, oznaczanej przez νSM są dodatkowo neutrina prawochiralne.

Będziemy stosowali nazewnictwo odnoszące się do pierwszej generacji

20.8 Leptony

Leptony można podzielić na elektrony i neutrina. Elektrony są zarówno lewo- i prawochiralne. Mają tę samą masę. Z punktu widzenia oddziaływań e.m. i silnych można traktować je jako fermiony dirakowskie, czyli para fermion lewochiralny i prawochiralny. Oznaczane są przez $e = (e_{\mathrm{L}}, e_{\mathrm{R}})$, Mają one $Q = -1$. Antycząstka dla elektronu nazywa się pozytonem i jest oznaczana przez $\overline{e}$.

Neutrina mają $Q = 0$. Neutrina elektronowe, oznaczane ν_e lub $\nu_{e,\mathrm{L}}$, w SM są lewochiralne i mają masę zerową,

W νSM wprowadza się dodatkowe neutrino prawochiralne $\nu_{e,\mathrm{R}}$, które transformują się trywialnie ze względu na grupę cechowania. Przy zestawianiu multipletów bierzemy pod uwagę jego antycząstkę $\overline{\nu}_{e,\mathrm{R}}$.

$(e_{\mathrm{L}}, \nu_{e,\mathrm{L}})$ tworzą dublet ze względu na $SU(2)$. Mamy

$$T_3 e_{\mathrm{L}} = -\frac{1}{2} e_{\mathrm{L}}, \quad T_3 \nu_{e,\mathrm{L}} = \frac{1}{2} \nu_{e,\mathrm{L}}.$$

Stąd

$$Y e_{\mathrm{L}} = -\frac{1}{2} e_{\mathrm{L}}, \quad Y \nu_{e,\mathrm{L}} = -\frac{1}{2} \nu_{e,\mathrm{L}}.$$

e_{R} jest singletem dla $SU(2)$. Dlatego też

$$Y e_{\mathrm{R}} = -e_{\mathrm{R}}.$$

Przy zestawianiu multipletów, wygodnie jest odwoływać się wyłącznie do multipletów lewochiralnych. Dlatego zamiast elektronu prawochiralnego bierzemy pod uwagę pozyton lewochiralny. Oto jego hiperładunek:

$$Y \overline{e}_{\mathrm{R}} = \overline{e}_{\mathrm{R}}.$$

Reasumując, mamy następujące multiplety lewochiralnych leptonów:

$$\begin{array}{lcl} L & := (e_{\mathrm{L}}, \nu_{e,\mathrm{L}}) & (1, 2, -\frac{1}{2}), \\ \overline{E} & := \overline{e}_{\mathrm{R}} & (1, 1, 1), \\ \overline{N} & := \overline{\nu}_{e,\mathrm{R}} & (1, 1, 0). \end{array}$$

20.9 Skalar Higgsa

Aby zbudować niezmiennicze człony masowe w lagranżjanie potrzebujemy dodatkowego skalara, ϕ, który jest singletem dla $SU(3)$. Ma on reprezentację

$$(1, 2, -\frac{1}{2}).$$

20.10 Kwarki

Mamy dwa kwarki, u i d. Oto ich ładunek elektryczny:

$$Qu = \frac{2}{3}u, \quad Qd = -\frac{1}{3}d.$$

Są one trypletami ze względu na $SU(3)$ – transformują się wzgl. reprezentacji fundamentalnej.

Na przykład, proton i neutron są zbudowane następująco:

$$p = uud, \quad n = udd.$$

Mamy też antykwarki:

$$Q\overline{u} = -\frac{2}{3}\overline{u}, \quad Q\overline{d} = \frac{1}{3}\overline{d}.$$

Transformują się wzgl. reprezentacji antyfundamentalnej.

Lewochiralne kwarki są dubletem ze wzgl. na $SU(2)$:

$$T_3 u_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}u_{\mathrm{L}}, \quad T_3 d_{\mathrm{L}} = -\frac{1}{2}d_{\mathrm{L}}.$$

Stąd

$$Y u_{\mathrm{L}} = \frac{1}{6}u_{\mathrm{L}}, \quad Y d_{\mathrm{L}} = \frac{1}{6}d_{\mathrm{L}}.$$

Prawochiralne kwarki są sigletami dla $SU(2)$. Dla nich

$$T_3 u_{\mathrm{L}} = 0, \quad T_3 d_{\mathrm{L}} = 0.$$

Stąd

$$Y u_{\mathrm{L}} = \frac{2}{3}u_{\mathrm{L}}, \quad Y d_{\mathrm{L}} = -\frac{1}{3}d_{\mathrm{L}}.$$

Reasumując, mamy następujące multiplety lewochiralnych kwarków:

$$\begin{aligned} Q = (u_{\mathrm{L}}, d_{\mathrm{L}}) &\qquad (3, 2, \frac{1}{6}), \\ \overline{U} = \overline{u}_{\mathrm{R}} &\qquad (\overline{3}, 1, -\frac{2}{3}), \\ \overline{D} = \overline{d}_{\mathrm{R}} &\qquad (\overline{3}, 1, \frac{1}{3}). \end{aligned}$$

20.11 Lagranżjan modelu standardowego

Lagranżjan modelu standardowego jest sigletem ze względu na grupę cechowania. Można wyróżnić w nim następujące człony:

(1) Człon kinetyczny dla pól cechowania.

(2) Człony kinetyczne dla fermionów.

(3) Człon kinetyczny dla bozonów skalarnych.

(4) Potencjał dla bozonów skalarnych ("kapelusz meksykański"?) – maksymalnie 4 stopnia, zakładamy, że jest niezmienniczy przy zamianie ϕ na $-\phi$.

(5) Wyrazy masowe – wyrazy 2-liniowe w fermionach, ewentualnie razy bozon.

Niech ψ, ψ' transformują się zgodnie z reprezentacją fundamentalną SU(3). Wtedy niezmiennicze rzeczywiste dwuliniowe wyrażenia zbudowane z ψ, ψ' są postaci

$$\overline{\psi}^{\alpha}\psi'_{\alpha}$$

i wyrażenia sprzężone.

Niech ψ, ψ' transformują się zgodnie z reprezentacją fundamentalną SU(2). Wtedy niezmiennicze dwuliniowe wyrażenia zbudowane z ψ, ψ' są postaci

$$\begin{aligned} &\overline{\psi}^{i}\psi'_{j}, \\ &\epsilon^{ij}\psi_i\psi'_j, \end{aligned}$$

i wyrażenia sprzężone. Jeśli mamy $\psi_1, \ldots, \psi_n$ mające ładunki $q_1, \ldots, q_n$ ze względu na $U(1)$, to $\psi_1 \cdots \psi_n$ jest niezmiennicze jeśli $q_1 + \cdots + q_n = 0$. Dlatego też mamy następujące możliwe wyrazy niekinetyczne w lagranżjanie ν SM (w SM tylko pierwsze 3 są możliwe):

$$\begin{aligned} &\overline{\phi}_i\phi^i, \quad (\overline{\phi}_i\phi^i)^2, \\ &\epsilon^{ij}\phi_i\overline{E}L_j, \ \epsilon^{ij}\phi_i\overline{D}^{\alpha}Q_{j\alpha}, \ \overline{\phi}^{i}\overline{U}^{\alpha}Q_{\alpha i}, \\ &\overline{\phi}^{i}L_i\overline{N}, \quad \overline{N}C\overline{N} \end{aligned}$$

i wyrażenia sprzężone. α przebiega indeks kolorowy, i, j przebiegają indeksy $1, 2$.

20.12 Teoria wielkiej unifikacji oparta na $SU(5)$

Mamy inkluzję

$$su(5) \supset su(3) \oplus su(2) \oplus u(1),$$

gdzie

$$Y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & & & & \\ & -\frac{1}{3} & & & \\ & & -\frac{1}{3} & & \\ & & & \frac{1}{2} & \\ & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} SU(5): \quad 5 \otimes 5 &= (5 \otimes 5)_{\mathrm{s}} \oplus (5 \otimes 5)_{\mathrm{a}} = 15 \oplus 10, \\ SU(3): \quad 3 \otimes 3 &= (3 \otimes 3)_{\mathrm{s}} \oplus (3 \otimes 3)_{\mathrm{a}} = 6 \oplus \overline{3}, \\ SU(2): \quad 2 \otimes 2 &= (2 \otimes 2)_{\mathrm{s}} \oplus (2 \otimes 2)_{\mathrm{a}} = 3 \oplus 1. \end{aligned}$$

Oznaczmy przez 5 fundamentalną reprezentację $SU(5)$. Rozkłada się ona następująco:

$$5 \to (3, 1, -\frac{1}{3}) \oplus (1, 2, \frac{1}{2}).$$

Mamy

$$\begin{aligned} 5 \otimes 5 &= ((3, 1, -\frac{1}{3}) \oplus (1, 2, \frac{1}{2})) \otimes ((3, 1, -\frac{1}{3}) \oplus (1, 2, \frac{1}{2})) \\ &\to (6, 1, -\frac{2}{3}) \oplus (3, 2, \frac{1}{6}) \oplus (1, 3, 1) \\ &\quad \oplus (\overline{3}, 1, -\frac{2}{3}) \oplus (3, 2, \frac{1}{6}) \oplus (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Wszystkie multiplety SM względem $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ znajdziemy w następujących dwóch multipletach względem $SU(5)$:

$$\begin{aligned} (5 \otimes 5)_{\mathrm{a}} = 10 &\to (\overline{3}, 1, -\frac{2}{3}) \oplus (3, 2, \frac{1}{6}) \oplus (1, 1, 1) \\ \overline{5} &\to (\overline{3}, 1, \frac{1}{3}) \oplus (1, 2, -\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

20.13 Pola w GUT

W GUT opartym na $SU(5)$, bez prawoskrętnego neutrina, poza bozonami cechowania parametryzowanymi przez $su(5)$, mamy następujące pola:

(1) Zespolone bozony skalarne

   (1) Bozon Φ w reprezentacji dołączonej odpowiedzialny za łamanie $SU(5)$ do $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Sprzęga się tylko do bozonów cechowania i H.

   (2) Bozon H w reprezentacji fundamentalnej odpowiedzialny za łamanie $SU(2) \times U(1)$ do $U(1)$.

(3) Weylowskie fermiony

   (1) Multiplet ψ w reprezentacji $\overline{5}$ (antyfundamentanej).

   (2) Multiplet χ w reprezentacji 10 (antysymetrycznej).

Możliwe wyrazy niekinetyczne w lagranżjanie:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}\Phi^2, \ \mathrm{Tr}\Phi^4, \ (\mathrm{Tr}\Phi)^2, \\ &\overline{H} \cdot H, \ (\overline{H} \cdot H)^2, \ \overline{H} \cdot \Phi^2 H, \\ &H^i \psi^j \chi_{ij}, \quad \epsilon^{ijklm} \overline{H}_i \chi_{jk} \chi_{lm}. \end{aligned}$$

Jeśli chcemy, żeby neutrina miały masę, musimy dodać pole ν_{R} będące singletem dla $SU(5)$ i wyraz

$$\overline{H}_i \psi^i \overline{\nu}_{\mathrm{R}}.$$