

Teoria grup

Jan Dereziński

Katedra Metod Matematycznych Fizyki
Uniwersytet Warszawski
Hoża 74, 00-682, Warszawa
e-mail jan.derezinski@fuw.edu.pl

5 czerwca 2018

rok 2010/11

Spis treści

1	Podstawowe własności grup	7
1.1	Definicja	7
1.2	Podgrupy	8
1.3	Homomorfizmy	8
1.4	Działanie	9
1.5	Orbity	9
1.6	Warstwy	10
1.7	Klasy sprzężoności	10
1.8	Klasyfikacja działań grupy	11
1.9	Iloczyn prosty	13
1.10	Podgrupy normalne	13
1.11	Iloczyn półprosty	14
2	Przykłady grup	15
2.1	Permutacje	15
2.2	Iloczyn półprosty z grupą \mathbb{Z}_2	16
2.3	Grupa permutacji 3 elementów	16
2.4	Grupa permutacji 4 elementów	16
2.5	Grupa obrotów $SO(3)$	16
2.6	Grupa obrotów właściwych wielokąta foremego $C_n \simeq \mathbb{Z}_n$	17
2.7	Grupa dihedralna $D_n \simeq \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$	17
2.8	Grupa czworoscianu $T \simeq A_4$	17
2.9	Grupa sześcianu/ośmiościanu $O \simeq S_4$	17
2.10	Grupa dwudziestościanu/dwunastościanu) $I \simeq A_5$	18
2.11	Skończone podgrupy grupy obrotów	18

3	Grupy macierzowe	20
3.1	Ciała	20
3.2	Przestrzenie wektorowe	20
3.3	Odwzorowania liniowe	20
3.4	Ogólna grupa liniowa	20
3.5	Grupa ortogonalna w skończonym wymiarze	21
3.6	Grupa pseudo-ortogonalna	21
3.7	Abstrakcyjne podejście do grup (pseudo-)ortogonalnych	22
3.8	Grupa unitarna w skończonym wymiarze	22
3.9	Grupa pseudo-unitarna	22
3.10	Abstrakcyjne podejście do grup (pseudo-)unitarnych	23
3.11	Grupa symplektyczna w skończonym wymiarze	23
3.12	Abstrakcyjne podejście do grup symplektycznych	24
3.13	Grupy afiniczne	24
3.14	Grupy Liego	24
4	Koincydencje wśród grup macierzowych	25
4.1	$SL(2, \mathbb{K}) \simeq Sp(2, \mathbb{K})$	25
4.2	$SU(2)/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(3)$	25
4.3	$SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2 \simeq SO_0(1, 2)$, $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(3, \mathbb{C})$,	25
4.4	$SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 \simeq SO_0(1, 3)$	26
4.5	$(SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R}))/\mathbb{Z}_2 \simeq SO_0(2, 2)$, $(SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C}))/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(4, \mathbb{C})$,	26
4.6	$(SU(2) \times SU(2))/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(4)$	27
5	Reprezentacje grup	27
5.1	Definicja	27
5.2	Suma prosta	28
5.3	Równoważność	28
5.4	Nieprzywiedlność	28
5.5	Reprezentacje jednowymiarowe	29
5.6	Reprezentacje permutacyjne	30
5.7	Podstawowe reprezentacje grupy permutacji	30
5.8	Lematy Schura	31
5.9	Iloczyn tensorowy I	31
5.10	Iloczyn tensorowy II	31
5.11	Reprezentacja grupy permutacji	33
5.12	Charaktery	34
6	Reprezentacje grup skończonych	35
6.1	Unitaryzowalność	35
6.2	Relacje ortogonalności	35
6.3	Rozkład reprezentacji	37
6.4	Reprezentacja regularna	38
6.5	Liczba reprezentacji nieprzywiedlnych	38

7	Algebry łączne	39
7.1	Definicja	39
7.2	Podalgebry	39
7.3	Identyczność	40
7.4	Idempotenty	40
7.5	Sumy proste	40
7.6	Homomorfizmy	40
7.7	Lewa regularna reprezentacja	41
7.8	Ideały	41
7.9	Przykłady podalgebr w $L(\mathbb{K}^n)$	41
7.10	*-algebry	42
7.11	Reprezentacje skończenie wymiarowych *-algebr	43
7.12	*-homomorfizmy skończenie wymiarowych *-algebr	43
8	Algebra grupowa	44
8.1	Algebra grupowa	44
8.2	Postać algebry splotowej	45
8.3	Reprezentacja regularna	47
9	Kwaterniony	47
9.1	Definicje	47
9.2	Zanurzanie liczb zespolonych w kwaternionach	48
9.3	Macierzowa reprezentacja kwaternionów	48
9.4	Rzeczywiste proste algebry	49
9.5	Kwaternionowe przestrzenie wektorowe	49
10	Reprezentacje zespolone, rzeczywiste i kwaternionowe	51
10.1	Reprezentacja zespolenie sprzężona	51
10.2	Przestrzeń zespolenie sprzężona	51
10.3	Reprezentacje zespolone	52
10.4	Splatacze w iloczynach tensorowych	53
11	Elementy krystalografii	54
11.1	Grupy punktowe	54
11.2	Sieci	55
11.3	Grupa ruchów euklidesowych	55
11.4	Grupy fryzowe	56
11.5	Punktowe grupy krystalograficzne	57
11.6	Sieci Bravais'go	57
11.7	Grupy krystalograficzne	59
11.8	Grupy tapetowe	60
11.9	Grupy przestrzenne	61

12	Macierzowe algebry Liego	63
12.1	Rozmaitości zanurzone	63
12.2	Funkcje macierzowe	63
12.3	Macierzowe algebry Liego	64
12.4	Przemienne grupy i algebry Liego	66
12.5	Algebra Liego macierzy bezśladowych	66
12.6	Formy niezmiennicze	66
12.7	Ortogonalne i pseudoortogonalne algebra Liego	67
12.7.1	Abstrakcyjne podejście	67
12.7.2	Kanoniczna forma	67
12.7.3	Forma o sygnaturze (q, p)	68
12.8	Unitarne i pseudounitarne algebry Liego	68
12.8.1	Abstrakcyjne podejście	68
12.8.2	Kanoniczna forma	68
12.8.3	Forma o sygnaturze (q, p)	68
12.9	Symplektyczna algebra Liego	69
13	Abstrakcyjne algebry Liego	69
13.1	Definicja	69
13.2	Algebry łączne a algebry Liego	70
13.3	Homomorfizmy	70
13.4	Reprezentacja dołączona	70
13.5	Różniczkowania	71
13.6	Ideały	71
13.7	Ideały charakterystyczne	72
13.8	Iloczyn półprosty	73
13.9	Afiniczne algebry Liego	73
13.10	Związek zespolonych i rzeczywistych przestrzeni wektorowych	73
13.11	Związek zespolonych i rzeczywistych algebr Liego	74
13.12	Formy niezmiennicze na algebrze Liego	75
13.13	Algebry półproste i reduktywne	77
14	Zwarte grupy i ich reprezentacje	78
14.1	Reprezentacje	78
14.2	Reprezentacja kontrgradientna	79
14.3	Utożsamienie iloczynu tensorowego i operatorów liniowych	79
14.4	Iloczyn reprezentacji i reprezentacji kontrgradientnej	80
14.5	Istnienie miary Haara i jego konsekwencje	81
14.6	Reprezentacje nieprzywiedlne	81
14.7	Rozkład dowolnej reprezentacji	82
14.8	Rozkład iloczynu tensorowego reprezentacji	84
14.9	Przykład: \mathbb{Z}_n	85
14.10	Przykład: $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$	85
14.11	Przykład: S_3	85

15	$SL(2, \mathbb{C})$ i $SU(2)$ i ich reprezentacje	85
15.1	Algebra wielomianów	85
15.2	Reprezentacje $SL(2, \mathbb{C})$, $sl(2, \mathbb{C})$, $SU(2)$, $su(2)$	86
15.3	$sl(2, \mathbb{C})$ i $su(2)$	87
15.4	$so(3, \mathbb{C})$ i $SO(3, \mathbb{C})$	88
15.5	Skończenie wymiarowe reprezentacje $sl(2, \mathbb{C})$	88
15.6	Reprezentacje unitarne $su(2)$	90
15.7	Reprezentacje $SL(2, \mathbb{C})$ i $SU(2)$	91
15.8	Parametryzacje $SL(2, \mathbb{C})$ i $SU(2)$	92
15.9	D -macierze Wignera	93
15.10	Typ reprezentacji grupy $SL(2, \mathbb{C})$	95
15.11	Miara Haara na $SU(2)$	95
15.12	Charaktery reprezentacji $SU(2)$	96
15.13	Współczynniki Clebscha-Gordana	97
15.14	$3j$ -symbole	98
15.15	Iloczyn tensorowy z reprezentacją o spinie $\frac{1}{2}$	101
16	Zastosowanie grupy $SU(3)$ w fizyce cząstek	101
16.1	Reprezentacje $su(3)$	101
16.2	Algebra Cartana	102
16.3	Wagi reprezentacji	103
16.4	Reprezentacja fundamentalna i antyfundamentalna	103
16.5	Pierwiastki	103
16.6	Triadność	104
16.7	Pierwiastki ujemne i dodatnie	104
16.8	Diagramy wagowe przykładowych reprezentacji	105
16.9	Symetrie w mechanice kwantowej	106
16.10	Konwencje	106
16.11	Zachowane ładunki	106
16.12	Izospin	107
16.13	Dziwność	108
16.14	Kwarki	109
17	Zastosowanie teorii grup w modelu standardowym i modelach wielkiej unifikacji	112
17.1	Model standardowy	112
17.2	Leptony	112
17.3	Skalar Higgsa	113
17.4	Kwarki	113
17.5	Lagranżjan modelu standardowego	114
17.6	$SU(n)$	115
17.7	Rozszerzanie $SU(3) \otimes SU(2) \times U(1)$ do $SU(5)$	115
17.8	Pola w GUT opartej na $SU(5)$	116
17.9	Rozszerzanie $SU(3) \otimes SU(2) \times U(1)$ do $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$	117

18	Algebry Clifforda i grupy Spin	118
18.1	Algebry Clifforda	118
18.2	Algebry Clifforda jako $*$ -algebry	118
18.3	Parzyste algebry Clifforda	118
18.4	Element objętości	119
18.5	Reprezentacja Foka algebry Clifforda	120
18.6	Konstrukcja Jordana-Wignera	120
18.7	Postać algebr Clifforda	121
18.8	Grupa Pin i Spin	121
18.9	Koincydencje niskowymiarowe	122
18.10	Reprezentacje grupy $Spin(n)$	123
19	Przegląd klasycznych algebr Liego	123
19.1	$sl(n, \mathbb{C})$	123
19.2	$so(n, \mathbb{C})$	124
19.3	$so(2m)$	125
19.4	$so(2m + 1)$	126
19.5	$sp(2m, \mathbb{C})$	126
19.6	Koincydencje	127
19.7	Konstrukcja Schura-Weyla	128
19.8	Reprezentacje $SL(n, \mathbb{C})$	129
20	Struktura algebr Liego	129
20.1	Nilpotentne i rozwiązalne algebry Liego	129
20.2	Twierdzenie Liego	131
20.3	Dolny ciąg centralny	133
20.4	Kryteria Cartana rozwiązalności	134
20.5	Algebry półproste i reduktywne a algebry rozwiązalne	136
20.6	Operator Casimira	137
20.7	Reprezentacje algebr półprostych	138
20.8	Różniczkowania półprostej algebry Liego	140
21	Nilpotentne algebry Liego	141
21.1	Struktura endomorfizmu liniowego	141
21.2	Twierdzenie Engela	143
21.3	Przestrzenie pierwiastkowe algebry nilpotentnej	145
21.4	Przestrzenie pierwiastkowe w algebrach Liego	146
21.5	Algebry Cartana – przypadek ogólny	147
21.6	Elementy półproste i nilpotentne w półprostych algebrach Liego	148
22	Struktura algebr półprostych	149
22.1	Podalgebra Cartana dla algebr półprostych	149
22.2	Zbiór pierwiastków półprostej algebry Liego	149
22.3	Układy pierwiastków	152

22.4	Pierwiastki dodatnie	152
22.5	Grupa Weyla	153
22.6	Reprezentacje algebr Liego	154
23	Homotopia	154
23.1	Homotopia krzywych	154
23.2	Składanie krzywych i grupa homotopii	155
23.3	Nakrycia	156
23.4	Nakrycie uniwersalne	156
23.5	Nakrycie wyznaczone przez podgrupę grupy homotopii	156
24	Globalna teoria grup Liego	157
24.1	Lokalna izomorficzność grup Liego	157
24.2	Grupa homotopii grupy Liego	158
24.3	Rozmaitości	159
24.4	Algebra Liego grupy Liego	161
24.5	Przemienne grupy Liego	162
24.6	Podgrupy grup Liego	162

1 Podstawowe własności grup

1.1 Definicja

Grupa to niepusty zbiór G wyposażony w

- (1) działanie $G \times G \ni (g, h) \mapsto g \cdot h \in G$ mające własność *łączywości*

$$(gh)k = g(hk), \quad g, h, k \in G.$$

- (2) wyróżniony element $e \in G$, zwany elementem neutralnym, spełniający

$$eg = ge = g, \quad g \in G.$$

- (3) odwzorowanie $G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$, zwane odwrotnością spełniające

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e, \quad g \in G.$$

Czyli grupa jest czwórką $(G, \cdot, e, {}^{-1})$. Notacja powyższa nosi nazwę *multiplikatywnej*.

Mówimy, że grupa jest *nietrywialna*, gdy jest różna od grupy składającej się jedynie z elementu neutralnego.

Element neutralny w notacji multiplikatywnej jest często oznaczany przez 1 lub $\mathbb{1}$.

Możliwe jest też sformułowanie słabszych aksjomatów, w których grupa jest zbiorem wyposażonym jedynie w łączne działanie i dwa warunki zapewniające istnienie elementu neutralnego i odwrotności.

Mówimy, że grupa jest *przemienna* lub *abelowa*, gdy

$$gh = hg, \quad g, h \in G.$$

Dla grup abelowych stosujemy często notację *addytywną*, w której grupa to $(G, +, 0, -)$.

1.2 Podgrupy

Niech G będzie grupą. Niepusty podzbiór $H \subset G$ nazywamy *podgrupą* gdy jest zamknięty ze względu na mnożenie i branie odwrotności. Zawiera wtedy element neutralny i ze względu na mnożenie i odwrotność dziedziczone z G jest grupą.

Mówimy, że podgrupa jest *nietrywialna*, gdy jest różna od grupy składającej się jedynie z elementu neutralnego, jak również od grupy G .

Jeśli rodzina $H_\alpha \subset G$ składa się z podgrup, to $\bigcap_\alpha H_\alpha$ jest też podgrupą. Dlatego, dla dowolnego podzbioru $X \subset G$ istnieje najmniejsza podgrupa zawierająca X . Oznaczamy ją przez $\text{Gr}(X)$ i nazywamy *podgrupą generowaną przez X* .

Grupę generowaną przez jeden element nazywamy *grupą cykliczną*. Są to grupy \mathbb{Z}_n , $n \in \mathbb{N}$ i \mathbb{Z} .

Liczbę elementów zbioru X oznaczamy przez $\#X$. Liczbę elementów grupy nazywamy *rzędem grupy*.

Mówimy, że $g \in G$ ma *rzęd* $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, gdy $n = \#\text{Gr}(g)$. Jeśli rząd g jest równy $n \in \mathbb{N}$, to $\text{Gr}(g) = \{e, g, \dots, g^{n-1}\}$ jest podgrupą w G izomorficzną z \mathbb{Z}_n . Jeśli rząd g jest równy ∞ , to $\text{Gr}(g) = \{\dots, g^{-1}, e, g, g^2, \dots\}$ jest podgrupą izomorficzną z \mathbb{Z} .

Jeśli H jest podgrupą i $g \in G$, to $gHg^{-1} := \{ghg^{-1} : h \in H\}$ jest też podgrupą zwaną *podgrupą sprzężoną do H* .

1.3 Homomorfizmy

Niech G, H będą grupami. Odwzorowanie $\phi : G \rightarrow H$ jest *homomorfizmem*, gdy

$$\phi(g_1g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2), \quad g_1, g_2 \in G.$$

Stwierdzenie 1.1 *Jeśli ϕ jest homomorfizmem, to*

$$\phi(e_G) = e_H, \quad \phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}.$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \phi(e_G)e_H &= \phi(e_G)\phi(e_G)\phi(e_G)^{-1} \\ &= \phi(e_G^2)\phi(e_G)^{-1} = \phi(e_G)\phi(e_G)^{-1} = e_H. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(g^{-1}) &= \phi(g^{-1})\phi(g)\phi(g)^{-1} = \phi(g^{-1}g)\phi(g)^{-1} \\ &= \phi(e_G)\phi(g)^{-1} = e_H\phi(g)^{-1} = \phi(g)^{-1}. \end{aligned}$$

□

Bijektywny homomorfizm nazywamy *izomorfizmem*.

Jeśli $G = H$, to homomorfizm nazywamy *endomorfizmem* a izomorfizm *automorfizmem*. Automorfizmy grupy G tworzą grupę oznaczaną $\text{Aut}(G)$.

1.4 Działanie

Niech X będzie zbiorem. Przez $S(X)$ oznaczamy zbiór bijekcji na zbiorze X . Wtedy $S(X)$ jest grupą ze składaniem i elementem neutralnym równym id , gdzie $\text{id}(x) = x$, $x \in X$.

Niech G będzie grupą. Homomorfizm $G \rightarrow S(X)$ nazywamy *działaniem grupy G na zbiorze X* .

Innymi słowy, odwzorowanie

$$G \times X \ni (g, x) \mapsto \tau_g(x) \in X \quad (1.1)$$

jest działaniem, gdy

$$\tau_g(\tau_h(x)) = \tau_{gh}(x), \quad g, h \in G.$$

Stosujemy też często notację uproszczoną:

$$G \times X \ni (g, x) \mapsto gx \in X.$$

W tej notacji własności homomorficzności i łączności naturalnie się zapisują:

$$g(hx) = (gh)x, \quad ((gh)k)x = (g(hk))x, \quad g, h, k \in G, \quad x \in X.$$

Dlatego też, zbyteczne jest pisanie nawiasów.

Jeśli $x \in X$, to

$$G^x := \{g \in G : \tau_g(x) = x\}$$

jest podgrupą w G zwaną *grupą izotropii elementu x* .

Niech $\tau : G \times X \rightarrow X$, $\tilde{\tau} : G \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$, będą działaniami. Mówimy, że bijekcja $\phi : X \rightarrow \tilde{X}$ jest *izomorfizmem działań τ i $\tilde{\tau}$* , gdy

$$\tilde{\tau}_g(\phi(x)) = \phi(\tau_g(x)), \quad g \in G, \quad x \in X. \quad (1.2)$$

W notacji uproszczonej (1.2) ma postać

$$g\phi(x) = \phi(gx), \quad g \in G, \quad x \in X.$$

1.5 Orbity

Niech $\tau : G \rightarrow S(X)$ będzie działaniem. Definiujemy relację

$$x \sim_\tau y \Leftrightarrow \exists g \in G \tau_g(x) = y.$$

Stwierdzenie 1.2 \sim_τ jest relacją równoważności.

Klasy abstrakcji tej relacji nazywamy *orbitami działania τ* . Klasę abstrakcji dla elementu $x \in X$ nazywamy *orbitą elementu x* i oznaczamy $\tau_G(x)$. Zbiór orbit czasem oznaczamy przez $G \backslash X$.

Jeśli x, y należą do tej samej orbity, to grupy izotropii G^x i G^y są do siebie *sprzężone*, to znaczy istnieje $g \in G$ takie, że $G^x = gG^y g^{-1}$.

Mówimy, że działanie τ jest *tranzytywne*, gdy posiada dokładnie jedną orbitę. Mówimy też wtedy, że X jest *przestrzenią jednorodną* dla grupy G .

1.6 Warstwy

Niech H będzie podgrupą grupy G . Wtedy H działa na G przez *lewe mnożenie*

$$\lambda_h(g) := hg, \quad g \in G, \quad h \in H.$$

Orbity tego działania mają postać

$$Hg := \{hg : h \in H\}, \quad g \in G,$$

i są nazywane *lewymi warstwami podgrupy H* . Zbiór lewych warstw jest oznaczany przez $H \backslash G$.
 H działa na G również przez *prawe mnożenie*

$$\rho_h(g) := gh^{-1}, \quad g \in G, \quad h \in H.$$

Orbity tego działania mają postać

$$gH := \{gh : h \in H\}, \quad g \in G,$$

i są nazywane *prawymi warstwami podgrupy H* . Zbiór prawych warstw jest oznaczany przez G/H .

$G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$ jest izomorfizmem dla tych działań.

Lewe i prawe mnożenie jest bijekcją, tak samo odwrotność. Dlatego też wszystkie lewe (jak również prawe) warstwy mają tę samą liczbę elementów równą rządowi H . Jako wniosek dostajemy

Twierdzenie 1.3 (Lagrange) *Jeśli G jest grupą skończoną i H jej podgrupą, to*

$$\#G = (\#H)(\#G/H).$$

Dowód. Wybieramy w każdej warstwie po jednym elemencie. Innymi słowy, ustalamy odwzorowanie $\theta : G/H \rightarrow G$ o własności $\theta(W) \in W$, $W \in G/H$. Sprawdzamy, że $G/H \times H \ni (W, h) \rightarrow \theta(W)h \in G$ jest bijekcją. \square .

Liczbę $\#G/H$ nazywamy *indeksem podgrupy H* .

W szczególności, G działa na sobie samej. Jest to działanie tranzytywne. Każdemu elementowi $g \in G$ odpowiada inna bijekcja na G . Dlatego też dostajemy

Twierdzenie 1.4 (Cayley) *Każda grupa jest izomorficzna z podgrupą w $S(G)$.*

1.7 Klasy sprzężoności

Niech $g \in G$. Kładziemy

$$\text{Ad}(g)(h) := ghg^{-1}, \quad h \in G.$$

Wtedy $\text{Ad}(g)$ jest automorfizmem grupy G nazywanym *automorfizmem wewnętrznym* lub *automorfizmem dołączonym* zadany przez g .

$$G \ni g \mapsto \text{Ad}(g) \in \text{Aut}(G)$$

jest homomorfizmem. Jego obraz oznaczamy przez $\text{Inn}(G)$.

Grupa G działa na sobie samej przez automorfizmy wewnętrzne. Orbity względem tego działania nazywają się *klasami sprzężoności*.

Niech $\text{Sub}(G)$ oznacza zbiór podgrup grupy G . Jeśli $H \in \text{Sub}(G)$, to gHg^{-1} też jest podgrupą. $\text{Sub}(G) \ni H \mapsto gHg^{-1} \in \text{Sub}(G)$ jest działaniem grupy G na $\text{Sub}(G)$. Mówimy, że dwie podgrupy są *sprzężone*, jeśli należą do tej samej orbity.

1.8 Klasyfikacja działań grupy

Następujący wzór definiuje działanie grupy G na G/H :

$$g(kH) := (gk)H, \quad g, k \in G.$$

Działanie to jest tranzytywne. Grupą izotropii elementu jednostkowego jest H . Poniższe twierdzenie mówi, że każde działanie tranzytywne jest izomorficzne z takim działaniem.

Twierdzenie 1.5 (Podstawowe twierdzenie o przestrzeniach jednorodnych) *Niech $\tau : G \times X \rightarrow X$ będzie działaniem tranzytywnym i $x \in X$. Wtedy wzór*

$$\phi(gG^x) := \tau_g(x)$$

definiuje izomorfizm działania G na przestrzeni warstw G/G^x i τ . Jeśli X jest zbiorem skończonym, to $\#G = \#X \cdot \#G^x$.

Dowód. Dobra określoność. Niech $g, k \in G$.

$$\begin{aligned} gG^x = kG^x &\Rightarrow k^{-1}gG^x = G^x \\ \Rightarrow k^{-1}g \in G^x &\Rightarrow x = \tau_{k^{-1}g}(x) \\ \Rightarrow \tau_k^{-1}\tau_g(x) = x &\Rightarrow \tau_k(x) = \tau_g(x). \end{aligned}$$

Injektywność Rozumowanie w stronę przeciwną do poprzedniej: pokazuje, że

$$\tau_k(x) = \tau_g(x) \Rightarrow gG^x = kG^x.$$

Surjektywność wynika z tranzytywności.

Izomorficzność działań:

$$\phi(gkG^x) = \tau_{gk}(x) = \tau_g(\tau_k(x)) = \tau_g(\phi(kG^x)).$$

Liczba elementów: X jest bijektywny zbiorowi G/G_x , możemy więc zastosować Twierdzenie Lagrange'a. \square

Twierdzenie 1.6 *Niech H i K będą podgrupami. Wtedy działania G na G/H i G/K są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy H jest sprzężona do K .*

Dowód. \Leftarrow Niech $K = mHm^{-1}$. Definiujemy

$$\phi(gH) = gm^{-1}K = gHm^{-1}.$$

Trywialnie sprawdzamy, że ϕ jest dobrze określone, bijektywne i splata działania.

\Rightarrow Niech $\phi : G/H \rightarrow G/K$ będzie izomorfizmem. Wtedy istnieje $m \in G$ takie, że $\phi(H) = m^{-1}K$. Dla $h \in H$

$$hm^{-1}K = h\phi(H) = \phi(hH) = \phi(H) = m^{-1}K.$$

Czyli $mhm^{-1}K = K$. Zatem, $mHm^{-1} \subset K$. Odwracając role dostajemy $mHm^{-1} = K$ \square

Załóżmy teraz, że grupa G działa na zbiorze X (niekoniecznie tranzytywnie). Przez $G \backslash X$ będziemy oznaczać zbiór orbit tego działania. Niech X^g oznacza zbiór punktów stałych $g \in G$.

Twierdzenie 1.7 *Niech*

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_k$$

będzie rozbięciem X na orbity. Z każdej orbity wybieramy reprezentanta $x_i \in X_i$, $i = 1, \dots, k$. Wtedy

$$\sum_{i=1}^k \#G \left(1 - \frac{1}{\#G^{x_i}}\right) = \sum_{g \neq e} \#X^g. \quad (1.3)$$

Dowód. Niech

$$P := \{(g, x) \in (G \setminus \{e\}) \times X : gx = x\}.$$

Obliczymy liczbę elementów P dwoma sposobami.

Mamy

$$P = \bigcup_{x \in X} (G^x \setminus \{e\}) \times \{x\} = \bigcup_{j=1}^k \bigcup_{x \in X_j} (G^x \setminus \{e\}) \times \{x\}.$$

Dla $x \in X_j$ mamy $\#X_j = \frac{\#G}{\#G^x}$. Zatem $\#P$ jest równe lewej stronie (1.3).

Z drugiej strony,

$$P = \bigcup_{g \neq e} \{g\} \times X^g.$$

Zatem $\#P$ jest równe prawej stronie (1.3). \square

Poniższy podobny wzór bywa przypisywany Burnside'owi.

Twierdzenie 1.8 *Niech*

$$G = G_1 \cup \dots \cup G_l$$

będzie rozkładem grupy na klasy sprzężoności. Z każdej klasy sprzężoności wybieramy reprezentanta $g_i \in G_i$, $i = 1, \dots, l$. Wtedy

$$(\#G)(\#G \backslash X) = \sum_{j=1}^l (\#G_j)(\#X^{g_j}). \quad (1.4)$$

Dowód. Niech

$$Z := \{(g, x) \in G \times X : gx = x\}.$$

Obliczymy liczbę elementów Z dwoma sposobami.

Mamy

$$Z = \bigcup_{x \in X} G^x \times \{x\} = \bigcup_{j=1}^k \bigcup_{x \in X_j} G^x \times \{x\}.$$

Dla $x \in X_j$ mamy $(\#G^x)(\#X_j) = \#G$. Zatem $\#Z$ jest równe lewej stronie (1.4).

Z drugiej strony,

$$Z = \bigcup_{g \in G} \{g\} \times X^g.$$

Zauważmy, że $X^{hgh^{-1}} = hX^g$, dlatego $\#X^g$ jest stałe na klasach sprzężoności. Stąd $\#Z$ jest równe prawej stronie (1.4). \square

1.9 Iloczyn prosty

Niech K, H będą grupami. Wtedy $K \times H$ jest grupą z iloczynem

$$(k_1, h_1)(k_2, h_2) := (k_1k_2, h_1h_2).$$

$K \times H$ z takim iloczynem nazywamy *iloczynem (zewnątrznym) grupy K i H* . Zauważmy, że $K \times \{e_H\}$, $\{e_K\} \times H$ są podgrupami, które komutują, ich przecięcie to $\{(e_K, e_H)\}$ i generują razem $K \times H$.

Latwo sprawdzamy, że dla $n \in \mathbb{N}$ przestrzeń klas $\mathcal{Z}/n\mathbb{Z}$ jest grupą abelową. Jej elementy są postaci $[0], \dots, [n-1]$.

Stwierdzenie 1.9 *Jeśli n, m są liczbami względnie pierwszymi, to*

$$\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \ni ([i], [j]) \mapsto [in + jm] \in \mathbb{Z}_{mn}$$

jest izomorfizmem.

Dowód. Najpierw sprawdzamy, że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ powyższe odwzorowanie jest dobrze określone i jest homomorfizmem. Aby dowieść, że jest on surjektywny korzystamy z faktu, że dla względnie pierwszych m, n istnieją $i, j \in \mathbb{Z}$ takie, że $in + jm = 1$. \square

Można pokazać, że każda skończona grupa abelowa jest iloczynem grup postaci \mathbb{Z}_{p^k} , gdzie p są liczbami pierwszymi.

1.10 Podgrupy normalne

Niech N będzie podgrupą w G . Mówimy, że N jest *podgrupą normalną*, gdy

$$g \in G, n \in N \Rightarrow gng^{-1} \in N.$$

Równoważny warunek:

$$gN = Ng, \quad g \in G$$

Czyli nie ma wtedy potrzeby rozróżniać lewych i prawych warstw.

Grupę która nie posiada nietrywialnych podgrup normalnych nazywamy *grupą prostą*. Przykładami grup prostych są \mathbb{Z}_p dla pierwszych p i A_n dla $n \geq 5$.

Wszystkie grupy proste skończone zostały sklasyfikowane. Dowód prostoty A_5 jako pierwszy podał Galois w 1831 r. Pełna lista jest znana od 1981 r., kiedy skonstruowano *Grupę Monstrum*. Dowód kompletności tej klasyfikacji ogłoszono w 1983 r. Za datę, kiedy powszechnie zgodzono się z tym, że dowód ten został ukończony uznaje się 2004.

Jeśli $\phi : G \rightarrow H$ jest homomorfizmem, to $\phi(G)$ jest podgrupą w H i

$$\text{Ker}\phi = \{g \in G : \phi(g) = e_H\}$$

jest podgrupą normalną.

Wzór

$$(g_1N)(g_2N) := g_1g_2N$$

definiuje w G/N strukturę grupy. Odwzorowanie

$$G \ni g \mapsto gN \in G/N$$

jest homomorfizmem, którego jądrem jest N .

Jeśli $\phi : G \rightarrow H$ jest surjektywnym homomorfizmem, którego jądrem jest też N , to

$$\psi(gN) := \phi(g)$$

definiuje izomorfizm $\psi : G/N \rightarrow H$.

Sytuację, gdy $\phi : G \rightarrow H$ jest surjektywnym homomorfizmem, dla którego N jest jądrem, często zapisujemy w skrócie

$$1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 1. \quad (1.5)$$

Mówimy wtedy, że G jest *rozszerzeniem N przez H* , albo że mamy *krótki ciąg dokładny (1.5)*.

1.11 Iloczyn półprosty

Niech H, N będą grupami i homomorfizm $H \ni h \mapsto \alpha_h \in \text{Aut}(N)$. Definiujemy (*zewnątrzny*) *iloczyn półprosty* $N \rtimes_\alpha H$ jako $N \times H$ wyposażone w działanie

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) := (n_1\alpha_{h_1}(n_2), h_1h_2),$$

element neutralny (e_N, e_H) , i odwrotność

$$(n, h)^{-1} = (\alpha_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1}).$$

Zauważmy, że $N \times e_H$ jest podgrupą normalną, zaś $e_N \times H$ jest podgrupą, ich przecięcie jest równe $\{(e_N, e_H)\}$ oraz $\text{Gr}(N \cup H) = N \rtimes_\alpha H$.

Odwzorowanie

$$N \rtimes_\alpha H \ni (n, h) \mapsto h \in H$$

jest surjektywnym homomorfizmem, którego jądrem jest N .

Załóżmy, że mamy krótki ciąg dokładny

$$1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 1. \quad (1.6)$$

Zachodzi pytanie, kiedy G jest izomorficzne iloczynowi półprostemu N i H ? Ma to miejsce wtedy, gdy istnieje homomorfizm injektywny $\psi : H \rightarrow G$ taki, że $\phi \circ \psi = \text{id}$, $\psi(H)$ i N generują G i $\psi(H) \cap N = e_G$. Mówimy wtedy, że ciąg *się rozszczepia*. Nie zawsze to ma miejsce: Weźmy

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0.$$

2 Przykłady grup

2.1 Permutacje

Jeśli X jest zbiorem skończonym, bijekcją na X często nazywamy *permutacją*. Pamiętamy, że przez $S(X)$ oznaczamy grupę bijekcji na X . Piszemy $S_n := S(\{1, 2, \dots, n\})$. Oczywiście, jeśli X ma n elementów, to $S(X)$ jest izomorficzne z S_n .

Permutację $\pi \in S_n$ nazywamy *cyklem k -elementowym*, gdy istnieją parami różne $x_1, \dots, x_k \in \{1, \dots, n\}$ takie, że

$$\pi x_i = x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, k,$$

(rozumiejąc, że $k + 1 = 1$). Cykl oznaczamy przez (x_1, \dots, x_k) . Dwa cykle (x_1, \dots, x_k) i (y_1, \dots, y_m) nazywamy *rozłącznymi* jeśli zbiory $\{x_1, \dots, x_k\}$, $\{y_1, \dots, y_m\}$ są rozłączne.

Każdą permutację możemy przedstawić jako iloczyn cykli rozłącznych. Rozkład ten jest jednoznaczny (z dokładnością do kolejności). W szczególności, wyznacza on ciąg $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ liczb z $\{0, 1, \dots\}$ takich, że $\sum_j j\lambda_j = n$ i w rozkładzie na cykle rozłączne występuje λ_j cykli j -elementowych.

Wielomian Vandermonda stopnia n definiujemy jako

$$V(x_1, \dots, x_n) := \prod_{i < j} (x_i - x_j).$$

Latwo sprawdzić, że dla $\pi \in S_n$,

$$V(x_1, \dots, x_n) = \pm V(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}).$$

Definiujemy

$$\text{sgn} \pi := \frac{V(x_1, \dots, x_n)}{V(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})}.$$

$\text{sgn} : S_n \rightarrow \{1, -1\}$ jest homomorfizmem. Jądro tego homomorfizmu nazywamy *grupą alternującą* i oznaczamy przez A_n .

2.2 Iloczyn półprosty z grupą \mathbb{Z}_2

Niech K będzie grupą abelową z zapisem addytywnym. Odwzorowanie $K \ni k \mapsto \beta(k) := -k \in K$ jest automorfizmem grupy K .

Dla grup \mathbb{Z}_2^n jest to automorfizm identycznościowy. Jeśli nie wszystkie elementy grupy K są rzędu 2 lub 1, to jest to automorfizm nietrywialny. Możemy zdefiniować grupę $K \rtimes_{\beta} \mathbb{Z}_2$. W szczególności, grupa

$$D_n := \mathbb{Z}_n \rtimes_{\beta} \mathbb{Z}_2$$

nosi nazwę *grupy dwuściennej (dihedralnej)*. Jest ona nieabelowa dla $n \geq 3$.

2.3 Grupa permutacji 3 elementów

Mamy izomorfizm $A_3 \simeq \mathbb{Z}_3$:

$$A_3 = \{\text{id}, (123), (132)\}.$$

Mamy też izomorfizm $S_3 \simeq D_3 = \mathbb{Z}_3 \rtimes_{\beta} \mathbb{Z}_2$

S_3 posiada następujące nietrywialne podgrupy: jedną podgrupę (normalną) \mathbb{Z}_3 i 3 sprzężone do siebie podgrupy \mathbb{Z}_2 . Mamy zatem 4 nieizomorficzne tranzytywne działania S_3 : na zbiorze 6-, 3-, 2- i 1-elementowym

2.4 Grupa permutacji 4 elementów

Elementy grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ można oznaczyć jako $\{e, a, b, ab\}$. Automorfizmy tej grupy polegają na permutacjach $\{a, b, ab\}$. Czyli

$$\text{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \simeq S_3.$$

Grupę $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ można włożyć w $A_4 \subset S_4$

$$\{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

Jest ona normalna w A_4 i w S_4 . Mamy izomorfizmy

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes A_3 &\simeq A_4, \\ (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes S_3 &\simeq S_4. \end{aligned}$$

W szczególności, A_4 nie jest prosta. To, że A_5 jest prosta pokazał Galois.

2.5 Grupa obrotów $SO(3)$

Przez $SO(3)$ będziemy oznaczać grupę obrotów (właściwych) przestrzeni \mathbb{R}^3 .

Lemat 2.1 *Dla każdego $A \in SO(3) \setminus \{\mathbb{1}\}$ istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez 0 i $\theta \in [0, 2\pi[$ takie, że A jest obrotem wokół A o kąt θ . A jest skończonego rzędu, gdy $\theta = \frac{2\pi j}{n}$, $j = 1, \dots, n-1$.*

Prostą opisaną w powyższym lemacie nazywamy *osią obrotu A* . Jeśli wybierzemy zwrot tej prostej, będziemy mówili o *osi skierowanej*.

Następnie opiszemy wszystkie skończone podgrupy grupy obrotów.

Lemat 2.2 Niech G będzie skończoną podgrupą $SO(3)$. Niech α będzie osią pewnego obrotu z G . Wtedy obroty wokół osi α należące do G stanowią grupę izomorficzną z \mathbb{Z}_n .

Oś taką jak w powyższym lemacie nazywamy *osią n -krotną*.

Przez $O(3)$ będziemy oznaczać grupę obrotów niewłaściwych przestrzeni \mathbb{R}^3 . Mamy $O(3) = SO(3) \times \mathbb{Z}_2$, gdzie generatorem \mathbb{Z}_2 jest symetria środkowa.

2.6 Grupa obrotów właściwych wielokąta foremnego $C_n \simeq \mathbb{Z}_n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{2\pi j}{n} & \sin \frac{2\pi j}{n} \\ 0 & -\sin \frac{2\pi j}{n} & \cos \frac{2\pi j}{n} \end{bmatrix}, \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (2.7)$$

2.7 Grupa dihedralna $D_n \simeq \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$

Do (2.7) dołączamy

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \frac{\pi j}{n} & \sin \frac{\pi j}{n} \\ 0 & \sin \frac{\pi j}{n} & \cos \frac{\pi j}{n} \end{bmatrix}, \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (2.8)$$

2.8 Grupa czworościanu $T \simeq A_4$

Grupa symetrii czworościanu. Permutuje

- (1) 4 wierzchołki,
- (2) 4 ściany,
- (3) 6 krawędzi.

Ma

- (1) 4 osie 3-krotne, między wierzchołkiem a przeciwległą ścianą,
- (2) 3 osie 2-krotne, między środkami przeciwległych krawędzi.

2.9 Grupa sześcianu/ośmiościanu $O \simeq S_4$

Grupa symetrii sześcianu. Permutuje

- (1) 8 wierzchołków/ścian,
- (2) 6 ścian/wierzchołków,
- (3) 12 krawędzi.

Ma

- (1) 4 osie 3-krotne, między przeciwległymi wierzchołkami/ścianami,
- (2) 3 osie 4-krotne, między środkami przeciwległych ścian/wierzchołków,
- (3) 6 osi 2-krotnych, między środkami przeciwległych krawędzi.

2.10 Grupa dwudziestościanu/dwunastościanu) $I \simeq A_5$

Grupa symetrii dwudziestościanu. Permutuje

- (1) 10 wierzchołków/ścian,
- (2) 20 ścian/wierzchołków,
- (3) 30 krawędzi.

Ma

- (1) 6 osi 5-krotnych, między przeciwległymi wierzchołkami/ścianami,
- (2) 10 osi 3-krotnych, między środkami przeciwległych ścian/wierzchołków,
- (3) 15 osie 2-krotne, między środkami przeciwległych krawędzi.

2.11 Skończone podgrupy grupy obrotów

Twierdzenie 2.3 *Lista powyższa zawiera wszystkie skończone podgrupy obrotów.*

Dowód. Niech G będzie skończoną podgrupą grupy obrotów. Niech X będzie zbiorem osi skierowanych elementów z G , czyli

$$X = \{\alpha \in S^2 : g\alpha = \alpha \text{ dla pewnego } g \in G\}$$

$$G \times X \ni (g, \alpha) \mapsto g\alpha \in X$$

jest działaniem grupy G na X . Działanie zachowuje krotność. Niech X_1, \dots, X_k będzie rozbiem X na orbity. Niech n_i będzie krotnością elementów orbity X_i . Zakładamy, że $n_1 \leq \dots \leq n_k$.

Zachodzi wzór

$$\sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) = 2 \left(1 - \frac{1}{\#G}\right). \quad (2.9)$$

Jest to przykład zastosowania Tw. 1.7. Dla wygody czytelnika przytaczamy niezależny dowód.

Rozważmy

$$P := \{(g, \alpha) \in (G \setminus \{\mathbb{1}\}) \times X : g\alpha = \alpha\}.$$

Dla każdego $g \in G \setminus \{\mathbb{1}\}$ mamy dwa przecięcia osi obrotu i sfery. Dlatego

$$\#P = 2(\#G - 1). \quad (2.10)$$

Dla każdego $\alpha \in X_j$ jest $n_j - 1$ obrotów $g \in G \setminus \{\mathbb{1}\}$ takich, że $g\alpha = \alpha$. Dlatego

$$\#P = \sum_{i=1}^k \#X_i(n_i - 1). \quad (2.11)$$

Ale grupa izotropii $\alpha \in X_i$ jest izomorficzna z \mathbb{Z}_{n_i} . Dlatego

$$\#X_i = \frac{\#G}{n_i}. \quad (2.12)$$

(2.10), (2.11) i (2.12) dają razem (2.9).

Rozwiązujemy więc równanie (2.9).

$\#G \geq 2$ implikuje $2 \left(1 - \frac{1}{\#G}\right) \in [1, 2[$.

$n_i \geq 2$ implikuje $1 - \frac{1}{n_i} \in [\frac{1}{2}, 1[$. Dla $k = 1$ lewa strona (2.9) < 1 . Dla $k \geq 4$ lewa strona (2.9) ≥ 1 . Dlatego $k = 2, 3$.

Rozważmy $k = 2$. Możemy przepisać (2.9) jako

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} = \frac{2}{\#G}. \quad (2.13)$$

Wiemy, że $n_i \leq \#G$. Więc jedyne rozwiązania (2.13) to $n_1 = n_2 = \#G \in \mathbb{N}$

Rozważmy $k = 3$. Możemy przepisać (2.9) jako

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1 + \frac{2}{\#G}. \quad (2.14)$$

Jeśli $n_1 \geq 3$, to lewa strona (2.14) ≤ 1 , co jest niemożliwe. Więc $n_1 = 2$.

Jeśli $n_2 \geq 4$, to znów lewa strona (2.14) ≤ 1 , co jest niemożliwe. Więc $n_2 = 2$ lub $n_2 = 3$.

Jeśli $n_2 = 2$, to

$$n_1 = n_2 = 2, \quad n_3 = \frac{\#G}{2}.$$

Jeśli $n_2 = 3$, to dla $n_3 \geq 6$ lewa strona (2.14) ≤ 1 . Dlatego $n_3 = 3, n_3 = 4$ lub $n_3 = 5$.

Następnie identyfikujemy powstałe możliwości z poszczególnymi grupami

- $n_1 = n_2 = n = \#G$.

Mamy $\frac{\#G}{n_1} = \frac{\#G}{n_2} = 1$. Zatem mamy tylko jedną oś. Jest ona n -krotna. Zatem $G = C_n$.

- $n_1 = n_2 = 2, n_3 = n, \#G = 2n$.

Mamy $\frac{\#G}{n_1} = \frac{\#G}{n_2} = n, \frac{\#G}{n_3} = 2$. Zatem mamy tylko jedną oś n -krotną. Zatem G zawiera C_n . Osie 2-krotne muszą być prostopadłe do niej. Jedyna możliwość to D_n .

- $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 3, \#G = 12$. Mamy $\frac{\#G}{n_1} = 6, \frac{\#G}{n_2} = 4, \frac{\#G}{n_3} = 4$. Wybierzmy oś 3-krotną. Musi ona przecinać sferę w dwóch różnych orbitach. Pozostałe punkty 3-krotne tworzą dwa trójkąty równoboczne w płaszczyznach prostopadłych do tej osi.

- $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 4, \#G = 24$.

Mamy $\frac{\#G}{n_1} = 12, \frac{\#G}{n_2} = 8, \frac{\#G}{n_3} = 6$. Wybierzmy oś 4-krotną. Przecina ona sferę w dwóch elementach orbity X_3 . Pozostałe punkty 4-krotne tworzą kwadrat w płaszczyźnie prostopadłej do tej osi.

- $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 5, \#G = 60$.

Mamy $\frac{\#G}{n_1} = 30, \frac{\#G}{n_2} = 20, \frac{\#G}{n_3} = 12$. Wybierzmy oś 5-krotną. Przecina ona sferę w dwóch elementach orbity X_3 . Pozostałe punkty 5-krotne tworzą dwa pięciokąty foremne w dwóch płaszczyznach prostopadłych do tej osi.

3 Grupy macierzowe

3.1 Ciała

Mówimy, że $(\mathbb{K}, +, \cdot, 1, 0)$ jest *ciałem*, gdy $(\mathbb{K}, +, 0, -)$ i $(\mathbb{K}^\times, \cdot, 1, -^1)$ są grupami abelowymi spełniającymi

$$x(y + z) = xy + xz,$$

gdzie $\mathbb{K}^\times := \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Definiujemy homomorfizmy, izomorfizmy, etc. ciał w oczywisty sposób.

Najważniejszymi ciałami dla nas są \mathbb{R} i \mathbb{C} . \mathbb{R} ma jedynie automorfizm trywialny. \mathbb{C} ma jeden nietrywialny automorfizm: *sprzężenie zespolone* $\mathbb{C} \ni z \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$.

3.2 Przestrzenie wektorowe

Mówimy, że $(\mathcal{V}, +, 0, -)$ jest *przestrzenią wektorową nad ciałem* \mathbb{K} , gdy jest to grupa abelowa wyposażona w działanie $\mathbb{K} \times \mathcal{V} \ni (x, v) \mapsto xv \in \mathcal{V}$ takie, że

$$(x + y)v = xv + yv, \quad (xy)v = x(yv), \quad x, y \in \mathbb{K}, \quad v \in \mathcal{V},$$

$$x(u + v) = xu + xv, \quad x \in \mathbb{K}, \quad u, v \in \mathcal{V}.$$

Przykładem przestrzeni nad \mathbb{K} są \mathbb{K}^n . Przestrzenie wektorowe izomorficzne z \mathbb{K}^n nazywamy *przestrzeniami wymiaru n*

3.3 Odwzorowania liniowe

Homomorfizmy przestrzeni wektorowych nazywamy *odwzorowaniami liniowymi*.

Jeśli \mathcal{V}, \mathcal{W} są przestrzeniami, to $L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ będzie oznaczało zbiór odwzorowań liniowych z \mathcal{V} do \mathcal{W} . Będziemy pisać $L(\mathcal{V}) := L(\mathcal{V}, \mathcal{V})$.

$L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ będziemy utożsamiać z macierzami o n wierszach i m kolumnach. Dla $A \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ przez A^* , \bar{A} i $A^\#$ będziemy oznaczać macierz *hermitowsko sprzężoną*, *zespolenie sprzężoną* i *transponowaną* do A .

3.4 Ogólna grupa liniowa

Niech $A \in L(\mathbb{K}^n)$. Wzór

$$\det A := \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi A_{1, \pi(1)} \cdots A_{n, \pi(n)} \in \mathbb{K}$$

definiuje *wyznacznik* spełniający

$$\det AB = \det A \det B.$$

$GL(\mathbb{K}^n)$ definiujemy jako

$$GL(\mathbb{K}^n) := \{A \in L(\mathbb{K}^n) : \det A \neq 0\}.$$

Jest to grupa. Piszemy też

$$GL(\mathbb{K}^n) = GL(n, \mathbb{K}).$$

Wyznacznik definiuje homomorfizm

$$\det GL(\mathbb{K}^n) \rightarrow \mathbb{K}^\times.$$

Definiujemy

$$SL(\mathbb{K}^n) = SL(n, \mathbb{K}) := \{A \in GL(\mathbb{K}^n) : \det A = 1\}.$$

Można też podejść do grupy GL bardziej abstrakcyjnie. Niech \mathcal{V}, \mathcal{W} będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem \mathbb{K} . Zbiór bijekcji liniowych z \mathcal{V} w \mathcal{W} oznaczamy przez $GL(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. W szczególności $GL(\mathcal{V}) := GL(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ jest grupą. Dla $\mathcal{V} = \mathbb{K}^n$ pokrywa się to z poprzednią definicją.

3.5 Grupa ortogonalna w skończonym wymiarze

$O(\mathbb{K}^n)$ definiujemy jako

$$O(\mathbb{K}^n) := \{A \in L(\mathbb{K}^n) : A^\# A = \mathbb{1}\}.$$

(Automatycznie elementy $O(\mathbb{K}^n)$ spełniają $AA^\# = \mathbb{1}$). Jest to podgrupa w $GL(\mathbb{K}^n)$. Piszemy też

$$O(\mathbb{R}^n) = O(n).$$

Macierze ortogonalne zachowują standardowy iloczyn skalarny w \mathbb{K}^n .

Latwo pokazać, że wyznacznik macierzy ortogonalnych może mieć wartość ± 1 , Definiujemy

$$SO(\mathbb{K}^n) := SL(\mathbb{K}^n) \cap O(\mathbb{K}^n).$$

W przypadku zespolonym piszemy też $O(n, \mathbb{C}) = O(\mathbb{C}^n)$, $SO(n, \mathbb{C}) = SO(\mathbb{C}^n)$.

W przypadku rzeczywistym piszemy też $O(n) = O(\mathbb{R}^n)$, $SO(n) = SO(\mathbb{R}^n)$. Grupa $O(n)$ ma dwie składowe spójne. Składowa spójna zawierająca jedność pokrywa się z $SO(n)$.

3.6 Grupa pseudo-ortogonalna

Rozważmy dalej przypadek rzeczywisty. Niech $q, p \in 0, 1, \dots$. Przez $\mathbb{R}^{q,p}$ będziemy rozumieć przestrzeń $\mathbb{R}^{q+p} = \mathbb{R}^q \oplus \mathbb{R}^p$ z iloczynem zadanym przez tensor $I_{q,p} := \begin{bmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}$. To znaczy,

$$v I_{q,p} v' = - \sum_{i=1}^q v_i v'_i + \sum_{j=q+1}^{q+p} v_j v'_j. \quad (3.15)$$

$O(\mathbb{R}^{q,p})$ definiujemy jako zbiór macierzy spełniających

$$A^\# I_{q,p} A = I_{q,p}.$$

(Automatycznie spełniają one $A I_{q,p} A^\# = I_{q,p}$). Jest to grupa. Piszemy też

$$O(\mathbb{R}^{q,p}) = O(q, p).$$

Macierze pseudoortogonalne zachowują iloczyn pseudoskalarny w $\mathbb{R}^{q,p}$.

Wyznacznik macierzy pseudo-ortogonalnych może mieć wartość ± 1 , Definiujemy

$$SO(\mathbb{R}^{q,p}) = SO(q,p) := \{A \in O(\mathbb{R}^{q,p}) : \det A = 1\}.$$

Grupę $O(\mathbb{R}^{1,p})$ nazywamy grupą Lorentza. Ma ona cztery składowe spójne. Spójna składowa jedności jest nazywana ortoczasową grupą Lorentza i jest oznaczana $SO^\uparrow(\mathbb{R}^{1,p})$ lub $SO_0(\mathbb{R}^{1,p})$.

3.7 Abstrakcyjne podejście do grup (pseudo-)ortogonalnych

Można też podejść bardziej abstrakcyjnie. Niech \mathcal{V}, \mathcal{W} będą przestrzeniami wektorowymi z formą symetryczną, którą dla $v, v' \in \mathcal{V}$ oznaczamy $v \cdot v'$. Zbiór bijekcji liniowych z \mathcal{V} w \mathcal{W} spełniających

$$Av \cdot Av' = v \cdot v'$$

oznaczamy przez $O(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. W szczególności $O(\mathcal{V}) := O(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ jest grupą.

Dla $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ każdą niezdegenerowaną formę symetryczną można sprowadzić do postaci (3.15), i wtedy \mathcal{V} nazywamy $\mathbb{R}^{q,p}$. Więc obie definicje się w tym wypadku pokrywają.

Dla $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$ każdą niezdegenerowaną formę można sprowadzić do postaci (3.15) z $q = 0$.

Dla przestrzenie nieskończenie wymiarowych z reguły zakładamy, że forma symetryczna jest dodatnio określona i nazywamy ją iloczynem skalarnym. Zakładamy też z reguły, że przestrzenie są zupełne, czyli że są *rzeczywistymi przestrzeniami Hilberta*.

3.8 Grupa unitarna w skończonym wymiarze

$U(\mathbb{C}^n)$ definiujemy jako

$$U(\mathbb{C}^n) := \{A \in L(\mathbb{C}^n) : A^*A = \mathbb{1}\}.$$

(Automatycznie elementy $U(\mathbb{C}^n)$ spełniają $AA^* = \mathbb{1}$). Jest to podgrupa w $GL(\mathbb{C}^n)$. Piszemy też

$$U(\mathbb{C}^n) = U(n).$$

Macierze unitarne zachowują standardowy iloczyn skalarny w \mathbb{C}^n .

Latwo pokazać, że wyznacznik macierzy unitarnych ma moduł 1. Definiujemy

$$SU(\mathbb{C}^n) := SL(\mathbb{C}^n) \cap U(\mathbb{C}^n).$$

3.9 Grupa pseudo-unitarna

Niech $q, p \in 0, 1, \dots$. Przez $\mathbb{C}^{q,p}$ będziemy rozumieć przestrzeń $\mathbb{C}^{q+p} = \mathbb{C}^q \oplus \mathbb{C}^p$ z iloczynem zadanym przez tensor $I_{q,p} := \begin{bmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}$. To znaczy,

$$\bar{v}I_{q,p}v' = -\sum_{i=1}^q \bar{v}_i v'_i + \sum_{j=q+1}^{q+p} \bar{v}_j v'_j. \quad (3.16)$$

$U(\mathbb{C}^{q,p})$ definiujemy jako zbiór macierzy spełniających

$$A^* I_{q,p} A = I_{q,p}.$$

(Automatycznie spełniają one $AI_{q,p}A^* = I_{q,p}$). Jest to grupa. Piszemy też

$$U(\mathbb{C}^{q,p}) = U(q, p).$$

Macierze pseudo-unitarne zachowują iloczyn pseudoskalarny w $\mathbb{C}^{q,p}$.

Wyznacznik macierzy pseudo-unitarnych ma moduł 1. Definiujemy

$$SU(\mathbb{C}^{q,p}) = SU(q, p) := \{A \in U(\mathbb{C}^{q,p}) : \det A = 1\}.$$

3.10 Abstrakcyjne podejście do grup (pseudo-)unitarnych

Można też podejść bardziej abstrakcyjnie. Niech \mathcal{V}, \mathcal{W} będą zespolonymi przestrzeniami wektorowymi z wyróżnioną formą hermitowską, którą dla $v, v' \in \mathcal{V}$ oznaczamy $\bar{v} \cdot v'$. Zbiór bijekcji liniowych z \mathcal{V} w \mathcal{W} spełniających

$$\overline{Av} \cdot Av' = \bar{v} \cdot v'$$

oznaczamy przez $U(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. W szczególności $U(\mathcal{V}) := U(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ jest grupą.

Dla $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$ każdą niezdegenerowaną formę hermitowską można sprowadzić do postaci (3.16), i wtedy \mathcal{V} nazywamy $\mathbb{C}^{q,p}$. Więc obie definicje się w tym wypadku pokrywają.

Dla przestrzenie nieskończenie wymiarowych z reguły zakładamy, że forma hermitowska jest dodatnio określona i nazywamy ją iloczynem skalarnym. Zakładamy też z reguły, że przestrzenie są zupełne, czyli że są *(zespolonymi) przestrzeniami Hilberta*

3.11 Grupa symplektyczna w skończonym wymiarze

W przestrzeni $\mathbb{K}^{2n} = \mathbb{K}^n \oplus \mathbb{K}^n$ wprowadzamy macierz $J = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix}$. Grupa $Sp(\mathbb{K}^n) = Sp(n, \mathbb{K})$ jest zdefiniowana jako

$$Sp(\mathbb{K}) := \{A \in L(\mathbb{K}^n) : A^\# J A = J\}$$

(Automatycznie elementy $Sp(\mathbb{K}^n)$ spełniają $A J A^\# = J$). Jest to podgrupa w $GL(\mathbb{K}^n)$. Macierze symplektyczne zachowują standardową formę symplektyczną w \mathbb{K}^n .

$$\omega(v, v') = \sum_{i=1}^n (v_i v'_{i+n} - v_{i+n} v'_i) = v \cdot J v'. \quad (3.17)$$

Możemy też zapisać

$$\omega = \sum_{i=1}^n y_i \wedge y_{n+i},$$

gdzie y_1, \dots, y_{2n} jest bazą dualną do v_1, \dots, v_{2n} . Mamy $\omega(Av, Av') = \omega(v, v')$ dla $v, v' \in \mathbb{K}^{2n}$. Dlatego

$$\omega \wedge \dots \wedge \omega(Av_1, \dots, Av_{2n}) = \omega \wedge \dots \wedge \omega(v_1, \dots, v_{2n}).$$

$$\omega \wedge \dots \wedge \omega(v_1, \dots, v_{2n}) = \det[v_1, \dots, v_{2n}].$$

Dlatego $Sp(\mathbb{K}^n)$ jest podgrupą w $SL(\mathbb{K}^n)$.

3.12 Abstrakcyjne podejście do grup symplektycznych

Można też podejść bardziej abstrakcyjnie. Niech \mathcal{V}, \mathcal{W} będą przestrzeniami wektorowymi z formą symetryczną, którą np. dla $v, v' \in \mathcal{V}$ oznaczamy $v\omega v'$. Zbiór bijekcji liniowych z \mathcal{V} w \mathcal{W} spełniających

$$Av\omega Av' = v\omega v'$$

oznaczamy przez $Sp(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. W szczególności $Sp(\mathcal{V}) := Sp(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ jest grupą.

Każdą niezdegenerowaną formę symetryczną można sprowadzić do postaci (3.17). Więc obie definicje się w tym wypadku pokrywają.

3.13 Grupy afiniczne

Niech \mathcal{V} będzie przestrzenią wektorową. Odwzorowaniem afinicznym na \mathcal{V} nazywamy odwzorowanie postaci

$$\mathcal{V} \ni v \mapsto w + Av \in \mathcal{V}$$

gdzie $w \in \mathcal{V}$ i $A \in L(\mathcal{V})$. Odwzorowania afiniczne dla których $A \in GL(\mathcal{V})$ tworzą grupę z działaniem

$$(w_1, A_1)(w_2, A_2) := (w_1 + A_1w_2, A_1A_2)$$

elementem neutralnym $(0, \mathbb{1})$ i odwrotnością $(w, A)^{-1} = (A^{-1}w, A^{-1})$. Grupę tę nazywamy *afinicznym rozszerzeniem grupy $GL(\mathcal{V})$* .

Grupa $GL(\mathcal{V})$ działa na elementy z \mathcal{V} w oczywisty sposób. Czyli dostajemy homomorfizm

$$GL(\mathcal{V}) \ni A \mapsto A \in \text{Aut}(\mathcal{V}),$$

gdzie z prawej \mathcal{V} jest traktowana jako grupa z dodawaniem. Latwo widzimy, że grupa afiniczna jest iloczynem półprostym $\mathcal{V} \rtimes GL(\mathcal{V})$.

Często w zastosowaniach spotykamy grupy w których $GL(\mathcal{V})$ jest zastąpione jej podgrupą. Na przykład, grupa Poincarego jest afinicznym rozszerzeniem grupy Lorentza $\mathbb{R}^{1,3} \rtimes O(1, 3)$.

3.14 Grupy Liego

Mówimy, że G jest *grupą Liego*, jeśli jest to grupa będąca rozmaitością (gładką) i odwzorowania

$$\begin{aligned} G \times G \ni (g, h) &\mapsto gh \in G \\ G \ni g &\mapsto g^{-1} \in G \end{aligned}$$

są gładkie.

Wszystkie rozważane w tej sekcji grupy dla skończone wymiarowych \mathcal{V} nad ciałem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub \mathbb{C} są grupami Liego.

Oto wymiary wybranych grup Liego

- (1) $\dim SL(\mathbb{R}^n) = \dim SU(\mathbb{C}^n) = n^2 - 1,$
- (2) $\dim SO(\mathbb{R}^n) = \frac{n(n-1)}{2},$
- (3) $\dim Sp(\mathbb{R}^{2n}) = \frac{2n(2n+1)}{2}.$

4 Koincydencje wśród grup macierzowych

4.1 $SL(2, \mathbb{K}) \simeq Sp(2, \mathbb{K})$

Niech

$$J := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że dla $A \in L(\mathbb{K}^2)$ mamy

$$AJA^\# = (\det A)J.$$

4.2 $SU(2)/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(3)$

Utożsamiamy \mathbb{R}^3 z macierzami hermitowskimi 2×2 o śladzie 0:

$$\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto X = \begin{bmatrix} z & x + iy \\ x - iy & -z \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$-\det X = x^2 + y^2 + z^2,$$

czyli wyznacznik zadaje standardowy iloczyn skalarny.

Dla $A \in SU(2)$ kładziemy

$$\rho_A X := AXA^*.$$

Wtedy

$$\det \rho_A X = \det X.$$

Zatem ρ_A zachowuje iloczyn skalarny.

$$SU(2) \ni A \mapsto \rho_A \in SO(3).$$

jest surjektywnym homomorfizmem. Jego jądrem jest $\pm \mathbb{1}$.

4.3 $SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2 \simeq SO_0(1, 2)$, $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(3, \mathbb{C})$,

Utożsamiamy \mathbb{K}^3 z macierzami 2×2 o śladzie 0:

$$\mathbb{K}^3 \ni (x, y, z) \mapsto X = \begin{bmatrix} z & x + y \\ -x + y & -z \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$-\det X = -x^2 + y^2 + z^2.$$

Dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wyznacznik zadaje iloczyn pseudoskalarny o sygnaturze $(1, 2)$. Dla $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ jest to zwykły iloczyn skalarny.

Dla $A \in SL(2, \mathbb{K})$ kładziemy

$$\rho_A X := AXA^{-1}.$$

Wtedy

$$\det \rho_A X = \det X.$$

Zatem ρ_A zachowuje iloczyn (pseudo-)skalarny.

$$\begin{aligned} SL(2, \mathbb{R}) \ni A &\mapsto \rho_A \in SO_0(1, 2), \\ SL(2, \mathbb{C}) \ni A &\mapsto \rho_A \in SO(3, \mathbb{C}), \end{aligned}$$

są surjektywnymi homomorfizmami. Ich jądrem jest $\pm \mathbb{1}$.

4.4 $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 \simeq SO_0(1, 3)$

Utożsamiamy \mathbb{R}^4 z macierzami 2×2 hermitowskimi

$$\mathbb{R}^3 \ni (t, x, y, x) \mapsto X = \begin{bmatrix} t+z & x+iy \\ x-iy & t-z \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$-\det X = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2,$$

czyli wyznacznik zadaje iloczyn pseudo-skalarny.

Dla $A \in SL(2, \mathbb{C})$ kładziemy

$$\rho_A X := AXA^*.$$

Wtedy

$$\det \rho_A X = \det X.$$

Zatem ρ_A zachowuje iloczyn pseudo-skalarny.

$$SL(2, \mathbb{C}) \ni A \mapsto \rho_A \in SO_0(1, 3).$$

jest surjektywnym homomorfizmem. Jego jądrem jest $\pm \mathbb{1}$.

4.5 $(SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R}))/\mathbb{Z}_2 \simeq SO_0(2, 2)$, $(SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C}))/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(4, \mathbb{C})$,

Utożsamiamy \mathbb{K}^4 z macierzami 2×2 :

$$\mathbb{K}^3 \ni (t, x, y, x) \mapsto X = \begin{bmatrix} t+z & x+y \\ x-y & t-z \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$-\det X = -t^2 - x^2 + y^2 + z^2.$$

Dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wyznacznik zadaje iloczyn pseudoskalarny o sygnaturze $(2, 2)$. Dla $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ jest to zwykły iloczyn skalarny.

Dla $(A, B) \in SL(2, \mathbb{K})$ kładziemy

$$\rho_{(A,B)} X := AXB^{-1}.$$

Wtedy

$$\det \rho_{(A,B)} X = \det X.$$

Zatem $\rho_{(A,B)}$ zachowuje iloczyn (pseudo-)skalarne.

$$\begin{aligned} SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R}) \ni (A, B) &\mapsto \rho_{(A,B)} \in SO_0(2, 2), \\ SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{R}) \ni (A, B) &\mapsto \rho_A \in SO(4, \mathbb{C}), \end{aligned}$$

są surjektywnymi homomorfizmami. Ich jądrem jest $\pm \mathbb{1}$.

4.6 $(SU(2) \times SU(2)) / \mathbb{Z}_2 \simeq SO(4)$

Niech $J := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Utożsamiamy \mathbb{R}^4 z macierzami zespolonymi 2×2 spełniającymi $\bar{X} = JXJ$ (czyli kwaternionami) w następujący sposób:

$$\mathbb{R}^4 \ni (t, x, y, z) \mapsto X = \begin{bmatrix} t + iz & ix + y \\ ix - y & t - iz \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$\det X = t^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

Czyli zadaje standardowy iloczyn skalarny.

Dla $(A, B) \in SU(2) \times SU(2)$ kładziemy

$$\rho_{(A,B)} X := AXB^{-1}.$$

Wtedy

$$\det \rho_{(A,B)} X = \det X.$$

Zatem $\rho_{(A,B)}$ zachowuje iloczyn skalarny.

$$SU(2) \times SU(2) \ni (A, B) \mapsto \rho_{(A,B)} \in SO(4).$$

jest surjektywnym homomorfizmem. Jego jądrem jest $\pm \mathbb{1}$.

5 Reprezentacje grup

5.1 Definicja

Niech G będzie grupą a \mathcal{V} przestrzenią liniową. *Reprezentacją grupy G na przestrzeni \mathcal{V}* nazywamy homomorfizm $\pi : G \rightarrow GL(\mathcal{V})$. Będziemy też często pisać, że para (π, \mathcal{V}) jest reprezentacją grupy G .

Innymi słowy, $G \ni g \mapsto \pi(g) \in L(\mathcal{V})$ jest reprezentacją, gdy

$$\pi(g_1 g_2) = \pi(g_1) \pi(g_2), \quad g_1, g_2 \in G.$$

Jeśli \mathcal{V} jest przestrzenią Hilberta, to *reprezentacją unitarną grupy G na przestrzeni \mathcal{V}* nazywamy homomorfizm $\pi : G \rightarrow U(\mathcal{V})$.

W szczególności, $G \ni g \mapsto \mathbb{1}_{\mathcal{V}} \in L(\mathcal{V})$ jest reprezentacją. Nazywamy ją *reprezentacją trywialną*.

5.2 Suma prosta

Niech $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ będą przestrzeniami liniowymi. Wtedy $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ ma strukturę przestrzeni wektorowej, oznaczanej przez $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$ i nazywanej *sumą prostą przestrzeni \mathcal{V}_1 i \mathcal{V}_2* .

Jeśli $A_i \in L(\mathcal{V}_i)$, to $A_1 \oplus A_2 \in L(\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2)$ jest zdefiniowany jako

$$(A_1 \oplus A_2)(v_1, v_2) := (A_1 v_1, A_2 v_2).$$

Niech (π_i, \mathcal{V}_i) będą reprezentacjami na przestrzeniach \mathcal{V}_i . Wtedy

$$\pi_1 \oplus \pi_2(g) := \pi_1(g) \oplus \pi_2(g)$$

definiuje reprezentację na przestrzeni $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$ zwaną *sumą prostą reprezentacji π_1 i π_2* . Będziemy pisać

$$m\pi = \underbrace{\pi \oplus \dots \oplus \pi}_m \text{ razy}.$$

5.3 Równoważność

Niech $(\pi, \mathcal{V}_\pi), (\rho, \mathcal{V}_\rho)$ będą reprezentacjami G . Mówimy, że operator U *splata* π i ρ , jeśli

$$U\pi(g) = \rho(g)U, \quad g \in G. \quad (5.18)$$

Mówimy, że π, ρ są reprezentacjami *równoważnymi*, gdy istnieje $U \in GL(\mathcal{V}_\pi, \mathcal{V}_\rho)$ splatający π i ρ . Piszemy wtedy $\pi \simeq \rho$.

Jeśli dodatkowo przestrzenie te są przestrzeniami Hilberta, mówimy, że π, ρ są *unitarnie równoważne*, gdy istnieje $U \in U(\mathcal{V}_\pi, \mathcal{V}_\rho)$ splatający π i ρ .

Twierdzenie 5.1 *Niech $\mathcal{V}_\pi, \mathcal{V}_\rho$ będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami Hilberta. Niech $(\pi, \mathcal{V}_\pi), (\rho, \mathcal{V}_\rho)$ będą reprezentacjami unitarnymi. Wtedy ich równoważność jest równoważna unitarnej równoważności.*

Dowód. Niech $A \in GL(\mathcal{V}_\pi, \mathcal{V}_\rho)$ splata π i ρ . Wtedy $A^* \in GL(\mathcal{V}_\rho, \mathcal{V}_\pi)$ splata ρ i π . Zatem $A^*A \in GL(\mathcal{V}_\pi)$ splata π z sobą. To samo jest prawdą dla $(A^*A)^{-1/2}$. Zatem operator unitarny $(AA^*)^{-1/2}A$ splata π z ρ . \square

5.4 Nieprzywiedlność

Niech (π, \mathcal{V}) będzie reprezentacją G . Mówimy, że podprzestrzeń $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$ jest *niezmiennicza dla (π, \mathcal{V})* , gdy jest niezmiennicza względem $\pi(g)$, $g \in G$. Połóżmy $\pi_1 := \pi|_{\mathcal{V}_1}$. Wtedy (π_1, \mathcal{V}_1) jest też reprezentacją. Mówimy, że (π_1, \mathcal{V}_1) jest *podreprezentacją* reprezentacji (π, \mathcal{V}) .

Twierdzenie 5.2 *Jeśli (π, \mathcal{V}) jest unitarna i \mathcal{V}_1 jest niezmiennicza dla (π, \mathcal{V}) , to \mathcal{V}_1^\perp jest też niezmiennicza dla (π, \mathcal{V}) .*

Mówimy, że (π, \mathcal{V}) jest *nieprzywiedlna*, gdy nie istnieje nietrywialna podprzestrzeń w \mathcal{V} niezmiennicza względem π .

Mówimy, że (ρ, \mathcal{V}) jest *całkowicie rozkładalna*, gdy $\rho \simeq \bigoplus_{i=1}^n \pi_i$, gdzie π_i są nieprzywiedlne.

Twierdzenie 5.3 Niech (π, \mathcal{V}) będzie reprezentacją unitarną w skończenie wymiarowej przestrzeni. Wtedy (π, \mathcal{V}) jest całkowicie rozkładalna.

Dowód. Załóżmy, że \mathcal{V} jest przywiedlna. Wtedy posiada nietrywialną podprzestrzeń niezmienniczą \mathcal{V}_1 . $\mathcal{V}_2 := \mathcal{V}_1^\perp$ jest też niezmiennicza. Kontynuując dostaniemy rozkład. \square

Jeśli weźmiemy reprezentację $\mathbb{R} \ni t \mapsto \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in L(\mathbb{C}^2)$, to $\mathbb{C} \oplus \{0\}$ jest przestrzenią niezmienniczą, która nie posiada dopełniającej niezmienniczej. Dlatego jest to reprezentacja przywiedlna, ale nie jest całkowicie rozkładalna. Nie jest natomiast unitarna dla jakiegokolwiek iloczynu skalarnego.

Unitarna równoważność reprezentacji jest relacją równoważności. Przez \hat{G} będziemy oznaczali zbiór klas abstrakcji reprezentacji nieprzywiedlnych względem tej relacji.

5.5 Reprezentacje jednowymiarowe

Rozważmy reprezentacje w jednowymiarowej przestrzeni zespolonej. Takie reprezentacje mają wartości w grupie $GL(\mathbb{C})$, która pokrywa się z multiplikatywną grupą liczb zespolonych \mathbb{C}^\times . W \mathbb{C} mamy z dokładnością do proporcjonalności tylko jeden iloczyn skalarny. Reprezentacja jest unitarna (bądź unitaryzowalna) gdy ma wartości w $U(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Każda reprezentacja jednowymiarowa jest nieprzywiedlna. Jeśli $G \ni g \mapsto \chi(g) \in \mathbb{C}^\times$ jest jednowymiarową reprezentacją zaś $G \ni g \mapsto \pi(g)$ jest dowolną reprezentacją, to

$$\chi\pi(g) := \chi(g)\pi(g)$$

jest też reprezentacją. Jeśli π jest nieprzywiedlne, to $\chi\pi$ też. W szczególności, reprezentacje jednowymiarowe dowolnej grupy tworzą grupę ze względu na mnożenie.

Dla grupy \mathbb{Z}_n , dla $m = 0, \dots, n-1$,

$$\mathbb{Z}_n \ni k \mapsto e^{\frac{i2\pi km}{n}} \in \mathbb{C}^\times$$

jest reprezentacją. Jest ona zawsze unitarna. Ogólniej, niech $(m_1, \dots, m_p) \in \mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_p}$. Wtedy

$$\mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_p} \ni (k_1, \dots, k_p) \mapsto e^{\frac{i2\pi k_1 m_1}{n_1}} \dots e^{\frac{i2\pi k_p m_p}{n_p}} \in \mathbb{C}^\times$$

jest reprezentacją unitarną. Łatwo się przekonać, że wszystkie nieprzywiedlne reprezentacje grupy $\mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_p}$ są tej postaci. Możemy zapisać symbolicznie

$$(\mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_p})^\wedge = \mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_p}.$$

Dla grupy \mathbb{Z} , dla dowolnego $\mu \in \mathbb{C}$

$$\mathbb{Z} \ni k \mapsto e^{ki\mu} \in \mathbb{C}^\times$$

jest reprezentacją. Jest ona unitarna wtedy i tylko wtedy gdy μ jest rzeczywiste. W szczególności, nie wszystkie reprezentacje \mathbb{Z} są unitaryzowalne.

5.6 Reprezentacje permutacyjne

Niech grupa G działa na zbiorze X . Niech δ_x będzie bazą kanoniczną w $l^2(X)$. Wtedy

$$\pi(g)\delta_x := \delta_{gx}, \quad g \in G, \quad x \in X,$$

lub równoważnie

$$\pi(g)f(x) := f(g^{-1}x), \quad g \in G, \quad x \in X,$$

definiuje reprezentację unitarną na $l^2(X)$.

Jeśli X jest skończone, to reprezentacja ta jest przywiedlna, bo przestrzeń rozpięta na wektorze $\sum_x \delta_x$ jest niezmiennicza.

5.7 Podstawowe reprezentacje grupy permutacji

Rozważmy powyższą konstrukcję dla grupy S_n działającej na $\{1, \dots, n\}$. Zatem rozważamy S_n działającą na \mathbb{C}^n ,

$$\pi\delta_i := \delta_{\pi i}.$$

Niech $\mathcal{V}_n = \{f \in \mathbb{C}^n : f_1 + \dots + f_n = 0\} = \{(1, \dots, 1)\}^\perp$. Reprezentacja π obcięta do \mathcal{V} bywa nazywana *reprezentacją standardową grupy S_n* .

Twierdzenie 5.4 *Reprezentacja standardowa jest nieprzywiedlna dla $n \geq 2$*

Dowód. Twierdzenie jest oczywiste dla grupy S_2 , dla której wymiar reprezentacji jest równy 1.

Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n - 1$. Bazą przestrzeni \mathcal{V}_n jest $e_1 = \delta_1 - \delta_n, \dots, e_{n-1} := \delta_{n-1} - \delta_n$. Rozważmy grupę $S_{n-1} \subset S_n$. Działa ona na bazę e_1, \dots, e_{n-1} jak reprezentacja permutacyjna. Dlatego też, z założenia indukcyjnego, jej jedyne nietrywialne podprzestrzenie niezmiennicze są rozpięte przez $e_1 + \dots + e_{n-1} = \delta_1 + \dots + \delta_{n-1} - (n-1)\delta_n$ oraz jej dopełnienie ortogonalne. Łatwo się przekonać, że jakkolwiek element $S_n \setminus S_{n-1}$ nie zachowuje obu podprzestrzeni. \square

Zauważmy, że dla grupy A_3 , reprezentacja standardowa na \mathcal{V}_3 jest przywiedlna. Dla A_4 , reprezentacja standardowa jest nieprzywiedlna na \mathcal{V}_3 . Dlatego też, Twierdzenie 5.4 jest słuszne jeśli zastąpimy S_n przez A_n i $n \geq 4$ (z takim samym dowodem).

Zatem dla dowolnej grupy permutacji znamy już 4 reprezentacje nieprzywiedlne.

- (1) trywialna, (1-wymiarowa),
- (2) sgn, (1-wymiarowa),
- (3) standardowa, ($d - 1$ -wymiarowa),
- (4) sgn \times standardowa, ($d - 1$ -wymiarowa).

Dla małych n niektóre z nich się pokrywają: Dla S_2 , (1)=(4), (2)=(3). Dla S_3 , (3)=(4).

Począwszy od S_4 , wszystkie cztery reprezentacje są różne.

5.8 Lematy Schura

Twierdzenie 5.5 (Pierwszy Lemat Schura) *Niech (π, \mathcal{V}) będzie nieprzywiedlną unitarną reprezentacją G . Niech $A \in B(\mathcal{V})$ splata (π, \mathcal{V}) z samą sobą. Wtedy $A = c\mathbb{1}$ dla pewnego $c \in \mathbb{C}$.*

Dowód. Niech A będzie niezerowym operatorem splatającym (π, \mathcal{V}) z sobą. A^* też splata. Jeden z operatorów $A + A^*$ i $i(A - A^*)$ jest niezerowy i oba splatają. Zatem można założyć, że A jest samosprężony. Jeśli A nie jest równy $\lambda\mathbb{1}$, to znaczy istnieją $\lambda_1 \neq \lambda_2$ w spektrum A . Załóżmy dla uproszczenia, że $\dim \mathcal{V} < \infty$. Wtedy $\text{Ker}(A - \lambda_1)$ jest nietrywialną podprzestrzenią niezmienniczą, co jest sprzecznością. \square

Twierdzenie 5.6 (Drugi Lemat Schura) *Niech $(\pi, \mathcal{V}_\pi), (\rho, \mathcal{V}_\rho)$ będą nieprzywiedlnymi unitarnymi reprezentacjami G . Jeśli istnieje $A \in B(\mathcal{V})$, $A \neq 0$ splatający (π, \mathcal{V}_π) z (ρ, \mathcal{V}_ρ) , to (π, \mathcal{V}_π) jest unitarnie równoważna (ρ, \mathcal{V}_ρ) .*

Dowód. Niech $A \neq 0$. $A^*A \neq 0$ splata (π, \mathcal{V}_π) z sobą. Dlatego $A^*A = \lambda_1\mathbb{1}$, $\lambda_1 \neq 0$. Podobnie, AA^* splata (ρ, \mathcal{V}_ρ) z sobą. Dlatego $AA^* = \lambda_2\mathbb{1}$. Mamy $\lambda_1^2\mathbb{1} = A^*AA^*A = \lambda_2A^*A = \lambda_2\lambda_1\mathbb{1}$. Zatem $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$. Więc $U := \lambda^{-\frac{1}{2}}A$ jest unitarny. \square

5.9 Iloczyn tensorowy I

Najpierw wprowadźmy iloczyn tensorowy w “naiwny” sposób.

Oznaczmy bazę kanoniczną \mathbb{C}^n przez e_i , $i = 1, \dots, n$, zaś bazę kanoniczną \mathbb{C}^m przez f_j , $j = 1, \dots, m$. Przestrzeń $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ można zdefiniować jako \mathbb{C}^{nm} z bazą $e_i \otimes f_j$, $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$. Czyli elementy $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ są postaci $\sum_{i,j=1}^n t_{ij}e_i \otimes f_j$.

Jeśli $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$, $w = \sum_{j=1}^m w_j f_j$, to kładziemy

$$v \otimes w := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m v_i w_j e_i \otimes f_j.$$

Niech A będzie operatorem na \mathbb{C}^n a B operatorem na \mathbb{C}^m . Przez $A \otimes B$ rozumiemy operator na $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$, którego macierz jest równa

$$(A \otimes B)_{ij,kl} = A_{ik} B_{jl}.$$

Jeśli A i B są unitarne/hermitowskie, to $A \otimes B$ też.

5.10 Iloczyn tensorowy II

Wprowadźmy teraz iloczyn tensorowy w sposób niezależny od bazy. Niech \mathcal{V}, \mathcal{W} będą przestrzeniami. Dla uproszczenia, będziemy zakładać, że są skończenie wymiarowe.

Niech \mathcal{Z} będzie przestrzenią skończonych kombinacji liniowych wektorów (v, w) , $v \in \mathcal{V}$, $w \in \mathcal{W}$. W przestrzeni tej wyróżniamy podprzestrzeń \mathcal{Z}_0 rozpiętą na wektorach

$$\begin{aligned} &(\lambda v, w) - \lambda(v, w), & (v, \lambda w) - \lambda(v, w), \\ &(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w), & (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2). \end{aligned}$$

Definiujemy $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} := \mathcal{Z}/\mathcal{Z}_0$. Jeśli $v \in \mathcal{V}$, $w \in \mathcal{W}$, to definiujemy $v \otimes w := (v, w) + \mathcal{Z}_0$.

$\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ jest przestrzenią wektorową. \otimes jest działaniem spełniającym warunki

$$\begin{aligned} (\lambda v) \otimes w &= \lambda v \otimes w, & v \otimes (\lambda w) &= \lambda v \otimes w, \\ (v_1 + v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w, & v \otimes (w_1 + w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2. \end{aligned}$$

Wektory postaci $v \otimes w$ nazywają się *tensorami prostymi*. Nie są to wszystkie wektory w $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$, ale rozpinają $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$.

Pokażmy, że powyższa definicja jest równoważna definicji “naiwnej”.

Twierdzenie 5.7 *Jeśli e_i , $i = 1, \dots, n$ jest bazą w \mathcal{V} , zaś f_j , $j = 1, \dots, m$ bazą w \mathcal{W} , to $e_i \otimes f_j$, $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$, jest bazą w $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$.*

Dowód. Latwo sprawdzamy, że $e_i \otimes f_j$ rozpinają $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$. Trzeba pokazać ich liniową niezależność. Niech

$$\sum_{i,j} t^{ij} e_i \otimes f_j = 0. \quad (5.19)$$

Niech e^1, \dots, e^n będzie bazą dualną do e_1, \dots, e_n , tzn

$$\langle e^i | e_j \rangle = \delta_j^i.$$

Podobnie, niech f^1, \dots, f^m będzie bazą dualną do f_1, \dots, f_m . Zdefiniujmy funkcjonal p^{ij} na \mathcal{Z} wzorem

$$\langle p^{ij} | (v, w) \rangle = \langle e^i | v \rangle \langle f^j | w \rangle.$$

Sprawdzamy, że $p^{ij} = 0$ na \mathcal{Z}_0 . Zatem p^{ij} jest dobrze określony na $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} = \mathcal{Z}/\mathcal{Z}_0$. Stosując p^{ij} do (5.19) dostajemy $t^{ij} = 0$. \square

Twierdzenie 5.8 *Jeśli \mathcal{V} i \mathcal{W} są przestrzeniami Hilberta, to $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ posiada jedyny iloczyn skalarny taki, że*

$$(v_1 \otimes w_1 | v_2 \otimes w_2) = (v_1 | v_2)(w_1 | w_2). \quad (5.20)$$

Jeśli e_i , $i = 1, \dots, n$ jest bazą ortonormalną w \mathcal{V} , zaś f_j , $j = 1, \dots, m$ bazą ortonormalną w \mathcal{W} , to $e_i \otimes f_j$, $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$, jest bazą ortonormalną w $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$.

Dowód. Najpierw sprawdzamy, że jeśli iloczyn skalarny o własności (5.20) istnieje, to część twierdzenia o bazach ortonormalnych musi być prawdziwa. \square

Twierdzenie 5.9 *Niech A będzie operatorem na \mathcal{V} i B operatorem na \mathcal{W} . Wtedy istnieje dokładnie jeden operator $A \otimes B$ na $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ taki, że*

$$(A \otimes B)v \otimes w := (Av) \otimes (Bw).$$

Dowód. Wystarczy zdefiniować $A \otimes B$ w bazie:

$$(A \otimes B)e_i \otimes f_j := (Ae_i) \otimes (Bf_j).$$

□

Niech (π, \mathcal{V}) , (ρ, \mathcal{W}) będą reprezentacjami. *Iloczynem tensorowym tych reprezentacji* nazywamy reprezentację $\pi \otimes \rho$ w przestrzeni $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$

$$(\pi \otimes \rho)(g) = \pi(g) \otimes \rho(g).$$

Zauważmy, że $m\pi$ jest równoważne $\pi \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{C}^m}$.

5.11 Reprezentacja grupy permutacji

Twierdzenie 5.10 Dla $\sigma \in S_n$ istnieje dokładnie jeden operator $\Theta(\sigma) \in L(\otimes^n \mathcal{V})$, dla którego

$$\Theta(\sigma)v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = v_{\sigma^{-1}1} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}n}.$$

$$S_n \ni \sigma \mapsto \Theta(\sigma) \in L(\mathcal{V}^{\otimes n})$$

jest reprezentacją.

Dowód. Wystarczy wybrać bazę e_1, \dots, e_m w \mathcal{V} i położyć

$$\Theta(\sigma)e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} = e_{i_{\sigma^{-1}1}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma^{-1}n}}$$

To definiuje jednoznacznie operator $\Theta(\sigma)$.

Pokażmy, że $\Theta(\pi)\Theta(\sigma) = \Theta(\pi\sigma)$. Niech $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$ i $w_i := v_{\sigma^{-1}i}$. Wtedy

$$\begin{aligned} \Theta(\pi)\Theta(\sigma)v_1 \otimes \cdots \otimes v_n &= \Theta(\pi)w_1 \otimes \cdots \otimes w_n \\ &= w_{\pi^{-1}1} \otimes \cdots \otimes w_{\pi^{-1}n} \\ &= v_{\sigma^{-1}\pi^{-1}1} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}\pi^{-1}n} \\ &= v_{(\pi\sigma)^{-1}1} \otimes \cdots \otimes v_{(\pi\sigma)^{-1}n}. \end{aligned}$$

Jeśli \mathcal{V} jest przestrzenią Hilberta, jest to reprezentacja unitarna.

Jest to reprezentacja przywiedlna. W szczególności, można podać rzuty ortogonalne na podprzestrzenie na których reprezentacja jest trywialna i znakową:

$$\begin{aligned} \Theta_s^n &:= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \Theta(\sigma), \\ \Theta_a^n &:= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn} \sigma \Theta(\sigma). \end{aligned}$$

Kładziemy $\otimes_{s/a}^n \mathcal{V} := \Theta_{s/a}^n \otimes^n \mathcal{V}$.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\Theta_s^2 &:= \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \Theta(\tau)), \\ \Theta_a^2 &:= \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \Theta(\tau)).\end{aligned}$$

Zatem $\mathbb{1} = \Theta_s^2 + \Theta_a^2$. Czyli każdy 2-tensor można rozłożyć na część symetryczną i antysymetryczną: $\otimes^2 \mathcal{V} = \otimes_s^2 \mathcal{V} \oplus \otimes_a^2 \mathcal{V}$.

Jeśli $t \in \otimes^n \mathcal{V}$, to

$$t = \sum t_{i_1, \dots, i_n} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned}\Theta_s t &= \sum t_{(i_1, \dots, i_n)} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}, \\ \Theta_a t &= \sum t_{[i_1, \dots, i_n]} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n},\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}t_{(i_1, \dots, i_n)} &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} t_{i_{\sigma 1}, \dots, i_{\sigma n}}, \\ t_{[i_1, \dots, i_n]} &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn} \sigma t_{i_{\sigma 1}, \dots, i_{\sigma n}}.\end{aligned}$$

Mamy

$$\dim \otimes_s^n \mathbb{C}^d = \frac{(d+n-1)!}{(d-1)!n!}, \quad \dim \otimes_a^n \mathbb{C}^d = \frac{n!}{d!(n-d)!}.$$

5.12 Charaktery

Założmy, że π jest reprezentacją na skończenie wymiarowej przestrzeni \mathcal{V} . Charakterem reprezentacji π nazywamy funkcję na G równą

$$\chi_\pi(g) := \text{Tr} \pi(g).$$

Mamy $\dim \mathcal{V} = \chi_\pi(e)$,

$$\begin{aligned}\chi_\pi(g) &= \chi_\pi(hgh^{-1}), \quad g, h \in G; \\ \chi_{\pi \oplus \rho} &= \chi_\pi + \chi_\rho, \\ \chi_{n\pi} &= n\chi_\pi, \\ \chi_{\pi \otimes \rho} &= \chi_\pi \chi_\rho, \\ \chi_{\bar{\pi}} &= \bar{\chi}_\pi, \\ \chi_{\otimes_s^2 \pi} &= \frac{1}{2} (\chi_\pi(g)^2 + \chi_\pi(g^2)); \\ \chi_{\otimes_a^2 \pi} &= \frac{1}{2} (\chi_\pi(g)^2 - \chi_\pi(g^2)).\end{aligned}$$

6 Reprezentacje grup skończonych

W tej sekcji wszystkie grupy są skończone.

6.1 Unitaryzowalność

Twierdzenie 6.1 *Niech G będzie grupą skończoną a (ρ, \mathcal{V}_ρ) jej reprezentacją. Wtedy istnieje iloczyn skalarny na \mathcal{V}_ρ taki, że ρ jest reprezentacją unitarną.*

Dowód. Wybierzmy dowolny iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot)_0$ w \mathcal{V}_ρ . Wtedy

$$(v|w) := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} (\rho(g)v|\rho(g)w)_0$$

jest też iloczynem skalarnym. Mamy

$$(\rho(h)v|\rho(h)w) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} (\rho(gh)v|\rho(gh)w)_0 = (v|w).$$

Zatem ρ jest reprezentacją unitarną. \square

Stąd wniosek, że każda reprezentacja grupy skończonej w skończenie wymiarowej przestrzeni jest całkowicie rozkładalna.

6.2 Relacje ortogonalności

Unitarna równoważność reprezentacji jest relacją równoważności. Przez \hat{G} będziemy oznaczali zbiór klas abstrakcji reprezentacji nieprzywiedlnych względem tej relacji. W praktyce dla każdego elementu \hat{G} wybierzemy reprezentanta (π, \mathcal{V}_π) . Wybierzemy również bazę ortonormalną $e_{\pi,1}, \dots, e_{\pi,d_\pi}$, gdzie $d_\pi := \dim \mathcal{V}_\pi$. Możemy wtedy zapisać π jako macierz

$$[\pi_{ij}(g)]_{i,j=1,\dots,d_\pi}, \quad g \in G.$$

Czyli

$$\pi_{ij}(g) = (e_{\pi,i}|\pi(g)e_{\pi,j}).$$

Mamy też charaktery nieprzywiedlne

$$\chi_\pi(g) := \sum_{i=1}^{d_\pi} \pi_{ii}(g) = \text{Tr} \pi(g)$$

W $l^2(G)$ będziemy używać iloczynu skalarnego

$$(f|f') := \frac{1}{\#G} \sum \overline{f(g)} f'(g).$$

Twierdzenie 6.2 Niech $\pi, \pi' \in \hat{G}$.

$$(\pi_{ij} | \pi'_{km}) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \overline{\pi_{ij}(g)} \pi'_{km}(g) = \frac{1}{d_\pi} \delta_{\pi, \pi'} \delta_{ik} \delta_{jm}, \quad (6.21)$$

$$(\chi_\pi | \chi_{\pi'}) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \overline{\chi_\pi(g)} \chi_{\pi'}(g) = \delta_{\pi, \pi'}. \quad (6.22)$$

Lemat 6.3 Niech π, π' będą reprezentacjami. Niech H będzie operatorem z $\mathcal{V}_{\pi'}$ do \mathcal{V}_π . Zdefiniujmy

$$\langle H \rangle := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \pi(g^{-1}) H \pi'(g).$$

Wtedy $\langle H \rangle$ splata π' i π . W szczególności, jeśli π, π' są nieprzywiedlne, to $\langle H \rangle$ jest niezerowe jedynie, gdy są one równoważne i wtedy (przyjmując, że $(\pi, \mathcal{V}_\pi) = (\pi', \mathcal{V}_{\pi'})$) mamy

$$\langle H \rangle = \frac{\text{Tr} H}{d_\pi} \mathbb{1}_{\mathcal{V}_\pi}. \quad (6.23)$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \pi(h) \langle H \rangle &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \pi(hg^{-1}) H \pi'(g) \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \pi((gh^{-1})^{-1}) H \pi'(gh^{-1}) \pi'(h) = \langle H \rangle \pi'(h). \end{aligned}$$

Następnie stosujemy Lemat Schura. Pokażmy na koniec (6.23). Wiemy, że $\langle H \rangle = c \mathbb{1}_{\mathcal{V}_\pi}$. Zatem

$$cd_\pi = \text{Tr} \langle H \rangle = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \text{Tr} \pi(g^{-1}) H \pi(g) = \text{Tr} H.$$

□

Dowód Twierdzenia 6.2 Stosujemy Lemat 6.3 do $H = |e_{\pi, j}\rangle \langle e_{\pi', m}|$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \pi(g^{-1}) |e_{\pi, j}\rangle \langle e_{\pi', m}| \pi'(g) &= \frac{1}{d_\pi} \mathbb{1}_{\mathcal{V}_\pi} \delta_{\pi, \pi'} \text{Tr} |e_{\pi, j}\rangle \langle e_{\pi, m}| \\ &= \frac{1}{d_\pi} \mathbb{1}_{\mathcal{V}_\pi} \delta_{\pi, \pi'} \delta_{jm}. \end{aligned}$$

Następnie obkładamy obie strony przez $\langle e_{\pi, i} | \cdots \langle e_{\pi', k} |$, dostając (6.21). Aby pokazać (6.22), liczymy:

$$(\chi_\pi | \chi_{\pi'}) = \sum_{i=1}^{d_\pi} \sum_{j=1}^{d_{\pi'}} (\pi_{ii} | \pi'_{jj}) = \delta_{\pi\pi'} \sum_{i=1}^{d_\pi} (\pi_{ii} | \pi_{ii}) = \delta_{\pi\pi'} \frac{d_\pi}{d_\pi}.$$

□

6.3 Rozkład reprezentacji

Niech (ρ, \mathcal{W}) będzie reprezentacją grupy G na przestrzeni wymiaru d_ρ . Możemy ją zawsze rozłożyć na składniki jednorodne:

$$\rho \simeq \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} m_\pi \pi. \quad (6.24)$$

Zatem

$$d_\rho = \sum_{\pi \in \hat{G}} m_\pi d_\pi. \quad (6.25)$$

Jeśli ρ jest reprezentacją unitarną, to można założyć, że suma (6.24) jest ortogonalna. Mamy też rozkład przestrzeni \mathcal{W} na sumę prostą ortogonalną $\mathcal{W} = \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} \mathcal{W}_\pi$ taki, że $\rho|_{\mathcal{W}_\pi}$ jest równoważna $m_\pi \pi$, oraz rzuty ortogonalne Q_π na \mathcal{W}_π . Oczywiście, $\mathcal{W}_\pi = \text{Ran} Q_\pi$,

$$\sum_{\pi \in \hat{G}} Q_\pi = \mathbb{1}, \quad Q_\pi^* = Q_\pi, \quad Q_\pi Q_{\pi'} = Q_\pi \delta_{\pi\pi'}.$$

Pokażemy, że liczby m_π , podprzestrzenie \mathcal{W}_π i rzuty Q_π są wyznaczone jednoznacznie. Pokażemy, jak je łatwo znajdować.

Pamiętamy, że charakter ρ jest zdefiniowany jako $\chi_\rho(g) := \text{Tr} \rho(g)$, $g \in G$.

Twierdzenie 6.4 Dla $\pi \in \hat{G}$

$$m_\pi = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \overline{\chi_\pi(g)} \chi_\rho(g) \quad (6.26)$$

$$= (\chi_\pi | \chi_\rho), \quad (6.27)$$

$$Q_\pi = \frac{d_\pi}{\#G} \sum_{g \in G} \overline{\chi_\pi(g)} \rho(g). \quad (6.28)$$

Dowód. Niech ρ spełnia (6.24). Wtedy

$$\rho = \sum m_\pi \rho_\pi.$$

Następnie relacja ortogonalności charakterów implikuje (6.26).

Możemy znaleźć bazę ortonormalną w \mathcal{W}_π $e_{\pi,i,p}$, $i = 1, \dots, d_\pi$, $p = 1, \dots, m_\pi$ taką, że

$$\rho(g) e_{\pi,i,p} = \sum_{j=1}^{d_\pi} \pi_{ji}(g) e_{\pi,j,p}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{d_\pi}{\#G} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{\pi'}(g)} \rho(g) e_{\pi,i,p} &= \frac{d_\pi}{\#G} \sum_{g \in G} \sum_{k=1}^{d_{\pi'}} \sum_{j=1}^{d_\pi} \overline{\pi'_{kk}(g)} \pi_{ji}(g) e_{\pi,j,p} \\ &= \delta_{\pi,\pi'} \sum_{k,j=1}^{d_\pi} \delta_{kj} \delta_{ki} e_{\pi,j,p} = \delta_{\pi,\pi'} e_{\pi,i,p}. \end{aligned}$$

□

6.4 Reprezentacja regularna

Jeśli grupa G działa na zbiorze X , to wiąże się z tym unitarna reprezentacja grupy G na przestrzeni $l^2(X)$ zadana przez

$$\lambda(g)f(x) := f(g^{-1}x), \quad g \in G, \quad x \in X.$$

W szczególności, rozważmy $X = G$. Iloczyn skalarny w $l^2(G)$ normalizujemy

$$(f|f') := \frac{1}{\#G} \sum \overline{f(g)} f'(g).$$

Dostajemy reprezentację na $l^2(G)$ zwaną (*lewą*) *reprezentacją regularną*. Mamy też *prawą reprezentację regularną*

$$\rho(g)f(h) := f(hg), \quad g, h \in G.$$

Twierdzenie 6.5 (1) $\lambda \simeq \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} d_\pi \pi$.

(2) $\#G = \sum_{\pi \in \hat{G}} d_\pi^2$. Funkcje $\sqrt{d_\pi} \pi_{ij}$ stanowią bazę ortonormalną w $l^2(G)$.

Dowód. Charakter reprezentacji regularnej jest równy

$$\chi_\lambda(g) = \#G \delta_e(g).$$

Stąd

$$m_\pi = (\chi_\lambda | \chi_\pi) = \chi_\pi(e) = d_\pi.$$

To pokazuje (1), z którego na mocy (6.25) wynika (2).

Wiemy, że $\{\sqrt{d_\pi} \pi_{ij} : \pi \in \hat{G}, i, j = 1, \dots, d_\pi\}$ stanowią układ ortonormalny. (2) oznacza, że liczba jego elementów równa jest wymiarowi $l^2(G) = \#G$. Zatem jest to baza ortonormalna. \square

6.5 Liczba reprezentacji nieprzywiedlnych

Twierdzenie 6.6 Liczba klas sprzężoności jest równa liczbie reprezentacji nieprzywiedlnych.

Dowód. Niech $l_{\text{cent}}^2(G)$ będzie podprzestrzenią $l^2(G)$ składającą się z funkcji stałych na klasach sprzężoności. Wiemy, że $\chi_\pi, \pi \in \hat{G}$, stanowią układ ortonormalny w $l_{\text{cent}}^2(G)$. Pokażemy, że jest to baza ortonormalna.

Najpierw zauważmy, że z Lematu 6.3 wynika, że

$$\langle \pi(g) \rangle = \frac{\chi_\pi(g)}{d_\pi} \mathbb{1}_{\mathcal{V}_\pi}. \quad (6.29)$$

Niech $f \in l_{\text{cent}}^2(G)$.

$$\begin{aligned}
f(g) &= \sum_{\pi \in \hat{G}} \sum_{i,j}^{d_\pi} f_{\pi,ij} \pi_{ij}(g) \\
&= \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \sum_{\pi \in \hat{G}} \sum_{i,j}^{d_\pi} f_{\pi,ij} \pi_{ij}(hgh^{-1}) \\
&= \sum_{\pi \in \hat{G}} \sum_{i,j}^{d_\pi} f_{\pi,ij} (e_{\pi,i} | \langle \pi(g) \rangle e_{\pi,j}) \\
&= \sum_{\pi \in \hat{G}} \sum_i^{d_\pi} f_{\pi,ii} \frac{\chi_\pi(g)}{d_\pi},
\end{aligned}$$

gdzie w ostatnim kroku skorzystaliśmy z (6.29). Zatem $l_{\text{cent}}^2(G)$ jest rozpięte przez χ_π , $\pi \in \hat{G}$. \square

7 Algebry łączne

7.1 Definicja

Niech \mathfrak{A} będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{K} . Mówimy, że \mathfrak{A} jest *algebrą* jeśli jest wyposażona w działanie

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \ni (A, B) \mapsto AB \in \mathfrak{A}$$

spełniające

$$\begin{aligned}
A(B + C) &= AB + AC, & (B + C)A &= BA + CA, \\
(\alpha\beta)(AB) &= (\alpha A)(\beta B).
\end{aligned}$$

Jeśli w dodatku

$$A(BC) = (AB)C,$$

to mówimy, że jest to *algebra łączna*. (W praktyce, skracamy nazwę, przez *algebrę* rozumiejąc algebrę łączną).

Mówimy, że \mathfrak{A} jest *algebrą przemienną* gdy $A, B \in \mathfrak{A}$ implikuje $AB = BA$.

Centrum algebry \mathfrak{A} jest zdefiniowane jako

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{A}) = \{A \in \mathfrak{A} : AB = BA, B \in \mathfrak{A}\}.$$

7.2 Podalgebry

Ustalmy algebrę \mathfrak{A} . $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ nazywamy *podalgebrą* gdy jest to podprzestrzeń liniowa i $A, B \in \mathfrak{B} \Rightarrow AB \in \mathfrak{B}$. Oczywiście, podalgebra jest również algebrą.

Jeśli rodzina $\mathfrak{B}_\alpha \subset \mathfrak{A}$ składa się z podalgebr, to $\bigcap_\alpha \mathfrak{B}_\alpha$ jest też podalgebrą. Dlatego, dla dowolnego podzbioru $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ istnieje najmniejsza podalgebra zawierająca \mathfrak{B} . Oznaczamy ją przez $\text{Alg}(\mathfrak{B})$ i nazywamy *podalgebrą generowaną przez \mathfrak{B}* .

Niech \mathcal{V} będzie przestrzenią wektorową nad \mathbb{K} . Oczywiście, zbiór liniowych odwzorowań w \mathcal{V} , oznaczany przez $L(\mathcal{V})$, jest algebrą.

Podalgebry w $L(\mathcal{V})$ nazywane są *konkretnymi algebrami*.

7.3 Identyczność

Identyczność algebry \mathfrak{A} to element $\mathbb{1} \in \mathfrak{A}$ taki, że

$$A = \mathbb{1}A = A\mathbb{1}, \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Każda algebra ma najwyżej jedną identyeczność. W rzeczy samej, jeśli $\mathbb{1}_1, \mathbb{1}_2$ są identyecznościami, to

$$\mathbb{1}_1 = \mathbb{1}_1 \mathbb{1}_2 = \mathbb{1}_2.$$

Mówimy, że \mathfrak{A} jest *unitalna* albo *z jedyneką*, jeśli posiada identyeczność. W dalszym ciągu, dla $\lambda \in \mathbb{C}$ będziemy po prostu pisać λ zamiast $\lambda\mathbb{1}$.

Zawsze można do algebry \mathfrak{A} dołączyć jedynekę. Dostajemy wtedy algebrę \mathfrak{A}_1 , jako przestrzeń wektorów równą $\mathfrak{A} \oplus \mathbb{C}$ z działaniem

$$(A, \lambda)(B, \mu) := (AB + \lambda B + \mu A, \lambda\mu).$$

7.4 Idempotenty

$P \in \mathfrak{A}$ nazywa się *idempotentem* gdy $P^2 = P$. $P\mathfrak{A}P$ jest podalgebrą zwaną *algebrą zredukowaną*. Identyeczność jest idempotentem.

Idempotent P nazywa się *minimalnym* gdy $P\mathfrak{A}P$ jest jednowymiarowa.

7.5 Sumy proste

Jeśli $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ są algebrami, możemy zdefiniować $\mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_2$.

Jeśli \mathfrak{A} jest algebrą i $P \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$ jest idempotentem, to oczywiście $P\mathfrak{A} = P\mathfrak{A}P$ jest podalgebrą. \mathfrak{A} jest naturalnie izomorficzna z $P\mathfrak{A} \oplus (1 - P)\mathfrak{A}$.

7.6 Homomorfizmy

Niech $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ będą algebrami. Odwzorowanie $\phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ nazywa się *homomorfizmem* gdy jest liniowe i zachowuje mnożenie, to znaczy

- (1) $\phi(\lambda A) = \lambda\phi(A)$;
- (2) $\phi(A + B) = \phi(A) + \phi(B)$;
- (3) $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$.

Jeśli ϕ jest homomorfizmem i P jest idempotentem, to $\phi(P)$ jest idempotentem.

Homomorfizm \mathfrak{A} w $L(\mathcal{V})$ jest nazywany *reprezentacją \mathfrak{A} na \mathcal{V}* .

Jeśli $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ są algebrami unitalnymi i $\phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ jest homomorfizmem, mówimy, że ϕ jest *unitalny* gdy

$$\phi(\mathbb{1}_{\mathfrak{A}}) = \mathbb{1}_{\mathfrak{B}}.$$

7.7 Lewa regularna reprezentacja

Regularna reprezentacja

$$\mathfrak{A} \ni A \mapsto \lambda(A) \in L(\mathfrak{A})$$

jest zdefiniowana przez

$$\lambda(A)B := AB, \quad A, B \in \mathfrak{A}.$$

Jeśli \mathfrak{A} jest unitalna, to λ jest injektywna. Jeśli \mathfrak{A} nie jest unitalna, to λ może być rozszerzona do reprezentacji

$$\mathfrak{A} \ni A \mapsto \lambda_1(A) \in L(\mathfrak{A}_1)$$

w oczywisty sposób. λ_1 jest injektywna.

W obu przypadkach widzimy, że każda algebra jest izomorficzna z konkretną algebrą.

7.8 Ideały

\mathfrak{B} jest *lewym ideałem* algebry \mathfrak{A} jeśli jest liniową podprzestrzenią w \mathfrak{A} i $A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B} \Rightarrow AB \in \mathfrak{B}$. Podobnie definiujemy prawy ideał.

Jeśli $A \in \mathfrak{A}$, to $\mathfrak{A}A$ jest lewym ideałem

\mathfrak{B} nazywa się *ideałem dwustronnym*, lub po prostu *ideałem*, gdy jest lewym i prawym ideałem.

Mówimy, że ideał \mathfrak{I} jest *właściwy* gdy $\mathfrak{I} \neq \mathfrak{A}$. Mówimy, że ideał \mathfrak{I} jest *nietrywialny* gdy $\mathfrak{I} \neq \mathfrak{A}$ i $\mathfrak{I} \neq \{0\}$.

Twierdzenie 7.1 *Jądro homomorfizmu jest ideałem. Jeśli \mathfrak{I} jest ideałem w \mathfrak{A} , to $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ ma naturalną strukturę algebry. Odwzorowanie*

$$\mathfrak{A} \ni A \mapsto A + \mathfrak{I} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{I}$$

jest homomorfizmem, którego jądro jest równe \mathfrak{I} .

Algebra, która nie posiada nietrywialnych ideałów i jest różna od \mathbb{K} z zerowym iloczynem nazywa się algebrą prostą.

7.9 Przykłady podalgebr w $L(\mathbb{K}^n)$

- (1) Algebra górnotrójkątna.
- (2) Algebra nil-górnotrójkątna.
- (3) Algebra blokowa $L(\mathbb{K}^{p_1}) \oplus \cdots \oplus L(\mathbb{K}^{p_k})$, $n = p_1 + \cdots + p_k$.
- (4) Algebra $L(\mathbb{K}^p) \otimes \mathbb{1}_q$, $n = pq$.
- (5) Lewa regularna reprezentacja $L(\mathbb{K}^{d_1}) \oplus \cdots \oplus L(\mathbb{K}^{d_k})$ działa w $L(\mathbb{K}^n)$ dla $n = d_1^2 + \cdots + d_k^2$.

7.10 *-algebry

Założmy, że $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definicja 7.2 *Mówimy, że algebra \mathfrak{A} jest *-algebrą gdy jest wyposażona w antyliniowe odwzorowanie $\mathfrak{A} \ni A \mapsto A^* \in \mathfrak{A}$ takie, że $(AB)^* = B^*A^*$, $A^{**} = A$ i $A \neq 0$ implikuje $A^*A \neq 0$. * nazywa się involucją lub gwiazdką.*

*Mówimy, że ideał \mathfrak{I} jest *-ideałem, gdy jest *-niezmienniczy.*

Definicja 7.3 *Jeśli \mathfrak{A} , \mathfrak{B} są *-algebrami, to homomorfizm $\pi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ spełniający $\pi(A^*) = \pi(A)^*$ nazywa się *-homomorfizmem. (Również definiujemy *-izomorfizmy, *-automorfizmy, etc.)*

Mówimy, że $P \in \mathfrak{A}$ jest rzutem ortogonalnym, jeśli $P = P^2$ i $P = P^*$. Mówimy, że U jest częściową izometrią, jeśli $UU^*UU^* = UU^*$ i $U^*UU^*U = U^*U$. Wtedy rzuty ortogonalne U^*U i UU^* nazywamy rzutem początkowym i końcowym.

Twierdzenie 7.4 *Każda przemienne skończenie wymiarowa *-algebra jest *-izomorficzna z $C(X)$ dla skończonego zbioru X .*

Niech \mathcal{V} będzie przestrzenią Hilberta. Zbiór operatorów ograniczonych na \mathcal{V} , oznaczany $B(\mathcal{V})$ ze sprzężeniem hermitowskim tworzy *-algebrę. Każda podalgebra w $B(\mathcal{V})$ niezmiennicza względem * jest też *-algebrą.

Definicja 7.5 **-Algebry takie są zwane konkretnymi *-algebrami.*

Twierdzenie 7.6 *Niech \mathfrak{A} będzie skończenie wymiarową *-algebrą. Następujące warunki są równoważne:*

- (1) *Centrum \mathfrak{A} jest równe $\mathbb{C}\mathbb{1}$.*
- (2) *\mathfrak{A} jest prosta.*
- (3) *\mathfrak{A} jest *-izomorficzna z $B(\mathbb{C}^p)$ dla pewnego p .*

Twierdzenie 7.7 *Każda skończenie wymiarowa *-algebra \mathfrak{N} jest *-izomorficzna z*

$$\bigoplus_{i=1}^k B(\mathbb{C}^{p_i}). \quad (7.30)$$

Dowód. Niech \mathcal{Z} będzie centrum \mathfrak{N} . Mamy $\mathcal{Z} \simeq C(\{0, \dots, k\})$. Niech P_i odpowiada funkcji $\delta_i \in C(\{0, \dots, k\})$. Oczywiście, $P_i = P_i^*$ i $P_i P_j = P_j$ i $\sum_i P_i = \mathbb{1}$.

Mamy $\mathfrak{A} = \bigoplus_{j=1}^k P_j \mathfrak{A}$. Centrum $P_j \mathfrak{A}$ jest równe $\mathbb{C}P_j$. Zastosować więc możemy Tw. 7.6. \square

P_i skonstruowane w dowodzie są nazywane *minimalnymi rzutami centralnymi*. Dla \mathfrak{N} takiej jak w (7.30) zdefiniujemy $\dim(\mathfrak{N}) = [p_1, \dots, p_k]$.

7.11 Reprezentacje skończenie wymiarowych *-algebr

Lemat 7.8 Niech $U \in L(\mathbb{C}^n)$ będzie częściową izometrią. Wtedy U jest unitarne z $\text{Ran}U^*U$ do $\text{Ran}UU^*$.

Lemat 7.9 Niech $\phi : L(\mathbb{C}^p) \rightarrow L(\mathbb{C}^n)$ będzie unitalnym *-homomorfizmem. Wtedy $n = qp$, $q \in \mathbb{N}$, i ϕ jest unitarnie równoważny homomorfizmowi

$$L(\mathbb{C}^p) \ni A \mapsto A \otimes \mathbb{1}_q \in L(\mathbb{C}^p \otimes \mathbb{C}^q).$$

Dowód. Niech e_1, \dots, e_p będzie bazą w \mathbb{C}^p . $L(\mathbb{C}^p)$ jest rozpięta przez częściowe izometrie $|e_i\rangle\langle e_j|$. Niech $q := \text{Tr}\phi(|e_1\rangle\langle e_1|)$ i niech f_{11}, \dots, f_{1q} będzie bazą w $\text{Ran}\phi(|e_1\rangle\langle e_1|)$. Niech $f_{ij} := \phi(|e_i\rangle\langle e_1|)f_{1j}$. Wtedy f_{i1}, \dots, f_{iq} stanowią bazę w $\text{Ran}\phi(|e_i\rangle\langle e_i|)$. Mamy

$$|e_1\rangle\langle e_1| + \dots + |e_p\rangle\langle e_p| = \mathbb{1}_p.$$

Zatem

$$\phi(|e_1\rangle\langle e_1|) + \dots + \phi(|e_p\rangle\langle e_p|) = \mathbb{1}_n.$$

Więc f_{ij} , $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$ stanowią bazę w \mathbb{R}^n . Oczywiście

$$\phi(|e_i\rangle\langle e_j|)f_{kl} = \delta_{jk}f_{il}.$$

□

Twierdzenie 7.10 Każda unitalna reprezentacja algebry $\bigoplus_{i=1}^k L(\mathbb{C}^{p_i})$ na \mathbb{C}^n jest unitarnie równoważna reprezentacji w $\bigoplus_{i=1}^k \mathbb{C}^{p_i} \otimes \mathbb{C}^{q_i}$

$$\phi(A_1, \dots, A_k) := \bigoplus_{i=1}^k A_i \otimes \mathbb{1}_{q_i}.$$

Mamy $n = \sum_{i=1}^k p_i q_i$ oraz $q_i = \frac{1}{p_i} \text{Tr}\phi(P_i)$.

Dla reprezentacji regularnej mamy $p_i = q_i$. W szczególności, w tym wypadku

$$n = \sum_i p_i^2.$$

7.12 *-homomorfizmy skończenie wymiarowych *-algebr

Niech \mathfrak{N} , \mathfrak{M} będą skończenie wymiarowymi *-algebrami. Niech P_1, \dots, P_p , Q_1, \dots, Q_q będą minimalnymi rzutami centralnymi \mathfrak{N} i odpowiednio \mathfrak{M} .

Każdy homomorfizm $\alpha : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{M}$, gdzie $\dim \mathfrak{N} = [n_1, \dots, n_p]$, $\dim \mathfrak{M} = [m_1, \dots, m_q]$, określony jest przez macierz $[t_{ij}]$, gdzie $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, p$ i

$$\sum_j t_{ij} n_j \leq m_i.$$

Mamy = zamiast \leq jeśli α jest unitalna. Będziemy pisać $\text{Mat}(\alpha) = [t_{ij}]$. Mamy $t_{ij} = \text{Tr}Q_i\phi(P_j)$.

8 Algebra grupowa

8.1 Algebra grupowa

Niech G będzie skończoną grupą. Przez $C(G)$ będziemy oznaczali zbiór funkcji zespolonych na G . Jest on rozpięty przez funkcje δ_g , $g \in G$,

$$\delta_g(h) := \begin{cases} 1, & g = h, \\ 0, & g \neq h. \end{cases}$$

Czasami zamiast δ_g pisze się po prostu g .

$C(G)$ jest wyposażone w dwa łączne iloczyny: mnożenie punktowe i splot:

$$\begin{aligned} FG(g) &:= F(g)G(g), \\ F * G(g) &:= \sum_h F(gh^{-1})G(h). \end{aligned}$$

Mamy również involucję

$$F^*(g) := \overline{F(g^{-1})}. \quad (8.31)$$

Twierdzenie 8.1 $C(G)$ ze splotem i sprzężeniem (8.31) jest $*$ -algebrą.

Dowód. Niech $F \in C(G)$ będzie różne od zera. Liczymy

$$F^* * F(g) = \sum_{h \in G} \overline{F(hg^{-1})} F(h).$$

W szczególności,

$$F^* * F(e) = \sum_{h \in G} |F(h)|^2 \neq 0.$$

Zatem $F^*F \neq 0$. \square

Mamy naturalne zanurzenie $G \ni g \mapsto \delta_g \in C(G)$, przy czym mnożenie przechodzi na splot:

$$\delta_g * \delta_h := \delta_{gh}.$$

Niech $\psi : K \rightarrow G$ będzie homomorfizmem grup. Wtedy

$$\psi'(\delta_k) := \delta_{\psi(k)}$$

definiuje $*$ -homomorfizm algebr $\psi' : C(K) \rightarrow C(G)$. Mamy przemienny diagram

$$\begin{array}{ccc} K & \rightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(K) & \rightarrow & C(G) \end{array}$$

Jeśli $\phi : G \rightarrow H$ jest również homomorfizmem grup, to $(\psi \circ \phi)' = \psi' \circ \phi'$.

Niech π będzie reprezentacją G na \mathcal{V} . Wtedy istnieje dokładnie jedna reprezentacja $\tilde{\pi} : C(G) \rightarrow L(\mathcal{V})$ spełniająca

$$\tilde{\pi}(\delta_g) := \pi(g).$$

Jeśli reprezentacja jest unitarna, to $\tilde{\pi}$ jest $*$ -reprezentacją. Mamy przemienny diagram

$$\begin{array}{ccc} G & \rightarrow & GL(\mathcal{V}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(G) & \rightarrow & L(\mathcal{V}) \end{array}$$

Niech (π, \mathcal{V}) będzie reprezentacją grupy G i $\psi : K \rightarrow G$ homomorfizmem. Wtedy $\psi \circ \rho$ jest reprezentacją grupy K . Mamy też

$$\widetilde{\psi \circ \pi} = \psi' \circ \tilde{\pi}.$$

W przyszłości będziemy opuszczać tyldy i primy w powyższych oznaczeniach.

8.2 Postać algebry splotowej

$\phi := \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} \pi$ jest reprezentacją grupy G na $\bigoplus_{\pi \in \hat{G}} \mathcal{V}_\pi$. Rozszerza się ona do reprezentacji algebry splotowej. Jak wspominaliśmy wyżej, rozszerzenie to oznaczamy też przez ϕ . Mamy

$$\begin{aligned} \phi(\delta_g) &:= \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} \pi(g) \\ &= \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} \sum_{i,j=1}^{d_\pi} \pi_{ij}(g) |e_{\pi,i}\rangle \langle e_{\pi,j}| \end{aligned}$$

Twierdzenie 8.2 ϕ jest $*$ -izomorfizmem

$$\phi : C(G) \rightarrow \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} L(\mathcal{V}_\pi) \subset L\left(\bigoplus_{\pi \in \hat{G}} \mathcal{V}_\pi\right).$$

Dowód. Oczywiście jest, że $|e_{\pi,i}\rangle \langle e_{\pi,j}|$, $i, j = 1, \dots, d_\pi$, $\pi \in \hat{G}$ rozpinają $\bigoplus_{\pi \in \hat{G}} L(\mathcal{V}_\pi)$. Ale $\phi^{-1}(|e_{\pi,i}\rangle \langle e_{\pi,j}|)(g) = \pi_{ij}(g)$, które jak pokazaliśmy, stanowią bazę $l^2(G) = C(G)$. \square

Niech $\mathbb{1}_\pi$ oznacza rzut na \mathcal{V}_π . Niech

$$C_{\text{cent}}(G) := \{F \in C(G) : F(ghg^{-1}) = F(h), \quad h, g \in G\}$$

Innymi słowy, $C_{\text{cent}}(G)$ składa się z funkcji stałych na klasach sprzężoności grupy G .

Twierdzenie 8.3 $C_{\text{cent}}(G)$ jest centrum algebry splotowej $C(G)$. Jest rozpięte przez $\phi^{-1}(\mathbb{1}_\pi)$, $\pi \in \hat{G}$. Mamy

$$\mathbb{1}_\pi = \phi\left(\frac{d_\pi}{\#G} \sum_{g \in G} \overline{\chi_\pi(g)} \delta_g\right).$$

Dowód. Niech $F = \sum_{h \in G} F_h \delta_h$ należy do centrum $C(G)$. Wtedy

$$\delta_g F = F \delta_g.$$

Zatem

$$\delta_g F \delta_{g^{-1}} = F.$$

To oznacza, że

$$\sum_{h \in G} F_{g^{-1}hg} \delta_h = \sum_h F_h \delta_h,$$

czyli F jest stałe na klasach sprzężoności.

Wiemy z (6.28), że

$$\mathbb{1}_\pi = \frac{d_\pi}{\#G} \sum_{g \in G} \overline{\chi_\pi(g)} \phi(g).$$

$\phi(g)$ możemy zastąpić przez $\phi(\delta_g)$ a następnie wyciągnąć ϕ przed całe wyrażenie. \square

Grupa \mathbb{Z}_n ma reprezentacje z charakterami

$$\chi_m(k) = e^{\frac{ikm2\pi}{n}}, \quad k \in \mathbb{Z}_n, \quad m \in \hat{\mathbb{Z}}_n \simeq \mathbb{Z}_n.$$

Odpowiadające im rzuty centralne to

$$\mathbb{1}_m = \frac{1}{n} \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} e^{-\frac{ikm2\pi}{n}} \delta_k.$$

Grupa S_n ma reprezentację trywialną/znakową z charakterem $\chi_s(\sigma) = 1/\chi_a = \text{sgn}\sigma$ i rzutem centralnym

$$\mathbb{1}_s = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \delta_\sigma,$$

$$\mathbb{1}_a = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}\sigma \delta_\sigma.$$

Ma również reprezentację standardową, dla której $\chi_{\text{st}}(\sigma)$ jest równe liczbie punktów stałych -1 oraz znakową \times standardową z rzutami centralnymi

$$\frac{n-1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \chi_{\text{st}}(\sigma) \delta_\sigma,$$

$$\frac{n-1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}\sigma \chi_{\text{st}}(\sigma) \delta_\sigma.$$

8.3 Reprezentacja regularna

Rozważmy lewą reprezentację regularną λ grupy G na $l^2(G)$. Rozszerza się ona do reprezentacji $\lambda : C(G) \rightarrow L(l^2(G))$.

Twierdzenie 8.4 *W poniższym wzorze z lewej F, F' są traktowane jako elementy $l^2(G)$, z prawej, jako elementy algebry $C(G)$:*

$$(F|F') = \frac{1}{(\#G)^2} \text{Tr} \lambda ((F^* * F')\delta_e).$$

Dowód. Mamy $(\delta_g^* * \delta_{g'})\delta_e = \delta_{g^{-1}g'}\delta_e = \delta_{g,g'}\delta_e$. Dlatego też

$$\begin{aligned} (F|F') &= \sum_{\pi \in \hat{G}} \frac{d_\pi}{\#G} (F|F') \text{Tr} \pi(\delta_e) \\ &= \sum_{\pi \in \hat{G}} \frac{d_\pi}{(\#G)^2} \sum_{g,g' \in G} \overline{F(g)} F'(g') \text{Tr} \pi((\delta_g^* * \delta_{g'})\delta_e) \\ &= \sum_{\pi \in \hat{G}} \frac{d_\pi}{(\#G)^2} \text{Tr} \pi((F^* * F')\delta_e) \\ &= \frac{1}{(\#G)^2} \text{Tr} \lambda ((F^* * F')\delta_e). \end{aligned}$$

9 Kwaterniony

9.1 Definicje

Algebra nad \mathbb{R} oznaczana przez \mathbb{H} z bazą $1, i, j, k$ spełniająca relacje

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j,$$

nazywa się algebrą *kwaternionów*. Jest wyposażona w $*$ działającą jako

$$1^* = 1, \quad i^* = -i, \quad j^* = -j, \quad k^* = -k.$$

$*$ jest *inwolucją*: $x^{**} = x$, $(xy)^* = y^*x^*$, $x, y \in \mathbb{H}$.

Dla $x \in \mathbb{H}$ kładziemy

$$\text{Re}x := \frac{1}{2}(x + x^*), \quad |x| := \sqrt{x^*x}.$$

(Zauważmy, że x^*x jest zawsze dodatnie rzeczywiste)

Jeśli $x = x_1 + x_i i + x_j j + x_k k$, gdzie $x_1, x_i, x_j, x_k \in \mathbb{R}$, to

$$\text{Re}x = x_1, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_i^2 + x_j^2 + x_k^2}.$$

Zauważmy, że $|\cdot|$ jest normą na \mathbb{H} . Jeśli $x, y \in \mathbb{H}$, to $|xy| = |x||y|$.

\mathbb{H} posiada kwaternionowy iloczyn skalarny x^*y i rzeczywisty iloczyn skalarny

$$\langle x|y \rangle := \text{Re}x^*y = x_1y_1 + x_iy_i + x_jy_j + x_ky_k, \quad x, y \in \mathbb{H}.$$

\mathbb{H} ma tę własność, że wszystkie niezerowe elementy są odwracalne. Algebry z tą własnością są zwane *algebrami z dzieleniem*.

Kwaterniony jednostkowe, czyli $\{x \in \mathbb{H} : |x| = 1\}$ tworzą grupę izomorficzną z $SU(2)$. Grupa automorfizmów kwaternionów jest izomorficzna z $SO(3)$. Każdy automorfizm jest postaci

$$\mathbb{H} \ni x \mapsto uxu^{-1} \in \mathbb{H}, \quad (9.32)$$

gdzie u jest jednostkowym kwaternionem.

9.2 Zanurzanie liczb zespolonych w kwaternionach

Oczywiście, istnieje dokładnie jeden ciągły injektywny homomorfizm $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$. Jego obrazem jest centrum algebry \mathbb{H} , które identyfikujemy z \mathbb{R} .

Ale istnieje wiele ciągłych injektywnych homomorfizmów $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$. Aby go ustalić, trzeba wybrać $i \in \mathbb{C}$ w \mathbb{H} . Też go nazywamy i .

Ustalmy homomorfizm $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$. \mathbb{H} staje się przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{C} o wymiarze 2. Odwzorowanie

$$\mathbb{H} \ni x \mapsto \frac{1}{2}(x - izi) \in \mathbb{C} \quad (9.33)$$

jest rzutem. \mathbb{H} ma zespolony półtoraliniowy iloczyn skalarny

$$(x|y) := \frac{1}{2}(yx^* - iyx^*i) \quad (9.34)$$

(W rzeczy samej, na mocy (9.33), wartości tego iloczynu skalarnego są w \mathbb{C} . Rachunek

$$\begin{aligned} (x|zy) &= \frac{1}{2}(zyx^* - izyx^*i) = z(x|y), \\ (zx|y) &= \frac{1}{2}(yx^*\bar{z} - iyx^*\bar{z}i) = (x|y)\bar{z}, \quad z \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

pokazuje, że (9.33) jest półtoraliniowy.

$1, j$ jest przykładem bazy ortonormalnej w \mathbb{H} ze względu na (9.34).

9.3 Macierzowa reprezentacja kwaternionów

Kwaterniony mogą być reprezentowane przez macierze Pauliego pomnożone przez i :

$$\pi(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \pi(i) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \pi(j) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pi(k) = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

W ten sposób dostajemy reprezentację kwaternionów w przestrzeni Hilberta \mathbb{C}^2

$$\pi : \mathbb{H} \rightarrow B(\mathbb{C}^2). \quad (9.35)$$

W tej reprezentacji,

$$\pi(x^*) = \pi(x)^*, \quad |x| = \sqrt{\det \pi(x)}. \quad (9.36)$$

Mamy

$$\pi(\mathbb{H}) = \{\lambda U : U \in SU(2), \lambda \in [0, \infty[\}.$$

Inną użyteczną relacją, która zależy od powyższej reprezentacji jest

$$\pi(\mathbb{H}) = \{A \in B(\mathbb{C}^2) : A = R\bar{A}R^{-1}\}, \quad (9.37)$$

gdzie \bar{A} oznacza zwykłe zespolone sprzężenie macierzy A i $R = \pi(j)$. Zauważmy, że $R\bar{R} = -\mathbb{1}$.

Zastępując (9.35) przez $W\pi(\cdot)W^*$ dla jakiegoś unitarnego W , zastępujemy R przez $R_W := WR\bar{W}^*$. Zauważmy, że mamy też $R_W\bar{R}_W = -\mathbb{1}$.

Jeśli $A \in L(\mathbb{H}^n)$, to możemy zdefiniować *wyznacznik kwaternionowy* jako

$$\det A := \det \pi(A),$$

gdzie z prawej strony mamy zwykły wyznacznik (w sensie macierzy zespolonej). Zauważmy, że $\det AB = \det A \det B$. $\det A$ nie zależy od zanurzenia \mathbb{C} w \mathbb{H} i ma zawsze wartość rzeczywistą ≥ 0 .

9.4 Rzeczywiste proste algebry

Dobrze wiadomo, że można sklasyfikować wszystkie skończenie wymiarowe algebry nad \mathbb{C} i \mathbb{R} . Przypadek zespolony jest szczególnie łatwy:

Twierdzenie 9.1 *Niech \mathfrak{A} będzie zespoloną skończenie wymiarową algebrą prostą. Wtedy istnieje $n \in \mathbb{N}$ taki, że \mathfrak{A} jest izomorficzny do $L(\mathbb{C}^n)$.*

Odpowiadająca temu klasyfikacja rzeczywista jest bardziej skomplikowana:

Twierdzenie 9.2 *Niech \mathfrak{A} będzie rzeczywistą skończenie wymiarową algebrą prostą. Wtedy istnieje $n \in \mathbb{N}$ taki, że \mathfrak{A} jest izomorficzna z $L(\mathbb{C}^n)$, $L(\mathbb{R}^n)$ lub $L(\mathbb{H}^n)$.*

W szczególności, można zanurzyć $L(\mathbb{R}^n)$ w $L(\mathbb{C}^n)$:

$$L(\mathbb{R}^n) = \{A \in L(\mathbb{C}^n) : A = \bar{A}\}.$$

$L(\mathbb{H}^n)$ można zanurzyć w $L^2(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^n)$. wtedy

$$L(\mathbb{H}^n) = \{A \in L(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^n) : RA = \bar{A}R\},$$

gdzie $R = \pi(j) \otimes \mathbb{1}$.

9.5 Kwaternionowe przestrzenie wektorowe

Mówimy, że $(\mathcal{V}, +, 0, -)$ jest *kwaternionową przestrzenią wektorową*, gdy jest to grupa abelowa wyposażona w działania

$$\mathbb{H} \times \mathcal{V} \ni (x, v) \mapsto xv \in \mathcal{V}, \quad \mathcal{V} \times \mathbb{H} \ni (v, x) \mapsto vx \in \mathcal{V},$$

takie, że

$$(x + y)v = xv + yv, \quad (xy)v = x(yv), \quad x, y \in \mathbb{H}, \quad v \in \mathcal{V}.$$

$$v(x + y) = vx + vy, \quad v(xy) = (vx)y, \quad x, y \in \mathbb{H}, \quad v \in \mathcal{V}.$$

Przykładem kwaternionowych przestrzeni są \mathbb{H}^n . Kwaternionowe przestrzenie wektorowe izomorficzne z \mathbb{H}^n nazywamy *przestrzeniami wymiaru n*

Transformacje \mathbb{H} -liniowe z prawej/z lewej na kwaternionowej przestrzeni wektorowej mają oczywistą definicję. Zbiór transformacji \mathbb{H} -liniowych z prawej z \mathcal{V} do \mathcal{W} oznaczamy przez $L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Jak zwykle $L(\mathcal{V}) := L(\mathcal{V}, \mathcal{V})$.

Transformacje z $L(\mathbb{H}^n, \mathbb{H}^m)$ można w oczywisty sposób reprezentować macierzami $m \times n$ o elementach kwaternionowych.

Niech \mathcal{V} będzie kwaternionową przestrzenią wektorową. \mathbb{R} -liniowe odwzorowanie

$$\mathcal{V} \ni v \mapsto f(v) \in \mathbb{H}$$

jest antyliniowe z prawej/z lewej gdy

$$f(v\lambda) = f(v)\lambda^* / f(\lambda w) = \lambda^* f(w), \quad v \in \mathcal{V}, \quad \lambda \in \mathbb{H}.$$

Mówimy, że

$$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \ni (v, w) \mapsto (v|w) \in \mathbb{H}$$

jest *kwaternionową formą hermitowską* jeśli jest ono anty-liniowe z prawej ze względu na pierwszy argument i liniowe ze względu na drugi argument i

$$(v|w) = (w|v)^* \tag{9.38}$$

Jeśli zamiast (9.38) mamy

$$(v|w) = -(w|v)^* \tag{9.39}$$

Mówimy, że jest ona *antyhermitowska*.

Formę hermitowską spełniającą $(v|v) \geq 0$ nazywamy *dodatnio określoną*. Jeśli jest w dodatku niezdegenerowana, nazywamy ją *kwaternionowym iloczynem skalarnym*. Każda skończenie wymiarowa przestrzeń kwaternionowa z kwaternionowym iloczynem skalarnym jest izomorficzna z \mathbb{H}^n i

$$(v|w) := \sum v_i^* w_i, \quad v, w \in \mathbb{H}^n.$$

Jeśli ustalimy zanurzenie (9.33), wtedy kwaternionowe przestrzenie wektorowe można zreinterpretować jako zespolone przestrzenie wektorowe, zaś kwaternionowe przestrzenie Hilberta jako zespolone przestrzenie Hilberta

Jeśli \mathcal{V} jest kwaternionową przestrzenią wektorową, to $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ będzie oznaczało \mathcal{V} rozumianą jako zespoloną przestrzeń. Będzie ona zwana *zespoloną formą przestrzeni \mathcal{V}* .

10 Reprezentacje zespolone, rzeczywiste i kwaternionowe

10.1 Reprezentacja zespolenie sprzężona

Założmy, że mamy reprezentację π na przestrzeni \mathbb{C}^n . Reprezentację sprzężoną do π nazywamy reprezentacją $\bar{\pi}$ zadaną przez

$$\bar{\pi}(g) := \overline{\pi(g)}.$$

Niewątpliwie, definicja ta zależy od wyboru bazy. Zależność ta nie jest jednak zbyt istotna. Jeśli zmienimy bazę, dostaniemy reprezentację równoważną.

10.2 Przestrzeń zespolenie sprzężona

Można do zagadnienia reprezentacji sprzężonej podejść w bardziej abstrakcyjny sposób, który jest jawnie niezależny od bazy.

Niech \mathcal{V} będzie przestrzenią zespoloną. *Przestrzeń zespolenie sprzężona do \mathcal{V}* jest oznaczona przez $\bar{\mathcal{V}}$ i jest to jakakolwiek ustalona przestrzeń zespolona wyposażona w odwzorowanie antyliniowe

$$\mathcal{V} \ni v \mapsto \bar{v} \in \bar{\mathcal{V}}. \quad (10.40)$$

Odwzorowanie odwrotne również oznaczamy przez kreskę, tak że mamy $\bar{\bar{v}} = v$. Odwzorowanie (10.40) nazywamy *sprzężeniem zespolonym*.

Jeśli $A \in L(\mathcal{V})$, to $\bar{A} \in L(\bar{\mathcal{V}})$ jest zdefiniowany przez

$$\bar{A} := \overline{A\bar{v}} \quad (10.41)$$

Jeśli \mathcal{V} ma iloczyn skalarny, to $\bar{\mathcal{V}}$ też:

$$(\bar{v}|\bar{w}) := \overline{(v|w)}.$$

W praktyce, przestrzeń $\bar{\mathcal{V}}$ realizujemy na różne sposoby. Kanonicznym sposobem jest konstrukcja następująca. Jako grupa abelowa $\bar{\mathcal{V}}$ pokrywa się z \mathcal{V} . Odwzorowanie identycznościowe jest oznaczone przez

$$\mathcal{V} \ni v \mapsto \bar{v} \in \bar{\mathcal{V}}. \quad (10.42)$$

Jedyną różnicą między \mathcal{V} i $\bar{\mathcal{V}}$ to mnożenie przez $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\overline{\lambda v} := \bar{\lambda} \bar{v}.$$

Powyższa konstrukcja jest dość abstrakcyjna i dlatego w praktyce nie jest zbyt często używana. Często wolimy bardziej konkretne podejście. W podejściu tym punktem wyjściowym jest odwzorowanie antyliniowe κ na \mathcal{V} spełniające $\kappa^2 = \mathbb{1}$. Takie odwzorowanie nazywamy *sprzężeniem zespolonym wewnętrznym*. Wtedy $\bar{\mathcal{V}}$ i \mathcal{V} pokrywają się jako przestrzenie zespolone, natomiast \bar{v} utożsamiamy z κv .

W szczególności, założmy, że $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$. Wtedy mamy oczywiste sprzężenie zespolone, $\bar{v} := \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$. Jeśli operator na \mathbb{C}^n reprezentujemy macierzą, to sprzężenie zespolone w sensie (10.41) daje macierz zespolenie sprzężoną w naiwnym sensie.

Jeśli (π, \mathcal{V}) jest reprezentacją grupy G , to *reprezentacją sprzężoną* nazywamy reprezentację $(\bar{\pi}, \bar{\mathcal{V}})$

$$\bar{\pi}(g) := \overline{\pi(g)}.$$

10.3 Reprezentacje zespolone

Jak dotychczas, G jest grupą skończoną a \mathcal{V} zespoloną przestrzenią Hilberta.

Mówimy, że κ jest operatorem antyunitarnym, jeżeli jest antyliniowy, odwracalny i

$$\overline{(v|w)} = (\kappa v|\kappa w).$$

Oczywiście, jeśli $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$, to operatory antyunitarne pokrywają się z operatorami postaci $\kappa v = U\bar{v}$, gdzie U jest unitarny.

Niech $\pi : G \rightarrow \mathcal{V}$ będzie unitarną reprezentacją nieprzywiedlną. Mówimy, że jest ona zespolona, jeśli reprezentacja $\bar{\pi}$ nie jest unitarnie równoważna reprezentacji π . Równoważna definicja: nie istnieje operator antyunitarny κ taki, że $g \mapsto \kappa\pi(g)\kappa^{-1}$ jest równoważna z π .

Załóżmy, że π nie jest zespolona. Niech κ będzie operatorem antyunitarnym takim, że $\kappa\pi\kappa^{-1} \sim \pi$. Wtedy κ^2 jest unitarny i splata π z sobą. Zatem z Lematu Schura, $\kappa^2 = e^{i\alpha}\mathbb{1}$. Mamy

$$e^{-i\alpha}\kappa = \kappa e^{i\alpha} = \kappa^3 = e^{i\alpha}\kappa.$$

Zatem $e^{2i\alpha} = 1$. Mówimy, że π jest rzeczywista, jeśli $\kappa^2 = \mathbb{1}$ i kwaternionowa, jeśli $\kappa^2 = -\mathbb{1}$.

Jeśli reprezentacja jest rzeczywista, reprezentację można obciąć do przestrzeni $\mathcal{V}^\kappa := \{v \in \mathcal{V} : \kappa v = v\}$ dostając reprezentację nieprzywiedlną na rzeczywistej przestrzeni. Jeśli reprezentacja jest kwaternionowa lub zespolona, nie posiada żadnej nietrywialnej rzeczywistej podprzestrzeni niezmienniczej.

Jeśli reprezentacja jest kwaternionowa, możemy nadać przestrzeni strukturę prawej przestrzeni kwaternionowej kładąc $j := \kappa$ i $k := i\kappa$. Dostajemy reprezentację na przestrzeni kwaternionowej. Jest to niemożliwe w przypadku rzeczywistym i zespolonym.

Twierdzenie 10.1 (Twierdzenie Frobeniusa i Schura) *Niech π będzie reprezentacją nieprzywiedlną grupy skończonej G . Wtedy*

$$\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \chi_\pi(g^2) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \pi \text{ jest rzeczywiste,} \\ 0 & \text{jeśli } \pi \text{ jest zespolone,} \\ -1 & \text{jeśli } \pi \text{ jest kwaternionowe.} \end{cases}$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \chi_\pi(g^2) &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sum_{i=1}^{d_\pi} \pi_{ii}(g^2) \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sum_{i,j=1}^{d_\pi} \pi_{ij}(g)\pi_{ji}(g) \\ &= \sum_{i,j=1}^{d_\pi} (\bar{\pi}_{ij}|\pi_{ji}). \end{aligned} \tag{10.43}$$

Dla zespolonej reprezentacji jest to równe zero z relacji ortogonalności.

W przypadku rzeczywistym bądź kwaternionowym niech $[r_{ij}]$ będzie unitarną macierzą transformacji κ . Wtedy

$$(\kappa v)_i = \sum_{j=1}^{d_\pi} r_{ij} \bar{v}_j, \quad (\kappa^{-1} v)_i = \sum_{j=1}^{d_\pi} r_{ji} \bar{v}_j,$$

$$\pi_{ij} = \sum_{p,q=1}^{d_\pi} r_{ip} \bar{\pi}_{pq} \bar{r}_{jq}.$$

Zatem, (10.43) jest równe

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j,p,q=1}^{d_\pi} r_{jp} \bar{r}_{iq} (\bar{\pi}_{ij} | \bar{\pi}_{pq}) \\ &= \frac{1}{d_\pi} \sum_{i,j,p,q=1}^{d_\pi} r_{jp} \bar{r}_{iq} \delta_{ip} \delta_{jq} = \frac{1}{d_\pi} \sum_{i,j=1}^{d_\pi} r_{ji} \bar{r}_{ij} = \frac{\text{Tr} \kappa^2}{d_\pi} = \pm 1. \end{aligned}$$

□

Dla grupy \mathbb{Z}_n wszystkie reprezentacje są zespolone z wyjątkiem reprezentacji odpowiadającej 0 oraz $n/2$ jeśli n jest parzyste.

Reprezentacja grupy kwaternionowej $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, w \mathbb{C}^2 jest kwaternionowa.

10.4 Splatacze w iloczynach tensorowych

Niech $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi. Jeśli $A \in L(\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2, \mathbb{K})$, możemy zdefiniować $A_{1 \rightarrow 2} \in L(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2^\#)$ spełniający

$$A v_1 \otimes v_2 = \langle v_2 | A_{1 \rightarrow 2} v_1 \rangle, \quad v_1 \in \mathcal{V}_1, \quad v_2 \in \mathcal{V}_2.$$

Załóżmy, że (π_i, \mathcal{V}_i) , $i = 1, 2$ są reprezentacjami grupy G . Jeśli A splata $\pi_1 \otimes \pi_2$ z reprezentacją trywialną, to $A_{1 \rightarrow 2}$ splata π_1 z reprezentacją π_2^{ct} , (Reprezentacja kontrgradientna względem reprezentacji ρ jest zdefiniowana przez $\rho^{\text{ct}}(g) = \rho(g)^{-1\#}$.)

Rozważmy na przykład $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}$, $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}^\#$. Wtedy mamy naturalny element $\text{Tr} \in L(\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^\#, \mathbb{K})$. Używając notacji powyższej mamy wtedy

$$\text{Tr}_{1 \rightarrow 2} = \mathbb{1}_{\mathcal{V}} \in L(\mathcal{V}, \mathcal{V}).$$

Drugi Lemat Schura mówi wtedy, że jeśli π jest nieprzywiedlna to operatory splatające $\pi \otimes \pi^{\text{ct}}$ z reprezentacją trywialną są proporcjonalne do Tr .

11 Elementy krystalografii

11.1 Grupy punktowe

Grupą punktową nazywamy skończoną podgrupę $O(n)$. Mówimy, że jest ona chiralna, jeśli jest podgrupą $SO(n)$.

Poniżej klasyfikujemy grupy punktowe w wymiarze 2 i 3 z dokładnością do sprzężenia.

W wymiarze 2 mamy

- (1) grupy cykliczne C_n , $n = 1, 2, \dots$ (chiralne) abstrakcyjnie izomorficzne z \mathbb{Z}_n ,
- (2) dihedralne D_n , $n = 1, 2, \dots$, abstrakcyjnie izomorficzne z $\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$. (\mathbb{Z}_2 jest generowane przez symetrię osiową wokół dowolnie wybranej osi).

W wymiarze 3 mamy 7 serii grup punktowych i 7 grup punktowych dodatkowych.

Każda z grup 7 serii posiada maksymalną podgrupę obrotów względem ustalonej osi C_n . Jest to podgrupa normalna. Po podzieleniu grupy przez C_n dostajemy skończoną grupę ilorazową. Tą grupą może być C_1 , D_{1v} , D_{1h} , C_2 i D_2 . Dostajemy zatem 5 rodzin serii. W obrębie każdej rodziny jedna seria to iloczyn pólproste.

D_{1v} oznacza grupę D_1 wertykalną, generowaną przez odbicie względem płaszczyzny prostopadłej do płaszczyzny obrotu. D_{1h} oznacza grupę D_1 horyzontalną, generowaną przez odbicie względem płaszczyzny obrotu.

Serie grup punktowych są analogiczne do 7 grup fryzowych, w których rolę C_n odgrywa \mathbb{Z} .

- (1) C_1 (chiralna)

- grupa cykliczna C_n , $n = 1, 2, \dots$, abstrakcyjnie izomorficzna z \mathbb{Z}_n ,

- (2) D_{1h}

- $C_{nh} = C_n \times D_{1h}$, $n = 1, 2, \dots$, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$.
- S_{2n} , $n = 1, 2, \dots$, grupa generowana przez obrót z odbiciem, abstrakcyjnie izomorficzna z \mathbb{Z}_{2n} ,

- (3) D_{1v}

- grupa piramidalna lub biradialna $C_{nv} = C_n \times D_{1v}$, $n = 2, 3, \dots$, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$,

- (4) C_2 (chiralna)

- grupa dihedralna $D_n = C_n \times C_2$, $n = 2, 3, \dots$, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$

- (5) D_2

- grupa pryzmatyczna $D_{nh} = C_n \times D_2 \simeq D_n \times D_{1h}$, $n = 2, 3, \dots$, abstrakcyjnie izomorficzna z $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2$.
- grupa antypryzmatyczna $D_{nd} = S_{2n} \times D_{1v}$, $n = 2, 3, \dots$, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z}_{2n} \times \mathbb{Z}_2$.

Na szczególną uwagę zasługują następujące grupy punktowe:

S_2 jest grupą składającą się z identyczności i symetrii środkowej (inwersji). Bywa czasem oznaczana C_i .

S_{4n+2} jest generowana przez C_{2n+1} i symetrię środkową. Bywa oznaczana przez $C_{2n+1,i}$

$C_{1h}(= C_{1v} = D_1)$ jest grupą składającą się z identyczności i obrotu o 180° . Bywa czasem oznaczana C_s .

$C_{2h}(= D_{1d})$, izomorficzna z $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Zawiera odbicie, obrót o 180° w osi prostopadłej i inwersję.

$C_{2v}(= D_{1h})$, izomorficzna z $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Zawiera 2 odbicia w dwóch prostopadłych płaszczyznach i obrót o 180° .

D_{2h} , izomorficzna z $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, generowana przez odbicia w 3 prostopadłych płaszczyznach

Oprócz tego mamy 7 dodatkowych grup punktowych:

- (1) chiralna grupa tetraedralna T , izomorficzna z A_4 ,
- (2) pełna grupa tetraedralna T_d , izomorficzna z S_4 ,
- (3) grupa pirytoedralna $T_h = T \times S_2$, izomorficzna z $A_4 \times \mathbb{Z}_2$,
- (4) chiralna grupa oktaedralna O , izomorficzna z S_4
- (5) pełna grupa oktaedralna $O_h = O \times S_2$, izomorficzna z $S_4 \times \mathbb{Z}_2$
- (6) chiralna grupa ikosaedralna I , izomorficzna z A_5
- (7) pełna grupa ikosaedralna $I_h \simeq I \times S_2$, izomorficzna z $A_5 \times \mathbb{Z}_2$

T jest podgrupą O .

T_d i T_h są podgrupami O_h .

11.2 Sieci

Siecią nazywamy dyskretną podgrupę \mathbb{R}^n . Jeśli dla sieci \mathcal{L} istnieje zwarty podzbiór $K \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $\mathcal{L} + K = \mathbb{R}^n$, to mówimy, że jest to sieć krystalograficzna.

Twierdzenie 11.1 *Niech \mathcal{L} będzie siecią w \mathbb{R}^n . Wtedy istnieją liniowo niezależne wektory e_1, \dots, e_d , $d \leq n$, takie, że $\mathcal{L} = \{m_1 e_1 + \dots + m_d e_d : (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{Z}^d\}$. Sieć jest krystalograficzna wtedy i tylko wtedy gdy $d = n$.*

Grupa automorfizmów sieci \mathbb{Z}^d jest izomorficzna z $GL(\mathbb{Z}^d)$, czyli macierzami o elementach całkowitych i wyznaczniku ± 1 . Jest to oczywiście – macierz musi być odwracalna, mieć wyznacznik całkowitoliczbowy i jej odwrotność musi być macierzą tego samego typu.

W szczególności, $SL(\mathbb{Z}^d)$ jest podgrupą w $GL(\mathbb{Z}^d)$ o indeksie 2.

11.3 Grupa ruchów euklidesowych

W grupie ruchów euklidesowych $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$ wyróżniamy podgrupę translacji \mathbb{R}^n i podgrupę obrotów niewłaściwych $O(n)$. Mamy kanoniczny homomorfizm $\phi : \mathbb{R}^n \rtimes O(n) \rightarrow O(n)$. Czyli mamy krótki ciąg dokładny

$$\{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \rtimes O(n) \rightarrow O(n) \rightarrow \{1\}$$

Niech G będzie podgrupą w $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$. Wtedy $\phi(G) =: H$ jest podgrupą w $O(n)$. Jądro homomorfizmu kanonicznego ϕ obciętego do G , czyli podgrupa translacji zawartych w G , jest równa $\mathcal{L} := \mathbb{R}^n \cap G$. Mamy krótki ciąg dokładny

$$\{0\} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow \{1\}. \quad (11.44)$$

Stwierdzenie 11.2 Dla $h \in H$ i $\phi(g) = h$, wzór

$$\mathcal{L} \ni t \mapsto ht := gtg^{-1} \in \mathcal{L}.$$

definiuje działanie grupy H działa przez automorfizmy na \mathcal{L} .

Dowód. Wystarczy pokazać jednoznaczność definicji. Niech $\phi(g_1) = \phi(g_2)$. Wtedy $g_2^{-1}g_1 \in \mathcal{L}$. Z abelowości \mathcal{L} wynika

$$g_2^{-1}g_1t = tg_2^{-1}g_1.$$

Zatem $g_1tg_1^{-1} = g_2tg_2^{-1}$. \square

Jeśli $G = \mathcal{L} \rtimes H$, mówimy, że G jest symmorficzna.

11.4 Grupy fryzowe

Grupą fryzową nazywamy dyskretną podgrupę grupy $\mathbb{R}^2 \rtimes O(2)$, której podgrupa translacji jest izomorficzna z \mathbb{Z} . Iloraz grupy fryzowej przez jej podgrupę translacji jest skończoną podgrupą grupy obrotów. Działa ona na jednowymiarową sieć $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$. Latwo widzieć, że mamy dokładnie pięć podgrup $O(2)$, które zachowują \mathbb{Z} : C_1 , D_{1h} (horyzontalna, działająca na \mathbb{Z} trywialnie), D_{1v} (wertykalna, działająca na \mathbb{Z} przez odbicia), C_2 i D_2 . Odpowiada im pięć symmorficznych grup fryzowych. Oprócz tego istnieją jeszcze dwie niesymmorficzne grupy fryzowe:

(1) C_1

- “hop” C_∞ , abstrakcyjnie izomorficzna z \mathbb{Z} ,

(2) D_{1h}

- “jump” $C_{\infty h} = C_\infty \times D_{1h}$, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$,
- “step” S_∞ , grupa generowana przez translację z poślizgiem, abstrakcyjnie izomorficzna z \mathbb{Z} ,

(3) D_{1v}

- “sidle” $C_{\infty v} = C_\infty \rtimes D_{1v}$, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$,

(4) C_2

- “spinning hop” $D_\infty = C_\infty \rtimes C_2$, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$,

(5) D_2

- “spinning jump” $D_{\infty h} = C_\infty \rtimes D_2$, abstrakcyjnie izomorficzna z $(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2$,
- “spinning sidle” $D_{\infty d}$, abstrakcyjnie izomorficzna z $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$.

Każda grupa fryzowa jest odpowiednikiem jednej serii grup punktowych w 3 wymiarach.

11.5 Punktowe grupy krystalograficzne

Mówimy, że grupa punktowa jest krystalograficzna, jeśli istnieje sieć krystalograficzna niezmiennicza względem tej grupy. Twierdzenie o ograniczeniu krystalograficznym mówi, że punktowe grupy krystalograficzne w wymiarze 2 i 3 to te grupy punktowe, które posiadają osie 1,2,3,4 lub 6-krotne.

W wymiarze 2 mamy 10 punktowych grup krystalograficznych:

- (1) $C_1, C_2, C_3, C_4, C_6,$
- (2) $D_1, D_2, D_3, D_4, D_6.$

W wymiarze 3 mamy 32 punktowych grup krystalograficznych:

$$\begin{array}{cccccc}
 C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_6, \\
 C_{1h} & C_{2h} & C_{3h} & C_{4h} & C_{6h} \\
 & S_2 & & S_4 & S_6 \\
 & C_{2v} & C_{3v} & C_{4v} & C_{6v} \\
 & D_2 & D_3 & D_4 & D_6 \\
 & D_{2h} & D_{3h} & D_{4h} & D_{6h} \\
 & & & D_{2d} & D_{3d},
 \end{array}$$

$$T, T_d, T_h, O, O_h.$$

11.6 Sieci Bravais'go

Każda sieć krystalograficzna $\mathcal{L} \simeq \mathbb{Z}^n$ w przestrzeni euklidesowej w \mathbb{R}^n wyznacza grupę punktową $H \subset O(n)$, która ją zachowuje, jej maksymalną grupę symetrii. Nie każda grupa punktowa jest maksymalną grupą symetrii pewnej sieci: w szczególności musi zawierać ona inwersję. Sieci posiadające tę samą grupę należą do tego samego *systemu sieciowego*.

Grupa symetrii sieci na nią działa. Rozważmy dwie sieci posiadające takie same maksymalne grupy symetrii. Mówimy, że mają one izomorficzne działania grupy symetrii, jeśli jedno działanie możemy przekształcić na drugie przez zamianę bazy w sieci. Każda zamiana bazy jest zadana przez macierz z $GL(\mathbb{Z}^n)$. Klasę abstrakcji względem izomorficzności działania nazywamy siecią Bravais'go.

W wymiarze 2 mamy 5 systemów Bravais'go zgrupowanych w 4 systemy:

- (1) sieć skośna C_2 ,
- (2) system prostokątny D_2
 - (i) sieć prostokątna (prostokątna prosta),
 - (ii) sieć rombowa (prostokątna centrowana),
- (3) sieć kwadratowa D_4 ,
- (4) sieć heksagonalna D_6 .

W szczególności, rozważmy grupę D_2 . Jest ona generowana przez dwie prostopadłe do siebie odbicia

$$r_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (11.45)$$

W sieci prostokątnej możemy wybrać bazę w $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, tak że r_1, r_2 są zadane poprzez (11.45).

W sieci rombowej, bazę wybierzmy jako $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Wtedy działanie D_2 jest zadane przez

$$r_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11.46)$$

W wymiarze 3 mamy 14 sieci Bravais'go zgrupowanych w 7 systemów. Litery oznaczają rodzaj centrowania.

- (1) trójskośna S_2 ,
- (2) jednoskośna C_{2h} ,
 - (i) P
 - (ii) C
- (3) rombowa (ortorombiczna) D_{2h} ,
 - (i) P,
 - (ii) C,
 - (iii) I,
 - (iv) F,
- (4) tetragonalna D_{4h} ,
 - (i) P,
 - (ii) I,
- (5) romboedralna (trygonalna) D_{3d}
- (6) heksagonalna D_{6h} .
- (7) regularna (kubiczna) O_h ,
 - (i) P,
 - (ii) I,
 - (iii) F,

11.7 Grupy krystalograficzne

Grupą krystalograficzną nazywamy dyskretną podgrupę grupy $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$, dla której istnieje zwarty zbiór $K \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $\bigcup_{g \in G} gK = \mathbb{R}^n$.

Można pokazać, że równoważną definicję: grupa krystalograficzna to podgrupa grupy $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$, której podgrupa translacji jest siecią krystalograficzną, i podgrupa ta ma skończony indeks.

Można rozważać kilka różnych pojęć równoważności grup krystalograficznych.

- (1) Mówimy, że dwie grupy krystalograficzne są sobie równoważne bez zachowania orientacji, gdy istnieje macierz w $GL(n)$ względem której te grupy są sprzężone.
- (2) Mówimy, że z zachowaniem orientacji, gdy istnieje macierz w $GL(n)$ o dodatnim wyznaczniku, względem której te grupy są sprzężone.

Możemy klasyfikować grupy krystalograficzne ze względu na

- (1) Grupę obrotów będącą grupą ilorazową przez podgrupę translacji.
- (2) Sieć Bravais'go.

11.8 Grupy tapetowe

Grupy krystalograficzne w wymiarze 2 zwane są tapetowymi. Na poniższej liście podajemy postać grupy w przypadkach symmorficznych. Grupa obrotów determinuje sieć Bravais'go. Równoważność z zachowaniem i bez zachowania orientacji w wymiarze 2 się pokrywają.

(1) system skośny,

(i) grupa punktowa C_1

- $p1 = \mathbb{Z}^2$,

(ii) grupa punktowa C_2

- $p2 = \mathbb{Z}^2 \rtimes C_2$,

(2) system prostokątny,

(i) grupa punktowa D_1 ,

- sieć prostokątna: $pm = \mathbb{Z}_{\text{rect}}^2 \rtimes D_1$, pg ,
- sieć rombowa: $cm = \mathbb{Z}_{\text{romb}}^2 \rtimes D_1$,

(i) grupa punktowa D_2

- sieć prostokątna, $pmm = \mathbb{Z}_{\text{rect}}^2 \rtimes D_2$, pmg , pgg ,
- sieć rombowa, $cmm = \mathbb{Z}_{\text{romb}}^2 \rtimes D_2$,

(3) system regularny,

(i) grupa punktowa C_4

- $p4 = \mathbb{Z}_{\text{reg}}^2 \rtimes C_4$,

(ii) grupa punktowa D_4

- $p4m = \mathbb{Z}_{\text{reg}}^2 \rtimes D_4$, $p4g$,

(4) system heksagonalny,

(i) grupa punktowa C_3

- $p3 = \mathbb{Z}_{\text{hex}}^2 \rtimes C_3$,

(ii) grupa punktowa D_3

- $p3m1 = \mathbb{Z}_{\text{hex}}^2 \rtimes D_3$, $p31m$,

(iii) grupa punktowa C_6

- $p6 = \mathbb{Z}_{\text{hex}}^2 \rtimes C_6$,

(iv) grupa punktowa D_6

- $p6m = \mathbb{Z}_{\text{hex}}^2 \rtimes D_6$,

11.9 Grupy przestrzenne

Grupy krystalograficzne w wymiarze 3 zwane są przestrzennymi. Jeśli dopuścimy równoważność zmieniającą orientację, to jest ich 219, w tym 54 chiralnych. Jeśli rozróżniamy orientację, to jest ich 230, w tym 65 chiralnych.

Grupy te są poklasyfikowane na klasy krystaliczne zgodnie z ich grupami punktowymi. Klasy te są pogrupowane w systemy krystaliczne.

W większości wypadków, przynależność do systemu krystalicznego determinuje system sieciowy Bravais'go, o tej samej nazwie. Wyjątkiem jest system trygonalny, w której każdej grupie punktowej odpowiadają zarówno grupy krystalograficzne z siecią romboedryczną, jak i z siecią heksagonalną.

(1) trójskośny

(i) C_1 : P,

(ii) S_2 : P,

(2) jednoskośny

(i) C_2 : P, C,

(ii) C_{1h} : P, C,

(iii) C_{2h} : P, C,

(3) rombowy (ortorombiczny)

(i) D_2 : P, C, F, I,

(ii) C_{2v} : P, C, A, F, I,

(iii) D_{2h} : P, C, F, I,

(4) tetragonalny

(i) C_4 : P, I,

(ii) S_4 : P, I,

(iii) C_{4h} : P, I,

(iv) D_4 : P, I,

(v) C_{4v} : P, I,

(vi) D_{2d} : P, I,

(vii) D_{4h} : P, I,

(5) trygonalny

(i) C_3 : P, R,

(ii) S_6 : P, R,

(iii) D_3 : P, R,

(iv) C_{3v} : P, R,

(v) D_{3d} : P, R, :

(6) heksagonalny

- (i) C_6 : P,
 - (ii) C_{3h} : P,
 - (iii) C_{6h} : P,
 - (iv) D_6 : P,
 - (v) C_{6v} : P,
 - (vi) D_{3h} : P,
 - (vii) D_{6h} , P,
- (7) regularny (kubiczny)
- (i) O_h : P, F, I,
 - (ii) T : P, F, I,
 - (iii) T_h : P, F, I,
 - (iv) O : P, F, I,
 - (v) T_d : P, F, I,
 - (vi) O_h : P, F, I.

Nazwa systemu krystalicznego pokrywa się z nazwą systemu sieci Bravais'go, z wyjątkiem systemu trygonalnego. W tym systemie, grupy oznaczone przez P odpowiadają heksagonalnej sieci Bravais'go, zaś oznaczone przez R odpowiadają trygonalnej sieci Bravais'go.

12 Macierzowe algebry Liego

12.1 Rozmaitości zanurzone

Mówimy, że $M \subset \mathbb{R}^n$ jest *powierzchnią (=rozmaitością) zanurzoną w \mathbb{R}^n* wymiaru k jeśli lokalnie jest ona miejscem zerowym rzeczywistych funkcji gładkich f_1, \dots, f_{n-k} takich, że f'_1, \dots, f'_{n-k} są w każdym punkcie liniowo niezależne. Wtedy dla $m \in M$ przestrzeń $\text{Ker } f'_1(m) \cap \dots \cap \text{Ker } f'_{n-k}(m)$ nazywa się *przestrzenią styczną w punkcie m* i jest oznaczana przez $T_m M$.

Dla każdego wektora $X \in T_m M$ istnieje krzywa gładka $]-\epsilon, \epsilon[\ni t \mapsto \gamma(t) \in M$ taka, że $\gamma(0) = m$ i $\frac{d}{dt}\gamma(t)|_{t=0} = X$. I na odwrót, jeśli $]-\epsilon, \epsilon[\ni t \mapsto \gamma(t) \in M$ jest krzywą gładką (właściwie, wystarczy klasy C^1) taką, że $\gamma(0) = m$ to $\frac{d}{dt}\gamma(t)|_{t=0} \in T_m M$.

Nie każda rozmaitość zanurzona jest domknięta. Ale dla każdego punktu $m \in M$ istnieje $r > 0$ takie, że $M \cap K(m, r)^{\text{cl}}$ jest zbiorem domkniętym.

Pojęcie rozmaitości zanurzonej można uogólnić na przypadek zespolony. Aby nie mnożyć oznaczeń, będziemy używali tych samych liter co dla przypadku rzeczywistego, choć będziemy mieli na myśli inne obiekty.

Mówimy, że $M \subset \mathbb{C}^n$ jest *powierzchnią (=rozmaitością) (zespoloną) zanurzoną w \mathbb{C}^n* wymiaru k jeśli lokalnie jest ona miejscem zerowym funkcji holomorficznyc f_1, \dots, f_{n-k} takich, że f'_1, \dots, f'_{n-k} są w każdym punkcie liniowo niezależne. (Pochodne są rozumiane w sensie zespolonym). Wtedy dla $m \in M$ przestrzeń $\text{Ker } f'_1(m) \cap \dots \cap \text{Ker } f'_{n-k}(m)$ nazywa się *(zespoloną) przestrzenią styczną w punkcie m* i jest oznaczana przez $T_m M$.

Dla każdego wektora $X \in T_m M$ istnieje odwzorowanie holomorficzne ("krzywa zespolona") $\{t \in \mathbb{C} : |t| < \epsilon\} =: D(\epsilon) \ni t \mapsto \gamma(t) \in M$ takie, że $\gamma(0) = m$ i $\frac{d}{dt}\gamma(t)|_{t=0} = X$. I na odwrót, jeśli $D(\epsilon) \ni t \mapsto \gamma(t) \in M$ jest odwzorowaniem holomorficznym takim, że $\gamma(0) = m$ to $\frac{d}{dt}\gamma(t)|_{t=0} \in T_m M$.

12.2 Funkcje macierzowe

Rozważmy przestrzeń \mathbb{K}^n , gdzie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wprowadźmy w tej przestrzeni normę (jakąkolwiek). Mamy wtedy również normę na $L(\mathbb{K}^n)$. Spełnia one warunki

$$\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|, \quad \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Niech $z \mapsto f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ będzie funkcją holomorficzną zadaną przez szereg zbieżny w kole $|z| < R$. Pamiętajmy, że oznacza to, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| |z|^n$ jest zbieżny dla $|z| < R$.

Możemy wtedy dla $\|A\| < R$ zdefiniować funkcję macierzową

$$f(A) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n A^n.$$

Przykładami takich funkcji są

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n, \quad A \in L(\mathbb{C}^n)$$

$$\log(1 + A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} A^n, \quad \|A\| < 1.$$

Mamy tożsamości

$$e^{\log B} = B, \quad \|B - \mathbb{1}\| < 1.$$

$$AB = BA \Rightarrow e^A e^B = e^{A+B}.$$

12.3 Macierzowe algebry Liego

Niech \mathcal{V} będzie przestrzenią wektorową nad \mathbb{K} . Jak pamiętamy, $L(\mathcal{V})$ oznacza algebrę łączną odwzorowań liniowych na \mathcal{V} (wyposażoną w mnożenie operatorów). Przez $gl(\mathcal{V})$ oznaczamy $L(\mathcal{V})$, gdzie mnożenie zastępujemy przez komutator

$$[A, B] := AB - BA.$$

Mówimy, że $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ jest (konkretną) algebrą Liego, gdy jest to podprzestrzeń liniowa zamknięta ze względu na komutator. Jeśli \mathcal{W} jest przestrzenią wektorową, mówimy, że $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow gl(\mathcal{W})$ jest reprezentacją algebry Liego \mathfrak{g} , jeśli

$$[\pi(X), \pi(Y)] = \pi([X, Y]).$$

Przypomnijmy sobie, że $GL(\mathcal{V})$ oznacza grupę odwzorowań odwracalnych na \mathcal{V} . Mówimy, że $G \subset GL(\mathcal{V})$ jest konkretną grupą Liego, gdy jest to rozmaitość zanurzona w przestrzeni wektorowej $L(\mathcal{V})$, która jest jednocześnie podgrupą $GL(\mathcal{V})$.

Twierdzenie 12.1 *Niech \mathcal{V} będzie skończenie wymiarowa. Niech $G \subset L(\mathcal{V})$ będzie konkretną grupą Liego. Niech \mathfrak{g} oznacza $T_{\mathbb{1}}(G)$ (przestrzeń styczną do G w jedynce). Wtedy*

- (1) $X \in \mathfrak{g}$ implikuje $e^X \in G$.
- (2) $X, Y \in \mathfrak{g}$ implikuje $[X, Y] \in \mathfrak{g}$, czyli \mathfrak{g} jest konkretną algebrą Liego.
- (3) Niech $\pi : G \rightarrow GL(\mathcal{W})$ będzie gładką reprezentacją. Wtedy pochodna odwzorowania π w jedynce

$$\pi'(\mathbb{1}) : \mathfrak{g} \rightarrow gl(\mathcal{W}) = T_{\mathbb{1}}(GL(\mathcal{W}))$$

jest reprezentacją algebry Liego \mathfrak{g} .

Dowód. (1) Niech $X \in \mathfrak{g}$. Załóżmy najpierw, że $G \cap K(\mathbb{1}, R)^{\text{cl}}$ dla $R = 2\|e^X\|$ jest zbiorem domkniętym. Istnieje krzywa gładka $[0, 1] \ni t \mapsto g(t)$ taka, że $\left. \frac{d}{dt}g(t) \right|_{t=0} = X$. Mamy

$$g\left(\frac{1}{n}\right) = \mathbb{1} + \frac{X}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Zatem

$$g\left(\frac{1}{n}\right)^n = \left(\mathbb{1} + \frac{X}{n}\right)^n + O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow e^X.$$

Dla dostatecznie dużych n , $\|g\left(\frac{1}{n}\right)^n\| \leq 2\|e^X\|$. Zatem z domkniętości $G \cap K(\mathbb{1}, R)^{\text{cl}}$ wynika, że $e^X \in G$.

Jeśli $X \in \mathfrak{g}$ jest dowolne, to znajdziemy N takie, że możemy powtórzyć powyższe rozumowanie dla $\frac{1}{N}X$ i pokazać, że $e^{\frac{1}{N}X} \in G$. Ale $e^X = (e^{\frac{1}{N}X})^N$. Więc $e^X \in G$.

Aby pokazać (2), obliczamy

$$\begin{aligned}
& e^{tX} e^{tY} e^{-tX} e^{-tY} \\
&= \left(\mathbb{1} + tX + \frac{t^2}{2} X^2 \right) \left(\mathbb{1} + tY + \frac{t^2}{2} Y^2 \right) \left(\mathbb{1} - tX + \frac{t^2}{2} X^2 \right) \left(\mathbb{1} - tY + \frac{t^2}{2} Y^2 \right) + O(t^3) \\
&= \mathbb{1} + tX + tY - tX - tY + \frac{t^2}{2} X^2 + \frac{t^2}{2} Y^2 + \frac{t^2}{2} X^2 + \frac{t^2}{2} Y^2 \\
&\quad - t^2 X^2 - t^2 Y^2 + t^2 XY + t^2 XY - t^2 XY - t^2 YX + O(t^3) \\
&= \mathbb{1} + t^2 [X, Y] + O(t^3).
\end{aligned}$$

Zatem krzywa

$$[0, \infty[\ni s \mapsto \gamma(s) := e^{\sqrt{s}X} e^{\sqrt{s}Y} e^{-\sqrt{s}X} e^{-\sqrt{s}Y} \in G$$

jest różniczkowalna w zerze i $\left. \frac{d}{ds} \gamma(s) \right|_{s=0} = [X, Y]$. Więć $[X, Y] \in T_{\mathbb{1}}G = \mathfrak{g}$.

Aby dowieść (3) powtarzamy powyższe rachunki dostając

$$\begin{aligned}
& \pi(e^{tX} e^{tY} e^{-tX} e^{-tY}) \\
&= \pi(\mathbb{1}) + \pi'(\mathbb{1}) t^2 [X, Y] + O(t^3);
\end{aligned} \tag{12.47}$$

Zatem (12.47) jest równe

$$\begin{aligned}
& \pi(e^{tX}) \pi(e^{tY}) \pi(e^{-tX}) \pi(e^{-tY}) \\
&= \pi(\mathbb{1}) + t^2 [\pi'(\mathbb{1})X, \pi'(\mathbb{1})Y] + O(t^3).
\end{aligned}$$

Stąd,

$$\pi'(\mathbb{1})[X, Y] = [\pi'(\mathbb{1})X, \pi'(\mathbb{1})Y].$$

□

Mówimy, że $\mathfrak{g} := T_{\mathbb{1}}G$ jest *algebrą Liego grupy Liego* G .

Droga od algebry Liego do grupy Liego jest też możliwa ale trudniejsza.

Twierdzenie 12.2 *Niech $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego pewnej konkretnej grupy Liego $G \subset GL(\mathcal{V})$. Wtedy*

$$\mathfrak{g} \ni X \mapsto e^X \in G \tag{12.48}$$

jest dyfeomorfizmem otoczenia zera na otoczenie jedynek. W szczególności, $\exp(\mathfrak{g})$ jest spójny, otwarty w G i zawiera otoczenie $\mathbb{1} \in G$. $\exp(\mathfrak{g})$ nie musi być całą grupą G . Niemniej, grupa generowana przez $\exp(\mathfrak{g})$ jest całą spójną składową jedynek grupy G .

Dowód. Oczywiście jest, że (12.48) jest różniczkowalne. Odwzorowanie odwrotne jest zdefiniowane dla $\|g - \mathbb{1}\| < 1$ jako $g \mapsto \log g$. Zatem (12.48) jest dyfeomorfizmem w otoczeniu $0 \in \mathfrak{g}$.

□

12.4 Przemienne grupy i algebry Liego

Jednowymiarowe macierze postaci e^t i e^{it} , gdzie $t \in \mathbb{R}$ stanowią przemienne grupy Liego. Ich algebry Liego są izomorficzne z \mathbb{R} .

Jeśli $\mathfrak{g} \in gl(\mathcal{V})$ jest jakąkolwiek algebrą Liego, to $\exp(\mathfrak{g})$ nie musi być konkretną grupą Liego. Ilustruje poniższy przykład:

Rozważmy 1-wymiarową algebrę Liego w $gl(\mathbb{C}^2)$. rozpiętą na $X := \begin{bmatrix} i\alpha & 0 \\ 0 & i\beta \end{bmatrix}$, gdzie $\frac{\alpha}{\beta}$ jest niewymierne. Wtedy $\{e^{tX} : t \in \mathbb{R}\}$ jest gęsta w macierzach diagonalnych. Wynika to z tego, że $e^{i\frac{\beta}{\alpha}n}$ jest gęste w okręgu jednostkowym.

12.5 Algebra Liego macierzy bezśladowych

Niech $A \in L(\mathbb{K}^n)$. Wzór

$$\text{Tr} A := \sum_{i=1}^n A_{ii} \in \mathbb{K}$$

definiuje ślad spełniający

$$\text{Tr} AB = \text{Tr} BA, \quad \det e^A = e^{\text{Tr} A}.$$

Zauważmy, że $\text{Tr}[A, B] = 0$.

Pamiętamy, że

$$SL(\mathbb{K}^n) = SL(n, \mathbb{K}) := \{A \in GL(\mathbb{K}^n) : \det A = 1\}.$$

$sl(\mathbb{K}^n)$ definiujemy jako

$$sl(\mathbb{K}^n) := \{A \in gl(\mathbb{K}^n) : \text{Tr} A = 0\}.$$

Jest to algebra Liego. Piszemy też

$$sl(\mathbb{K}^n) = sl(n, \mathbb{K}).$$

Oczywiście, $A \in sl(n, \mathbb{K})$ implikuje $e^A \in SL(n, \mathbb{K})$.

Każdą $B \in SL(\mathbb{C}^n)$ można przedstawić w postaci $B = e^A$ dla $A \in sl(\mathbb{C}^n)$.

Są jednak takie elementy $SL(\mathbb{R}^n)$, których nie można przedstawić jako e^A dla $A \in sl(\mathbb{R}^n)$.

Przykładem takim jest $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

12.6 Formy niezmiennicze

Niech $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \ni (v, w) \mapsto \langle v|w \rangle \in \mathbb{K}$ będzie formą dwuliniową. Pamiętajmy, że grupa $G \subset GL(\mathcal{V})$ zachowuje $\langle \cdot | \cdot \rangle$ gdy

$$\langle gv|gw \rangle = \langle v|w \rangle, \quad g \in G.$$

Oczywiste jest, że odwzorowania odwracalne zachowujące pewną formę stanowią grupę.

Mówimy, że algebra Liego $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ (infinitezymalnie) zachowuje $\langle \cdot | \cdot \rangle$ gdy

$$\langle v|Xw \rangle + \langle Xv|w \rangle = 0, \quad X \in \mathfrak{g}. \quad (12.49)$$

Stwierdzenie 12.3 *Odwzorowania infinitezymalnie zachowujące formę stanowią algebrę Liego.*

Dowód.

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v|XYw \rangle + \langle Xv|Yw \rangle - \langle v|YXw \rangle - \langle Yv|Xw \rangle \\ &\quad + \langle XYv|w \rangle + \langle Yv|Xw \rangle - \langle YXv|w \rangle - \langle Xv|Yw \rangle \\ &= \langle v|[X, Y]w \rangle + \langle [X, Y]v|w \rangle. \end{aligned}$$

□

Jeśli grupa G zachowuje formę $\langle \cdot | \cdot \rangle$, to jej algebra Liego infinitezymalnie zachowuje formę $\langle \cdot | \cdot \rangle$. W rzeczy samej,

$$\langle e^{tX}v|e^{tX}w \rangle = \langle v|w \rangle, \quad X \in \mathfrak{g} \quad (12.50)$$

implikuje

$$t\langle v|Xw \rangle + t\langle Xv|w \rangle + O(t^2) = 0, \quad X \in \mathfrak{g}. \quad (12.51)$$

12.7 Ortogonalne i pseudoortogonalne algebra Liego

12.7.1 Abstrakcyjne podejście

Założmy, że w \mathcal{V} mamy niezdegenerowaną symetryczną formę dwuliniową –iloczyn skalarny. Pamiętajmy, że

$$O(\mathcal{V}) = \{B \in GL(\mathcal{V}) : \langle Bv|Bw \rangle = \langle v|w \rangle\}.$$

$A \in gl(\mathcal{V})$ należy do $so(\mathcal{V})$ gdy infinitezymalnie zachowuje iloczyn skalarny czyli $\langle Av|w \rangle + \langle v|Aw \rangle = 0$.

12.7.2 Kanoniczna forma

W szczególności, niech $\mathcal{V} = \mathbb{K}^n$ i forma będzie kanoniczna

$$\langle v|w \rangle = v_1w_1 + \cdots + v_nw_n.$$

Wtedy $B \in O(\mathbb{K}^n)$ gdy $B^\#B = \mathbf{1}$. $B \in O(\mathbb{K}^n)$ implikuje $\det B = \pm 1$. Kładziemy $SO(\mathbb{K}^n) := O(\mathbb{K}^n) \cap SL(\mathbb{K}^n)$.

Dla formy kanonicznej, $A \in o(\mathbb{K}^n)$ gdy $A^\# + A = 0$. Jest to podalgebra Liego w $sl(\mathbb{K}^n)$. Jest ona algebrą Liego grupy Liego $SO(\mathbb{K}^n)$. Piszemy też

$$so(\mathbb{R}^n) = so(n).$$

W przypadku zespolonym piszemy też $so(n, \mathbb{C}) = so(\mathbb{C}^n)$.

Każdą $B \in SO(\mathbb{K}^n)$ można przedstawić w postaci $B = e^A$ dla $A \in so(\mathbb{K}^n)$.

12.7.3 Forma o sygnaturze (q, p)

Wyposażmy \mathbb{R}^n w formę o sygnaturze (q, p) :

$$\langle v|w \rangle_{q,p} = -v_1w_1 - \dots - v_qw_q + v_{q+1}w_{q+1} + \dots + v_{q+p}w_{q+p} = \langle v|I_{q,p}w \rangle.$$

$B \in O(q, p)$ kiedy

$$B^\# I_{q,p} B = I_{q,p}.$$

$B \in O(q, p)$ implikuje $\det B = \pm 1$. Piszemy $SO(q, p) := SL(q + p) \cap O(q, p)$.

$A \in so(\mathbb{R}^{q,p})$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$A^\# I_{q,p} + I_{q,p} A = 0.$$

Jest to podalgebra Liego w $sl(\mathbb{R}^{q+p})$. Jest to algebra Liego grupy Liego $SO(\mathbb{R}^{q,p})$. Piszemy też

$$so(\mathbb{R}^{q,p}) = so(q, p).$$

12.8 Unitarne i pseudounitarne algebry Liego

12.8.1 Abstrakcyjne podejście

Załóżmy, że w zespolonej przestrzeni \mathcal{V} mamy niezdegenerowaną hermitowską formę dwuliniową. Pamiętajmy, że

$$U(\mathcal{V}) = \{B \in GL(\mathcal{V}) : (Bv|Bw) = (v|w)\}.$$

$A \in gl(\mathcal{V})$ należy do $u(\mathcal{V})$ gdy infinitezymalnie zachowuje iloczyn skalarny czyli $(Av|w) + (v|Aw) = 0$.

12.8.2 Kanoniczna forma

W szczególności, niech $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$ i forma będzie kanoniczna

$$(v|w) = \bar{v}_1w_1 + \dots + \bar{v}_nw_n.$$

Wtedy $B \in U(n)$ gdy $B^*B = \mathbb{1}$. $B \in U(n)$ implikuje $|\det B| = 1$. Kładziemy $SU(n) := O(n) \cap SL(n)$.

Dla formy kanonicznej, $A \in u(n)$ gdy $A^* + A = 0$. Jest ona algebrą Liego grupy Liego $U(\mathbb{C}^n)$.

Kładziemy też $su(n) := u(n) \cap sl(\mathbb{C}^n)$. Jest to algebra Liego grupy $SU(n)$.

Każdą $B \in SU(\mathbb{C}^n)$ można przedstawić w postaci $B = e^A$ dla $A \in su(\mathbb{C}^n)$.

12.8.3 Forma o sygnaturze (q, p)

Wyposażmy \mathbb{C}^n w formę hermitowską o sygnaturze (q, p) :

$$(v|w)_{q,p} = -\bar{v}_1w_1 - \dots - \bar{v}_qw_q + \bar{v}_{q+1}w_{q+1} + \dots + \bar{v}_{q+p}w_{q+p} = (v|I_{q,p}w).$$

$B \in U(q, p)$ kiedy

$$B^* I_{q,p} B = I_{q,p}.$$

$B \in U(q, p)$ implikuje $|\det B| = 1$. Piszemy $SU(q, p) := SL(\mathbb{C}^{q+p}) \cap U(q, p)$.
 $A \in u(q, p)$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$A^* I_{q,p} + I_{q,p} A = 0.$$

Mamy też $su(q, p) := u(q, p) \cap sl(\mathbb{C}^{q+p})$.

12.9 Symplektyczna algebra Liego

Niech $\langle v | Jw \rangle$ będzie formą antysymetryczną na \mathbb{K}^n . Pamiętamy, że

$$Sp(\mathcal{V}) = \{B \in GL(\mathcal{V}) : \langle Bv | JBw \rangle = \langle v | Jw \rangle\}.$$

Można pokazać, że $Sp(\mathbb{K}^n) \subset SL(\mathbb{K}^n)$.

Definiujemy

$$sp(\mathbb{K}^{2n}) := \{A \in L(\mathbb{K}^{2n}) : A^\# J + JA = 0\}$$

Łatwo pokazać, że ślad macierzy symplektycznych jest równy 0. Dlatego $sp(\mathbb{K}^{2n})$ jest podalgebrą Liego w $sl(\mathbb{K}^{2n})$. $sp(\mathbb{K}^{2n})$ jest algebrą Liego grupy $SP(\mathbb{K}^n)$.

13 Abstrakcyjne algebry Liego

13.1 Definicja

Niech \mathfrak{g} będzie algebrą nad ciałem \mathbb{K} z działaniem oznaczanym przez

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (A, B) \mapsto [A, B] \in \mathfrak{g}.$$

Mówimy, że \mathfrak{g} jest *algebrą Liego* jeśli jej działanie jest *antysymetryczne*, czyli

$$[A, B] = -[B, A], \quad A, B \in \mathfrak{g},$$

i spełnia *tożsamość Jacobiego*

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

Działanie w algebrze Liego często nazywamy *nawiasem*.

Każda przestrzeń wektorowa z zerowym nawiasem jest algebrą Liego. O takich algebrach Liego mówimy, że są *przemienne*.

Centrum algebry Liego \mathfrak{g} jest zdefiniowane jako

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{A \in \mathfrak{g} : [A, B] = 0, B \in \mathfrak{g}\}.$$

13.2 Algebry łączne a algebry Liego

Niech \mathfrak{A} będzie algebrą nad \mathbb{K} . Mówimy, że \mathfrak{A} jest algebrą łączną, gdy

$$(AB)C = A(BC), \quad A, B, C \in \mathfrak{A}.$$

Mówimy, że \mathfrak{A} jest przemienna gdy $AB = BA$, $A, B \in \mathfrak{A}$. Centrum algebry łącznej \mathfrak{A} jest zdefiniowane jako

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{A}) = \{A \in \mathfrak{A} : [A, B] = 0, B \in \mathfrak{A}\}.$$

Każda algebra łączna \mathfrak{A} ma naturalną strukturę algebry Liego zadaną przez komutator

$$[A, B] := AB - BA.$$

W szczególności, jeśli \mathcal{V} jest przestrzenią wektorową to zbiór liniowych odwzorowań w \mathcal{V} , czyli $L(\mathcal{V})$, jest algebrą Liego. $L(\mathcal{V})$ wyposażone w komutator oznaczamy przez $gl(\mathcal{V})$.

13.3 Homomorfizmy

Odwzorowanie między algebrami nazywamy homomorfizmem, jeśli zachowuje wszystkie działania. W szczególności, niech \mathfrak{g} , \mathfrak{b} będzie algebrami Liego. Odwzorowanie $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{b}$ nazywa się *homomorfizmem* gdy jest liniowe i zachowuje nawias, to znaczy

- (1) $\phi(\lambda A) = \lambda\phi(A)$;
- (2) $\phi(A + B) = \phi(A) + \phi(B)$;
- (3) $\phi([A, B]) = [\phi(A), \phi(B)]$.

Zbiór automorfizmów algebry \mathfrak{g} oznaczamy przez $\text{Aut}(\mathfrak{g})$. Jest to grupa.

Homomorfizm \mathfrak{g} w $gl(\mathcal{V})$ jest nazywany *reprezentacją \mathfrak{g} na \mathcal{V}* .

13.4 Reprezentacja dołączona

Reprezentacja dołączona

$$\mathfrak{g} \ni A \mapsto \text{ad}(A) \in gl(\mathfrak{g})$$

jest zdefiniowana przez

$$\text{ad}(A)B := [A, B], \quad A, B \in \mathfrak{g}.$$

Żeby sprawdzić, że jest to reprezentacja, czyli

$$\text{ad}([A, B]) = [\text{ad}(A), \text{ad}(B)]$$

korzystamy z tożsamości Jacobiego.

13.5 Różniczkowania

Niech \mathfrak{g} będzie algebrą Liego. Odwzorowanie liniowe $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ nazywamy *różniczkowaniem* jeśli spełnia *tożsamość Leibniza*:

$$\mathcal{D}[A, B] = [\mathcal{D}A, B] + [A, \mathcal{D}B].$$

Przykładem różniczkowania jest $\text{ad}(C)$ zdefiniowany jako

$$\text{ad}(C)A := [C, A].$$

Wynika to z tożsamości Jacobiego. Mówimy, że jest to *różniczkowanie wewnętrzne*.

Oznaczmy przez $\text{Der}(\mathfrak{g})$ zbiór różniczkowań algebry \mathfrak{g} . Jeśli $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in \text{Der}(\mathfrak{g})$, to $[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2] \in \text{Der}(\mathfrak{g})$. Zatem $\text{Der}(\mathfrak{g})$ jest algebrą Liego. $\mathfrak{g} \ni A \mapsto \text{ad}(A) \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ jest homomorfizmem, którego jądrem jest $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Jeśli $\mathcal{D} \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ i $A \in \mathfrak{g}$, to $[\mathcal{D}, \text{ad}(A)] = \text{ad}(\mathcal{D}A)$.

Jeśli $\mathbb{R} \ni t \mapsto \sigma_t \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ jest różniczkowalnym homomorfizmem (*jednoparametrową grupą*), to

$$\left. \frac{d}{dt} \sigma_t(B) \right|_{t=0} =: \mathcal{D}B \quad (13.52)$$

definiuje różniczkowanie. I na odwrót, jeśli \mathcal{D} jest różniczkowaniem, to

$$\sigma_t(B) := \exp(t\mathcal{D})B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{D}^n B$$

jest jednoparametrową grupą spełniającą (13.52).

Jako przykład rozważmy algebrę przemian \mathbb{K}^n . Wszystkie odwzorowania liniowe \mathbb{K}^n są różniczkowaniami. Nie są one wewnętrzne, poza zerowym. Wszystkie automorfizmy są zadane przez elementy $GL(\mathbb{K}^n)$.

Można pokazać, że w algebrze $gl(\mathbb{K}^n)$ wszystkie różniczkowania są wewnętrzne. Podobnie, wszystkie automorfizmy są postaci $B \mapsto CBC^{-1}$ dla pewnego $C \in GL(\mathbb{K}^n)$.

13.6 Ideały

\mathfrak{b} jest *ideałem* algebry Liego \mathfrak{g} , jeśli jest liniową podprzestrzenią w \mathfrak{g} i $A \in \mathfrak{g}, B \in \mathfrak{b} \Rightarrow [A, B] \in \mathfrak{b}$.

Mówimy, że ideał \mathfrak{b} jest *właściwy* gdy $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{g}$. Mówimy, że ideał \mathfrak{b} jest *nietrywialny* gdy $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{g}$ i $\mathfrak{b} \neq \{0\}$.

Twierdzenie 13.1 *Jądro homomorfizmu jest ideałem. Jeśli \mathfrak{b} jest ideałem w \mathfrak{g} , to $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ ma naturalną strukturę algebry Liego. Odwzorowanie*

$$\mathfrak{g} \ni A \mapsto A + \mathfrak{b} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{b}$$

jest surjektywnym homomorfizmem, którego jądro jest równe \mathfrak{b} . Jeśli $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{a}$ jest innym surjektywnym homomorfizmem, którego jądro też jest równe \mathfrak{b} , to $\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{b}$.

Mówiąc, że

$$\mathfrak{b} \xrightarrow{\phi} \mathfrak{g} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{h}$$

jest ciągiem dokładnym mamy na myśli, że $\text{Ker}\psi = \text{Ran}\phi$.

W szczególności

$$0 \rightarrow \mathfrak{b} \xrightarrow{\phi} \mathfrak{g} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{h} \rightarrow 0 \quad (13.53)$$

oznacza, że ϕ jest iniektywny, ψ jest surjektywny i $\text{Ker}\psi = \text{Ran}\phi$. Wtedy ψ generuje izomorfizm $\mathfrak{g}/\phi(\mathfrak{b})$ z \mathfrak{h} . (13.53) nazywamy *krótkim ciągiem dokładnym*. Mówimy, że \mathfrak{g} jest *rozszerzeniem* \mathfrak{b} poprzez \mathfrak{h} .

13.7 Ideały charakterystyczne

Mówimy, że \mathfrak{b} jest *ideałem charakterystycznym*, gdy dla każdego $\mathcal{D} \in \text{Der}(\mathfrak{g})$, \mathcal{D} przekształca \mathfrak{b} w siebie.

Twierdzenie 13.2 (1) *Jeśli \mathfrak{a} , \mathfrak{b} są ideałami, to $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ i $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ też.*

(2) *Jeśli \mathfrak{a} , \mathfrak{b} są ideałami charakterystycznymi, to $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ i $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ też.*

(3) *Jeśli \mathfrak{a} jest ideałem w \mathfrak{g} a \mathfrak{b} jest ideałem charakterystycznym w \mathfrak{a} , to \mathfrak{b} jest ideałem w \mathfrak{g} .*

(4) *Jeśli \mathfrak{a} jest ideałem charakterystycznym w \mathfrak{g} a \mathfrak{b} jest ideałem charakterystycznym w \mathfrak{a} , to \mathfrak{b} jest ideałem charakterystycznym w \mathfrak{g} .*

(5) *Jeśli \mathfrak{a} , \mathfrak{b} są ideałami, to $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ też.*

(6) *Jeśli \mathfrak{a} , \mathfrak{b} są ideałami charakterystycznymi, to $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ też.*

(7) *Jeśli $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ jest surjektywnym homomorfizmem, to $\mathfrak{a} \mapsto \phi(\mathfrak{a})$ zadaje bijekcję między ideałami algebry \mathfrak{g} zawierającymi $\text{Ker}\phi$ a ideałami algebry \mathfrak{h} .*

(8) *Jeśli $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ jest surjektywnym homomorfizmem i $\text{Ker}\phi$ jest ideałem charakterystycznym, to $\mathfrak{a} \mapsto \phi(\mathfrak{a})$ zadaje bijekcję między ideałami charakterystycznymi algebry \mathfrak{g} zawierającymi $\text{Ker}\phi$ a ideałami charakterystycznymi algebry \mathfrak{h} .*

Twierdzenie 13.3 *Centrum jest ideałem charakterystycznym.*

Dowód. Dla $Z \in \mathfrak{z}$, $A \in \mathfrak{g}$ mamy $0 = [A, Z]$. Dlatego

$$0 = [\mathcal{D}A, Z] + [A, \mathcal{D}Z].$$

Stąd $\mathcal{D}Z \in \mathfrak{z}$. \square

W przemiennej algebrze Liego \mathbb{K}^n wszystkie podprzestrzenie liniowe są ideałami, ale tylko ideały trywialne są charakterystyczne.

Stwierdzenie 13.4 *$\text{ad}(\mathfrak{g})$ jest ideałem w $\text{Der}(\mathfrak{g})$.*

Dowód. Niech $\mathcal{D} \in \text{Der}(\mathfrak{g})$, $A, B \in \mathfrak{g}$. Wtedy

$$\mathcal{D}\text{ad}(A) - \text{ad}(A)\mathcal{D} = \text{ad}(\mathcal{D}A).$$

\square

Stwierdzenie 13.5 Niech $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ będzie homomorfizmem. Wtedy $\text{Ker}\phi$ jest ideałem. Poza tym, następujące warunki są równoważne:

- (1) $\text{Ker}\phi$ jest ideałem charakterystycznym
- (2) Jeśli $\mathcal{D} \in \text{Der}\mathfrak{g}$, to $\phi(A) = \phi(A') \Leftrightarrow \phi(\mathcal{D}A) = \phi(\mathcal{D}A')$.

Dlatego też można wtedy zdefiniować $\phi(\mathcal{D}) \in \text{Der}\mathfrak{h}$ wzorem $\phi(\mathcal{D})\phi(A) := \phi(\mathcal{D}A)$. Mamy homomorfizm algebr Liego $\phi : \text{Der}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{h})$.

13.8 Iloczyn półprosty

Niech \mathfrak{a} i \mathfrak{h} będą algebrami Liego.

Niech $\mathfrak{h} \ni H \mapsto \alpha_H \in \text{Der}(\mathfrak{a})$ będzie homomorfizmem algebr Liego. Wtedy iloczyn półprosty $\mathfrak{a} \rtimes_{\alpha} \mathfrak{h}$ jest zdefiniowany jako $\mathfrak{a} \times \mathfrak{h}$ z nawiasem

$$[(A_1, H_1), (A_2, H_2)] = ([A_1, A_2] + \alpha_{H_1}(A_2) - \alpha_{H_2}(A_1), [H_1, H_2]).$$

$\mathfrak{a} \rtimes_{\alpha} \mathfrak{h}$ jest algebrą Liego. $\{0\} \times \mathfrak{h}$ jest jej podalgebrą Liego, $\mathfrak{a} \times \{0\}$ jest jej ideałem.

Jeśli \mathfrak{g} zawiera podalgebrę \mathfrak{a} i ideał \mathfrak{h} takie, że \mathfrak{g} jest sumą prostą \mathfrak{a} i \mathfrak{h} w sensie przestrzeni wektorowych, to mamy wtedy homomorfizm $\mathfrak{h} \ni H \mapsto [H, \cdot] =: \alpha_H \in \text{Der}(\mathfrak{a})$ i \mathfrak{g} jest izomorficzna z iloczynem półprostym $\mathfrak{a} \rtimes_{\alpha} \mathfrak{h}$.

Oznaczmy przez $t(\mathbb{K}^n)$ macierze górnotrójkątne, przez $n(\mathbb{K}^n)$ macierze ściśle górnotrójkątne, a przez $d(\mathbb{K}^n)$ macierze diagonalne. Wtedy $n(\mathbb{K}^n)$ jest ideałem charakterystycznym w $t(\mathbb{K}^n)$. $t(\mathbb{K}^n)$ jest iloczynem półprostym $n(\mathbb{K}^n) \rtimes d(\mathbb{K}^n)$. Jeśli $t(\mathbb{K}^n) \supset \mathfrak{a} \supset n(\mathbb{K}^n)$ jest dowolną podprzestrzenią, to jest to też ideał w $t(\mathbb{K}^n)$ (zresztą, charakterystyczny).

13.9 Afiniczne algebry Liego

Niech \mathcal{V} będzie przestrzenią wektorową. Odwzorowania afiniczne na \mathcal{V} tworzą algebrę Liego z działaniem

$$[(w_1, A_1), (w_2, A_2)] := (A_1 w_2 - A_2 w_1, [A_1, A_2])$$

Tę algebrę Liego nazywamy *afinicznym rozszerzeniem* $gl(\mathcal{V})$.

\mathcal{V} można traktować jako przemienną algebrę Liego. Każde odwzorowanie liniowe na \mathcal{V} jest różniczkowaniem, czyli $\text{Der}(\mathcal{V}) = L(\mathcal{V}) = gl(\mathcal{V})$. Latwo widzimy, że afiniczne rozszerzenie $gl(\mathcal{V})$ jest iloczynem półprostym $\mathcal{V} \rtimes gl(\mathcal{V})$.

Często w zastosowaniach spotykamy grupy w których $gl(\mathcal{V})$ jest zastąpione jej podgrupą. Na przykład, algebra Liego grupy Poincarego jest afinicznym rozszerzeniem algebry Liego grupy Lorentza $\mathbb{R}^{1,3} \rtimes so(1, 3)$.

13.10 Związek zespolonych i rzeczywistych przestrzeni wektorowych

- (1) Niech \mathcal{V} będzie zespoloną przestrzenią wektorową. Jak zrobić z niej przestrzeń rzeczywistą?

- (i) \mathbb{R} jest podciałem w \mathbb{C} . Można “zapomnieć” o mnożeniu przez nierzeczywiste liczby. Dostajemy przestrzeń \mathcal{V} – *realifikację przestrzeni* \mathcal{V} .

(ii) Niech κ będzie *sprzężeniem*, tzn. antyliniową inwolucją. Wtedy

$$\mathcal{V}^\kappa := \{v \in \mathcal{V} : \kappa v = v\}$$

jest rzeczywistą podprzestrzenią zwaną *formą rzeczywistą przestrzeni* \mathcal{V} . Zauważmy, że

$$i\mathcal{V}^\kappa = \{v \in \mathcal{V} : \kappa v = -v\}, \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}^\kappa \oplus i\mathcal{V}^\kappa.$$

(2) Niech \mathcal{X} będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową. Jak zrobić z niej przestrzeń zespoloną?

(i) Przestrzeń $\mathbb{C}\mathcal{X} := \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ wyposażamy w mnożenie

$$(\lambda + i\mu)(x_R, x_I) := (\lambda x_R - \mu x_I, \lambda x_I + \mu x_R).$$

Zamiast (x_R, x_I) będziemy pisali $x_R + ix_I$. Nazywamy tę przestrzeń *kompleksyfikacją przestrzeni* \mathcal{X} .

(ii) Niech $j \in L(\mathcal{X})$ będzie *antyinwolucją* (albo *strukturą zespoloną*), czyli niech spełnia $j^2 = -\mathbb{1}$. Wyposażamy \mathcal{X} w mnożenie

$$(\lambda + i\mu)x := (\lambda + \mu j)x.$$

Tak uzyskaną przestrzeń zespoloną oznaczamy przez $\mathcal{X}^\mathbb{C}$ i czasami nazywamy *formą zespoloną przestrzeni* \mathcal{X} .

W kompleksyfikacji rzeczywistej przestrzeni \mathcal{X} mamy naturalne sprzężenie:

$$\kappa(x_R + ix_I) = \overline{(x_R + ix_I)} = x_R - ix_I.$$

Oczywiście, $(\mathbb{C}\mathcal{X})^\kappa = \mathcal{X}$.

Jeśli zrealifikujemy zespoloną przestrzeń \mathcal{V} dostając $\mathcal{V}_\mathbb{R}$, to w $\mathcal{V}_\mathbb{R}$ mamy naturalną antyinwolucję zadaną przez i . Mamy $(\mathcal{V}_\mathbb{R})^\mathbb{C} = \mathcal{V}$.

Jeśli skompleksyfikujemy rzeczywistą przestrzeń \mathcal{X} , a potem ją zrealifikujemy, dostajemy $(\mathbb{C}\mathcal{X})_\mathbb{R} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$.

Jeśli zrealifikujemy zespoloną przestrzeń \mathcal{V} , a potem ją skompleksyfikujemy, dostajemy $\mathbb{C}(\mathcal{V}_\mathbb{R}) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$.

13.11 Związek zespolonych i rzeczywistych algebr Liego

(1) Niech \mathfrak{g} będzie zespoloną algebrą Liego.

(i) $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ jest rzeczywistą algebrą Liego.

(ii) Niech κ będzie *sprzężeniem*, które jest jednocześnie homomorfizmem. Wtedy \mathfrak{g}^κ jest rzeczywistą algebrą Liego.

(2) Niech \mathfrak{h} będzie rzeczywistą algebrą Liego.

(i) $\mathbb{C}\mathfrak{h}$ jest zespoloną algebrą Liego.

- (ii) Niech j antyinvolutywnym automorfizmem algebry \mathfrak{h} . Wtedy $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ jest zespoloną algebrą Liego.

Stwierdzenie 13.6 Niech \mathfrak{h} będzie rzeczywistą algebrą Liego.

- (1) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$ jest ideałem (charakterystycznym) $\Leftrightarrow \mathbb{C}\mathfrak{a} \subset \mathbb{C}\mathfrak{h}$ jest ideałem (charakterystycznym).
- (2) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \mathfrak{h}$ implikuje $[\mathbb{C}\mathfrak{a}, \mathbb{C}\mathfrak{b}] = \mathbb{C}[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$.

Przykład 13.7 (1) $sl(n, \mathbb{C})$ ma formy rzeczywiste $sl(n, \mathbb{R})$ ze sprzężeniem zespolonym i $su(n)$ ze sprzężeniem hermitowskim razy minus.

- (2) $so(n, \mathbb{C})$ ma formy rzeczywiste $so(q, p)$ dla $n = q + p$ ze sprzężeniem $A \mapsto K\bar{A}K$, gdzie $K^2 = I_{q,p}$.
- (3) $sp(2m, \mathbb{C})$ ma formę rzeczywistą $sp(2m, \mathbb{R})$.

13.12 Formy niezmiennicze na algebrze Liego

Niech \mathfrak{g} będzie algebrą Liego. Mówimy, że forma dwuliniowa $\langle \cdot | \cdot \rangle$ na \mathfrak{g} jest *niezmiennicza*, gdy

$$\langle [B, A] | C \rangle + \langle A | [B, C] \rangle = 0, \quad A, B, C \in \mathfrak{g}. \quad (13.54)$$

Inny równoważny warunek:

$$\langle [A, B] | C \rangle = \langle A | [B, C] \rangle.$$

Przypomnijmy, że jeśli $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow gl(\mathcal{V})$ jest reprezentacją, i $\langle \cdot | \cdot \rangle$ jest formą dwuliniową na \mathcal{V} , to mówimy, że \mathfrak{g} (*infinitesimalnie*) zachowuje $\langle \cdot | \cdot \rangle$ gdy

$$\langle v | \pi(X)w \rangle + \langle \pi(X)v | w \rangle = 0, \quad X \in \mathfrak{g}, \quad v, w \in \mathcal{V}. \quad (13.55)$$

Definicję (13.55) można zatem przeformułować następująco: forma na algebrze Liego jest niezmiennicza, gdy jest ona niezmiennicza dla reprezentacji dołączonej:

$$\langle \text{ad}(B)A | C \rangle + \langle A | \text{ad}(B)C \rangle = 0.$$

Jeśli $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$, to $\text{Tr } AB$ jest formą niezmienniczą. Ogólniej, z każdą reprezentacją π algebry Liego \mathfrak{g} w skończenie wymiarowej przestrzeni mamy związaną niezmienniczą formę dwuliniową

$$\langle B | C \rangle_{\pi} := \text{Tr } \pi(B)\pi(C).$$

Jeśli $\pi = \text{ad}$ formę tę nazywamy *formą Killinga* i oznaczamy czasem $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$.

Twierdzenie 13.8 Niech \perp będzie dopełnieniem ortogonalnym dla formy niezmienniczej $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Niech \mathfrak{b} będzie ideałem w \mathfrak{g} .

- (1) \mathfrak{b}^{\perp} też jest ideałem.
- (2) Jeśli forma zeruje się na \mathfrak{b} , to $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{g}^{\perp}$.
- (3) Jeśli forma jest niezdegenerowana, to $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}^{\perp}$ jest przemiennym ideałem.

Dowód. (1) Niech $A \in \mathfrak{g}$, $B \in \mathfrak{b}$, $C \in \mathfrak{b}^\perp$.

$$\langle [C, A] | B \rangle = \langle C | [A, B] \rangle = 0.$$

Zatem, $[A, C] \in \mathfrak{b}^\perp$.

(2) Niech $B_1, B_2 \in \mathfrak{b}$. Wtedy

$$\langle [B_1, B_2] | A \rangle = \langle B_1 | [B_2, A] \rangle = 0.$$

Zatem $[B_1, B_2] \in \mathfrak{b}^\perp$.

(3) $\mathfrak{g}^\perp = \{0\}$ Zatem, na mocy (2), $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \{0\}$. \square

Stwierzenie 13.9 Niech \mathfrak{a} będzie ideałem algebry Liego \mathfrak{g} . Niech $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ i $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathfrak{a}}$ będą formami Killinga względem \mathfrak{g} i \mathfrak{a} . Wtedy obcięcie $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ do $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ jest równe $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathfrak{a}}$.

Dowód. Niech $A, B \in \mathfrak{a}$. Wybieramy bazę w \mathfrak{g} tak, aby początkowe elementy tworzyły bazę \mathfrak{a} . Wtedy

$$\text{ad}(A) \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ad}(B) \sim \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\text{ad}(A)\text{ad}(B) \sim \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd

$$\langle A | B \rangle_{\mathfrak{g}} = \text{Tr}(\text{ad}(A)\text{ad}(B)) = \text{Tr}a_{11}b_{11} = \langle A | B \rangle_{\mathfrak{a}}.$$

\square

Przykład 13.10 Dla $\mathfrak{gl}(n) = \mathbb{C}\mathbb{1}_n \oplus \mathfrak{sl}(n)$ forma Killinga jest równa

$$\langle A | B \rangle_{\text{ad}} = 2n \text{Tr}AB - 2 \text{Tr}A \text{Tr}B.$$

Czyli forma Killinga równa jest $2n$ razy forma śladowa na $\mathfrak{sl}(n)$ i 0 na $\mathbb{C}\mathbb{1}_n$. Niezerowe elementy macierzowe formy Killinga mamy dla $i \neq j$:

$$\langle A_{ij} | A_{ji} \rangle_{\text{ad}} = 2n, \quad \langle A_{ii} | A_{ii} \rangle_{\text{ad}} = 2n - 2, \quad \langle A_{ii} | A_{jj} \rangle_{\text{ad}} = -2.$$

Mamy bowiem

$$\text{ad}(A)\text{ad}(B)X = ABX + XBA - AXB - BXA.$$

Niezerowe wyrazy diagonalne dla reprezentacji dołączonej są równe

$$\begin{aligned} \text{ad}(A_{ij})\text{ad}(A_{ji})A_{ik} &= A_{ik}, \quad k \neq j, \quad n-1 \text{ wyrazów,} \\ \text{ad}(A_{ij})\text{ad}(A_{ji})A_{kj} &= A_{kj}, \quad k \neq i, \quad n-1 \text{ wyrazów,} \\ \text{ad}(A_{ij})\text{ad}(A_{ji})A_{ij} &= 2A_{ij}, \quad 2 \text{ wyrazy,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ad}(A_{ii})\text{ad}(A_{ii})A_{ik} &= A_{ik}, \quad k \neq i, \quad n-1 \text{ wyrazów,} \\ \text{ad}(A_{ii})\text{ad}(A_{ii})A_{ki} &= A_{ki}, \quad k \neq i, \quad n-1 \text{ wyrazów,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ad}(A_{ii})\text{ad}(A_{jj})A_{ij} &= -A_{ij}, \quad 1 \text{ wyraz,} \\ \text{ad}(A_{ii})\text{ad}(A_{jj})A_{ji} &= -A_{ji}, \quad 1 \text{ wyraz.} \end{aligned}$$

13.13 Algebry półproste i reduktywne

Mówimy, że algebra Liego \mathfrak{g} jest *półprosta* gdy nie posiada niezerowych ideałów przemiennych. \mathfrak{g} jest *reduktywna* gdy jest sumą prostą półprostej i przemienną algebry Liego.

Twierdzenie 13.11 *Niech \mathfrak{g} będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

- (1) \mathfrak{g} jest algebrą półprostą.
- (2) Forma Killinga na \mathfrak{g} jest niezdegenerowana.
- (3) \mathfrak{g} jest sumą prostą ideałów prostych

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n.$$

Dowód. (2) \Rightarrow (1): Niech $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\text{ad}}$ będzie nieosobliwa. Niech \mathfrak{a} będzie ideałem przemiennym. Dobierzmy bazę w \mathfrak{g} tak, aby początkowe elementy stanowiły bazę w \mathfrak{a} . Niech $B \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathfrak{a}$. Mamy

$$\text{ad}(B) \sim \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{ad}(A) \sim \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\text{ad}(A)\text{ad}(B) \sim \begin{bmatrix} 0 & a_{12}b_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Czyli

$$\langle A|B \rangle_{\text{ad}} = \text{Tr ad}(A)\text{ad}(B) = 0.$$

Zatem $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}^\perp = \{0\}$.

(1) \Rightarrow (2): Implikacja ta wynika z Kryterium Cartana dla formy Killinga (Tw. 20.15).

(1) \Rightarrow (3): Niech \mathfrak{a} będzie nietrywialnym ideałem. Wiemy już, że z (1) wynika, że forma Killinga jest niezdegenerowana. Z Tw. 13.8 wynika, że $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ jest ideałem przemiennym. Z półprostoty \mathfrak{g} wynika, że $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = \{0\}$. Kontynuując ten proces dostajemy rozkład na ideały proste.

(3) \Rightarrow (1): \mathfrak{a}_i jako proste algebry Liego posiadają niezdegenerowaną formę Killinga. (Wynika to z (1) \Rightarrow (2)). Więc to samo jest prawdą dla $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$. \square

Twierdzenie 13.12 *Niech \mathfrak{g} będzie półprosta i*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n \tag{13.56}$$

będzie jej rozkładem na proste ideały.

- (1) *Dowolny ideał ma postać $\mathfrak{a}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_{i_k}$, gdzie $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.*
- (2) *Rozkład (13.56) jest jedyny z dokładnością do permutacji.*
- (3) *Obraz \mathfrak{g} względem homomorfizmu jest półprosty.*
- (4) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

Dowód. (1) Niech \mathfrak{h} będzie ideałem w \mathfrak{g} . Jeśli $\mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{h} \neq \{0\}$, to $\mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{h}$ jest nietrywialnym ideałem. Zatem $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{h}$. Czyli

$$I_1 = \{i : \mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{h}\}, \quad I_2 = \{i : \mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{h} = \{0\}\}$$

stanowi rozbięcie zbioru $\{1, \dots, n\}$ na rozłączne podzbiory. Połóżmy

$$\mathfrak{g}_1 := \bigoplus_{i \in I_1} \mathfrak{a}_i, \quad \mathfrak{g}_2 := \bigoplus_{i \in I_2} \mathfrak{a}_i.$$

Oczywiście, $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{h}$.

Niech $B \in \mathfrak{h}$. $B = B_1 + B_2$, $B_i \in \mathfrak{g}_i$.

Niech $j \in I_1$. Wtedy $[B_2, \mathfrak{a}_j] \in \mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{a}_j = \{0\}$.

Niech $j \in I_2$. Mamy $B, B_1 \in \mathfrak{h}$. Zatem $B_2 \in \mathfrak{h}$. Więc, $[B_2, \mathfrak{a}_j] \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}_j = \{0\}$. Zatem $[B_2, \mathfrak{a}_j] = \{0\}$.

Czyli $[B_2, \mathfrak{g}] = \{0\}$. Zatem B_2 należy do centrum algebry \mathfrak{g} . Czyli $B_2 = 0$.

(2) Na mocy (1), jeśli \mathfrak{a} jest prostym ideałem zawartym w \mathfrak{g} , to jest on równy jednemu z ideałów w (13.56). \square

Twierdzenie 13.13 *Niech $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie półprosta. Wtedy form śladowa jest niezdegenerowana.*

Dowód. Dowód jest analogiczny do dowodu Tw. 13.11 (1) \Rightarrow (2), przy czym korzystamy z Kryterium Cartana dla formy śladowej (Tw. 20.13). \square

Twierdzenie 13.14 *Niech \mathfrak{g} będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

- (1) \mathfrak{g} jest algebrą reduktywną.
- (2) Istnieje niezdegenerowana forma niezmiennicza na \mathfrak{g} .
- (3) \mathfrak{g} jest sumą prostą ideałów prostych lub równych \mathbb{K} .

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{a}_n.$$

14 Zwarte grupy i ich reprezentacje

14.1 Reprezentacje

Rozważmy reprezentację $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow gl(\mathcal{V})$ lub $\rho : G \rightarrow GL(\mathcal{V})$. Mówimy, że reprezentacja jest *przywiedlna*, gdy posiada nietrywialną podprzestrzeń niezmienniczą. W przeciwnym razie mówimy, że jest *nieprzywiedlna*.

Mówimy, że reprezentacja jest *rozkładalna*, gdy posiada nietrywialny rozkład na sumę prostą podprzestrzeni niezmienniczych. W przeciwnym razie mówimy, że jest *nierozkładalna*.

Każda reprezentacja rozkładalna jest przywiedlna.

W oczywisty sposób definiujemy *sumę prostą*. *Iloczyn tensorowy* reprezentacji ρ_1 i ρ_2 działa w $\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2$ i jest równy dla grup $\rho_1 \otimes \rho_2$ a dla algebr Liego $\rho_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \rho_2$.

Mówimy, że reprezentacja jest *całkowicie rozkładalna*, gdy istnieje rozkład $\mathcal{V} = \bigoplus_{j=1}^n \mathcal{V}_j$ takie, że reprezentacja ograniczona do \mathcal{V}_j jest nieprzywiedlna.

(Zauważmy następującą niekonsekwencję terminologiczną: reprezentacja nieprzywiedlna jest całkowicie rozkładalna, ale nierozkładalna).

Jeśli $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$ jest podprzestrzenią niezmienniczą, to $\rho_1 := \rho|_{\mathcal{V}_1}$ nazywamy *podreprezentacją* reprezentacji ρ . Mamy również naturalną *reprezentację ilorazową* $\rho^1 : \mathfrak{g} \rightarrow L(\mathcal{V}/\mathcal{V}_1)$ zadaną przez $\rho^1(A)(v + \mathcal{V}_1) = \rho(A)v + \mathcal{V}_1$. Wybierając bazę w \mathcal{V} tak, by pierwsze wektory należały do \mathcal{V}_1 , możemy wtedy napisać

$$\rho(A) = \begin{bmatrix} \rho_1(A) & ? \\ 0 & \rho^1(A) \end{bmatrix}.$$

Jeśli istnieje podprzestrzeń niezmiennicza \mathcal{V}^1 dopełniająca do \mathcal{V}_1 , i bazy dostosujemy do rozkładu $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}^1$, to ? znika.

Zauważmy, że jeśli \mathcal{W} jest podprzestrzenią niezmienniczą dla reprezentacji ilorazowej ρ^1 , to $\mathcal{W} + \mathcal{V}_1$ jest podprzestrzenią niezmienniczą dla ρ .

Dla każdej reprezentacji skończonej wymiarowej znajdziemy niezerową podprzestrzeń niezmienniczą. Przez indukcję, konstruujemy ciąg przestrzeni niezmienniczych $\{0\} = \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \cdots \subset \mathcal{V}_n = \mathcal{V}$ takich, że reprezentacja ilorazowa na $\mathcal{V}_{n+1}/\mathcal{V}_n$ jest nieprzywiedlna. Ciąg taki nazywamy *ciągami Jordana-Höldera*. Robimy to indukcyjnie: dla reprezentacji na $\mathcal{V}/\mathcal{V}_n$ szukamy podreprezentacji nieprzywiedlnej.

14.2 Reprezentacja kontrgradientna

Załóżmy, że mamy reprezentację (niekoniecznie unitarną) π grupy G na skończonej wymiarowej przestrzeni \mathcal{V} . Reprezentację kontrgradientną do π nazywamy reprezentację π^{ct} działającą w przestrzeni sprzężonej $\mathcal{V}^\#$ zadaną przez

$$\pi^{\text{ct}}(g) := \pi(g)^{\#(-1)}, \quad g \in G.$$

Jeśli mamy reprezentację algebry Liego \mathfrak{g} , jej reprezentacja kontrgradientna jest zdefiniowana jako

$$\pi^{\text{ct}}(A) := -\pi(A)^\#, \quad A \in \mathfrak{g}.$$

π jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy gdy π^{ct} jest nieprzywiedlna (bo anihilator przestrzeni niezmienniczej dla π jest niezmienniczy dla π^{ct}).

Zauważmy, że dla reprezentacji unitarnych zapisanych w bazie ortonormalnej, reprezentacja kontrgradientna pokrywa się z reprezentacją zespolenie sprzężoną $\bar{\rho}$.

14.3 Utożsamienie iloczynu tensorowego i operatorów liniowych

Rozważmy przestrzeń wektorową skończonej wymiarową \mathcal{V} . Wybierzmy bazę e_1, \dots, e_n , Mamy wtedy bazę w przestrzeni dualnej e^1, \dots, e^n . Wektor $v \in \mathcal{V}$ możemy zapisywać na wiele sposobów

$$v = v^i e_i = [v^i].$$

Niech \mathcal{W} będzie również skończonej wymiarową przestrzenią. Wybierzmy w niej bazę f_1, \dots, f_m . Zdefiniujmy $J : \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \rightarrow L(\mathcal{W}^\#, \mathcal{V})$ następująco:

$$J(e_i \otimes f_j)\xi := e_i \langle f_j | \xi \rangle.$$

Zauważmy, że $\Phi \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ i $J(\Phi)$ mają tę samą macierz:

$$\Phi = \Phi^{ij} e_i \otimes f_j, \quad J(\Phi) f^j = \Phi^{ij} e_i.$$

Jeśli $P \in L(\mathcal{V})$, $Q \in L(\mathcal{W})$, to

$$P \otimes Q \Phi = PJ(\Phi)Q^\#.$$

W szczególności, jeśli $\mathcal{W} = \mathcal{V}^\#$, to $J(e_i \otimes e^j) = \mathbb{1}_\mathcal{V}$.

Niech $\Psi \in \mathcal{V}^\# \otimes \mathcal{W}^\#$. Wtedy

$$\text{Tr} ST = \langle J(S) | J(T) \rangle.$$

14.4 Iloczyn reprezentacji i reprezentacji kontrgradientnej

Rozważmy skończenie wymiarową reprezentację grupy $\rho : G \rightarrow GL(\mathcal{V})$ lub algebry Liego $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow gl(\mathcal{V})$. Wtedy mamy reprezentację $\rho \otimes \rho^{\text{ct}}$ lub $\rho \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \rho^{\text{ct}}$ w $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^\#$. Wektor $e_i \otimes e^i$ rozpinia 1-wymiarową przestrzeń na której ta reprezentacja jest trywialna. Ma ona reprezentację dopełniającą, zadaną przez jądro śladu, gdzie korzystamy z utożsamienia $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^\# \simeq L(\mathcal{V})$.

Na przykład, jeśli rozważymy algebrę $sl(n, \mathbb{C})$ lub $su(n)$ i ρ jest reprezentacją fundamentalną na \mathbb{C}^n , to dostaniemy reprezentację dołączoną. Jest ona nieprzywiedlna.

Jeśli rozważymy reprezentację fundamentalną $so(n, \mathbb{C})$ lub $so(n)$, to reprezentacja na macierzach bezśladowych rozkłada się na sumę prostą dwóch podreprezentacji nieprzywiedlnych: w macierzach symetrycznych bezśladowych i w macierzach antysymetrycznych. Ta druga jest tożsama z reprezentacją dołączoną.

Twierdzenie 14.1 *Niech π_1, π_2 będą skończenie wymiarowymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi. Wtedy $\pi_1 \otimes \pi_2$ zawiera $\iota \Leftrightarrow \pi_2 \simeq \pi_1^{\text{ct}}$. Jeśli to ma miejsce, to $\pi_1 \otimes \pi_2$ zawiera ι jednokrotnie*

Dowód. \Rightarrow : Niech $\Psi \in \mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2$ będzie niezmienniczym wektorem dla $\pi_1 \otimes \pi_2$.

$$\Psi = \pi_1(g) \otimes \pi_2(g) \Psi$$

implikuje

$$J(\Psi) = \pi_1(g) J(\Psi) \pi_2(g)^\#,$$

czyli

$$J(\Psi) \pi_2(g)^\#{}^{-1} = \pi_1(g) J(\Psi),$$

zatem $J(\Psi)$ splata π_1 i π_2^{ct} . Zatem $\pi_1 \simeq \pi_2^{\text{ct}}$.

Odwracając rozumowanie dostajemy \Leftarrow .

Poza tym, z Lematu Schura wynika, że $J(\Psi)$ jest proporcjonalne do identyczności. $\pi_1 \otimes \pi_2$ zawiera ι jednokrotnie

14.5 Istnienie miary Haara i jego konsekwencje

Założmy, że (X, dx) jest przestrzenią z miarą na której działa mierzalnie grupa G przez $(g, x) \mapsto gx$. Mówimy, że działanie zachowuje miarę, jeśli

$$\int f(x)dx = \int f(gx)dx.$$

W szczególności, grupa działa na sobie na dwa sposoby: z prawej i z lewej. Mówimy, że miara dg na G jest lewoniemiennicza jeśli

$$\int f(g)dg = \int f(hg)dg,$$

prawoniemiennicza jeśli

$$\int f(g)dg = \int f(gh^{-1})dg.$$

Twierdzenie 14.2 *Na zwartej grupie istnieje dokładnie jedna miara lewo- i prawoniemiennicza dg taka, że $\int_G dg = 1$.*

Miarę tę nazywamy *unormowaną miarą Haara*. W szczególności, na skończonej grupie jest to miara licząca podzielona przez rząd grupy.

Twierdzenie 14.3 *Niech (ρ, \mathcal{V}) będzie reprezentacją grupy zwartej G . Wtedy istnieje iloczyn skalarny taki, że ρ jest reprezentacją unitarną*

Dowód. Wybieramy dowolny iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot)_0$ na \mathcal{V} Kładziemy

$$(v|w) := \int (\rho(g)v|\rho(g)w)_0 dg.$$

□

Wniosek 14.4 *Reprezentacje skończenie wymiarowe grupy zwartej są zawsze całkowicie rozkładalne.*

Twierdzenie 14.5 *\mathfrak{g} jest algebrą Liego grupy Liego zwartej wtedy i tylko wtedy gdy posiada dodatni niezdegenerowany iloczyn skalarny.*

14.6 Reprezentacje nieprzywiedlne

Twierdzenie 14.6 *Każda reprezentacja nieprzywiedlna grupy zwartej jest skończenie wymiarowa.*

Niech G będzie grupą zwartą. Oznaczmy przez \hat{G} zbiór klas równoważności reprezentacji nieprzywiedlnych w przestrzeniach zespolonych. Możemy założyć, że są unitarne. W szczególności, mamy w \hat{G} reprezentację trywialną ι . Dla każdego elementu \hat{G} wybierzemy reprezentanta (π, \mathcal{V}_π) . Wybierzemy również bazę ortonormalną $e_{\pi,1}, \dots, e_{\pi,d_\pi}$, gdzie $d_\pi := \dim \mathcal{V}_\pi$. Możemy wtedy zapisać π jako macierz

$$[\pi_{ij}(g)]_{i,j=1,\dots,d_\pi}, \quad g \in G.$$

Mamy też charaktery nieprzywiedlne

$$\chi_\pi(g) := \sum_{i=1}^{d_\pi} \pi_{ii}(g) = \text{Tr} \pi(g)$$

Dla każdej $\pi \in \hat{G}$ mamy jej reprezentację zespolenie sprzężoną $\bar{\pi}$, która pokrywa się z jej reprezentacją kontrgradientną π^{ct} . Oczywiście, $\chi_{\bar{\pi}} = \overline{\chi_\pi}$.

W $L^2(G)$ będziemy używać iloczynu skalarnego

$$(f|f') := \int \overline{f(g)} f'(g) dg.$$

Niech $L_{\text{cent}}^2(G)$ będzie podprzestrzenią $L^2(G)$ składającą się z funkcji stałych na klasach sprzężoności.

Twierdzenie 14.7 (1) $\sqrt{d_\pi} \pi_{ij}$, $\pi \in \hat{G}$, $i, j = 1, \dots, d_\pi$ stanowią bazę ortonormalną w $L^2(G)$.
(2) χ_π stanowią bazę ortonormalną w $L_{\text{cent}}^2(G)$.

14.7 Rozkład dowolnej reprezentacji

Niech (ρ, \mathcal{W}) będzie reprezentacją grupy G zwartej na przestrzeni wymiaru $d_\rho < \infty$. Jest ona całkowicie rozkładalna, czyli można rozłożyć ją na składniki

$$\rho \simeq \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} m_\pi \pi. \quad (14.57)$$

Zatem

$$d_\rho = \sum_{\pi \in \hat{G}} m_\pi d_\pi. \quad (14.58)$$

m_π nazywamy *krotnością* π w ρ . Jeśli ρ jest reprezentacją unitarną, to można założyć, że suma (14.57) jest ortogonalna.

Mamy rozkład przestrzeni \mathcal{W} na sumę prostą ortogonalną $\mathcal{W} = \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} \mathcal{W}_\pi$ taki, że $\rho|_{\mathcal{W}_\pi}$ jest równoważna $m_\pi \pi$, oraz rzuty ortogonalne Q_π na \mathcal{W}_π . Przestrzenie \mathcal{W}_π będziemy nazywać przestrzeniami izotypowymi. Oczywiście, $\mathcal{W}_\pi = \text{Ran} Q_\pi$,

$$\sum_{\pi \in \hat{G}} Q_\pi = \mathbb{1}, \quad Q_\pi^* = Q_\pi, \quad Q_\pi Q_{\pi'} = Q_\pi \delta_{\pi\pi'}.$$

Będziemy czasem pisać $Q_\pi(\rho)$, $m_\pi(\rho)$ żeby podkreślić zależność od ρ .

Twierdzenie 14.8 Dla $\pi \in \hat{G}$

$$m_\pi(\rho) = \int \overline{\chi_\pi(g)} \chi_\rho(g) dg \quad (14.59)$$

$$= (\chi_\pi | \chi_\rho), \quad (14.60)$$

$$Q_\pi(\rho) = d_\pi \int \overline{\chi_\pi(g)} \rho(g) dg. \quad (14.61)$$

W szczególności, mamy rzut na wektory stałe

$$Q_\iota(\rho) = \int \rho(g) dg.$$

Twierdzenie 14.9

$$m_\iota(\rho \otimes \pi) = m_{\bar{\pi}}(\rho) = \int \chi_\pi(g) \chi_\rho(g) dg, \quad (14.62)$$

$$Q_\iota(\rho \otimes \pi) = \int \rho(g) \otimes \pi(g) dg, \quad (14.63)$$

$$\text{Tr}_\pi Q_\iota(\rho \otimes \pi) = \frac{1}{d_\pi} Q_{\bar{\pi}}(\rho), \quad (14.64)$$

$$\sum_{\pi \in \hat{G}} d_\pi \text{Tr}_\pi Q_\iota(\rho \otimes \pi) = \mathbf{1}_\rho. \quad (14.65)$$

Dowód. (14.62) jest oczywiste.

(14.63) ma praktycznie taki sam dowód jak dla grupy skończonej. Możemy znaleźć bazę ortonormalną w \mathcal{W}_π $e_{\pi,i,p}$, $i = 1, \dots, d_\pi$, $p = 1, \dots, m_\pi$ taką, że

$$\rho(g) e_{\pi,i,p} = \sum_{j=1}^{d_\pi} \pi_{ji}(g) e_{\pi,j,p}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} d_\pi \int \overline{\chi_{\pi'}(g)} \rho(g) e_{\pi,i,p} dg &= d_\pi \int \sum_{k=1}^{d_{\pi'}} \sum_{j=1}^{d_\pi} \overline{\pi'_{kk}(g)} \pi_{ji}(g) e_{\pi,j,p} dg \\ &= \delta_{\pi,\pi'} \sum_{k,j=1}^{d_\pi} \delta_{kj} \delta_{ki} e_{\pi,j,p} = \delta_{\pi,\pi'} e_{\pi,i,p}. \end{aligned}$$

(14.64) wynika z (14.63):

$$\begin{aligned} \text{Tr}_\pi Q_\iota(\rho \otimes \pi) &= \int \rho(g) \chi_\pi(g) dg \\ &= \int \rho(g) \overline{\chi_{\bar{\pi}}(g)} dg = \frac{1}{d_\pi} Q_{\bar{\pi}}(\rho). \end{aligned}$$

(14.65) wynika z

$$\sum_{\pi \in \hat{G}} Q_{\pi}(\rho) = \mathbb{1}_{\rho}.$$

□

Twierdzenie 14.10 *Załóżmy, że $\pi, \pi' \in \hat{G}$, $\Phi \in \text{Ran}Q_{\iota}(\rho \otimes \pi)$ i $\Phi' \in \text{Ran}Q_{\iota}(\rho \otimes \pi')$. Wtedy*

$$d_{\pi} \text{Tr}_{\rho} |\Phi\rangle\langle\Phi| = \delta_{\pi, \pi'} (\Phi' | \Phi) \mathbb{1}_{\pi}. \quad (14.66)$$

Dowód. Oczywiście,

$$\rho(g) \otimes \pi(g) \Phi = \Phi, \quad \rho(g) \otimes \pi'(g) \Phi' = \Phi'.$$

Zatem,

$$\rho(g) \otimes \pi(g) |\Phi\rangle\langle\Phi| (\Phi' | \rho(g)^{-1} \otimes \pi'(g)^{-1} = |\Phi\rangle\langle\Phi|.$$

Stąd,

$$\pi(g) \text{Tr}_{\rho} |\Phi\rangle\langle\Phi| (\Phi' | \pi'(g)^{-1} = \text{Tr}_{\rho} |\Phi\rangle\langle\Phi|.$$

Więc, z Lematu Schura wynika, że

$$\text{Tr}_{\rho} |\Phi\rangle\langle\Phi| (\Phi' | = \delta_{\pi, \pi'} c \mathbb{1}_{\pi}. \quad (14.67)$$

Biorąc ślad (14.67) dostajemy

$$(\Phi' | \Phi) = \delta_{\pi, \pi'} c d_{\pi}.$$

□

14.8 Rozkład iloczynu tensorowego reprezentacji

Szczególnie ważny jest rozkład iloczynu tensorowego dwóch reprezentacji nieprzywiedlnych. Oczywiście, $\pi \otimes \iota \simeq \pi$, $\pi \otimes \bar{\pi}$ zawiera ι z krotnością 1.

Niech $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \in \hat{G}$. Mamy wzór

$$\begin{aligned} m_{\bar{\pi}_3}(\pi_1 \otimes \pi_2) &= m_{\iota}(\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3) \\ &= \int \chi_{\pi_1}(g) \chi_{\pi_2}(g) \chi_{\pi_3}(g) dg. \end{aligned}$$

A oto wzór na odpowiednie rzuty:

$$\begin{aligned} Q_{\bar{\pi}_3}(\pi_1 \otimes \pi_2) &= d_{\pi_3} \int \overline{\chi_{\bar{\pi}_3}(g)} \pi_1(g) \otimes \pi_2(g) dg \\ &= d_{\pi_3} \int \chi_{\pi_3}(g) \pi_1(g) \otimes \pi_2(g) dg; \\ Q_{\iota}(\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3) &= \int \pi_1(g) \otimes \pi_2(g) \otimes \pi_3(g) dg. \end{aligned} \quad (14.68)$$

Zauważmy, że

$$d_{\pi_3} \text{Tr}_{\pi_3} Q_{\iota}(\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3) = Q_{\bar{\pi}_3}(\pi_1 \otimes \pi_2). \quad (14.69)$$

14.9 Przykład: \mathbb{Z}_n

Reprezentacje są numerowane przez $j \in \mathbb{Z}_n$:

$$\mathbb{T} \ni k \mapsto \pi_j(\phi) := e^{2\pi i j k}$$

Mamy $\bar{\pi}_j = \pi_{n-j}$

$$\pi_j \otimes \pi_k \simeq \pi_{j+k}.$$

14.10 Przykład: $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

Reprezentacje są numerowane przez $j \in \mathbb{Z}$:

$$\mathbb{T} \ni \phi \mapsto \pi_j(\phi) := e^{2\pi i j \phi}$$

Mamy $\bar{\pi}_j = \pi_{-j}$

$$\pi_j \otimes \pi_k \simeq \pi_{j+k}.$$

14.11 Przykład: S_3

S_3 ma reprezentację trywialną, signum i (2-wymiarową) standardową, którą oznaczamy przez π . Oto tablica charakterów:

	ι	sgn	π
id	1	1	2
(12)	1	-1	0
(123)	1	1	-1

Mamy

$$\chi_{\pi \otimes \pi} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \chi_\iota + \chi_{\text{sgn}} + \chi_\pi.$$

15 $SL(2, \mathbb{C})$ i $SU(2)$ i ich reprezentacje

W tym rozdziale będziemy badać zwartą grupę Liego $SU(2)$ i zespoloną grupę Liego $SL(2, \mathbb{C})$. Ich algebry Liego to odpowiednio $su(2)$ i $sl(2, \mathbb{C})$ $sl(2, \mathbb{C})$ jest kompleksyfikacją $su(2)$.

15.1 Algebra wielomianów

Niech \mathcal{V} będzie skończenie wymiarową przestrzenią Hilberta. Niech Θ_s będzie symetryzátorem. Definiujemy

$$\otimes_s^n \mathcal{V} := \Theta_s^n \otimes^n \mathcal{V}.$$

Mamy wtedy działanie łączne i przemienne: $\Phi \in \otimes_s^n \mathcal{V}$, $\Psi \in \otimes_s^m \mathcal{V}$, przechodzi na

$$\Phi \otimes_s \Psi := \Theta_s^{n+m} \Phi \otimes \Psi \in \otimes_s^{n+m} \mathcal{V}.$$

Przykłady:

$$e \otimes_s \cdots \otimes_s e = e \otimes \cdots \otimes e, \quad (15.70)$$

$$f \otimes_s e^{\otimes(n-1)} = \frac{1}{n} (f \otimes e^{\otimes(n-1)} + \cdots + e^{\otimes(n-1)} \otimes f). \quad (15.71)$$

Jeśli e_1, \dots, e_d jest bazą w \mathcal{V} , to

$$e_1^{\otimes n_1} \otimes_s \cdots \otimes_s e_d^{\otimes n_d}, \quad n_1 + \cdots + n_d = n,$$

jest bazą w $\otimes_s^n \mathcal{V}$.

Wielomianem d zmiennych jednorodnym stopnia n nazywamy wyrażenie

$$\sum_{n_1 + \cdots + n_d = n} t_{n_1, \dots, n_d} y_1^{n_1} \cdots y_d^{n_d}.$$

Wielomiany tworzą algebrę przemienną i łączną oznaczaną czasem $\mathbb{C}[y_1, \dots, y_d]$. Odwzorowanie liniowe $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes_s^n \mathcal{V}$ na $\mathbb{C}[y_1, \dots, y_d]$, które $e_1^{\otimes n_1} \otimes_s \cdots \otimes_s e_d^{\otimes n_d}$ przekształca na $y_1^{n_1} \cdots y_d^{n_d}$, jest izomorfizmem algebr.

Niech $G \subset U(\mathcal{V})$ będzie grupą Liego i $\mathfrak{g} \in u(\mathcal{V})$ jej algebrą Liego. Wtedy

$$G \ni g \mapsto g \otimes \cdots \otimes g \Big|_{\otimes_s \mathcal{V}}, \quad (15.72)$$

$$\mathfrak{g} \ni X \mapsto X \otimes \mathbb{1}^{(n-1)\otimes} + \cdots + \mathbb{1}^{(n-1)\otimes} \otimes X \Big|_{\otimes_s^n \mathcal{V}} \quad (15.73)$$

są ich reprezentacjami na $\otimes_s^n \mathcal{V}$.

Używając bazy e_1, \dots, e_d , dla $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$, te działania dają się zapisać jako

$$ge_i = e_j g_{ji}, \quad (15.74)$$

$$ge_i^{\otimes n} = (e_j g_{ji})^{\otimes n}, \quad (15.75)$$

$$gy_i^n = (y_j g_{ji})^n; \quad (15.76)$$

$$Xe_i = e_j X_{ji}, \quad (15.77)$$

$$Xe_i^{\otimes n} = n(e_j X_{ji}) \otimes_s e_i^{(n-1)\otimes}, \quad (15.78)$$

$$Xy_i^n = n(y_j X_{ji}) y_i^{n-1}. \quad (15.79)$$

Zatem reprezentacje (15.72) and (15.73) w terminach wielomianów zapisują się

$$gP = P \circ g^\#, \quad (15.80)$$

$$XP = X_{ji} y_j \partial_{y_i} P. \quad (15.81)$$

15.2 Reprezentacje $SL(2, \mathbb{C})$, $sl(2, \mathbb{C})$, $SU(2)$, $su(2)$

$SL(2, \mathbb{C})$, $sl(2, \mathbb{C})$, $SU(2)$, $su(2)$ mają reprezentację na \mathbb{C}^2 , którą nazywamy fundamentalną. $SL(2, \mathbb{C})$ działa w naturalny sposób w \mathbb{C}^2 . Działa więc również w $\otimes_s^{2l} \mathbb{C}^2$ dla $l = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$

Oznaczmy bazę kanoniczną w \mathbb{C}^2 przez $|\uparrow\rangle$ i $|\downarrow\rangle$. Wprowadźmy bazę w $\otimes_s^{2l}\mathbb{C}^2$

$$v_m := |\uparrow\rangle^{l+m} \otimes_s |\downarrow\rangle^{l-m} \quad (15.82)$$

$$= \frac{(l+m)!(l-m)!}{(2l)!} \sum_{\sigma \in S_{2l}/S_{l+m} \times S_{l-m}} \Theta(\sigma) |\uparrow\rangle^{l+m} \otimes |\downarrow\rangle^{l-m} \quad (15.83)$$

Możemy policzyć kwadrat normy:

$$(v_m|v_m) = \left(\frac{(l+m)!(l-m)!}{(2l)!} \right)^2 \#(S_{2l}/S_{l+m} \times S_{l-m}) \quad (15.84)$$

$$= \frac{(l+m)!(l-m)!}{(2l)!}. \quad (15.85)$$

W zapisie wielomianowym v_m odpowiada jednomianowi $x_\uparrow^{l+m} x_\downarrow^{l-m}$.

Można też używać innej bazy:

$$u_m := \sum |j_1\rangle \otimes \cdots \otimes |j_{2l}\rangle \quad (15.86)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_{2l}/S_{l+m} \times S_{l-m}} \Theta(\sigma) |\uparrow\rangle^{l+m} \otimes |\downarrow\rangle^{l-m}, \quad (15.87)$$

gdzie w (15.86) sumujemy po wektorach składających się z $l-m$ czynników $|\downarrow\rangle$ i $l+m$ czynników $|\uparrow\rangle$. Oczywiście,

$$v_m = \frac{(l+m)!(l-m)!}{(2l)!} u_m.$$

$$(u_m|u_m) = \frac{(2l)!}{(l+m)!(l-m)!}.$$

15.3 $sl(2, \mathbb{C})$ i $su(2)$

Niech $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ będą macierzami Pauliego.

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Spełniają one

$$\sigma_i \sigma_j = -i \epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij} \mathbb{1}, \quad (15.88)$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \mathbb{1} - i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma}. \quad (15.89)$$

Stanowią one bazę algebry $sl(2, \mathbb{C})$ i mają relacje komutacyjne

$$\left[\frac{i\sigma_i}{2}, \frac{i\sigma_j}{2} \right] = \epsilon_{ijk} \frac{i\sigma_k}{2}. \quad (15.90)$$

Będziemy również używać alternatywnej bazy w $sl(2, \mathbb{C})$

$$N = \frac{1}{2}\sigma_3, \quad A_\pm := \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2).$$

Mamy

$$\begin{aligned} A_+ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & A_- &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \sigma_1 &= A_+ + A_-, & \sigma_2 &= -iA_+ + iA_-, \\ [N, A_\pm] &= \pm A_\pm, & [A_+, A_-] &= 2N. \end{aligned}$$

Na $sl(2, \mathbb{C})$ mamy iloczyn skalarny śladowy $\text{Tr}XY$, $X, Y \in sl(2, \mathbb{C})$. Możemy go też ograniczyć do rzeczywistej podprzestrzeni macierzy hermitowskich bezśladowych $isu(2, \mathbb{C})$, wtedy jest dodatnio określony. Alternatywnie, ten iloczyn skalarny możemy dostać z wyznacznika, mamy bowiem tożsamość

$$\det X = -\frac{1}{2}\text{Tr}X^2, \quad X \in sl(2, \mathbb{C}).$$

$i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3$ stanowią bazę ortonormalną algebry Liego $su(2)$.

15.4 $so(3, \mathbb{C})$ i $SO(3, \mathbb{C})$

Pamiętamy, że $A \in SL(2, \mathbb{C})$ możemy przyporządkować

$$\rho_A X := AXA^{-1}, \quad X \in sl(2, \mathbb{C})$$

Zachowuje iloczyn skalarny. Utożsamiając $sl(2, \mathbb{C})$ z \mathbb{C}^3 dostajemy homomorfizm $SL(2, \mathbb{C})$ na $SO(3, \mathbb{C})$ z jądrem $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$.

Biorąc $A \in SU(2)$ i ograniczając się do $X \in isu(2)$, dostajemy homomorfizm $SU(2)$ na $SO(3)$ z takim samym jądrem.

Mamy też infinitesimalne wersje tych homomorfizmów zadane przez

$$\rho_A X := [A, X].$$

Zadają one izomorfizm $sl(2, \mathbb{C})$ na $so(3, \mathbb{C})$ oraz $su(2)$ na $so(3)$.

Bazę w $so(3)$ stanowią

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oczywiście,

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= \epsilon_{ijk} L_k, \\ \rho_{i\sigma_i/2} &= L_i, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

15.5 Skończenie wymiarowe reprezentacje $sl(2, \mathbb{C})$

Rozważmy reprezentację $\pi : sl(2, \mathbb{C}) \rightarrow gl(\mathcal{V})$. Wprowadźmy operator Casimira

$$\begin{aligned} C &:= \frac{1}{4}(\pi(\sigma_1)^2 + \pi(\sigma_2)^2 + \pi(\sigma_3)^2) = \pi(N)^2 + \frac{1}{2}(\pi(A_+)\pi(A_-) + \pi(A_-)\pi(A_+)) \\ &= \pi(N)^2 - \pi(N) + \pi(A_+)\pi(A_-) = \pi(N)^2 + \pi(N) + \pi(A_-)\pi(A_+). \end{aligned}$$

Sprawdzamy, że C komutuje z $\pi(sl(2, \mathbb{C}))$. Zatem przestrzenie własne operatora C są niezmiennicze dla $\pi(sl(2, \mathbb{C}))$.

Będziemy pomijać π .

Twierdzenie 15.1 (1) Dla każdego $n = 1, 2, \dots$ istnieje jedyna, z dokładnością do równoważności, reprezentacja nieprzywiedlna $sl(2, \mathbb{C})$ w \mathbb{C}^n . Nazywamy ją reprezentacją o spinie l , gdzie $n = 2l + 1$. Ma ona następujące własności:

- (i) $\text{spec}N = \{-l, -l + 1, \dots, l - 1, l\}$.
- (ii) $C = l(l + 1)$.
- (iii) Istnieje baza $\{v_{-l}, \dots, v_l\}$ taka, że

$$\begin{aligned} Nv_m &= mv_m, \\ A_-v_m &= (l + m)v_{m-1}, \\ A_+v_m &= (l - m)v_{m+1}. \end{aligned} \tag{15.91}$$

(2) Reprezentacja $sl(2, \mathbb{C})$ w przestrzeni \mathcal{V} jest ona równoważna reprezentacji o spinie l wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z poniższych warunków:

- (i) Istnieje w \mathcal{V} wektor cykliczny v_+ taki, że $A_+v_+ = 0$ i $Nv_+ = lv_+$. (Wektor ten nazywamy wektorem najwyższej wagi).
- (ii) Istnieje w \mathcal{V} wektor cykliczny v_- taki, że $A_-v_- = 0$ i $Nv_- = -lv_-$. (Wektor ten nazywamy wektorem najniższej wagi).
- (iii) Reprezentacja jest nieprzywiedlna i $\max \text{spec}N = l$.
- (iv) Reprezentacja jest nieprzywiedlna i $\min \text{spec}N = -l$.

Dowód. Reprezentację o spinie l można zrealizować w przestrzeni wielomianów rozpiętych przez $v_m := z_+^{l+m} z_-^{l-m}$, $m = -l, \dots, l$. Zadana jest przez operatory

$$\begin{aligned} N &:= \frac{1}{2}(z_+ \partial_{z_+} - z_- \partial_{z_-}), \\ A_- &:= z_- \partial_{z_+}, \\ A_+ &:= z_+ \partial_{z_-}. \end{aligned}$$

Sprawdzamy, że dostajemy wtedy reprezentację (15.91).

Pokażmy, że jest ona nieprzywiedlna. Niech \mathcal{V}_0 będzie podprzestrzenią niezmienniczą. Niech $x = \sum_{m=-l}^l x_m v_m \in \mathcal{V}_0$. Operator N zachowuje \mathcal{V}_0 . Zatem $\prod_{m \neq n} (N - m)x = cx_n v_n \in \mathcal{V}_0$, gdzie $c \neq 0$. Zatem jeśli $x_n \neq 0$, to $v_n \in \mathcal{V}_0$. Ale wtedy, działając A^+ i A^- dostajemy wszystkie v_m .

Załóżmy teraz, że $sl(2, \mathbb{C})$ działa nieprzywiedlnie w skończonej wymiarowej przestrzeni \mathcal{V} . Pokażmy najpierw, że jeśli $\lambda \in \text{spec}N$, to $\text{spec}N \subset \lambda + \mathbb{Z}$. W istocie, N posiada wektor własny $v \in \mathcal{V}$:

$$Nv = \lambda v.$$

Ponieważ \mathcal{V} jest nieprzywiedlna, dowolny wektor w \mathcal{V} jest liniową kombinacją $A_1 \cdots A_n v$, gdzie $A_i = A_\pm$ lub $A_i = N$. Poza tym,

$$NA_+v = (\lambda + 1)A_+v, \quad NA_-v = (\lambda - 1)A_-v.$$

Korzystając, z tego, że \mathcal{V} jest skończenie wymiarowa, dostajemy λ_{\pm} takie, że $\lambda_- = \min \text{spec} N$, $\lambda_+ = \max \text{spec} N$. Niech $Nv_{\pm} = \lambda_{\pm}v_{\pm}$, $v_{\pm} \neq 0$. Mamy $\lambda_+ - \lambda_- \in \mathbb{Z}$ i $A_{\pm}v_{\pm} = 0$. Mamy

$$\begin{aligned} Cv_+ &= (N^2 + N)v_+ = (\lambda_+^2 + \lambda_+)v_+, \\ Cv_- &= (N^2 - N)v_- = (\lambda_-^2 - \lambda_-)v_-. \end{aligned}$$

Ponieważ reprezentacja jest nieprzywiedlna, C jest liczbą. Równanie

$$\lambda_+^2 + \lambda_+ = \lambda_-^2 - \lambda_-$$

ma dwa rozwiązania: $\lambda_+ = \lambda_- - 1$, które odrzucamy, bo wtedy $\lambda_+ < \lambda_-$, i $\lambda_- = -\lambda_+$. Kładziemy $l := \lambda_+$. Oczywiście, $2l = \lambda_+ - \lambda_- \in \mathbb{Z}$. Rozważmy $\text{Span}(A_-^j v_+, j = 0, \dots, 2l)$. Korzystając z relacji komutacyjnych sprawdzamy, że jest to niezmiennicza przestrzeń dla $sl(2, \mathbb{C})$. Zatem jest ona równa \mathcal{V} . Poza tym, $A_-^{2l}v_+$ jest proporcjonalny do v_- . Kładziemy

$$v_m := \frac{(l+m)!}{(2l)!} A_-^{l-m} v_+.$$

Oczywiście, $A_- v_m = (l+m)v_{m-1}$ i $Nv_m = mv_m$. Poza tym,

$$\begin{aligned} l(l+1)A_-^{l-m-1}v_+ &= (N^2 - N + A_+A_-)A_-^{l-m-1}v_+ \\ &= m(m+1)A_-^{l-m-1}v_+ + A_+A_-^{l-m}v_+. \end{aligned}$$

Stąd

$$A_+A_-^{l-m}v_+ = (l-m)(l+m+1)A_-^{l-m-1}v_+.$$

Zatem $A_+v_m = (l-m)A_{m+1}$. To dowodzi jedności w punkcie (1). \square

Alternatywną naturalną bazą dla reprezentacji $sl(2, \mathbb{C})$ jest

$$u_m := \frac{(2l)!}{(l-m)!(l+m)!} v_m = \frac{A_-^{l-m}v_+}{(l-m)!}.$$

Dostajemy wtedy

$$\begin{aligned} Nu_m &= mu_m, \\ A_-u_m &= (l-m+1)u_{m-1}, \\ A_+u_m &= (l+m+1)u_{m+1}. \end{aligned}$$

15.6 Reprezentacje unitarne $su(2)$

Twierdzenie 15.2 *Każda nieprzywiedlna reprezentacja infinitezymalnie unitarna $su(2)$ jest skończenie wymiarowa. Jest ona obcięciem reprezentacji opisanych w poprzednim twierdzeniu. Bazę unitarną dostajemy kładąc*

$$|l, m\rangle = \frac{\sqrt{(2l)!}}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!}} v_m = \frac{\sqrt{(l-m)!(l+m)!}}{\sqrt{(2l)!}} u_m.$$

Mamy wtedy

$$\begin{aligned} N|l, m) &= m|l, m), \\ A_-|l, m) &= \sqrt{(l+m)(l-m+1)}|l, m-1), \\ A_+|l, m) &= \sqrt{(l+m+1)(l-m)}|l, m+1). \end{aligned} \quad (15.92)$$

Dowód. Rozważmy infinitesimalnie unitarną reprezentację nieprzywiedlną $su(2)$. (Nie zakładamy skończonego wymiaru przestrzeni). Operatory $i\sigma_i$ muszą być antysamosprężone, czyli N musi być samosprężony, a $A_+ = A_-^*$. Operator Casimira jest dodatni. Ponieważ $A_+A_- \geq 0$, więc $N^2 - N$ jest ograniczone. To pokazuje, że $\text{spec}N$ musi być ograniczone. Zatem $\text{Ker}A_+ \neq \{0\}$. Z nieprzywiedlności, operator Casimira jest liczbą. Dlatego na $\text{Ker}A_+$ mamy $C = N^2 - N$. N zachowuje $\text{Ker}A_+$. Spektrum N na $\text{Ker}A_+$ jest najwyżej dwuelementowe. Zatem można zdiagnozować N . Zatem dostajemy te same przypadki, które były rozważane w Tw. 4.

Baza opisana w tym twierdzeniu jest ortogonalna, ale nie ortonormalna. Mamy relację

$$\begin{aligned} (A_-^{l-m}v_+|A_-^{l-m}v_+) &= (A_-^{l-m-1}v_+|A_+A_-A_-^{l-m-1}v_+) \\ &= (l-m)(l+m+1)(A_-^{l-m-1}v_+|A_-^{l-m-1}v_+). \end{aligned}$$

Stąd dostajemy

$$\begin{aligned} (A_-^{l-m}v_+|A_-^{l-m}v_+) &= (l-m) \cdots 1(l+m+1) \cdots 2l(v_+|v_+) \\ &= \frac{(l-m)!(2l)!}{(l+m)!}(v_+|v_+). \end{aligned} \quad (15.93)$$

Stąd, żeby dostać bazę ortonormalną, kładziemy

$$|l, m) := \frac{\sqrt{(l+m)!}}{\sqrt{(l-m)!(2l)!}} A_-^{l-m}v_+. \quad (15.94)$$

□

15.7 Reprezentacje $SL(2, \mathbb{C})$ i $SU(2)$

Twierdzenie 15.3 Dla każdego $n = 2l + 1 = 1, 2, \dots$ istnieje jedyna, z dokładnością do równoważności, ciągła reprezentacja nieprzywiedlna $SL(2, \mathbb{C})$ w \mathbb{C}^n . Odpowiada ona reprezentacji $sl(2, \mathbb{C})$ omawianej powyżej. Dla $l \in \mathbb{Z}$ zadaje ona reprezentację $SO(3, \mathbb{C})$.

Dowód. Istnienie: Oznaczmy bazę w \mathbb{C}^2 przez $|\uparrow\rangle$ i $|\downarrow\rangle$. $SL(2, \mathbb{C})$ działa w naturalny sposób w \mathbb{C}^2 . Działa więc również w $\otimes_s^{2l} \mathbb{C}^2$.

Wprowadźmy bazę w $\otimes_s^{2l} \mathbb{C}^2$

$$v_m = \sum |j_1) \otimes \cdots \otimes |j_{2l}),$$

gdzie sumujemy po wektorach składających się z $l-m$ czynników $|\downarrow\rangle$ i $l+m$ czynników $|\uparrow\rangle$. Latwo sprawdzamy, że dostajemy reprezentację $SL(2, \mathbb{C})$ i że jest ona nieprzywiedlna.

Jednoznaczność: Jeśli mamy ciągłą nieprzywiedlną reprezentację $SL(2, \mathbb{C})$ w \mathbb{C}^n , to generuje ona nieprzywiedlną reprezentację $sl(2, \mathbb{C})$ w \mathbb{C}^n . Takie reprezentacje już zbadaliśmy. □

Twierdzenie 15.4 Dla każdego $n = 2l + 1 = 1, 2, \dots$ istnieje jedyna, z dokładnością do równoważności, ciągła unitarna reprezentacja nieprzywiedlna $SU(2)$ w \mathbb{C}^n . Odpowiada ona reprezentacji $su(2)$ omawianej powyżej. Dla $l \in \mathbb{Z}$ zadaje ona reprezentację $SO(3)$.

Dowód. Powtarzamy te same argumenty. Możemy jeszcze zauważyć, że jeśli $SU(2)$ działa na \mathbb{C}^2 unitarnie, to na $\otimes_s^{2l} \mathbb{C}^2$ też. \square

Mamy $e^{i2\pi N} = (-1)^{2l}$. Dlatego dla $l \in \mathbb{Z}$ reprezentacje $SU(2)$ odpowiadają reprezentacjom $SO(3)$.

15.8 Parametryzacje $SL(2, \mathbb{C})$ i $SU(2)$

Niech $(a_0, \vec{a}) \in \mathbb{C}^4$. Niech $A = a_0 \mathbb{1} + i\vec{a}\vec{\sigma}$. Wtedy

$$\det A = a_0^2 + (\vec{a})^2.$$

Zatem $SL(2, \mathbb{C})$ jest 3-wymiarową sferą zespoloną w \mathbb{C}^4 :

$$SL(2, \mathbb{C}) = \{a_0 \mathbb{1} + i\vec{a}\vec{\sigma} : a_0^2 + \vec{a}^2 = 1\}. \quad (15.95)$$

Odwzorowanie eksponencjalne przekształca $sl(2, \mathbb{C})$ na $SL(2, \mathbb{C})$. W rzeczy samej, używając (15.89) dostajemy

$$e^{\frac{i}{2}\vec{\theta}\vec{\sigma}} = \cos \frac{\theta}{2} \mathbb{1} + \frac{i\vec{\theta}\vec{\sigma}}{\theta} \sin \frac{\theta}{2}, \quad \vec{\theta} \in \mathbb{C}^3,$$

gdzie $\theta = \sqrt{\vec{\theta}^2}$. W szczególności, jeśli $\frac{\theta}{2} = \pi$, to dostajemy $-\mathbb{1}$.

Mamy $A^* = \bar{a}_0 - i\vec{a}\vec{\sigma}$. Liczymy:

$$AA^* = |a_0|^2 + |\vec{a}|^2 + i(\bar{a}_0\vec{a} - a_0\bar{\vec{a}}) \cdot \vec{\sigma}. \quad (15.96)$$

Zatem $AA^* = \mathbb{1}$ jest równoważne

$$|a_0|^2 + |\vec{a}|^2 = 1, \quad \bar{a}_0\vec{a} - a_0\bar{\vec{a}} = 0. \quad (15.97)$$

Drugi warunek implikuje

$$a_0 = \alpha\bar{a}, \quad \vec{a} = \alpha\bar{\vec{a}} \quad (15.98)$$

dla pewnego $\alpha \in \mathbb{C}$. Jeśli $A \in SU(2)$, to

$$1 = \det A = a_0^2 + \vec{a}^2 = \alpha(|a_0|^2 + |\vec{a}|^2) = \alpha. \quad (15.99)$$

Zatem $(a_0, \vec{a}) \in \mathbb{R}^4$. Czyli $SU(2)$ jest 3-wymiarową sferą rzeczywistą:

$$SU(2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} : |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\} \quad (15.100)$$

$$= \{a_0 \mathbb{1} + i\vec{a}\vec{\sigma} : a_0^2 + \vec{a}^2 = 1\}. \quad (15.101)$$

Odwzorowanie eksponencjalne przekształca również $su(2)$ na $SU(2)$. $SU(2) \setminus \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$ jest sparametryzowana przez $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^3$, $|\vec{\theta}| \in]0, 2\pi[$.

A oto alternatywne wyprowadzenie tego, że $SU(2)$ jest 3-wymiarową sferą rzeczywistą. Niech $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ będzie macierzą w $SU(2)$. Wtedy

$$\begin{aligned} |a|^2 + |b|^2 &= 1, & |c|^2 + |d|^2 &= 1, \\ a\bar{c} + b\bar{d} &= 0, & c\bar{a} + d\bar{b} &= 0, \\ ad - bc &= 1. \end{aligned}$$

Wyliczamy c z (15.102) i wstawiamy do (15.102) dostając

$$d(|a|^2 + |b|^2) = \bar{a}.$$

Stąd wynika, że

$$c = -\bar{b}, \quad d = \bar{a}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Czyli $SU(2)$ jest sferą 3-wymiarową.

Wyjmijmy z $SU(2)$ $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$, odpowiadające $a = \pm 1, b = 0$. Wtedy można napisać

$$a = e^{i\phi} \cos \frac{\beta}{2}, \quad b = e^{i\psi} \sin \frac{\beta}{2}, \quad \beta \in]0, 2\pi[, \quad \phi \in [0, \pi[, \quad \psi \in [0, 2\pi[.$$

(Zauważmy, że dla $\beta \in]0, 2\pi[, \cos \frac{\beta}{2}$ przyjmuje oba znaki, ale $\sin \frac{\beta}{2}$ jest zawsze dodatni). Połóżmy $\alpha = \phi + \psi, \gamma = \phi - \psi$. Dostajemy wtedy parametryzację przy pomocy kątów Eulera

$$a = \cos \frac{\beta}{2} e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)}, \quad b = \sin \frac{\beta}{2} e^{\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)}, \quad \beta \in]0, 2\pi[, \quad \alpha, \gamma \in [0, 2\pi[.$$

Czasami stosuje się inny zasięg kątów: $\beta \in]0, \pi[, \alpha \in [0, 4\pi[, \gamma \in [0, 2\pi[$. Gdy stosujemy kąty Eulera do parametryzacji $SO(3)$ używamy zasięgu $\beta \in]0, \pi[, \alpha, \gamma \in [0, 2\pi[$.

Element $SU(2)$ odpowiadający α, β, γ oznaczamy przez

$$\begin{aligned} D(\alpha, \beta, \gamma) &:= \begin{bmatrix} \cos \frac{\beta}{2} e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} & \sin \frac{\beta}{2} e^{\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} \\ -\sin \frac{\beta}{2} e^{\frac{i}{2}(-\alpha+\gamma)} & \cos \frac{\beta}{2} e^{\frac{i}{2}(-\alpha-\gamma)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{\frac{i}{2}\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & \sin \frac{\beta}{2} \\ -\sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\frac{i}{2}\gamma} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}\gamma} \end{bmatrix} \\ &= D(\alpha, 0, 0)D(0, \beta, 0)D(0, 0, \gamma). \end{aligned}$$

15.9 D-macierze Wignera

Niech $D^j(\alpha, \beta, \gamma)$ oznacza operator $D(\alpha, \beta, \gamma)$ w reprezentacji o spinie j :

$$D^j(\alpha, \beta, \gamma) = D^j(\alpha, 0, 0)D^j(0, \beta, 0)D^j(0, 0, \gamma).$$

Macierz $D^j(\alpha, \beta, \gamma)$ w bazie $|jm\rangle$ nazywamy D^j -macierzą Wignera.

Macierz $D^j(\alpha, 0, 0) = D^j(0, 0, \alpha)$ jest macierzą diagonalną, która na m -tym miejscu ma $e^{i\alpha m}$. Bardziej skomplikowana jest tzw. d^j -macierz Wignera

$$d^j(\beta) = D^j(0, \beta, 0),$$

którą obliczymy poniżej. Wyrazimy ją najpierw w nieortogonalnej bazie $v_m^j = z_+^{j+m} z_-^{j-m}$:

$$\begin{aligned}
d^j(\beta) z_+^{j+m} z_-^{j-m} &= \left(z_+ \cos \frac{\beta}{2} - z_- \sin \frac{\beta}{2} \right)^{j+m} \left(z_+ \sin \frac{\beta}{2} + z_- \cos \frac{\beta}{2} \right)^{j-m} \\
&= \sum_{p=0}^{j+m} \frac{(j+m)!}{(j+m-p)! p!} z_+^{j+m-p} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{j+m-p} z_-^p \left(-\sin \frac{\beta}{2} \right)^p \\
&\quad \times \sum_{q=0}^{j-m} \frac{(j-m)!}{(j-m-q)! q!} z_+^q \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^q z_-^{j-m-q} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{j-m-q} \\
&= \sum_{m'} \tilde{d}_{m'm}^j(\beta) z_+^{j+m'} z_-^{j-m'},
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_{m'm}^j(\beta) &:= \sum_p \frac{(j+m)!(j-m)!}{p!(m'-m+p)!(j+m-p)!(j-m'-p)!} \\
&\quad \times (-1)^{m'-m-p} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{2j+m-m'+p} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^{2j-m+m'-p},
\end{aligned}$$

i sumujemy po tych wskaźnikach, dla których argumenty silni w mianowniku są nieujemne. Zamieniając bazę v_m^j na ortonormalną bazę $|j, m\rangle$

$$d_{m'm}^j(\beta) = \tilde{d}_{m'm}^j(\beta) \frac{\sqrt{(j+m)!} \sqrt{(j-m)!}}{\sqrt{(j+m)!} \sqrt{(j-m)!}}$$

dostajemy ostatecznie

$$\begin{aligned}
d_{m'm}^j(\beta) &:= \sum_p \frac{\sqrt{(j+m)!} \sqrt{(j-m)!} \sqrt{(j+m)!} \sqrt{(j-m)!}}{p!(m'-m+p)!(j+m-p)!(j-m'-p)!} \\
&\quad \times (-1)^{m'-m-p} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{2j+m-m'+p} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^{2j-m+m'-p}.
\end{aligned}$$

Możemy wyrazić d -macierze Wignera przez wielomiany Jacobiego:

$$\begin{aligned}
&d_{m'm}^j(\beta) \\
&= (-1)^{m'-m} \frac{\sqrt{(j+m)!} \sqrt{(j-m)!}}{\sqrt{(j+m)!} \sqrt{(j-m)!}} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^{-m+m'} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{-m-m'} P_{j+m}^{-m+m', -m-m'}(\cos \beta) \\
&= \frac{\sqrt{(j+m)!} \sqrt{(j-m)!}}{\sqrt{(j+m)!} \sqrt{(j-m)!}} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^{m-m'} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{m+m'} P_{j-m}^{m-m', m+m'}(\cos \beta) \\
&= \frac{\sqrt{(j+m)!} \sqrt{(j-m)!}}{\sqrt{(j+m)!} \sqrt{(j-m)!}} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^{m-m'} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{-m-m'} P_{j+m'}^{m-m', -m-m'}(\cos \beta) \\
&= (-1)^{m'-m} \frac{\sqrt{(j+m)!} \sqrt{(j-m)!}}{\sqrt{(j+m)!} \sqrt{(j-m)!}} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^{-m+m'} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{m+m'} P_{j-m'}^{-m+m', m+m'}(\cos \beta).
\end{aligned}$$

Zauważmy, że we wszystkich przypadkach wielomiany Jacobiego są postaci $P_n^{\alpha,\beta}$, gdzie

$$2n + \alpha + \beta + 1 = 2j + 1.$$

15.10 Typ reprezentacji grupy $SL(2, \mathbb{C})$

Niech

$$\epsilon := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mamy $\epsilon^2 = -\mathbb{1}$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Zatem jeśli $X \in SL(2, \mathbb{C})$, to

$$\epsilon X \epsilon^{-1} = X^{\#(-1)},$$

zaś jeśli $A \in sl(2, \mathbb{C})$, to

$$\epsilon A \epsilon^{-1} = -A^{\#},$$

Czyli reprezentacja fundamentalna $SL(2, \mathbb{C})$ jest równoważna swojej reprezentacji kontragradientnej. Zatem reprezentacja fundamentalna $SU(2)$ jest równoważna swojej zespolenie sprzężonej. Operator realizujący tę równoważność ma kwadrat $-\mathbb{1}$. Czyli reprezentacja fundamentalna $SU(2)$ jest typu kwaternionowego.

Łatwo sprawdzić, że reprezentacje o spinie całkowitym są typu rzeczywistego, a o spinie półówkowym, typu kwaternionowego.

15.11 Miara Haara na $SU(2)$

$SU(2)$ jest 3-wymiarową sferą. Miara Haara jest standardową unormowaną miarą niezmienniczą na tej sferze. Jeśli używamy parametryzacji $\vec{\theta} = \theta \Omega \in \mathbb{R}^3$, $\theta \in]0, 2\pi[$, $\Omega \in \mathbb{S}^2$ to jest ona równa

$$\frac{1}{\pi} \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta \frac{d\Omega}{4\pi},$$

gdzie $\frac{d\Omega}{4\pi}$ jest unormowaną miarą na sferze 2-wymiarowej

Jeśli używamy kątów Eulera $\alpha, \gamma \in [0, 2\pi[$, $\beta \in]0, 2\pi[$, to jest ona równa

$$\frac{d\alpha d\gamma |\sin \beta| d\beta}{2\pi 2\pi 4}.$$

Aby to zobaczyć, wystarczy policzyć wektory styczne

$$\begin{aligned} \partial_\alpha &= \frac{i}{2} \begin{bmatrix} e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \cos \frac{\beta}{2} & e^{\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} \sin \frac{\beta}{2} \\ e^{\frac{i}{2}(-\alpha+\gamma)} \sin \frac{\beta}{2} & -e^{\frac{i}{2}(-\alpha-\gamma)} \cos \frac{\beta}{2} \end{bmatrix}, \\ \partial_\gamma &= \frac{i}{2} \begin{bmatrix} e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \cos \frac{\beta}{2} & -e^{\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} \sin \frac{\beta}{2} \\ -e^{\frac{i}{2}(-\alpha+\gamma)} \sin \frac{\beta}{2} & -e^{\frac{i}{2}(-\alpha-\gamma)} \cos \frac{\beta}{2} \end{bmatrix}, \\ \partial_\beta &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \sin \frac{\beta}{2} & e^{\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} \cos \frac{\beta}{2} \\ -e^{\frac{i}{2}(-\alpha+\gamma)} \cos \frac{\beta}{2} & -e^{\frac{i}{2}(-\alpha-\gamma)} \sin \frac{\beta}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Następnie liczymy wyznacznik macierzy Gramma

$$\det \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos \beta & 0 \\ \cos \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \sin^2 \beta.$$

dostając miarę $\frac{d\alpha d\gamma |\sin \beta| d\beta}{2\sqrt{2}}$, którą następnie normujemy.

15.12 Charaktery reprezentacji $SU(2)$

Jeśli używamy parametryzacji $SU(2)$

$$e^{\frac{i}{2}\vec{\theta}\vec{\sigma}} = \cos \frac{\theta}{2} \mathbb{1} + \frac{i\vec{\theta}\vec{\sigma}}{\theta} \sin \frac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta = |\vec{\theta}| \leq 2\pi,$$

to klasy sprzężoności elementów $SU(2)$ są parametryzowane przez θ . Jeśli bowiem $\vec{\theta}_1$ ma tę samą długość co $\vec{\theta}$, to znajdziemy $\vec{\mu}$ ortogonalny do $\vec{\theta}$ taki, że

$$\vec{\theta}_1 = \cos \mu \vec{\theta} + \theta \frac{\sin \mu}{\mu} \vec{\mu}.$$

Mamy wtedy

$$e^{\frac{i}{2}\vec{\mu}\vec{\sigma}} e^{\frac{i}{2}\vec{\theta}\vec{\sigma}} e^{-\frac{i}{2}\vec{\mu}\vec{\sigma}} = e^{\frac{i}{2}(\cos \mu \vec{\theta} + \theta \frac{\sin \mu}{\mu} \vec{\mu}) \cdot \vec{\sigma}}. \quad (15.102)$$

A oto wzór, które pozwala wyrazić klasę sprzężoności w kątach Eulera:

$$\cos \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

$N = \frac{\sigma_3}{2}$ ma w l -tej reprezentacji wartości własne $-l, -l+1, \dots, l$. Dlatego $\frac{|\vec{\theta}|}{2}\sigma_3$ ma w l -tej reprezentacji wartości własne $-\theta, (-l+1)\theta, \dots, l\theta$. $e^{\frac{i}{2}\vec{\theta}\vec{\sigma}}$ jest sprzężone do $e^{\frac{i}{2}\theta\sigma_3}$. Zatem charakter $e^{\frac{i}{2}\vec{\theta}\vec{\sigma}}$ dla reprezentacji o spinie l jest równy

$$\chi_l(\theta) = e^{-il\theta} + e^{i(-l+1)\theta} + \dots + e^{il\theta} = \frac{\sin((2l+1)\frac{\theta}{2})}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

Rozważmy iloczyn tensorowy reprezentacji o spinie j_1 i j_2 . Jej charakter jest równy

$$\begin{aligned} \chi_{j_1}(\theta)\chi_{j_2}(\theta) &= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} e^{i(m_1+m_2)\theta} \\ &= \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{M=-J}^J e^{iM\theta} = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \chi_J(\theta). \end{aligned}$$

Dlatego też mamy rozkład reprezentacji,

$$j_1 \otimes j_2 = \bigoplus_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} J.$$

15.13 Współczynniki Clebscha-Gordana

Jak pamiętamy, w przestrzeni dla reprezentacji j mamy bazę ortonormalną

$$|j, m\rangle, \quad -j \leq m \leq j.$$

W przestrzeni reprezentacji $j_1 \otimes j_2$ mamy bazę o.n.

$$|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle =: |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle, \quad -j_1 \leq m_1 \leq j_1, \quad -j_2 \leq m_2 \leq j_2.$$

Przestrzeń ta rozkłada się na podprzestrzenie o spinie $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$. W każdej z nich mamy bazę o.n.

$$|j_1 j_2 JM\rangle, \quad -J \leq M \leq J,$$

ze standardowym działaniem $su(2)$. Mamy rozkład

$$|j_1 j_2 JM\rangle = \sum_{m_1+m_2=M} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle (j_1 m_1 j_2 m_2 | JM).$$

Wzór ten definiuje współczynniki $(j_1 m_1 j_2 m_2 | JM)$ jednoznacznie z wyjątkiem czynnika fazowego, niezależnego dla każdej trójki j_1, j_2, J . Aby go ustalić żądamy aby

$$(j_1 j_1 j_2 J - j_1 | JJ) > 0.$$

(Zauważmy, że $|J - j_1| \leq j_2$).

$$(j_1 m_1 j_2 m_2 | JM) = (JM | j_1 m_1 j_2 m_2)$$

nazywają się *współczynnikami Clebscha-Gordana*. Jak pamiętamy, $Q_J(j_1 \otimes j_2)$ oznacza rzut izotypowy w reprezentacji $j_1 \otimes j_2$ na podreprezentację J (która ma tu krotność 1). Mamy

$$\begin{aligned} Q_J(j_1 \otimes j_2) &= \sum_M |j_1 j_2 JM\rangle (j_1 j_2 JM | \\ &= \sum_{M=m_1+m_2=m'_1+m'_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle (j_1 m_1 j_2 m_2 | JM) \\ &\quad \times (JM | j_1 m'_1 j_2 m'_2) (j_1 m'_1 j_2 m'_2 |). \end{aligned}$$

Oto wzór rekurencyjny:

$$\begin{aligned} &\sqrt{(J \mp M)(J \pm M + 1)} (j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \pm 1) \\ = &\sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)} (j_1 m_1 \mp 1 j_2 m_2 | JM) \\ &+ \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)} (j_1 m_1 j_2 m_2 \mp 1 | JM). \end{aligned}$$

15.14 3j-symbole

Przestrzeń reprezentacji $j_1 \otimes j_2 \otimes j_3$ ma bazę

$$|j_1 m_1) \otimes |j_2 m_2) \otimes |j_3 m_3) =: |j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3).$$

Podprzestrzeń niezmiennicza w tej przestrzeni jest najwyżej jednowymiarowa. Jeśli

$$|j_1 j_2 j_3 0) = \sum_{m_1+m_2+m_3=0} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} |j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3)$$

jest takim unormowanym wektorem, to współczynniki $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ są zdefiniowane jednoznacznie z dokładnością do czynnika fazowego. Aby go ustalić żądamy

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_1 & -j_2 & -j_1 + j_2 \end{pmatrix} > 0.$$

Tak zdefiniowane współczynniki nazywają się *3j-symbolami Wignera*.

$$\begin{aligned} Q_0(j_1 \otimes j_2 \otimes j_3) &= |j_1 j_2 j_3 0)(j_1 j_2 j_3 0| \\ &= \sum_{m_1+m_2+m_3=0} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} |j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3) \\ &\quad \times \sum_{m'_1+m'_2+m'_3=0} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix} (j_1 m'_1 j_2 m'_2 j_3 m'_3|. \end{aligned}$$

(14.69) implikuje

$$(2j_3 + 1)\text{Tr}_{j_3} Q_0(j_1 \otimes j_2 \otimes j_3) = Q_{j_3}^-(j_1 \otimes j_2). \quad (15.103)$$

Zatem, dla $m'_1 + m'_2 + m_3 = m_1 + m_2 + m_3 = 0$,

$$(2j_3 + 1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} |j_1 m_1 j_2 m_2) (j_1 m'_1 j_2 m'_2| \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m_3 \end{pmatrix} \quad (15.104)$$

$$= |j_1 m_1 j_2 m_2) (j_1 m_1 j_2 m_2| j_3 - m_3) (j_3 - m_3| j_1 m'_1 j_2 m'_2) (j_1 m'_1 j_2 m'_2|. \quad (15.105)$$

Ta tożsamość prawie wystarcza aby wyprowadzić następujący związek pomiędzy współczynnikami Clebscha-Gordana a 3j-symbolami:

$$(j_1 m_1 j_2 m_2| j_3 - m_3) = (-1)^{j_1 - j_2 - m_3} \sqrt{2j_3 + 1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}.$$

Jedynie znak $(-1)^{j_1 - j_2}$ jest tu wynikiem odpowiedniej konwencji i bliższej analizy.

Wyprowadźmy teraz wzór rekurencyjny.

$$\begin{aligned}
0 &= (J^\pm \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes J^\pm \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes J^\pm) \\
&\quad \times \sum_{m_1+m_2+m_3=0} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} |j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3\rangle \\
&= \sum_{m_1+m_2+m_3=0} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \sqrt{(j_1 \mp m_1)(j_1 \pm m_1 + 1)} |j_1 m_1 \pm 1 j_2 m_2 j_3 m_3\rangle + \dots \\
&= \sum_{m_1+m_2+m_3=\pm 1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 \mp 1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)} |j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3\rangle + \dots
\end{aligned}$$

Stąd dla każdej trójki m_1, m_2, m_3 spełniającej $m_1 + m_2 + m_3 = \pm 1$ mamy związek rekurencyjny

$$\begin{aligned}
0 &= \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 \mp 1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \\
&\quad + \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 \mp 1 & m_3 \end{pmatrix} \\
&\quad + \sqrt{(j_3 \mp m_3 + 1)(j_3 \pm m_3)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \mp 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ustalmy trójkę j_1, j_2, j_3 . Nośnik $3j$ -symbolu leży w przestrzeni $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ i jest zawarty w części wspólnej trzech pasów

$$-j_1 \leq m_1 \leq j_1, \quad -j_2 \leq m_2 \leq j_2, \quad -j_3 \leq m_3 \leq j_3$$

przecinających się pod kątem $\frac{2\pi}{3}$. Warunek

$$j_1 \leq j_2 + j_3, \quad j_2 \leq j_3 + j_1, \quad j_3 \leq j_1 + j_2$$

oznacza, że to przecięcie ma sześć wierzchołków (być może pokrywających się) typu

$$\begin{aligned}
&(j_1, -j_2, -j_1 + j_2), \\
&(j_2 - j_3, -j_2, j_3), \\
&(-j_1, j_1 - j_3, j_3), \\
&(-j_1, j_2, j_1 - j_2), \\
&(-j_2 + j_3, j_2, -j_3), \\
&(j_1, -j_1 + j_3, -j_3).
\end{aligned}$$

Rozwiązywanie rekurencji można zacząć od brzegu, gdzie jest ona 2-elementowa i kontynuować ją do wnętrza.

Zastosowanie wzoru (14.68) daje

$$Q_0(j_1 \otimes j_2 \otimes j_3) = \int D_{j_1}(g) \otimes D_{j_2}(g) \otimes D_{j_3}(g) dg. \quad (15.106)$$

Jeśli obłożymy (15.106) przez $(j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3 | i | j_1 k_1 j_2 k_2 j_3 k_3)$, i wyrazimy g przez kąty Eulera, dostaniemy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16\pi^2} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^{2\pi} |\sin \beta| d\beta D_{m_1 k_1}^{j_1}(\alpha, \beta, \gamma) D_{m_2 k_2}^{j_2}(\alpha, \beta, \gamma) D_{m_3, k_3}^{j_3}(\alpha, \beta, \gamma) \\ &= \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Możemy ograniczyć całkowanie względem β do $[0, \pi]$, zastępując $\frac{1}{16\pi^2}$ przez $\frac{1}{8\pi^2}$. Oto wniosek:

$$\begin{aligned} & \int d\Omega Y_{j_1, m_1}(\Omega) Y_{j_2, m_2}(\Omega) Y_{j_3, m_3}(\Omega) \\ &= \sqrt{\frac{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)(2j_3 + 3)}{4\pi}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Oto inne własności

Twierdzenie 15.5

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \text{sgn}(\sigma)^{j_1 + j_2 + j_3} \begin{pmatrix} j_{\sigma(1)} & j_{\sigma(2)} & j_{\sigma(3)} \\ m_{\sigma(1)} & m_{\sigma(2)} & m_{\sigma(3)} \end{pmatrix}, \quad (15.107)$$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 + j_2 + j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix}. \quad (15.108)$$

$$(2j + 1) \sum_{m_1, m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j' \\ m_1 & m_2 & m' \end{pmatrix} = \delta_{jj'} \delta_{mm'}, \quad (15.109)$$

$$\sum_{j, m} (2j + 1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m'_1 & m'_2 & m \end{pmatrix} = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}. \quad (15.110)$$

Dowód. Stosujemy (14.66) do $|j_1 j_2 j 0\rangle, |j_1 j_2 j' 0\rangle$:

$$(2j + 1) \text{Tr}_{j_1 \otimes j_2} |j_1 j_2 j 0\rangle \langle j_1 j_2 j' 0| = \delta_{jj'} \mathbb{1}_j (j_1 j_2 j' 0 | j_1 j_2 j 0), \quad (15.111)$$

aby dostać (15.109).

Stosujemy (14.65)

$$\sum_j (2j + 1) \text{Tr}_j Q_0(j_1 \otimes j_2 \otimes j) = \mathbb{1}_{j_1 \otimes j_2} \quad (15.112)$$

aby dostać (15.110). \square

15.15 Iloczyn tensorowy z reprezentacją o spinie $\frac{1}{2}$

Szczególnie łatwy jest przypadek gdy jeden ze spinów jest równy $\frac{1}{2}$. Można wtedy ograniczyć się do dwuelementowych relacji rekurencyjnych:

$$\begin{aligned} \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ j-\frac{1}{2} & -j & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ j+\frac{1}{2} & -j & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} &= 0, & j+\frac{1}{2}, -j, \frac{1}{2}; \\ \sqrt{j+m+1} \begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ -m+\frac{1}{2} & m-1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \sqrt{j+m} \begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ -m-\frac{1}{2} & m & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} &= 0, & -m-\frac{1}{2}, m-1, \frac{1}{2}; \\ \begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ -j-\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ -j+\frac{1}{2} & j & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} &= 0, & -j-\frac{1}{2}, j, -\frac{1}{2}; \\ \sqrt{j-m+1} \begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ -m-\frac{1}{2} & m+1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \sqrt{j-m} \begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ -m+\frac{1}{2} & m & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} &= 0, & -m-\frac{1}{2}, m+1, -\frac{1}{2}; \end{aligned}$$

Dostajemy stąd

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ -m+\frac{1}{2} & m & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} &= \frac{(-1)^{j+m} \sqrt{j-m+1}}{\sqrt{(2j+1)(2j+2)}} \\ \begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ -m-\frac{1}{2} & m & \frac{1}{2} \end{pmatrix} &= \frac{(-1)^{-j-m+1} \sqrt{j+m+1}}{\sqrt{(2j+1)(2j+2)}}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} &\sum_{m=-j}^j \begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ -m+\frac{1}{2} & m & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^2 + \sum_{m=-j}^j \begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ -m-\frac{1}{2} & m & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^2 \\ &= \sum_{m=-j}^j \frac{(j-m+1) + (j+m+1)}{(2j+1)(2j+2)} = 1. \end{aligned}$$

A oto odpowiadające im współczynniki Clebscha-Gordana:

$$\begin{aligned} \left(jm \frac{1}{2} \frac{1}{2} \middle| j+\frac{1}{2} \ m+\frac{1}{2} \right) &= \frac{\sqrt{j+m+1}}{\sqrt{2j+1}}, \\ \left(jm \frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \middle| j+\frac{1}{2} \ m-\frac{1}{2} \right) &= \frac{\sqrt{j-m+1}}{\sqrt{2j+1}}, \\ \left(jm \frac{1}{2} \frac{1}{2} \middle| j-\frac{1}{2} \ m+\frac{1}{2} \right) &= -\frac{\sqrt{j-m}}{\sqrt{2j+1}}, \\ \left(jm \frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \middle| j-\frac{1}{2} \ m-\frac{1}{2} \right) &= \frac{\sqrt{j+m}}{\sqrt{2j+1}}. \end{aligned}$$

16 Zastosowanie grupy $SU(3)$ w fizyce cząstek

16.1 Reprezentacje $su(3)$

Każda skończenie wymiarowa reprezentacja $su(3)$ rozszerza się do reprezentacji $sl(3, \mathbb{C})$ w tym samym wymiarze. I na odwrót, dla każdej skończenie wymiarowej reprezentacji $sl(3, \mathbb{C})$ można

dobrac iloczyn skalarny tak, by jej ograniczenie do $su(3)$ było infinitesimalnie unitarne. Reprezentacja $su(3)$ jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy gdy taka jest reprezentacja $sl(3, \mathbb{C})$.

Wśród reprezentacji nieprzywiedlnych $sl(3, \mathbb{C})$ uprzywilejowane miejsce zajmuje reprezentacja *fundamentalna* na \mathbb{C}^3 i jej reprezentacja kontragradientska. Tę ostatnią będziemy nazywać reprezentacją *antyfundamentalną*. Będziemy pisać, że działa na $\mathbb{C}^{3\#}$. Dla $su(3)$ reprezentacja kontragradientska jest tożsama z reprezentacją zespolenie sprzężoną. Wtedy też można pisać $\overline{\mathbb{C}^3}$ zamiast $\mathbb{C}^{3\#}$.

Wszystkie skończone wymiarowe reprezentacje nieprzywiedlne $sl(3, \mathbb{C})$ można łatwo opisać. Tworzymy iloczyn tensorowy

$$\otimes_s^p \mathbb{C}^3 \otimes \otimes_s^q \mathbb{C}^{3\#}.$$

Elementami tej przestrzeni są tensory

$$\sum e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q} t_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p},$$

które są w skrócie zapisywane jako $[t_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}]$. Mamy zwięźlenie

$$[t_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}] \mapsto [t_{j_1, \dots, j_{q-1}, k}^{i_1, \dots, i_{p-1}, k}],$$

gdzie stosujemy konwencję sumacyjną Einsteina. Operator zwięźlenia splata reprezentację na $\otimes_s^p \mathbb{C}^3 \otimes \otimes_s^q \mathbb{C}^{3\#}$ z reprezentacją na $\otimes_s^{p-1} \mathbb{C}^3 \otimes \otimes_s^{q-1} \mathbb{C}^{3\#}$. Jądro tego operatora jest niezmienniczą przestrzenią. Są to wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne dla $sl(3, \mathbb{C})$.

Oczywiście, $sl(3, \mathbb{C})$ można również reprezentować w antysymetrycznym iloczynie tensorowym. Nie prowadzi to jednak do dodatkowych reprezentacji. Zauważmy bowiem, że $\otimes_a^3 \mathbb{C}^3$ i $\otimes_a^3 \mathbb{C}^{3\#}$ są jednowymiarowe, zatem $sl(3, \mathbb{C})$ są na niej trywialne. Natomiast reprezentacja na $\otimes_a^2 \mathbb{C}^3$ jest równoważna reprezentacji antyfundamentalnej, zaś na $\otimes_a^2 \mathbb{C}^{3\#}$ — fundamentalnej.

16.2 Algebra Cartana

$sl(3, \mathbb{C})$ jest oczywisty sposób zanurzona w $gl(3, \mathbb{C})$, która jest rozpięta przez operatory $A_{ij} := |i\rangle\langle j|$. $gl(3, \mathbb{C})$ posiada naturalny iloczyn skalarny

$$\langle A|B \rangle = \text{Tr} A^\# B, \quad (16.113)$$

w którym A_{ij} stanowią bazę ortonormalną.

Zbiór elementów diagonalnych algebry $sl(3, \mathbb{C})$ nazywamy *algebrą Cartana* dla $sl(3, \mathbb{C})$ i oznaczamy przez \mathfrak{h} . Jest to maksymalna przemienna podalgebra w $sl(3, \mathbb{C})$. Jest ona rozpięta przez $H_{ij} = -H_{ji} = A_{ii} - A_{jj}$, $i \neq j$. Oczywiście,

$$H_{12} + H_{23} + H_{31} = 0.$$

\mathfrak{h} ma 2 wymiary i jako jej bazę można wybrać H_{12} , H_{23} . Zauważmy, że $\langle H_{12}|H_{23} \rangle = -1$, $\langle H_{12}|H_{12} \rangle = \langle H_{23}|H_{23} \rangle = 2$. Dlatego też kąt między H_{12} i H_{23} wynosi $\frac{2\pi}{3}$. Zbiór elementów $\mathfrak{h}^\#$, które na H_{ij} , H_{jk} , H_{ki} przyjmują wartości całkowite nazywa się *kratą wagową* \mathcal{W} .

16.3 Wagi reprezentacji

Założmy, że mamy reprezentację π algebry Liego $su(3)$ (albo $sl(3, \mathbb{C})$) w skończonej wymiarowej przestrzeni \mathcal{V} . Dla $A \in sl(2, \mathbb{C})$ będziemy pisać A zamiast $\pi(A)$. Wektory w \mathcal{V} które są wektorami własnymi dla algebry Cartana nazywamy *wektorami wagowymi* tej reprezentacji. Ich wartości własne zależą liniowo od \mathfrak{h} , można więc je interpretować jako elementy $\mathfrak{h}^\#$. Nazywamy je *wagami*. Oznaczmy przez \mathcal{V}_β przestrzeń wektorów własnych dla wagi $\beta \in \mathfrak{h}^\#$. Mamy

$$Hv = \langle \beta | H \rangle v, \quad v \in \mathcal{V}_\beta, \quad H \in \mathfrak{h}.$$

16.4 Reprezentacja fundamentalna i antyfundamentalna

Wagi reprezentacji fundamentalnej L_i spełniają dla różnych i, j, k

$$\langle L_i | H_{ij} \rangle = 1, \quad \langle L_i | H_{jk} \rangle = 0, \quad \langle L_i | H_{ki} \rangle = -1.$$

Zatem

$$L_i = \frac{1}{3}(H_{ij} + H_{ik}), \quad H_{ij} = L_i - L_j.$$

Oczywiście, $L_1 + L_2 + L_3 = 0$. Jeśli wybierzemy L_1, L_2 jako bazę, to

$$\begin{aligned} H_{12} &= L_1 - L_2, \\ H_{23} &= L_2 - L_3 = L_1 + 2L_2, \\ H_{31} &= L_3 - L_1 = -2L_1 - L_2. \end{aligned}$$

Wektory L_i rozpinają kratę wagową. Razem z wektorami $-L_i$ leżą na wierzchołkach sześciokąta foremego:

$$\begin{array}{ccc} & -L_3 & \\ L_2 & & L_1 \\ -L_1 & & -L_2 \\ & L_3 & \end{array}$$

16.5 Pierwiastki

Elementy A_{ij} dla $i \neq j$ należą do $sl(3, \mathbb{C})$ i nazywamy je *operatorami pierwiastkowymi*. Elementy A_{ij}, A_{ji} i H_{ij} spełniają relacje $sl(2, \mathbb{C})$

$$[A_{ji}, A_{ji}] = H_{ij}, \quad [H_{ij}, A_{ij}] = 2A_{ij}, \quad [H_{ij}, A_{ji}] = -2A_{ji}.$$

Zatem wartości własne H_{ij} muszą być liczbami całkowitymi. Stąd wynika, że wagi każdej reprezentacji muszą należeć do kraty wagowej.

Jedną z reprezentacji jest reprezentacja dołączona, czyli reprezentacja dla której przestrzenią jest samo $sl(3, \mathbb{C})$ zaś działaniem jest komutator. Dla reprezentacji dołączonej mamy wagę zerową, dla której wektorami wagowymi jest algebra Cartana. Operatory pierwiastkowe spełniają

$$[H, A_{ij}] = \langle \alpha_{ij} | H \rangle A_{ij}, \quad H \in \mathfrak{h},$$

gdzie α_{ij} jest funkcjonałem liniowym na \mathfrak{h} zwanym *pierwiastkiem*. Innymi słowy, pierwiastek α_{ij} jest wagą dla A_{ij} w reprezentacji dołączonej. Jeśli i, j, k są różne, można to zapisać jako

$$\langle \alpha_{ij} | H_{ij} \rangle = 2, \quad \langle \alpha_{ij} | H_{jk} \rangle = -1, \quad \langle \alpha_{ij} | H_{ki} \rangle = -1.$$

Identyfikując $\mathfrak{h}^\#$ z \mathfrak{h} przy pomocy iloczynu skalarnego (16.113) dostajemy utożsamienie $\alpha_{ij} = H_{ij}$. Zbiór elementów $\mathfrak{h}^\#$ będących całkowitoliczbowymi kombinacjami liniowymi pierwiastków nazywamy *kratą pierwiastkową* \mathcal{U} . Oczywiście, $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$.

Niech $\beta \in \mathcal{W}$ będzie wagą pewnej reprezentacji. Mamy

$$A_{ij}\mathcal{V}_\beta \subset \mathcal{V}_{\beta+\alpha_{ij}}.$$

Oczywiście, elementy algebry Cartana zachowują \mathcal{V}_β . Dlatego, jeśli reprezentacja jest nieprzywiedlna i ma wagę $\beta \in \mathcal{W}$, to wszystkie inne wagi należą do $\beta + \mathcal{U}$.

16.6 Trialność

Krata \mathcal{W} dzieli się na trzy podkraty:

$$\mathcal{W}_k := \{n_1 L_1 + n_2 L_2 : n_1 + n_2 \in 3\mathbb{Z} + k\}.$$

Równoważnie,

$$\mathcal{W}_0 = \mathcal{U}, \quad \mathcal{W}_1 = L_1 + \mathcal{U}, \quad \mathcal{W}_2 = 2L_1 + \mathcal{U}.$$

$k \in \mathbb{Z}_3$ nazywa się *trialnością* kraty. Wagi reprezentacji typu (p, q) leżą na kracie \mathcal{W}_{p-q} .

$SU(3)$ ma centrum $\{e^{i\frac{2\pi k}{3}} \mathbb{1} : k = 0, 1, 2\} \simeq \mathbb{Z}_3$. \mathbb{Z}_3 ma 3 reprezentacje nieprzywiedlne, też numerowane przez \mathbb{Z}_3 . Trialność danej reprezentacji odpowiada reprezentacji centrum.

16.7 Pierwiastki ujemne i dodatnie

Wśród operatorów pierwiastkowych wyróżniamy pierwiastki ujemne:

$$A_{12}, A_{13}, A_{23}$$

i pierwiastki dodatnie:

$$A_{21}, A_{31}, A_{32}.$$

Wektor najwyższej wagi to taki, który jest zabijany przez pierwiastki ujemne. Każda reprezentacja nieprzywiedlna posiada dokładnie jeden (z dokładnością do czynnika) wektor najwyższej wagi Ψ . Wtedy każdy wektor jest kombinacją liniową wektorów postaci $B_1 \cdots B_n \Psi$, gdzie B_1, \dots są pierwiastkami dodatnimi.

Niech e_1, e_2, e_3 będzie bazą \mathbb{C}^3 a e^1, e^2, e^3 bazą dualną w $\mathbb{C}^{\#3}$. Reprezentacja nieprzywiedlna na $\otimes_{\mathbb{C}}^p \mathbb{C}^3 \otimes \otimes_{\mathbb{C}}^q \mathbb{C}^{\#3}$ ma wektor najwyższej wagi $\otimes^p e_1 \otimes \otimes^q e^3$ z wagą $pL_1 - qL_3 = (p+q)L_1 + qL_2$.

16.8 Diagramy wagowe przykładowych reprezentacji

\mathbb{C}^3 : wagi $\{L_i\}$, najwyższa waga L_1

$$\begin{array}{ccc} 1 & & \underline{1} \\ & & 1 \end{array}$$

$\otimes_s^2 \mathbb{C}^3$: wagi $\{L_i + L_j\}$, najwyższa waga $2L_1$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & \underline{1} \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{array}$$

$\otimes_s^3 \mathbb{C}^3$: wagi $\{L_i + L_j + L_k\}$, najwyższa waga $3L_1$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & \underline{1} \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{array}$$

$\mathbb{C}^{3\#}$: wagi $\{-L_i\}$, najwyższa waga $-L_3$

$$\begin{array}{ccc} & & \underline{1} \\ & & 1 \\ 1 & & 1 \end{array}$$

$\otimes_s^2 \mathbb{C}^{3\#}$: wagi $\{-L_i - L_j\}$, najwyższa waga $-2L_3$

$$\begin{array}{ccc} & & \underline{1} \\ & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$\otimes_s^3 \mathbb{C}^{3\#}$: wagi $\{-L_i - L_j - L_k\}$, najwyższa waga $-3L_3$

$$\begin{array}{cccc} & & & \underline{1} \\ & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

reprezentacja dołączona, działa w $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^{3\#}$, wagi $\{L_i - L_j, i \neq j; 2 \times 0\}$, najwyższa waga $L_1 - L_3$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & \underline{1} \\ 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 1 \end{array}$$

reprezentacja w $\otimes_s^2 \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^{3\#}$, wagi $\{2L_i - L_j, i \neq j; -2L_i; 2 \times L_i\}$ najwyższa waga $2L_1 - L_3$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \underline{1} & \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 1 \end{array}$$

Zbiór wag reprezentacji wraz z krotnościami musi spełniać następujące własności:

- (1) Jest symetryczny względem odbicia w każdej z osi zadanej przez L_k .
 - (2) Po przecięciu dowolną prostą prostopadłą do L_k dostajemy krotności pewnej reprezentacji $SU(2)$.
 - (3) Jeśli reprezentacja jest nieprzywiedlna, to jej wagi znajdują się w jednej z podkrat \mathcal{W}_0 , \mathcal{W}_1 lub \mathcal{W}_2 .
- (1) wynika z tego, że $B \mapsto W_{ij} A W_{ij}^{-1}$ jest izomorfizmem algebry $sl(3, \mathbb{C})$, gdzie

$$W_{ij} = W_{ij}^{-1} := A_{kk} + A_{ij} + A_{ji}.$$

Ten izomorfizm zamienia H_{ij} na $-H_{ji}$ i H_{ik} na H_{jk} .

(2) Wynika z tego, że jeśli \mathcal{H}_β jest przestrzenią wagową, to $\oplus_n \mathcal{H}_{\beta+n\alpha_{ij}}$ rozpinają reprezentację $sl(2, \mathbb{C})$.

Mamy następującą regułę dla krotności wag (wymiaru przestrzeni wagowych) reprezentacji nieprzywiedlnych. Wagi na obrzeżach mają krotność 1. W każdej następnej warstwie zwiększają się o 1, chyba że dochodzimy do warstwy w formie trójkąta, i wtedy nie zwiększamy krotności. W szczególności, dla reprezentacji w $\otimes_s^n \mathbb{C}^3$ i $\otimes_s^n \mathbb{C}^{3\#}$, które mają obrzeża trójkątne, wszystkie krotności są równe 1.

16.9 Symetrie w mechanice kwantowej

Niech \mathcal{H} będzie przestrzenią Hilberta a $G \ni g \mapsto U(g) \in U(\mathcal{H})$ reprezentacją unitarną grupy.

Najczęstsze zastosowanie teorii grup to *symetrie przybliżone*. Załóżmy, że A_1, \dots, A_n jest układem komutujących samosprzężonych obserwabli, które powoli zmieniają się z czasem. Na przykład, jeśli $H = H_0 + V$ jest hamiltonianem i V jest w odpowiednim sensie małe, to jedną z tych obserwabli może być H_0 . Załóżmy, że $U(g)$, $g \in G$, komutują z A_1, \dots, A_n . Wtedy przestrzenie własne dla A_1, \dots, A_n są niezmiennicze dla G .

Inne zastosowanie to *grupy cechowania*. Oznacza to, że zarówno hamiltonian H jak i wszystkie obserwable fizyczne komutują z $U(g)$, $g \in G$.

16.10 Konwencje

Reprezentacje unitarne $u(1)$ są jednowymiarowe i zadane są przez $q \in \mathbb{R}$, zwany ładunkiem

$$u(1) \ni \theta \mapsto e^{i\theta q}.$$

Przy iloczynie tensorowym ładunki się dodają.

Reprezentacje nieprzywiedlne $su(n)$, $so(n)$ są z reguły oznaczane liczbami odpowiadającymi ich wymiarowi. Dla reprezentacji sprzężonej dopisujemy kreskę. Tak więc reprezentacja fundamentalna $su(n)$ jest oznaczana przez n a antyfundamentalna przez \bar{n} .

16.11 Zachowane ładunki

Każda cząstka pozostawiona samej sobie w końcu rozpadnie się na fotony, neutrina, elektrony, protony i ich antycząstki.

Następujące wielkości nie zależą od kanałów rozpadu: ładunek elektryczny

$$Q := \#p + \#\bar{e} - \#\bar{p} - \#e,$$

i ładunek barionowy

$$B := \#p - \#\bar{p}.$$

Są to liczby, które są zawsze zachowane.

16.12 Izospin

Proton p i neutron n mają podobne masy i własności nie związane z oddziaływaniem elektromagnetycznym. Podobnie mezony π^+ , π^0 , π^- .

Heisenberg zaproponował, że hamiltonian ma rozkład

$$H = H_{\text{strong}} + H_{\text{em}},$$

gdzie H_{strong} to hamiltonian oddziaływań silnych niezmienniczy względem grupy $SU(2)$, w odróżnieniu od hamiltonianu elektromagnetycznego H_{em} . Oznaczmy przez I_1, I_2, I_3 generatory $su(2)$, zwane izospinem. Oddziaływanie elektromagnetyczne komutuje jedynie z I_3 .

Proton p i neutron n byłyby wektorami własnymi I_3 należącymi do reprezentacji fundamentalnej $SU(2)$. Przyjmujemy, że proton i neutron należą do reprezentacji o izospinie $\frac{1}{2}$:

$$I_3 p = \frac{1}{2} p, \quad I_3 n = -\frac{1}{2} n.$$

Podobnie, mezony π należą do reprezentacji o izospinie 1:

$$I_3 \pi^+ = \pi^+, \quad I_3 \pi^0 = 0, \quad I_3 \pi^- = -\pi^-.$$

Ogólniej, zaobserwowano, że możemy pogrupować cząstki w multiplety izospinowe. W obrębie tego samego multipletu izospinowego cząstki są bardzo podobne pod względem masy i innych własności, natomiast mają inny ładunek elektryczny i I_3 .

Zauważono, że oddziaływania między cząstkami można podzielić na silne, które następują bardzo szybko, słabe, które są znacznie wolniejsze i elektromagnetyczne. Izospin zachowywany jest w oddziaływaniach silnych, ale nie słabych, np:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, \quad \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu.$$

Biorąc pod uwagę oddziaływania silne każdej cząstce można przypisać wartość I_3 .

Zwróć uwagę na to, że dla multipletu nukleonowego i pionowego zachodzi związek

$$Q = I_3 + \frac{1}{2} B. \tag{16.114}$$

16.13 Dziwność

Zauważono, że istnieje jeszcze jedna liczba, która jest zachowana w reakcjach silnych, a w reakcjach słabych zmienia się o ± 1 . Nazwano ją dziwnością i oznaczono przez S . Przyjęto, że “standardowe cząstki” takie jak p, n, π, e mają dziwność zero.

Okazało się, że cząstki oddziałujące silnie można pogrupować w większe multiplety, w obrębie których cząstki różnią się o wartość S i I_3 . W obrębie multipletów mamy stosunkowo podobne masy, ten sam spin i tę samą liczbę barionową. Okazało się, że multiplety te mają symetryczną postać, jeśli za współrzędne wybierze się I_3 i hiperładunek

$$Y = B + S.$$

Znaleziono też związek zwany formułą Gell-Manna – Nishijimy uogólniający (16.114):

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y.$$

Hadrony z zerowym ładunkiem barionowym nazywane są mezonami. Na poniższych diagramach na osi pionowej odkładamy Y , na osi poziomej I_3 .

Najważniejsze multiplety mezonów ($B = 0$):

Nonet pseudoskalarny składa się z oktetu

$$\begin{array}{ccc} & K^0 & K^+ \\ \pi^- & \pi^0, \eta & \pi^+ \\ & K^- & K^{\bar{0}} \end{array}$$

i sigletu η' .

Nonet pseudowektorowy składa się z oktetu

$$\begin{array}{ccc} & K^{*0} & K^{*+} \\ \rho^- & \rho^0, \omega & \rho^+ \\ & K^{*-} & K^{*\bar{0}} \end{array}$$

i singletu ω' .

Oto podstawowe multiplety barionów ($B = 1$):

Oktet ze spinem $\frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{ccc} & n & p \\ \Sigma^- & \Sigma^0, \Lambda^0 & \Sigma^+ \\ & \Xi^- & \Xi^0 \end{array}$$

Dekuplet ze spinem $\frac{3}{2}$:

$$\begin{array}{cccc}
 \Delta^- & \Delta^0 & \Delta^+ & \Delta^{++} \\
 & \Sigma^{*-} & \Sigma^{*0} & \Sigma^{*+} \\
 & & \Xi^{*-} & \Xi^{*0} \\
 & & & \Omega^-
 \end{array}$$

16.14 Kwarki

Wprowadźmy 3 kwarki: u , d i s . Traktujemy je jako wektory wagowe dla fundamentalnej reprezentacji $SU(3)$:

$$\begin{array}{cc}
 d & u \\
 & s
 \end{array}$$

Mamy też antykwarki odpowiadające reprezentacji antyfundamentalnej:

$$\begin{array}{cc}
 \bar{s} \\
 \bar{u} & \bar{d}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{3}(2\#u - \#d - \#s), \\
 B &= \frac{1}{3}(\#u + \#d + \#s), \\
 S &= -\#s, \\
 Y &= \frac{1}{3}(\#u + \#d - 2\#s), \\
 I_3 &= \frac{1}{2}(\#u - \#d).
 \end{aligned}$$

Rozważmy grupę $SU(3)_{\text{fl}}$ opisującą flawory u, d, s , grupę $SU(2)_{\text{spin}}$ opisującą spin i $SU(3)_{\text{col}}$ odpowiedzialna za kolor. Kwarki można traktować jako elementy $\mathbb{C}_{\text{fl}}^3 \otimes \mathbb{C}_{\text{spin}}^2 \otimes \mathbb{C}_{\text{col}}^3$, zaś antykwarki jako elementy $\bar{\mathbb{C}}_{\text{fl}}^3 \otimes \bar{\mathbb{C}}_{\text{spin}}^2 \otimes \bar{\mathbb{C}}_{\text{col}}^3$. Działa na nich grupa $SU(3)_{\text{fl}} \times SU(2)_{\text{spin}} \times SU(3)_{\text{col}}$

Kwarki są fermionami, zatem stany są opisywane przez elementy

$$\otimes_a^p (\mathbb{C}_{\text{fl}}^3 \otimes \mathbb{C}_{\text{spin}}^2 \otimes \mathbb{C}_{\text{col}}^3) \otimes \otimes_a^q (\bar{\mathbb{C}}_{\text{fl}}^3 \otimes \bar{\mathbb{C}}_{\text{spin}}^2 \otimes \bar{\mathbb{C}}_{\text{col}}^3). \quad (16.115)$$

Hipoteza *uwięzienia* mówi, że w fizyce realizowane są tylko stany “bezbarwne”, czyli takie na które grupa kolorowa działa trywialnie. Jeśli zanurzymy (16.115) w przestrzeni

$$\otimes^p (\mathbb{C}_{\text{fl}}^3 \otimes \mathbb{C}_{\text{spin}}^2) \otimes \otimes^q (\bar{\mathbb{C}}_{\text{fl}}^3 \otimes \bar{\mathbb{C}}_{\text{spin}}^2) \otimes \left(\otimes^p \mathbb{C}_{\text{col}}^3 \otimes \otimes^q \bar{\mathbb{C}}_{\text{col}}^3 \right), \quad (16.116)$$

to będą one postaci $\Psi \otimes \Phi$, gdzie Φ , odpowiadające “kolorowym” stopniom swobody, jest singletem względem $SU(3)$.

Wśród $\otimes^p \mathbb{C}_{\text{col}}^3 \otimes \otimes^q \bar{\mathbb{C}}_{\text{col}}^3$ reprezentacje singletowe z najmniejszymi $(p, q) \neq (0, 0)$ znajdziemy dla $(1 \otimes 1)$ (mezony), $(3, 0)$ (bariony) i $(0, 3)$ (antybariony).

W szczególności, mezony są elementami

$$\begin{aligned} & \mathbb{C}_{\text{fl}}^3 \otimes \mathbb{C}_{\text{spin}}^2 \otimes \mathbb{C}_{\text{col}}^3 \otimes \bar{\mathbb{C}}_{\text{fl}}^3 \otimes \bar{\mathbb{C}}_{\text{spin}}^2 \otimes \bar{\mathbb{C}}_{\text{col}}^3 \\ &= \left(\mathbb{C}_{\text{fl}}^3 \otimes \mathbb{C}_{\text{spin}}^2 \otimes \bar{\mathbb{C}}_{\text{fl}}^3 \otimes \bar{\mathbb{C}}_{\text{spin}}^2 \right) \otimes \left(\mathbb{C}_{\text{col}}^3 \otimes \bar{\mathbb{C}}_{\text{col}}^3 \right). \end{aligned}$$

Warunek bezbarwności daje

$$\Psi \otimes \frac{1}{\sqrt{3}} (|1, \bar{1}\rangle + |2, \bar{2}\rangle + |2, \bar{2}\rangle),$$

gdzie 1,2,3 odpowiada 3 kolorom i

$$\Psi \in \mathbb{C}_{\text{fl}}^3 \otimes \mathbb{C}_{\text{spin}}^2 \otimes \bar{\mathbb{C}}_{\text{fl}}^3 \otimes \bar{\mathbb{C}}_{\text{spin}}^2 \simeq (\mathbb{C}_{\text{fl}}^3 \otimes \bar{\mathbb{C}}_{\text{fl}}^3) \otimes (\mathbb{C}_{\text{spin}}^2 \otimes \bar{\mathbb{C}}_{\text{spin}}^2).$$

Dla reprezentacji $SU(3)_{\text{fl}}$ mamy $3 \otimes \bar{3} = 8 + 1$. Dla reprezentacji $SU(2)_{\text{spin}}$ mamy $2 \otimes 2 = 3 + 1$, co daje spin 0 i 1. Zatem dostajemy oba nonety mezonów.

Oto “zawartość kwarkowa” nonetów mezonowych:

$$\begin{array}{ccc} d\bar{s} & & u\bar{s} \\ & d\bar{d}, u\bar{u}, s\bar{s} & u\bar{d} \\ & & s\bar{u} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ s\bar{d} \end{array}$$

Mezony o zerowym ładunku różnią się kwarkami:

$$\begin{aligned} \pi^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (d\bar{d} - u\bar{u}), \\ \eta &= \frac{1}{\sqrt{6}} (2s\bar{s} - d\bar{d} - u\bar{u}), \\ \eta' &= \frac{1}{\sqrt{3}} (s\bar{s} + d\bar{d} + u\bar{u}). \end{aligned}$$

Bariony są elementami

$$\begin{aligned} & \otimes_a^3 (\mathbb{C}_{\text{fl}}^3 \otimes \mathbb{C}_{\text{spin}}^2 \otimes \mathbb{C}_{\text{col}}^3) \\ \subset & \otimes^3 (\mathbb{C}_{\text{fl}}^3 \otimes \mathbb{C}_{\text{spin}}^2) \otimes \otimes^3 \mathbb{C}_{\text{col}}^3. \end{aligned}$$

Warunek bezbarwności daje

$$\Psi \otimes \frac{1}{\sqrt{3!}} (|1, 2, 3\rangle + |2, 3, 1\rangle + |3, 1, 2\rangle - |1, 3, 2\rangle - |3, 2, 1\rangle - |1, 3, 2\rangle).$$

Kolorowa część wektora jest antysymetryczna. Zatem Ψ musi być elementem $\otimes_s^3(\mathbb{C}_{fl}^3 \otimes \mathbb{C}_{spin}^2)$, która ma wymiar $\frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$. Ze względu na działanie grupy $SU(3)_{fl} \times SU(2)_{spin}$, na pewno w $\otimes_s^3(\mathbb{C}_{fl}^3 \otimes \mathbb{C}_{spin}^2)$ znajdziemy reprezentację $\otimes_s^3 \mathbb{C}_{fl}^3 \otimes \otimes_s^3 \mathbb{C}_{spin}^2$. Ma ona wymiar 10×4 . Zatem została reprezentacja $56 - 40 = 16$ -wymiarowa. Odpowiada ona reprezentacji dołączonej $SU(3)_{rmfl}$ razy \mathbb{C}^2 . Czyli mamy rozkład

$$\mathbb{C}^{10} \otimes \mathbb{C}^4 \oplus \mathbb{C}^8 \otimes \mathbb{C}^2,$$

co odpowiada dekupletowi (reprezentacji $\otimes_s^3 \mathbb{C}^3$) o spinie $\frac{3}{2}$ i oktetowi (reprezentacji dołączonej) o spinie $\frac{1}{2}$.

A oto “zawartość kwarkowa” multipletów barionowych:

$$\begin{array}{cccc} ddd & ddu & duu & uuu \\ & dds & dus & uus \\ & & dss & uss \\ & & & sss \end{array}$$

A oto stany spinowe barionów leżących w środku diagramu, gdzie występuje największa degeneracja:

$$\begin{array}{l} \Sigma^{*0} \quad d \uparrow u \uparrow s \uparrow, \\ \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(d \uparrow u \uparrow s \downarrow + d \uparrow u \downarrow s \uparrow + d \downarrow u \uparrow s \uparrow), \\ \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(d \downarrow u \downarrow s \uparrow + d \uparrow u \downarrow s \downarrow + d \downarrow u \uparrow s \downarrow), \\ \quad d \downarrow u \downarrow s \downarrow; \\ \Sigma^0 \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(2d \uparrow u \uparrow s \downarrow - d \uparrow u \downarrow s \uparrow - d \downarrow u \uparrow s \uparrow), \\ \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(2d \downarrow u \downarrow s \uparrow - d \uparrow u \downarrow s \downarrow - d \downarrow u \uparrow s \downarrow); \\ \Lambda^0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(d \uparrow u \downarrow s \uparrow - d \downarrow u \uparrow s \uparrow), \\ \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(d \uparrow u \downarrow s \downarrow - d \downarrow u \uparrow s \downarrow). \end{array}$$

Ażeby dostać stany np. Σ^{*-} i Σ^- należy zamienić wszędzie u na d i odrzucić Λ^0 .

Wszystkie fizycznie realizowane reprezentacje $SU(3)_{fl}$ mają tryalność 0 – to wynika z “bezbarności”.

17 Zastosowanie teorii grup w modelu standardowym i modelach wielkiej unifikacji

17.1 Model standardowy

Model standardowy oparty jest na grupie cechowania $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

Oznaczmy (samosprężone) generatory $su(2)$ przez T_1, T_2, T_3 . Stanowią one generatory tzw. słabego izospinu. Samosprężony generator $u(1)$ oznaczamy przez Y . Jest to tzw. słaby hiperładunek, nie mylić z hiperładunkiem, który ma to samo oznaczenie.

Podstawowym założeniem modelu Weinberga-Salama (który jest częścią modelu standardowego opisującą oddziaływania słabe i elektromagnetyczne) jest to, że ładunek elektryczny Q pochodzi częściowo z $SU(2)$ a częściowo z $U(1)$. Wyrazić to można wzorem

$$Q = T_3 + Y. \quad (17.117)$$

(Stosujemy konwencję z podręcznika Srednicki'ego. Często zastępuje się Y przez $2Y$, tak by był spełniony wzór $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$, analogiczny do wzoru Gell-Manna – Nishijimy).

Poza bozonami cechowania – odpowiadającymi algebrze Liego $su(3) \oplus su(2) \oplus u(1)$ – w lagranżjanie występują naładowane cząstki odpowiadające różnym nieprzywiedlnym reprezentacjom (multipletom) grupy $SU(3) \oplus SU(2) \oplus U(1)$. Każda z nich posiada antycząstki posiadające odwrotną chiralność i ładunki. Można je podzielić następująco:

- (1) Multiplet (albo więcej multipletów) zespolonych skalarnych bozonów (Higgsa) służących do złamania symetrii cechowania $SU(2) \times U(1)$.
- (2) Kilka multipletów weylowskich (chiralnych) fermionów. Każdy multiplet występuje w 3 generacjach. Multiplety fermionów można podzielić na dwie rodziny
 - (i) Leptony, które nie uczestniczą w oddziaływaniach silnych, czyli są singletami ze względu na $SU(3)$.
 - (ii) Kwarki, które transformują się nietrywialnie względem $SU(3)$.

(Multiplet – nieprzywiedlna, na ogół wielowymiarowa reprezentacja grupy cechowania).

Istnieją dwie wersje modelu standardowego: pierwotna wersja, którą oznaczamy SM , nie zawierała neutrino prawochiralnych. W nowszej wersji, oznaczanej przez νSM są dodatkowo neutrino prawochiralne.

Będziemy stosowali nazewnictwo odnoszące się do pierwszej generacji.

17.2 Leptony

Leptony można podzielić na elektrony i neutrino. Elektrony są zarówno lewo- i prawochiralne. Mają tę samą masę. Z punktu widzenia oddziaływań e.m. i silnych można traktować je jako fermiony dirakowskie, czyli para fermion lewochiralny i prawochiralny. Oznaczane są przez $e = (e_L, e_R)$, Mają one $Q = -1$. Antycząstka dla elektronu nazywa się pozytonem i jest oznaczana przez \bar{e} .

Neutrino mają $Q = 0$. Neutrino elektronowe, oznaczane ν_e lub $\nu_{e,L}$, w SM są lewochiralne i mają masę zerową,

$(e_L, \nu_{e,L})$ tworzą dublet ze względu na $SU(2)$. Mamy

$$T_3 e_L = -\frac{1}{2} e_L, \quad T_3 \nu_{e,L} = \frac{1}{2} \nu_{e,L}.$$

Korzystając z (17.117), dostajemy stąd

$$Y e_L = -\frac{1}{2} e_L, \quad Y \nu_{e,L} = -\frac{1}{2} \nu_{e,L}.$$

e_R jest singletem dla $SU(2)$. Dlatego też (17.117) implikuje

$$Y e_R = -e_R.$$

Przy zestawianiu multipletów, wygodnie jest odwoływać się wyłącznie do multipletów lewochiralnych. Dlatego zamiast elektronu prawochiralnego bierzemy pod uwagę pozyton lewochiralny. Ma on $Q = 1$ i $T_3 = 0$. Oto jego hiperładunek:

$$Y \bar{e}_R = \bar{e}_R.$$

W νSM wprowadza się dodatkowe neutrino prawochiralne $\nu_{e,R}$, które transformują się trywialnie ze względu na grupę cechowania. Przy zestawianiu multipletów bierzemy pod uwagę jego antycząstkę $\bar{\nu}_{e,R}$, która jest lewochiralna.

Reasumując, mamy następujące multiplety lewochiralnych leptonów:

$$\begin{aligned} L &:= (e_L, \nu_{e,L}) \quad (1, 2, -\frac{1}{2}), \\ \bar{E} &:= \bar{e}_R \quad (1, 1, 1), \\ \bar{N} &:= \bar{\nu}_{e,R} \quad (1, 1, 0). \end{aligned}$$

17.3 Skalar Higgsa

Aby zbudować niezmiennicze człony masowe w lagranżjanie potrzebujemy dodatkowego skalaru, ϕ , który jest singletem dla $SU(3)$, dubletem dla $SU(2)$ i ma $Q = 0$. Zatem $Y = -\frac{1}{2}$. Czyli jego reprezentacja to

$$(1, 2, -\frac{1}{2}).$$

17.4 Kwarki

Mamy dwa kwarki, u i d . Na przykład, proton i neutron są zbudowane następująco:

$$p = uud, \quad n = udd.$$

Oto ich ładunek elektryczny:

$$Qu = \frac{2}{3}u, \quad Qd = -\frac{1}{3}d.$$

Są one trypletami ze względu na $SU(3)$ – transformują się wzgl. reprezentacji fundamentalnej.

Mamy też antykwarki:

$$Q\bar{u} = -\frac{2}{3}\bar{u}, \quad Q\bar{d} = \frac{1}{3}\bar{d}.$$

Transformują się wzgl. reprezentacji antyfundamentalnej.

Lewochiralne kwarki są dubletem ze wzgl. na $SU(2)$:

$$T_3 u_L = \frac{1}{2}u_L, \quad T_3 d_L = -\frac{1}{2}d_L.$$

Stąd

$$Y u_L = \frac{1}{6}u_L, \quad Y d_L = \frac{1}{6}d_L.$$

Prawochiralne kwarki są singletami dla $SU(2)$. Dla nich

$$T_3 u_R = 0, \quad T_3 d_R = 0.$$

Stąd

$$Y u_R = \frac{2}{3}u_R, \quad Y d_R = -\frac{1}{3}d_R.$$

Reasumując, mamy następujące multiplety lewochiralnych kwarków:

$$\begin{aligned} Q &= (u_L, d_L) && (3, 2, \frac{1}{6}), \\ \bar{U} &= \bar{u}_R && (\bar{3}, 1, -\frac{2}{3}), \\ \bar{D} &= \bar{d}_R && (\bar{3}, 1, \frac{1}{3}). \end{aligned}$$

17.5 Lagranżjan modelu standardowego

Lagranżjan modelu standardowego jest singletem ze względu na grupę cechowania. Można wyróżnić w nim następujące człony:

- (1) Człon kinetyczny dla pól cechowania.
- (2) Człony kinetyczne dla fermionów.
- (3) Człon kinetyczny dla bozonów skalarnych.
- (4) Potencjał dla bozonów skalarnych (“kapeluszyk meksykański”?) – ze względu na renormalizowalność powinien to być wielomian maksymalnie 4 stopnia. Zakładamy, że jest niezmienniczy przy zamianie ϕ na $-\phi$.
- (5) Wyrazy masowe – wyrazy 2-liniowe w fermionach. Muszą być singletami ze względu na grupę cechowania, i dlatego z reguły mnożone są przez bozon skalarny.

Niech ψ, ψ' transformują się zgodnie z reprezentacją fundamentalną $SU(3)$. Wtedy niezmiennicze rzeczywiste dwuliniowe wyrażenia zbudowane z ψ, ψ' są postaci

$$\bar{\psi}^\alpha \psi'_\alpha$$

i wyrażenia sprzężone.

Niech ψ, ψ' transformują się zgodnie z reprezentacją fundamentalną $SU(2)$. Wtedy niezmiennicze dwuliniowe wyrażenia zbudowane z ψ, ψ' są postaci

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^i \psi'_i, \\ \epsilon^{ij} \psi_i \psi'_j, \end{aligned}$$

i wyrażenia sprzężone.

Jeśli mamy ψ_1, \dots, ψ_n mające ładunki y_1, \dots, y_n ze względu na $U(1)$, to $\psi_1 \cdots \psi_n$ jest niezmiennicze jeśli $y_1 + \dots + y_n = 0$. Dlatego też mamy następujące możliwe wyrazy niekinetyczne w lagranżjanie ν SM (uwzględniamy jedynie fermiony lewochiralne)

$$\bar{\phi}_i \phi^i, \quad (\bar{\phi}_i \phi^i)^2, \quad (17.118)$$

$$\epsilon^{ij} \phi_i \bar{E} L_j, \quad \epsilon^{ij} \phi_i \bar{D}^\alpha Q_{\alpha j}, \quad \bar{\phi}^i \bar{U}^\alpha Q_{\alpha i}, \quad (17.119)$$

$$\bar{\phi}^i L_i \bar{N}, \quad \bar{N} C \bar{N}. \quad (17.120)$$

Fermiony prawochiralne występują w wyrażeniach sprzężonych do (17.119) i (17.120). α przebiega indeks kolorowy, i, j przebiegają indeksy 1, 2. C jest macierzą sprzężenia ładunkowego. W SM tylko (17.118) i (17.119) są możliwe.

17.6 $SU(n)$

$SU(n)$ ma reprezentację fundamentalną \mathbb{C}^n i antyfundamentalną $\bar{\mathbb{C}}^n$. Wśród reprezentacji nieprzywiedlnych są

$$\begin{aligned} \otimes_s^p \mathbb{C}^n, \quad p = 1, 2, \dots, \\ \otimes_a^q \mathbb{C}^n, \quad q = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Mamy

$$\otimes_a^q \mathbb{C}^n = \otimes_a^{n-q} \bar{\mathbb{C}}^n.$$

A oto użyteczne relacje dla dowolnych dwóch przestrzeni \mathcal{Z}, \mathcal{W} :

$$\otimes_{s/a}^p (\mathcal{Z} \oplus \mathcal{W}) \simeq \bigoplus_{j=0}^p \otimes_{s/a}^j \mathcal{Z} \oplus \otimes_{s/a}^{p-j} \mathcal{W},$$

$$\otimes^2 \mathcal{Z} = \otimes_s^2 \mathcal{Z} \oplus \otimes_a^2 \mathcal{Z}.$$

17.7 Rozszerzanie $SU(3) \otimes SU(2) \times U(1)$ do $SU(5)$

Poniższa analiza jest oparta częściowo na książce Srednicki'ego i artykule Baez-Huerta.

Mamy inkluzję

$$su(5) \supset su(3) \oplus su(2) \oplus u(1),$$

gdzie

$$Y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & & & & \\ & -\frac{1}{3} & & & \\ & & -\frac{1}{3} & & \\ & & & \frac{1}{2} & \\ & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Fundamentalną reprezentację $SU(5)$ rozkłada się następująco:

$$5 \rightarrow (3, 1, -\frac{1}{3}) \oplus (1, 2, \frac{1}{2}).$$

Stąd,

$$\otimes_a^4 5 = \bar{5} \rightarrow (\bar{3}, 1, \frac{1}{3}) \oplus (1, 2, -\frac{1}{2}). \quad (17.121)$$

Względem $SU(5)$, mamy $\otimes_a^2 5 = 10$. Względem $SU(3)$ mamy $\otimes_a^2 3 = \bar{3}$. Zatem

$$\begin{aligned} 10 = \otimes_a^2 5 &\rightarrow \otimes_a^2 (3, 1, -\frac{1}{3}) \oplus (3, 1, -\frac{1}{3}) \otimes (1, 2, \frac{1}{2}) \oplus \otimes_a^2 (1, 2, \frac{1}{2}) \\ &= (\bar{3}, 1, -\frac{2}{3}) \oplus (3, 2, \frac{1}{6}) \oplus (1, 1, 1). \end{aligned} \quad (17.122)$$

Wszystkie multiplety lewochiralne SM względem $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ znajdziemy w następujących dwóch multipletach względem $SU(5)$: $\otimes_a^4 5$ (17.121) i $\otimes_a^2 5$ (17.122). Żeby dostać antycząstki wystarczy dodać $\otimes_a^1 5$ i $\otimes_a^3 5$. Aby dodać neutrino prawochiralne i ich antycząstki wystarczy dołączyć $\otimes_a^0 5$ i $\otimes_a^5 5$. Dostajemy przestrzeń $\Gamma_a(\mathbb{C}^5)$. Przestrzeń ta rozkłada się na dwie nieprzywiedlne reprezentacje $Spin(10)$ (dwukrotnego nakrycia $SO(10)$) odpowiadające lewochiralnym i prawochiralnym cząstkom.

W poniższej liście c oznacza jeden z kolorów r, g, b , zaś c, c', c'' jest jedną z cyklicznych permutacji r, g, b . Piszemy $a_1 \cdots a_n$ zamiast $\frac{1}{\sqrt{n!}} a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$.

1, L	5, R	10, L	$\bar{10}$, R	$\bar{5}$, L	1, R
$\bar{\nu}_R = 1$	$\bar{e}_L = u$	$\bar{e}_R = ud$	$e_R = cc'c''$	$e_L = cc'c''d$	$\nu_R = cc'c''ud$
	$\bar{\nu}_L = d$	$u_L^c = cu$	$\bar{u}_L^c = c'c''d$	$\nu_L = cc'c''u$	
	$d_R^c = c$	$d_L^c = cd$	$\bar{d}_L^c = c'c''u$	$\bar{d}_R^c = c'c''ud$	
		$\bar{u}_R^c = c'c''$	$u_R^c = cud$		

17.8 Pola w GUT opartej na $SU(5)$

W GUT opartym na $SU(5)$, bez prawoskrętnego neutrino, poza bozonami cechowania parametryzowanymi przez $su(5)$, mamy następujące pola:

- (1) Zespólone bozony skalarne
 - (1) Bozon Φ w reprezentacji dołączonej odpowiedzialny za łamanie $SU(5)$ do $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Sprzega się tylko do bozonów cechowania i ϕ .
 - (2) Bozon ϕ w reprezentacji fundamentalnej odpowiedzialny za łamanie $SU(2) \times U(1)$ do $U(1)$.
- (3) Weylowskie lewochiralne fermiony
 - (1) Multiplet ψ w reprezentacji $\bar{5}$ (antyfundamentanej).

(2) Multiplet χ w reprezentacji 10 (antysymetrycznej).

Możliwe wyrazy niekinetyczne w lagranżjanie:

$$\begin{aligned} & \text{Tr}\Phi^2, \text{Tr}\Phi^4, (\text{Tr}\Phi)^2, \\ & \bar{\phi} \cdot \phi, (\bar{\phi} \cdot \phi)^2, \bar{\phi} \cdot \Phi^2 \phi, \\ & \phi^i \psi^j \chi_{ij}, \quad \epsilon^{ijklm} \bar{\phi}_i \chi_{jk} \chi_{lm}. \end{aligned}$$

Jeśli chcemy, żeby neutrina miały masę, musimy dodać pole ν_R będące singletem dla $SU(5)$ i wyraz

$$\bar{\phi}_i \psi^i \bar{\nu}_R.$$

17.9 Rozszerzanie $SU(3) \otimes SU(2) \times U(1)$ do $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$

W Teorii Pati-Salama zakładamy, że istnieje czwarty kolor “biały”, oznaczany przez w reprezentujący leptony. Grupa $SU(4)$ działa w dwóch reprezentacjach: fundamentalnej z bazą r, g, b, w i antyfundamentalnej z bazą $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}, \bar{w}$.

“Lewa” grupa $SU(2)$ działa na \mathbb{C}^2 z bazą u_L, d_L . “Prawa” grupa $SU(2)$ działa na \mathbb{C}^2 z bazą u_R, d_R .

Cząstki materii (łącznie z prawym neutrinem) organizujemy w cztery reprezentacje grupy $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$:

$(4, 2, 1)$	$(4, 1, 2)$	$(\bar{4}, 2, 1)$	$(\bar{4}, 1, 2)$
$\nu_L = w \otimes u_L$	$\nu_R = w \otimes u_R$	$\bar{\nu}_L = \bar{w} \otimes u_L$	$\bar{\nu}_R = \bar{w} \otimes u_R$
$e_L = w \otimes d_L$	$e_R = w \otimes d_R$	$\bar{e}_L = \bar{w} \otimes d_L$	$\bar{e}_R = \bar{w} \otimes d_R$
$u_L^c = c \otimes u_L$	$u_R^c = c \otimes u_R$	$\bar{u}_L^c = \bar{c} \otimes u_L^c$	$\bar{u}_R^c = \bar{c} \otimes u_R^c$
$d_L^c = c \otimes d_L$	$d_R^c = c \otimes d_R$	$\bar{d}_L^c = \bar{c} \otimes d_L^c$	$\bar{d}_R^c = \bar{c} \otimes d_R^c$

Oto słownik (z lewej stosujemy oznaczenia dla obecnego podrozdziału, z prawej dla podrozdziału 17.7):

$$\begin{aligned} u_L &= u, & d_L &= d, \\ u_R &= ud, & d_R &= 1, \\ c &= c, & w &= cc'c'', \\ \bar{c} &= c'c'', & \bar{w} &= 1. \end{aligned}$$

Mamy następujące utożsamienia:

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}^4 \oplus \bar{\mathbb{C}}^4) \otimes (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}^2) &\simeq (\bar{\mathbb{C}} \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \bar{\mathbb{C}}^3 \oplus \mathbb{C}) \otimes (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}) \\ &\simeq \Gamma_a(\mathbb{C}^3) \otimes \Gamma_a(\mathbb{C}^2) \simeq \Gamma_a(\mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^2). \end{aligned}$$

$$SU(4) \simeq Spin(6), \quad SU(2) \times SU(2) \simeq Spin(4).$$

Zatem grupa $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$ to to samo co grupa $Spin(6) \times Spin(4)$. Oczywiście, $Spin(6) \times Spin(4)/\mathbb{Z}_2$ jest podgrupą $Spin(10)$.

18 Algebry Clifforda i grupy Spin

18.1 Algebry Clifforda

Będziemy oznaczać przez $\mathbb{K}(n)$ algebrę macierzy $n \times n$ nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

Niech ϕ_1, \dots, ϕ_n spełniają relacje

$$[\phi_i, \phi_j]_+ = 2\delta_{ij}\mathbb{1}. \quad (18.123)$$

Algebra łączna nad \mathbb{R} generowana przez $\mathbb{1}, \phi_1, \dots, \phi_n$ spełniająca te relacje nazywa się (*rzeczywistą*) *algebrą Clifforda* $\text{Cl}^+(\mathbb{R}^n) = \text{Cl}^+(n)$.

Niech $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ spełniają relacje

$$[\gamma_i, \gamma_j]_+ = -2\delta_{ij}\mathbb{1}. \quad (18.124)$$

Algebra łączna nad \mathbb{R} generowana przez $\mathbb{1}, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ spełniająca te relacje nazywa się (*rzeczywistą*) *algebrą Clifforda* $\text{Cl}^-(\mathbb{R}^n) = \text{Cl}^-(n)$.

Algebra łączna nad \mathbb{C} generowana przez $\mathbb{1}, \phi_1, \dots, \phi_n$ spełniająca (18.123) nazywa się *zespoloną algebrą Clifforda* i będzie oznaczana przez $\text{Cl}(\mathbb{C}^n)$. Jest ona izomorficzna algebrze generowanej przez $\mathbb{1}, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ spełniających (18.124), gdzie izomorfizm jest zadany przez $\gamma_i := i\phi_i$ lub $\gamma_i := -i\phi_i$.

Zarówno $\text{Cl}^+(\mathbb{R}^n)$ jak i $\text{Cl}^-(\mathbb{R}^n)$ są rzeczywistymi podalgebrami w $\text{Cl}(\mathbb{C}^n)$.

Bazę algebry $\text{Cl}^+(\mathbb{R}^n)$ stanowią elementy $\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_k}$, gdzie $i_1 < \dots < i_k$.

18.2 Algebry Clifforda jako *-algebry

Definicja 18.1 *Mówimy, że algebra \mathfrak{A} nad \mathbb{C} jest *-algebrą gdy jest wyposażona w antyliniowe odwzorowanie $\mathfrak{A} \ni A \mapsto A^* \in \mathfrak{A}$ takie, że $(AB)^* = B^*A^*$, $A^{**} = A$ i $A \neq 0$ implikuje $A^*A \neq 0$. * nazywa się inwolucją lub gwiazdką.*

Definicja 18.2 *Jeśli $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ są *-algebrami, to homomorfizm $\pi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ spełniający $\pi(A^*) = \pi(A)^*$ nazywa się *-homomorfizmem. (Również definiujemy *-izomorfizmy, *-automorfizmy, *-ideały, etc.)*

Zespolone algebry Clifforda są *-algebrami, jeśli wyposażymy je w inwolucję jednoznacznie zdefiniowaną przez $\phi_i^* = \phi_i$. W szczególności, można zdefiniować *unitarne* elementy algebry Clifforda, które spełniają $A^*A = AA^* = \mathbb{1}$, a także samosprężone elementy, spełniające $A = A^*$.

18.3 Parzyste algebry Clifforda

Odwzorowanie $\phi_i \mapsto -\phi_i$ (lub równoważnie $\gamma_i \mapsto -\gamma_i$) rozszerza się jednoznacznie do automorfizmu algebr Clifforda oznaczanego przez α . Elementy zachowywane przez ten automorfizm nazywają się parzystymi. Podalgebrę parzystych elementów w $\text{Cl}(\mathbb{C}^n)$ oznaczamy przez $\text{Cl}_0(\mathbb{C}^n)$.

Jeśli rozpatrujemy $\text{Cl}^+(\mathbb{R}^n)$ i $\text{Cl}^-(\mathbb{R}^n)$ jako podalgebry $\text{Cl}(\mathbb{C}^n)$, to zbiór parzystych elementów w obu algebrach się pokrywa. Będziemy go oznaczali przez $\text{Cl}_0(\mathbb{R}^n)$ (nie wskazując na znak \pm).

Mamy izomorfizm

$$\text{Cl}_0(\mathbb{R}^n) \simeq \text{Cl}^-(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Aby się o nim przekonać zauważmy, że $\text{Cl}_0(\mathbb{R}^n)$ jest generowana przez $\psi_j := \phi_j \phi_n, j = 1, \dots, n-1$, spełniające relacje

$$[\psi_j, \psi_k]_+ = -\delta_{jk} \mathbb{1}.$$

18.4 Element objętości

Następujący element $\text{Cl}^+(\mathbb{R}^n)$ nazywa się czasem *elementem objętości*:

$$\omega := \phi_1 \cdots \phi_n.$$

Oczywiście, $\text{Cl}^+(\mathbb{R}^n)$ jest generowane przez $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}, \omega$. Mamy

$$\omega^2 = (-\mathbb{1})^{\frac{1}{2}n(n-1)}, \quad \omega \phi_i = -(-1)^n \phi_i \omega.$$

W $\text{Cl}^-(\mathbb{R}^n)$ mamy zamiast tego

$$i^n \omega = \gamma_1 \cdots \gamma_n.$$

Jeśli n jest parzyste, to ω , odp. $i\omega$ implementuje automorfizm α :

$$\omega A \omega^{-1} = \alpha(A), \quad A \in \text{Cl}^+(\mathbb{R}^n), \quad (18.125)$$

$$i\omega A (i\omega)^{-1} = \alpha(A), \quad A \in \text{Cl}^-(\mathbb{R}^n). \quad (18.126)$$

Załóżmy, że n jest nieparzyste. Wtedy ω należy do centrum $\text{Cl}^+(\mathbb{R}^n)$ a $i\omega$ należy do centrum $\text{Cl}^-(\mathbb{R}^n)$.

Dla $n = 4m + 1$ mamy $\omega^2 = \mathbb{1}$. Dlatego mamy izomorfizmy

$$\text{Cl}^+(\mathbb{R}^{4m}) \oplus \text{Cl}^+(\mathbb{R}^{4m}) \ni (A_1, A_2) \mapsto \frac{\mathbb{1} + \omega}{2} A_1 + \frac{\mathbb{1} - \omega}{2} A_2 \in \text{Cl}^+(\mathbb{R}^{4m+1}), \quad (18.127)$$

$$\text{Cl}^-(\mathbb{R}^{4m+2}) \oplus \text{Cl}^-(\mathbb{R}^{4m+2}) \ni (A_1, A_2) \mapsto \frac{\mathbb{1} + i\omega}{2} A_1 + \frac{\mathbb{1} - i\omega}{2} A_2 \in \text{Cl}^-(\mathbb{R}^{4m+3}). \quad (18.128)$$

Dla $n = 4m + 3$ mamy $\omega^2 = -\mathbb{1}$. Dlatego też mamy izomorfizmy

$$\mathbb{C}\text{Cl}^+(\mathbb{R}^{4m+2}) \ni (A_1 + iA_2) \mapsto A_1 + \omega A_2 \in \text{Cl}^+(\mathbb{R}^{4m+3}), \quad (18.129)$$

$$\mathbb{C}\text{Cl}^-(\mathbb{R}^{4m}) \ni (A_1 + iA_2) \mapsto A_1 + i\omega A_2 \in \text{Cl}^-(\mathbb{R}^{4m+1}). \quad (18.130)$$

Używając (18.127) i (18.128) dostajemy izomorfizm $\text{Cl}(\mathbb{C}^{2k}) \oplus \text{Cl}(\mathbb{C}^{2k}) \simeq \text{Cl}(\mathbb{C}^{2k+1})$.

Zdefiniujmy transformację

$$\star \phi_j := (-1)^n \phi_1 \cdots \phi_{j-1} \phi_{j+1} \cdots \phi_n.$$

Innymi słowy,

$$\phi_j (\star \phi_j) = \omega.$$

Zauważmy, że dla $n = 4m$ $\star \phi_j$ spełniają relacje γ_j . Dlatego też dla takich n odwzorowanie \star przedłuża się do izomorfizmu $\star : \text{Cl}^+(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Cl}^-(\mathbb{R}^n)$.

Dla $n = 4m + 2$ $\star \phi_j$ spełniają relacje ϕ_j . Dlatego też dla takich n odwzorowanie \star przedłuża się do automorfizmu $\text{Cl}^+(\mathbb{R}^n)$. Analogicznie dostajemy wtedy automorfizm $\text{Cl}^-(\mathbb{R}^n)$.

18.5 Reprezentacja Foka algebry Clifforda

Założmy, że $n = 2m$. Definiujemy następujące elementy $\text{Cl}(\mathbb{C}^n)$:

$$a_i := \frac{1}{2}(\phi_{2i-1} + i\phi_{2i}), \quad a_i^* := \frac{1}{2}(\phi_{2i-1} - i\phi_{2i}).$$

Mamy wtedy

$$[a_1, a_j]_+ = [a_i^*, a_j^*]_+ = 0, \quad [a_i, a_j^*]_+ = \delta_{ij} \mathbb{1}.$$

Dostajemy zatem reprezentację $\text{Cl}(\mathbb{C}^{2m})$, a także $\text{Cl}^+(\mathbb{R}^{2m})$ i $\text{Cl}^-(\mathbb{R}^{2m})$ na $\Gamma_a(\mathbb{C}^m)$. Przestrzeń $\Gamma_a(\mathbb{C}^m)$ ma wymiar 2^m . Operatory kreacji i anihilacji generują wszystkie macierze. Można używając tego pokazać, że $\text{Cl}(\mathbb{C}^{2m}) \simeq \mathbb{C}(2^m)$.

Mamy operator liczby cząstek

$$N = \sum_{i=1}^m a_i^* a_i$$

i operator parzystości

$$(-1)^N = (-1)^{\sum_i a_i^* a_i} = \prod_{i=1}^m (-1)^{a_i^* a_i} = \prod_i (\mathbb{1} - 2a_i^* a_i).$$

Mamy

$$[(-1)^N, a_i]_+ = [(-1)^N, a_i^*]_+ = 0, \quad \left((-1)^N\right)^2 = \mathbb{1}.$$

Zatem $\pm(-1)^N$ spełniają razem z ϕ_1, \dots, ϕ_{2m} relacje (18.123). Dostajemy zatem dwie nierównoważne reprezentacje $\text{Cl}^\pm(\mathbb{R}^{2m+1})$ i $\text{Cl}(\mathbb{C}^{2m+1})$ na $\Gamma_a(\mathbb{C}^m)$. Można używając tego pokazać, że $\text{Cl}(\mathbb{C}^{2m+1}) \simeq \mathbb{C}(2^m) \oplus \mathbb{C}(2^m)$.

Oczywiście, można również te algebry reprezentować na $\Gamma_a(\mathbb{C}^{m+1})$ dostajemy wtedy reprezentację będącą sumą prostą powyższych reprezentacji.

18.6 Konstrukcja Jordana-Wignera

Jeśli mamy ustaloną bazę w \mathbb{R}^n , to można przedstawić reprezentację w przestrzeni Foka w postaci tzw. konstrukcji Jordana-Wignera. Dla $n = 2m$;

$$\begin{aligned} \phi_1 &:= \sigma_1, & \phi_2 &:= \sigma_2, \\ \dots & & & \\ \phi_{2m-1} &:= \sigma_3^{\otimes(m-1)} \otimes \sigma_1, & \phi_{2m} &:= \sigma_3^{\otimes(m-1)} \otimes \sigma_2. \end{aligned}$$

Wtedy, korzystając z $\sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3$ dostajemy

$$\omega = i^m \sigma_3^{\otimes m}.$$

Dla $n = 2m + 1$ dodajemy

$$\phi_{2m+1} := \sigma_3^{\otimes(m+1)}.$$

Wtedy

$$\omega = i^m \mathbb{1}^{\otimes m} \otimes \sigma_3.$$

18.7 Postać algebr Clifforda

Używając rezultatów otrzymanych powyżej można dostać następującą tabelkę:

n	$Cl^+(\mathbb{R}^n)$	$Cl^-(\mathbb{R}^n)$	$Cl_0(\mathbb{R}^n)$	$Cl(\mathbb{C}^n)$	$Cl_0(\mathbb{C}^n)$
0	\mathbb{R}	\mathbb{R}		\mathbb{C}	
1	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	\mathbb{C} ,	\mathbb{R}	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	\mathbb{C}
2	$\mathbb{R}(2)$	\mathbb{H}	\mathbb{C}	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$
3	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$,	\mathbb{H}	$\mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(2)$
4	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2)$
5	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4) \oplus \mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(4)$
6	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(4) \oplus \mathbb{C}(4)$
7	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(8)$
8	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8)$

Rozważmy na przykład $Cl^-(4)$. $i := \gamma_1$, $j := \gamma_2$, $k := \gamma_1\gamma_2$ daje identyfikację $Cl^-(2)$ z \mathbb{H} . $\pi_{\pm} := \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_1\gamma_2\gamma_3)$ i $\gamma_3\gamma_4$ komutują z $Cl^-(2)$. Poza tym,

$$\pi_+\gamma_3\gamma_4 = \gamma_3\gamma_4\pi_-.$$

Mamy homomorfizm

$$\mathbb{H}(2) \ni \begin{bmatrix} x_{++} & x_{+-} \\ x_{-+} & x_{--} \end{bmatrix} \mapsto x_{++}\pi_+ + x_{--}\pi_- + x_{+-}\pi_-\gamma_3\gamma_4 + x_{-+}\pi_+\gamma_3\gamma_4 \in Cl^-(4).$$

18.8 Grupa Pin i Spin

Niech $v \in \mathbb{R}^n$. *Odbiciem względem v* nazywamy odwzorowanie

$$R_v y := y - 2 \frac{\langle v|y \rangle}{\langle v|v \rangle} v.$$

Oczywiście, $R_v^2 = \mathbb{1}$ i $R_v \in O(\mathbb{R}^n) \setminus SO(\mathbb{R}^n)$.

Twierdzenie 18.3 *Odbicia generują $O(\mathbb{R}^n)$. Zbiór parzystych iloczynów odbić jest równy $SO(\mathbb{R}^n)$.*

Dowód. Niech $A \in O(\mathbb{R}^n)$. Po kompleksyfikacji, można zastosować twierdzenie spektralne. Prowadzi ono do wniosku, że

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\phi \in [0, \pi]} \mathcal{V}_{\phi}, \quad A = \bigoplus_{\phi \in [0, \pi]} A_{\phi},$$

gdzie na \mathcal{V}_{ϕ} dla $\phi \in \{0, \pi\}$, $A_{\phi} = e^{i\phi}$ a dla $\phi \in]0, \pi[$,

$$A_{\phi} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}.$$

(ew. razy identyczność). Zatem wystarczy zanalizować te przypadki. \square

Dla $v \in \mathbb{R}^n$, zdefiniujemy element $Cl^+(\mathbb{R}^n)$, odp. $Cl^-(\mathbb{R}^n)$

$$\phi(v) := \sum_i v_i \phi_i, \quad \gamma(v) := \sum_i v_i \gamma_i.$$

Oczywiście,

$$\phi(v)^* = \phi(v), \quad \gamma(v)^* = -\gamma(v), \quad \phi(v)\phi(v)^* = \gamma(v)\gamma(v)^* = \langle v|v \rangle,$$

Założmy, że $\langle v|v \rangle = 1$. Wtedy $\pm\phi(v)$ i $\pm\gamma(v)$ są unitarnymi nieparzystymi elementami $Cl^+(\mathbb{R}^n)$, odp. $Cl^-(\mathbb{R}^n)$ i

$$(\pm\phi(v))\phi(y)(\pm\phi(v))^* = -\phi(R_v y), \quad (18.131)$$

$$(\pm\gamma(v))\gamma(y)(\pm\gamma(v))^* = -\gamma(R_v y). \quad (18.132)$$

Niech $Pin^+(\mathbb{R}^n)$ będzie grupą w $Cl^+(\mathbb{R}^n)$ generowaną przez $\phi(v)$, $\langle v|v \rangle = 1$. Analogicznie, niech $Pin^-(\mathbb{R}^n)$ będzie grupą w $Cl^-(\mathbb{R}^n)$ generowaną przez $\gamma(v)$, $\langle v|v \rangle = 1$.

Oczywiście, wszystkie elementy $Pin^\pm(\mathbb{R}^n)$ są unitarne. Definiujemy też grupę $Spin(\mathbb{R}^n)$ składającą się z parzystych elementów w $Pin^\pm(\mathbb{R}^n)$.

Jeśli $U \in Spin(\mathbb{R}^n)$, to istnieje $R_U \in SO(\mathbb{R}^n)$ taki, że

$$U\phi(y)U^* = \phi(R_U y),$$

Jeśli $U \in Pin^\pm(\mathbb{R}^n) \setminus Spin(\mathbb{R}^n)$, to istnieje $R_U \in O(\mathbb{R}^n) \setminus SO(\mathbb{R}^n)$ taki, że

$$U\phi(y)U^* = -\phi(R_U y).$$

Mamy równoważną definicję $Pin^\pm(\mathbb{R}^n)$: jest to zbiór elementów unitarnych w $Cl^\pm(\mathbb{R}^n)$ takich, że

$$\{U\phi(v)U^* : v \in \mathbb{R}^n\} = \{\phi(v) : v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Zauważmy, że $R_U = R_{-U}$. $U \mapsto R_U$ definiują dwukrotne nakrycia:

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow Spin(\mathbb{R}^n) \rightarrow SO(\mathbb{R}^n) \rightarrow 1,$$

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow Pin^\pm(\mathbb{R}^n) \rightarrow O(\mathbb{R}^n) \rightarrow 1.$$

18.9 Koincydencje niskowymiarowe

W niskich wymiarach mamy koincydencje:

$$Spin(\mathbb{R}^2) \simeq SO(\mathbb{R}^2),$$

$$Spin(\mathbb{R}^3) \simeq SU(\mathbb{C}^2),$$

$$Spin(\mathbb{R}^4) \simeq SU(\mathbb{C}^2) \times SU(\mathbb{C}^2),$$

$$Spin(\mathbb{R}^5) \simeq SU(\mathbb{H}^2),$$

$$Spin(\mathbb{R}^6) \simeq SU(\mathbb{C}^4).$$

Pokażmy drugą koincydencję.

$$Spin(\mathbb{R}^3) = \{a_0\mathbb{1} + a_1\phi_2\phi_3 + a_2\phi_3\phi_1 + a_3\phi_1\phi_2 : a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1\}, \quad (18.133)$$

$$SU(2) = \{a_0\mathbb{1} + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 : a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1\}. \quad (18.134)$$

Niech

$$U(\text{Cl}_0(\mathbb{R}^n)) := \{A \in \text{Cl}_0(\mathbb{R}^n) : A^*A = \mathbb{1}\}.$$

Zauważmy, że

$$Spin(\mathbb{R}^n) = U(\text{Cl}_0(\mathbb{R}^n)), \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (18.135)$$

$$Spin(\mathbb{R}^n) \subsetneq U(\text{Cl}_0(\mathbb{R}^n)), \quad n \geq 6. \quad (18.136)$$

Aby to zobaczyć, wystarczy zauważyć, że inkluzja \subset w (18.135) jest oczywista. Następnie należy policzyć wymiary. W tym celu przypomnijmy sobie:

$$\dim SO(n) = \frac{n(n-1)}{2}, \quad (18.137)$$

$$\dim SU(\mathbb{C}^n) = (n+1)(n-1), \quad U(\mathbb{C}^n) = n^2, \quad (18.138)$$

$$\dim SU(\mathbb{H}^n) = n(2n+1). \quad (18.139)$$

Dostajemy (drobne oszustwo!)

n	$\dim SO(n) = \dim Spin(n)$	$\dim U(\text{Cl}_0(\mathbb{R}^n))$
1	0	$0 = \dim O(1)$
2	1	$1 = \dim U(1)$,
3	3	$3 = \dim SU(\mathbb{H}) = \dim SU(2)$,
4	6	$6 = \dim SU(\mathbb{H}) \times SU(\mathbb{H}) = \dim SU(2) \times SU(2)$,
5	10	$10 = \dim SU(\mathbb{H}^2)$,
6	15	$15 = \dim SU(4)$,
7	21	$28 = \dim O(8)$.

18.10 Reprezentacje grupy $Spin(n)$

Grupa $Spin(2m)$ ma reprezentację w przestrzeni $\Gamma_a(\mathbb{C}^m)$. Jest ona przywiedlna – rozkłada się na reprezentację o parzystej liczbie “cząstek” i reprezentację o nieparzystej liczbie. Te reprezentacje są już nieprzywiedlne.

Grupa $Spin(2m+1)$ ma reprezentację nieprzywiedlną w $\Gamma_a(\mathbb{C}^m)$.

Wszystkie te reprezentacje nazywają się spinorowymi. Nie odpowiadają one reprezentacjom $SO(n)$.

19 Przegląd klasycznych algebr Liego

19.1 $sl(n, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} sl(n, \mathbb{C}) &= \{A \in gl(n, \mathbb{C}) : \text{Tr}A = 0\}, \\ su(n) &= \{A \in gl(n, \mathbb{C}) : \text{Tr}A = 0, A^* = -A\}. \end{aligned}$$

$sl(n, \mathbb{C})$ jest kompleksyfikacją $su(n)$. To znaczy,

$$sl(n, \mathbb{C}) = su(n) + isu(n).$$

$A \in sl(n, \mathbb{C})$ rozkłada się na $A = \frac{1}{2}(A - A^*) + \frac{i}{2i}(A + A^*)$.

Wprowadzamy iloczyn skalarny

$$\langle X|Y \rangle := \text{Tr}XY.$$

Oznaczmy

$$A_{ij} := |i\rangle\langle j|.$$

Niech

$$\mathfrak{h} := \left\{ \sum_{i=1}^n c_i A_{ii} : \sum_{i=1}^n c_i = 0 \right\}.$$

\mathfrak{h} jest maksymalną przemienną podalgebrą w $sl(n, \mathbb{C})$ – jest to przykład *algebry Cartana*. Położmy

$$H_{ij} := A_{ii} - A_{jj} = -H_{ji}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} [H_{kl}, A_{ij}] &= \alpha_{ij}(H_{kl})A_{ij}, \\ \alpha_{ij}(H_{kl}) &= \delta_{ik} + \delta_{jl} - \delta_{jk} - \delta_{il} = \langle H_{ij}|H_{kl} \rangle. \end{aligned}$$

Czyli A_{ij} są *operatorami pierwiastkowymi*, czyli wektorami własnymi dla działania algebry Cartana, a $\alpha_{ij} \in \mathfrak{h}^\#$ są wartościami własnymi, zwanymi *pierwiastkami*. Korzystając z dwoistości zadanej przez iloczyn skalarny, można pierwiastki utożsamić z *kopierwiastkami* H_{ij} , elementami algebry Cartana.

W szczególności,

$$\langle H_{ij}|H_{ij} \rangle = 2, \quad \langle H_{ij}|H_{kj} \rangle = 1, \quad \langle H_{ij}|H_{jk} \rangle = -1, \quad i \neq k.$$

Jako bazę kraty pierwiastkowej można przyjąć $H_{12}, H_{23}, \dots, H_{n-1,n}$. Mają one wszystkie długość $\sqrt{2}$ i są prostopadłe do siebie z wyjątkiem

$$\angle(H_{12}, H_{23}) = \dots = \angle(H_{n-2,n-1}, H_{n-1,n}) = \frac{2\pi}{3}.$$

19.2 $so(n, \mathbb{C})$

Jeśli przyjmiemy, że iloczyn skalarny ma postać

$$\langle x|y \rangle = \sum x_i y_i,$$

to mamy

$$\begin{aligned} so(n, \mathbb{C}) &= \{A \in gl(n, \mathbb{C}) : A^\# = -A\}, \\ so(n, \mathbb{R}) &= \{A \in gl(n, \mathbb{R}) : A^\# = -A\}. \end{aligned}$$

$so(n, \mathbb{C})$ jest kompleksyfikacją $so(n, \mathbb{R})$:

$$so(n, \mathbb{C}) = so(n, \mathbb{R}) \oplus iso(n, \mathbb{R}).$$

$A = \text{Re}A + i\text{Im}A$. Wprowadzamy iloczyn skalarny $\frac{1}{2}\text{Tr}XY$. Bazę ortonormalną stanowią

$$L_{ij} = |i\rangle\langle j| - |j\rangle\langle i|, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

Zatem, wymiar $so(n, \mathbb{C})$ jest równy $\frac{n(n-1)}{2}$.

19.3 $so(2m)$

Żałómy, że $n = 2m$ Wygodnie jest przyjąć inną postać iloczynu skalarnego w \mathbb{C}^{2m} . Niech współrzędne będą indeksowane przez $\pm i$, $i = 1, \dots, m$.

$$\langle z|w\rangle = \sum_i z_i w_{-i} = \sum_{i=1}^m 2z_i w_{-i}.$$

Aby przejść do współrzędnych kartezjańskich kładziemy

$$z_{\pm j} = x_{2j-1} \pm ix_{2j}.$$

Wprowadzamy iloczyn skalarny $\frac{1}{2}\text{Tr}XY$.

Wprowadźmy operatory

$$B_{ij} := |i\rangle\langle -j| - |j\rangle\langle -i|.$$

Oczywiście, $B_{ij} = -B_{ji}$. W szczególności, $B_{ii} = 0$. Kładziemy

$$N_i := B_{i-i} = |i\rangle\langle i| - |-i\rangle\langle -i|. \quad (19.140)$$

Niech \mathfrak{h} będzie rozpięta przez N_i , $i = 1, \dots, m$, które stanowią bazę ortonormalną. Jest to algebra Cartana.

Bazę $so(2m, \mathbb{C})$ stanowią N_i , $i = 1, \dots, m$, oraz

$$B_{ij}, \quad 1 \leq |i| < |j| \leq m.$$

Kładziemy dla $|i| \neq |j|$,

$$N_{ij} = N_{ji} = -N_{-i-j} = -N_{-j-i} = \text{sgn}(i)N_i + \text{sgn}(j)N_j.$$

Mamy dla $k = 1, \dots, m$,

$$\begin{aligned} [N_k, B_{ij}] &= \beta_{ij}(N_k)B_{ij}, \\ \beta_{ij}(N_k) &= \text{sgn}(i)\delta_{|i|k} + \text{sgn}(j)\delta_{|j|k} = \langle N_{ij}|N_k\rangle. \\ \langle N_{ij}|N_{ij}\rangle &= 2, \quad \langle N_{ij}|N_{-j}\rangle = 0, \quad \langle N_{ij}|N_{ik}\rangle = 1, \quad |j| \neq |k|. \end{aligned}$$

Czyli B_{ij} są operatorami pierwiastkowymi, β_{ij} są pierwiastkami, wreszcie N_{ij} są kopierwiastkami. Mają one długość $\sqrt{2}$.

Jako bazę kraty pierwiastkowej można wybrać $N_{12}, \dots, N_{m-2, m-1}, N_{m-1, m}, N_{m-1, -m}$. Są wzajemnie prostopadłe z wyjątkiem

$$\angle(N_{12}, N_{23}) = \dots = \angle(N_{m-2, m-1}, N_{m-1, m}) = \angle(N_{m-2, m-1}, N_{m-1, -m}) = \frac{2\pi}{3}.$$

19.4 $so(2m+1)$

Do \mathbb{C}^{2m} dodajemy współrzędną indeksowaną przez 0. Iloczyn skaarny ma postać

$$\langle z|w \rangle = \sum_i z_i w_{-i} = z_0 w_0 + \sum_{i=1}^m 2z_i w_i.$$

Aby przejść do współrzędnych kartezjańskich kładziemy

$$z_{\pm j} = x_{2j-1} \pm ix_{2j}, \quad z_0 = x_{2m+1}.$$

Prócz operatorów B_{ij} wprowadźmy operatory

$$B_j := B_{0j} = |0\rangle\langle -j| - |j\rangle\langle 0|, \quad 1 \leq |j| \leq m.$$

Algebra Cartana \mathfrak{h} jest nadal rozpięta przez N_i , $i = 1, \dots, m$.

Bazę $so(2m+1, \mathbb{C})$ stanowią N_i , $i = 1, \dots, m$, oraz

$$B_{ij}, \quad 1 \leq |i| < |j| \leq m,$$

$$B_j, \quad 1 \leq |j| \leq m.$$

Mamy dodatkowe w porównaniu z $so(2m)$ relacje dla $k = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} [N_k, B_j] &= \beta_j(N_k)B_j, \\ \beta_j(N_k) &= \operatorname{sgn}(j)\delta_{|j|k} = \langle N_j|N_k \rangle. \end{aligned}$$

$$\langle N_i|N_i \rangle = 1, \quad \langle N_i|N_{ij} \rangle = 1,$$

Czyli B_{ij} i B_j są operatorami pierwiastkowymi, β_{ij} i β_j są pierwiastkami, wreszcie N_{ij} i N_j są kopierwiastkami. N_j mają długość 1.

Jako bazę kraty pierwiastkowej można wybrać $N_{12}, \dots, N_{m-2,m-1}, N_{m-1,m}, N_m$. Mają one długość $\sqrt{2}$ z wyjątkiem ostatniego, który ma długość 1. Są wzajemnie prostopadłe z wyjątkiem

$$\angle(N_{12}, N_{23}) = \dots = \angle(N_{m-2,m-1}, N_{m-1,m}) = \frac{2\pi}{3}, \quad \angle(N_{m-1,m}, N_m) = \frac{3\pi}{4}.$$

19.5 $sp(2m, \mathbb{C})$

Współrzędne będą indeksowane przez $\pm i$, $i = 1, \dots, m$:

$$\omega = \sum_i \operatorname{sgn}(i)|i\rangle\langle -i|.$$

Wprowadźmy operatory

$$C_{ij} := \operatorname{sgn}(i)|i\rangle\langle -j| + \operatorname{sgn}(j)|j\rangle\langle -i|.$$

$$C_i := C_{ii} = 2|i\rangle\langle -i|, \quad 1 \leq |i| \leq m.$$

Niech N_i będą zdefiniowane jak dla $so(n)$. Zauważmy, że

$$N_i = C_{i-i} = |i\rangle\langle i| - |-i\rangle\langle -i|, \quad i = 1, \dots, m. \quad (19.141)$$

Bazę $sp(2m, \mathbb{C})$ stanowią N_i , $i = 1, \dots, m$, oraz

$$C_{ij}, \quad 1 \leq |i| < |j| \leq m, \quad C_j, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Wprowadzamy iloczyn skalarny $\frac{1}{2}\text{Tr}XY$. Niech \mathfrak{h} będzie rozpięta przez N_i , $i = 1, \dots, m$, które stanowią bazę ortonormalną. Niech N_{ij} , β_{ij} , β_j będą zdefiniowane jak dla $so(n)$. Mamy dla $k = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} [N_k, C_{ij}] &= \beta_{ij}(N_k)C_{ij}, \\ [N_k, C_j] &= 2\beta_j(N_k)C_j. \end{aligned}$$

Czyli C_{ij} i C_j są operatorami pierwiastkowymi, β_{ij} i $2\beta_j$ są pierwiastkami, wreszcie N_{ij} i $2N_j$ są kopierwiastkami. Mają one długość, odpowiednio, $\sqrt{2}$ i 2.

Jako bazę kraty pierwiastkowej można wybrać $N_{12}, \dots, N_{m-2, m-1}, N_{m-1, m}, 2N_m$. Jest to prawie ta sama baza co dla $so(2m+1)$. W szczególności, ma te same kąty.

19.6 Koïncydencje

$$\phi : so(3, \mathbb{C}) \rightarrow sl(2, \mathbb{C})$$

$$\phi(N_1) = H_{12}/2, \quad \phi(B_1) = A_{12}, \quad \phi(B_{-1}) = A_{21}.$$

$$\phi : so(4, \mathbb{C}) \rightarrow sl(2, \mathbb{C}) \oplus sl(2, \mathbb{C})$$

$$\begin{aligned} \phi(N_{12}) &= H_{12}/2, & \phi(B_{12}) &= A_{12}, & \phi(B_{-1-2}) &= A_{21}, \\ \phi(N_{1-2}) &= H_{-1-2}/2, & \phi(B_{-12}) &= A_{-1-2}, & \phi(B_{1-2}) &= A_{-2-1}. \end{aligned}$$

$$\phi : so(5, \mathbb{C}) \rightarrow sp(4, \mathbb{C})$$

$$\begin{aligned} \phi(N_{12}) &= N_{12}, & \phi(B_{12}) &= C_{12}, & \phi(B_{-1-2}) &= C_{21}, \\ \phi(N_{1-2}) &= N_{1-2}, & \phi(B_{-12}) &= C_{-12}, & \phi(B_{1-2}) &= C_{2-1}, \\ & & \phi(B_i) &= C_i. \end{aligned}$$

$$\phi : so(6, \mathbb{C}) \rightarrow sl(4, \mathbb{C})$$

Jeśli (ij) jest parą w zbiorze $\{1, 2, 3, 4\}$, wtedy $\overline{(ij)}$ będzie oznaczało taką parę (kl) , że $ijkl$ jest parzystą permutacją 1234.

Poniżej, ij są parami w zbiorze $\{1, 2, 3\}$.

$$\begin{aligned} \phi(N_{ij}) &= H_{ij}/2, & \phi(B_{ij}) &= A_{ij}, & \phi(B_{-i-j}) &= A_{ji}, \\ \phi(N_{i-j}) &= H_{\overline{ij}}/2, & \phi(B_{-ij}) &= A_{\overline{ij}}, & \phi(B_{i-j}) &= A_{\overline{ji}}. \end{aligned}$$

19.7 Konstrukcja Schura-Weyla

Diagramem Younga będziemy nazywali nierosnący ciąg liczb naturalnych lub zer $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$, od pewnego miejsca zerowy. Czasami bierzemy pod uwagę tylko niezerowe elementy, dostając ciąg skończony. Rysujemy go w postaci ułożonych obok na siebie kwadratów (okienek), po λ_i w i tym wierszu. Wielkością diagramu Younga nazywamy $|\lambda| := \lambda_1 + \lambda_2 + \dots$.

Dualny diagram Younga jest zdefiniowany jako

$$\lambda'_k := \max\{m : \lambda_m \geq k\}.$$

Tablicą Younga nazywamy diagram Younga z wpisanymi w okienka kolejne liczby naturalne $1, \dots, |\lambda|$. Na przykład, można wpisać liczby po kolei. Wtedy będziemy utożsamiać diagram z tablicą.

Dualną tablicą Younga nazywamy tablicę Younga odbitą w przekątnej. Odpowiada ona dualnemu diagramowi Younga.

Niech τ będzie tablicą Younga o wielkości n . Wiążemy z nią dwie podgrupy w S_n :

$$\begin{aligned} S_{\text{row},\tau} &= \{\text{permutacje z } S_n \text{ nie mieszające elementów w wierszach}\} \\ S_{\text{col},\tau} &= \{\text{permutacje z } S_n \text{ nie mieszające elementów w kolumnach}\}. \end{aligned}$$

Oczywiście,

$$\begin{aligned} S_{\text{row},\tau} &= S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \dots, \\ S_{\text{col},\tau} &= S_{\lambda'_1} \times S_{\lambda'_2} \times \dots. \end{aligned}$$

Definiujemy następujące rzuty w algebrze grupowej $C[S_n]$:

$$\begin{aligned} \Theta_{\text{row},\tau} &:= \frac{1}{|S_{\text{row},\tau}|} \sum_{\sigma \in S_{\text{row},\tau}} \sigma, \\ \Theta_{\text{col},\tau} &:= \frac{1}{|S_{\text{col},\tau}|} \sum_{\sigma \in S_{\text{col},\tau}} \text{sgn}(\sigma)\sigma. \end{aligned}$$

Niech

$$\mathfrak{A}_\tau = \Theta_{\text{row},\tau} \Theta_{\text{col},\tau} C[S_n]$$

Jest to przestrzeń niezmiennicza dla prawej regularnej reprezentacji grupy S_n . Nazwijmy ją $(\pi_\tau, \mathfrak{A}_\tau)$.

Twierdzenie 19.1 (1) π_τ są nieprzywiedlnymi reprezentacjami grupy S_n .

(2) Każda nieprzywiedlna reprezentacja S_n jest postaci π_τ .

(3) $\pi_{\tau_1} \simeq \pi_{\tau_2}$ wtedy i tylko wtedy gdy diagramy Younga tablic τ_1 i τ_2 są takie same.

(4) $\pi_{\tau'}$ jest równoważna iloczynowi reprezentacji znakowej i π_τ .

19.8 Reprezentacje $SL(n, \mathbb{C})$

Rozważmy przestrzeń \mathcal{V} . Rozważmy reprezentację grupy $\rho : G \rightarrow GL(\mathcal{V})$, albo algebry Liego $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow gl(\mathcal{V})$. Mamy wtedy naturalne reprezentacje $\otimes^n \rho : G \rightarrow GL(\otimes^n \mathcal{V})$, $d \otimes^n \rho : \mathfrak{g} \rightarrow gl(\otimes^n \mathcal{V})$

Mamy naturalną reprezentację S_n na $\otimes^n \mathcal{V}$. Reprezentacja grupy S_n komutuje z $\otimes^n \rho$ i $d \otimes^n \rho$. Dlatego też komutuje z rzutami $\Theta_{\text{row}, \tau}$ i $\Theta_{\text{col}, \tau}$. Zdefiniujemy

$$\mathcal{V}_\tau := \Theta_{\text{row}, \tau} \Theta_{\text{col}, \tau} \otimes^n \mathcal{V},$$

gdzie τ jest pewną tablicą Younga. Jest to podprzestrzeń niezmiennicza dla $\otimes^n \rho$. Niech ρ_τ oznacza reprezentację $\otimes^n \rho$ obciętą do \mathcal{V}_τ .

W szczególności rozważmy grupę $GL(n, \mathbb{C})$ i jej reprezentację fundamentalną na \mathbb{C}^n . Zauważmy, że dla τ będącego kolumną o wysokości n mamy $\rho_\tau(g) = \det g$. Dlatego też po obcięciu do $SL(n, \mathbb{C})$ dostajemy reprezentację trywialną.

Dla τ będącego kolumną wysokości $n - 1$ na $GL(n, \mathbb{C})$ dostajemy reprezentację, która macierzy przyporządkowuje macierz dopełnień algebraicznych. Dlatego też, na $SL(n, \mathbb{C})$ dostajemy reprezentację kontrgradientną.

Widać zatem, że dla grupy $SL(n, \mathbb{C})$ wystarczy ograniczyć się do diagramów Younga, których wszystkie kolumny są niższe niż n .

Niech τ będzie diagramem Younga. Diagram sprzężony definiujemy następująco. Kolumny o długości m zastępujemy przez kolumny o długości $n - m$. Następnie porządkujemy kolumny w kolejności malejącej. Diagram sprzężony oznaczamy przez $\bar{\tau}$.

Twierdzenie 19.2 (1) ρ_τ są nieprzywiedlnymi reprezentacjami grupy $SL(n, \mathbb{C})$.

(2) Każda skończenie wymiarowa nieprzywiedlna reprezentacja $SL(n, \mathbb{C})$ jest postaci ρ_τ .

(3) $\rho_{\tau_1} \simeq \rho_{\tau_2}$ wtedy i tylko wtedy gdy diagramy Younga tablic τ_1 i τ_2 są takie same.

(4) $\bar{\rho}_\tau = \rho_{\bar{\tau}}$.

20 Struktura algebr Liego

20.1 Nilpotentne i rozwiązalne algebry Liego

Niższą serią centralną nazywamy podalgebry $\mathcal{D}_k \mathfrak{g}$ zdefiniowane indukcyjnie

$$\mathcal{D}_1 \mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad \mathcal{D}_k \mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathcal{D}_{k-1} \mathfrak{g}].$$

Serią pochodną nazywamy podalgebry

$$\mathcal{D}^1 \mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad \mathcal{D}^k \mathfrak{g} := [\mathcal{D}^{k-1} \mathfrak{g}, \mathcal{D}^{k-1} \mathfrak{g}].$$

$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathcal{D} \mathfrak{g} = \mathcal{D}_1 \mathfrak{g} = \mathcal{D}^1 \mathfrak{g}$ nazywamy pochodną algebry \mathfrak{g} .

Na przykład, $\mathcal{D}t(\mathbb{K}^n) = n(\mathbb{K}^n)$.

Twierdzenie 20.1 $\mathcal{D}^k \mathfrak{g}$ i $\mathcal{D}_k \mathfrak{g}$ są ideałami charakterystycznymi w \mathfrak{g} . Jeśli $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ jest homomorfizmem, to $\phi(\mathcal{D}^k \mathfrak{g}) = \mathcal{D}^k \phi(\mathfrak{g})$, $\phi(\mathcal{D}_k \mathfrak{g}) = \mathcal{D}_k \phi(\mathfrak{g})$.

Stwierdzenie 20.2 (1) *Jeśli \mathfrak{a} jest ideałem w \mathfrak{g} i $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ jest przemienna, to $\mathfrak{a} \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

(2) *Jeśli $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{a} \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest przestrzenią liniową, to \mathfrak{a} jest ideałem i $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ jest przemienna.*

Dowód. (1): Jeśli $A + \mathfrak{a}, B + \mathfrak{a} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, to $[A + \mathfrak{a}, B + \mathfrak{a}] = \mathfrak{a}$ oznacza $[A, B] \in \mathfrak{a}$. Więc $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$.

(2) wynika z $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$. \square

Mówimy, że algebra \mathfrak{g} jest *nilpotentna*, jeśli $\mathcal{D}_k \mathfrak{g} = \{0\}$ dla pewnego k i *rozwiązalna*, jeśli $\mathcal{D}^k \mathfrak{g} = \{0\}$ dla pewnego k . Mówimy, że \mathfrak{g} jest *półprosta*, jeśli nie ma rozwiązalnych ideałów.

Stwierdzenie 20.3 (1) *\mathfrak{h} jest rozwiązalna $\Leftrightarrow \mathbb{C}\mathfrak{h}$ jest rozwiązalna.*

(2) *\mathfrak{h} jest nilpotentna $\Leftrightarrow \mathbb{C}\mathfrak{h}$ jest nilpotentna.*

(3) *\mathfrak{h} jest półprosta $\Leftrightarrow \mathbb{C}\mathfrak{h}$ jest półprosta.*

Dowód. 5) \Leftarrow . Niech \mathfrak{a} będzie niezerowym ideałem rozwiązalnym w $\mathbb{C}\mathfrak{h}$. Wtedy $\bar{\mathfrak{a}}$ też. Również $\mathfrak{b} := \mathfrak{a} + \bar{\mathfrak{a}}$ jest rozwiązalny. Wtedy $\mathbb{C}(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}) = \mathfrak{b}$. $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}$ jest niezerowym ideałem rozwiązalnym w \mathfrak{h} . \square

Algebra $\mathfrak{n}(\mathbb{K}^n)$ ściśle górnotrójkątnych macierzy jest nilpotentna, jak również każda jej podalgebra. Można pokazać, że każda algebra nilpotentna jest izomorficzna do podalgebry $\mathfrak{n}(\mathbb{K}^n)$.

Twierdzenie 20.4 (1) *Każda podalgebra, obraz homomorficzny, suma prosta algebr nilpotentnych jest nilpotentna.*

(2) *Niech \mathfrak{a} będzie podprzestrzenią w $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (a więc ideałem w \mathfrak{g}). Jeśli $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ jest nilpotentna, to \mathfrak{g} też.*

(3) *\mathfrak{g} jest nilpotentna $\Leftrightarrow \text{ad}(\mathfrak{g})$ jest nilpotentna.*

Dowód. (2) Wiemy, że dla pewnego n , $\mathcal{D}_n(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) = \{0\}$. Z tego wynika, że $\mathcal{D}_n \mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}$. Zatem $\mathcal{D}_{n+1} \mathfrak{g} = \{0\}$.

(3) \Rightarrow jest oczywiste. By pokazać \Leftarrow zauważmy, że $\text{ad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ i zastosujemy (2). \square

Algebra $t(\mathbb{K}^n)$ górnotrójkątnych macierzy jest rozwiązalna jak również każda jej podalgebra. Można pokazać, że każda algebra rozwiązalna jest izomorficzna do podalgebry $t(\mathbb{K}^n)$. Każda reprezentacja algebry rozwiązalnej na przestrzeni \mathcal{V} ma obraz izomorficzny do podalgebry w $t(\mathcal{V})$.

Twierdzenie 20.5 (1) *Każda podalgebra, obraz homomorficzny, suma prosta algebr rozwiązalnych jest rozwiązalny.*

(2) *Niech \mathfrak{a} będzie ideałem w \mathfrak{g} . Jeśli \mathfrak{a} i $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ są rozwiązalne, to \mathfrak{g} też.*

(3) *\mathfrak{g} jest rozwiązalna $\Leftrightarrow \text{ad}(\mathfrak{g})$ jest rozwiązalna.*

Dowód. (2) Niech $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ będzie kanonicznym homomorfizmem.

Niech $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) = 0$. Mamy $\pi(\mathcal{D}^n \mathfrak{g}) \subset \mathcal{D}^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$. Zatem $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) \subset \ker \pi = \mathfrak{a}$.

Niech $\mathcal{D}^k \mathfrak{a} = \{0\}$. Wtedy $\mathcal{D}^{k+n} \mathfrak{g} = \mathcal{D}^k \mathcal{D}^n \mathfrak{g} \subset \mathcal{D}^k \mathfrak{a} = \{0\}$.

(2) implikuje (3). \square

W twierdzeniu tym nie można zamienić “rozwiązalny” przez “nilpotentny”, co pokazuje przykład $0 \rightarrow \mathfrak{n}(\mathbb{K}^n) \rightarrow t(\mathbb{K}^n) \rightarrow d(\mathbb{K}^n) \rightarrow 0$.

Twierdzenie 20.6 Niech $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ będą ideałami w \mathfrak{g} .

- (1) Jeśli $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ są rozwiązalne, to $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ też.
- (2) Jeśli $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ są nilpotentne, to $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ też.

Dowód. (1) Z rozwiązalności \mathfrak{a} wynika rozwiązalność $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$. Mamy $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b} \simeq \mathfrak{a}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$, zatem $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ jest rozwiązalna. W ciągu dokładnym $0 \rightarrow \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \rightarrow (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ wyrazy brzegowe są rozwiązalne, więc wyraz środkowy też.

(2) Rozważmy $A_i, i = 1, \dots, 2k + 1$, z których każdy należy do \mathfrak{a} lub \mathfrak{b} . Pokażemy, że

$$[A_1 \cdot [A_2, \dots [A_{2k}, A_{2k+1}] \dots]]$$

należy do $\mathcal{D}_k \mathfrak{a}$ lub $\mathcal{D}_k \mathfrak{b}$.

Rzeczywiście, wtedy co najmniej $k + 1$ wyrazów należy do \mathfrak{a} lub \mathfrak{b} . Załóżmy, że do \mathfrak{a} . Korzystamy następnie z tego, że $\mathcal{D}_j \mathfrak{a}$ jest ideałem charakterystycznym w \mathfrak{a} .

Zatem, jeśli $\mathcal{D}_k \mathfrak{a} = \mathcal{D}_k \mathfrak{b} = \{0\}$, to $\mathcal{D}_{2k+1}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \{0\}$. \square

Zatem w każdej alebrze Liego istnieje największy ideał rozwiązalny, zwany *radykałem*, i największy ideał nilpotentny.

20.2 Twierdzenie Liego

Twierdzenie 20.7 (Liego) Niech \mathcal{V} będzie przestrzenią zespoloną a $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie rozwiązalną algebrą Liego. Wtedy istnieje $\alpha \in \mathfrak{g}^\#$ taki, że

$$\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{g}) := \bigcap_{A \in \mathfrak{g}} \text{Ker}(A - \alpha(A)) \neq \{0\}. \quad (20.142)$$

Przestrzeń $\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{g})$ nazwiemy *przestrzenią własną algebry \mathfrak{g} dla pierwiastka α* . $\alpha \in \mathfrak{g}^\#$ dla którego ta przestrzeń jest niezerowa nazywamy *pierwiastkiem algebry \mathfrak{g}* .

Dowód Twierdzenia Liego opiera się na następującym stwierdzeniu.

Stwierdzenie 20.8 Niech \mathcal{V} będzie przestrzenią zespoloną, $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego i $\alpha \in \mathfrak{g}^\#$. Niech $B \in gl(\mathcal{V})$ spełnia

$$[B, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}.$$

Wtedy B zachowuje podprzestrzeń $\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{g})$ zdefiniowaną w (20.142).

Dowód. Niech x należy do $\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{g})$ i $x_j := B^j x, j = 0, 1, \dots$. Niech k będzie najmniejszą liczbą taką, że x_m jest kombinacją liniową x_0, \dots, x_{m-1} . Wykażemy, że istnieje macierz $\alpha_{ij} \in \mathfrak{g}^\#$ taka, że $\alpha_{ij} = 0, i < j, \alpha_{ii} = \alpha$ i

$$Ax_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij}(A)x_j. \quad (20.143)$$

Jest to oczywiste dla $i = 1$. Załóżmy, że to prawda dla $i = k$.

$$\begin{aligned} Ax_{k+1} = ABx_k &= [A, B]x_k + BAx_k \\ &= \sum_i \alpha_{ki}([A, B])x_i + \alpha_{ki}(A)x_{i+1}. \end{aligned}$$

Czyli

$$\alpha_{k+1,i}(A) = \alpha_{k,i}([A, B]) + \alpha_{k,i-1}(A),$$

co kończy dowód (20.143).

Niech \mathcal{X} będzie przestrzenią rozpiętą przez x_0, \dots, x_k . Jest ona B -niezmiennicza i \mathfrak{g} -niezmiennicza. Macierz \mathfrak{g} obcięta do \mathcal{X} jest górnotrójkątna i na diagonalu ma α . Zatem, dla $A \in \mathfrak{g}$,

$$\text{Tr}_{\mathcal{X}} A = k\alpha(A), \quad A \in \mathfrak{g}.$$

W szczególności,

$$0 = \text{Tr}_{\mathcal{X}}[A, B] = k\alpha([A, B]).$$

Zatem $\alpha([A, B]) = 0$. Dlatego też, $\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij}$. Więc,

$$ABx = \alpha(A)Bx.$$

Dowód Tw. 20.7. Stosujemy indukcję względem $\dim \mathfrak{g}$. Dla $\dim \mathfrak{g} = 1$ jest to znany fakt.

Założmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $\dim \mathfrak{g} = k-1$. Niech $\dim \mathfrak{g} = k$. $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest ideałem w \mathfrak{g} kowymiaru $j > 0$. Dowolna podprzestrzeń $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$ jest ideałem. W szczególności, niech $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathbb{C}B = \mathfrak{g}$. Z założenia indukcyjnego istnieje funkcjonal pierwiastkowy α_1 na \mathfrak{g}_1 . $\text{ad}(B)$ zachowuje \mathfrak{g}_1 . Zatem, ze Stw. 20.8 wynika, że B zachowuje $\mathcal{V}_{\alpha}(\mathfrak{g})$. B posiada wektor własny $v \in \mathcal{V}_{\alpha}(\mathfrak{g})$, czyli $Bv = \mu v$. Każdy $A \in \mathfrak{g}$ jest postaci $A = A_1 + tB$, $A_1 \in \mathfrak{g}_1$, $t \in \mathbb{K}$. Wtedy

$$(A_1 + tB)v = (\alpha_1(A) + t\mu)v.$$

□

Twierdzenie 20.9 Niech \mathcal{V} będzie przestrzenią zespoloną a $\mathfrak{g} \subset \text{gl}(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego. Wtedy następujące warunki są równoważne:

- (1) \mathfrak{g} jest rozwiązalna.
- (2) Istnieje ciąg niezmienniczych przestrzeni $\{0\} = \mathcal{V}_0 \subset \dots \subset \mathcal{V}_n = \mathcal{V}$, $\dim \mathcal{V}_j = j$.
- (3) Istnieje baza w \mathcal{V} taka, że \mathfrak{g} jest zawarta w macierzach górnotrójkątnych.

Dowód. (1) \Rightarrow (2) Stosujemy indukcję względem $\dim \mathcal{V}$. Dla $\dim \mathcal{V} = 1$ jest to oczywiste. Niech będzie prawdziwe dla $\dim \mathcal{V} = n$. Niech $\dim \mathcal{V} = n+1$. Na mocy Tw. Liego istnieje pierwiastek $\alpha \in \mathfrak{g}^{\#}$ z wektorem własnym $v \in \mathcal{V}$. Przestrzeń $\mathbb{C}v$ jest niezmiennicza. Dlatego mamy reprezentację ilorazową w $\mathcal{V}/\mathbb{C}v$, $\dim \mathcal{V}/\mathbb{C}v = n$. Zatem istnieją przestrzenie $\{0\} = \mathcal{W}_0 \subset \dots \subset \mathcal{W}_n = \mathcal{V}/\mathbb{C}v$, $\dim \mathcal{W}_j = j$ niezmiennicze względem tej reprezentacji. Niech \mathcal{V}_{j+1} będzie przeciwobrazem \mathcal{W}_j względem homomorfizmu kanonicznego.

(2) \Rightarrow (3) Wybieramy bazę e_1, \dots, e_n taką, że $\mathcal{V}_j = \text{Span}\{e_1, \dots, e_j\}$.

(3) \Rightarrow (1) Podalgebra algebry rozwiązalnej jest rozwiązalna. □

Twierdzenie 20.10 Niech \mathfrak{g} będzie zespoloną algebrą Liego. Wtedy następujące warunki są równoważne:

- (1) \mathfrak{g} jest rozwiązalna.
- (2) Istnieje ciąg ideałów $\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \dots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ taki, że $\dim \mathfrak{g}_j = j$.
- (3) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest nilpotentna.

Dowód. (1) \Rightarrow (2) Rozważmy reprezentację $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(\mathfrak{g})$. $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subset \text{gl}(\mathfrak{g})$ jest algebrą rozwiązalną. Zatem istnieje ciąg podprzestrzeni $\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \dots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$, $\dim \mathfrak{g}_j = j$, które są $\text{ad}(\mathfrak{g})$ -niezmiennicze. $\text{ad}(\mathfrak{g})$ -niezmienniczość oznacza bycie ideałem.

(2) \Rightarrow (1) Z tego, że $\mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_{j-1}$ jest 1-wymiarowa, wynika, że jest przemienna. Dlatego, ze Stw. 20.2 (1) dostajemy $[\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{j-1}$. Stąd $\mathcal{D}^k \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_{n-k}$.

(3) \Rightarrow (1) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest nilpotentne, więc rozwiązalna. $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest przemienna więc rozwiązalna. Zatem \mathfrak{g} jest rozwiązalna.

(1) \Rightarrow (3) Rozważmy $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subset \text{gl}(\mathfrak{g})$. W pewnej bazie, $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subset t(\mathbb{C}^n)$. Zatem $[\text{ad}(\mathfrak{g}), \text{ad}(\mathfrak{g})] \subset n(\mathbb{C}^n)$. Więc $\text{ad}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = [\text{ad}(\mathfrak{g}), \text{ad}(\mathfrak{g})]$ jest nilpotentna. Czyli, z Tw. 20.5 (3) wynika, że $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest nilpotentna. \square

Stwierdzenie 20.11 Każda nietrywialna skończenie wymiarowa reprezentacja nieprzywiedlna algebry rozwiązalnej jest 1-wymiarowa.

Dowód. Zgodnie z Tw. Liego, każda algebra Liego działająca na skończenie wymiarowej przestrzeni posiada wektor własny. \square

20.3 Dolny ciąg centralny

Niech \mathfrak{g} będzie algebrą Liego. Dolny ciąg centralny $\mathcal{C}_j \mathfrak{g}$ definiujemy indukcyjnie w sposób następujący: $\mathcal{C}_0 \mathfrak{g} = \{0\}$. Jeśli zdefiniowaliśmy $\mathcal{C}_{k-1} \mathfrak{g}$, $\pi_{k-1} \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathcal{C}_{k-1} \mathfrak{g}$ jest homomorfizmem kanonicznym, to

$$\mathcal{C}_k \mathfrak{g} := \pi_{k-1}^{-1}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}/\mathcal{C}_{k-1} \mathfrak{g})).$$

(Automatycznie, \mathcal{C}_k jest ideałem w \mathfrak{g} , jako przeciwobraz ideału względem homomorfizmu).

Twierdzenie 20.12 Niech \mathfrak{g} będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:

- (1) \mathfrak{g} jest nilpotentna.
- (2) Istnieje ciąg ideałów $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \dots \supset \mathfrak{g}_n = \{0\}$ takich, że $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{j+1}$.
- (3) Istnieje m takie, że $\mathcal{C}_m \mathfrak{g} = \mathfrak{g}$.

Dowód. (1) \Rightarrow (2) jest oczywiste, jeśli położyć $\mathfrak{g}_j = \mathcal{D}_j \mathfrak{g}$.

(2) \Rightarrow (1). Pokazujemy indukcyjnie, że $\mathcal{D}_j \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_j$.

(2) \Rightarrow (3) Pokażemy indukcyjnie, że $\mathfrak{g}_{m-k} \subset \mathcal{C}_k \mathfrak{g}$. Dla $k=0$, $\mathfrak{g}_m = \mathcal{C}_0 \mathfrak{g} = \{0\}$.

Załóżmy, że $\mathfrak{g}_{m-(k-1)} \subset \mathcal{C}_{k-1} \mathfrak{g}$. Mamy

$$\begin{aligned} [\mathfrak{g}/\mathcal{C}_{k-1} \mathfrak{g}, \pi_{k-1}(\mathfrak{g}_{m-k})] &= \pi_{k-1}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{m-k}]) \\ &\subset \pi_{k-1}(\mathfrak{g}_{m-(k-1)}) \subset \pi_{k-1}(\mathcal{C}_{k-1} \mathfrak{g}) = \{0\}. \end{aligned}$$

Zatem $\pi_{k-1}(\mathfrak{g}_{m-k}) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g}/\mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g})$. Więc, $\mathfrak{g}_{m-k} \subset \mathcal{C}_k\mathfrak{g}$.
(3) \Rightarrow (2).

$$\pi_{k-1}([\mathfrak{g}, \mathcal{C}_k\mathfrak{g}]) = [\pi_{k-1}(\mathfrak{g}), \pi_{k-1}(\mathcal{C}_k\mathfrak{g})] = [\mathfrak{g}/\mathcal{C}_k\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{g}/\mathcal{C}_k\mathfrak{g})] = \{0\}.$$

Zatem $[\mathfrak{g}, \mathcal{C}_k\mathfrak{g}] \subset \ker \pi_{k-1} = \mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g}$. Stąd,

$$\mathcal{C}_m\mathfrak{g} \subset \cdots \subset \mathcal{C}_0\mathfrak{g}_0$$

spełnia warunki (2). \square

20.4 Kryteria Cartana rozwiązalności

Twierdzenie 20.13 (Kryterium Cartana dla formy śladowej.) *Niech $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

- (1) \mathfrak{g} jest rozwiązalna.
- (2) $\text{Tr}AB = 0$, $A \in \mathfrak{g}$, $B \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.
- (3) $\text{Tr}AB = 0$, $A, B \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Lemat 20.14 *Niech $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ będą podprzestrzeniami w $L(\mathcal{V})$. Połóżmy*

$$\mathfrak{b} := \{B \in L(\mathcal{V}) : \text{ad}(B)\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}\}.$$

Niech $A \in \mathfrak{b}$. Jeśli

$$\text{Tr}AB = 0, \quad B \in \mathfrak{b},$$

to A jest nilpotentny.

Dowód. Niech $A = S + N$ będzie kanonicznym rozkładem na część półprostą i nilpotentną. Niech e_1, \dots, e_n będzie bazą diagonalizującą S , tak że $Ae_j = \lambda_j e_j$. Niech e^1, \dots, e^n będzie bazą dualną.

Niech \mathbb{L} będzie podzbiorem \mathbb{K}

$$\mathbb{L} := \left\{ \sum r_j \lambda_j : r_j \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Niech $f : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{Q}$ będzie funkcją \mathbb{Q} -liniową. Zdefiniujmy P przez $Pe_j = f(\lambda_j)e_j$. Mamy

$$\begin{aligned} \text{ad}(S)|e_i\rangle\langle e_j| &= (\lambda_i - \lambda_j)|e_i\rangle\langle e_j|, \\ \text{ad}(P)|e_i\rangle\langle e_j| &= (f(\lambda_i) - f(\lambda_j))|e_i\rangle\langle e_j| = f(\lambda_i - \lambda_j)|e_i\rangle\langle e_j|. \end{aligned}$$

Zatem $\text{ad}(P) = f(\text{ad}(S))$. Można dobrać wielomian p o wolnym wyrazie zero taki, że $f(\lambda_i - \lambda_j) = p(\lambda_i - \lambda_j)$. Wtedy $\text{ad}(P) = p(\text{ad}(S))$. Ze Stw. 21.8 wynika, że $\text{ad}(S)$ jako część półprosta $\text{ad}(A)$ jest też wielomianem (bez wyrazu wolnego) od $\text{ad}(A)$, tj. $\text{ad}(S) = s(\text{ad}(A))$. Ostatecznie, $\text{ad}(P) = s(p(\text{ad}(S))) = t(\text{ad}(A))$, gdzie t jest wielomianem bez wyrazu wolnego. Z tego, że

$\text{ad}(A)\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}$ wynika, że $t(\text{ad}(A))\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}$. Zatem $P \in \mathfrak{b}$. Więć P taki, że $Pe_j = \bar{\lambda}_j e_j$ należy do \mathfrak{b} . Dlatego,

$$0 = \text{Tr}AP = \sum_{j=1}^n f(\lambda_j)\lambda_j. \quad (20.144)$$

Prawa strona (20.144) należy do \mathbb{L} , można więc na nią zadziałać funkcją f . Dostajemy

$$0 = \sum_{j=1}^n f(\lambda_j)^2.$$

Zatem $f(\lambda_1) = \dots = f(\lambda_n) = 0$ (bo $f(\lambda_j) \in \mathbb{Q}$). Więć $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. \square

Dowód Tw. 20.13. (1) \Rightarrow (2) wynika z faktu, że znajdziemy bazę, w której \mathfrak{g} są górnotrójkątne. (2) \Rightarrow (1). Niech

$$\mathfrak{n} := \{C \in L(\mathcal{V}) : [C, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}.$$

Wtedy $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{n}$. Więć dla $A, B \in \mathfrak{g}, C \in \mathfrak{n}$,

$$\text{Tr}[A, B]C = \text{Tr}A[B, C] = 0.$$

Zatem

$$\text{Tr}DC = 0, D \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], C \in \mathfrak{n}.$$

Na podstawie Lematu 20.14, z (2) wynika, że wszystkie elementy $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ są nilpotentne. Zatem \mathfrak{g} jest rozwiązalna.

(2) \Rightarrow (3) jest oczywiste.

(3) \Rightarrow (2). Na mocy (2) \Rightarrow (1), $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest rozwiązalna. Ale $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest przemienna, więc rozwiązalna. Zatem \mathfrak{g} jest rozwiązalna. \square

Twierdzenie 20.15 (Kryterium Cartana dla formy Killinga.) *Niech $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

- (1) \mathfrak{g} jest rozwiązalna.
- (2) $\langle A|B \rangle_{\text{ad}} = 0, A \in \mathfrak{g}, B \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.
- (3) $\langle A|B \rangle_{\text{ad}} = 0, A, B \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Dowód. (1) \Rightarrow (2). $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subset gl(\mathfrak{g})$ jest rozwiązalną algebrą Liego. Możemy zatem do niej zastosować Tw. 20.13 (1) \Rightarrow (2).

(2) \Rightarrow (1). Z Tw. 20.13 (2) \Rightarrow (1) wynika, że $\text{ad}(\mathfrak{g})$ jest rozwiązalna. Ale to jest równoważne temu, że \mathfrak{g} jest rozwiązalna.

(2) \Rightarrow (3) jest oczywiste.

(3) \Rightarrow (2). Z tego, że $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest ideałem w \mathfrak{g} wynika, że form Killinga dla \mathfrak{g} obcięta do $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ pokrywa się z formą Killinga dla $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Zatem możemy zastosować (2) \Rightarrow (1) do $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ i wnioskować, że $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest rozwiązalna. Następnie powtarzamy argument, który używaliśmy w dowodzie Tw. 20.13, który implikuje rozwiązalność \mathfrak{g} . \square

Dowód Tw. 13.11 (1) \Rightarrow (2): Niech \mathfrak{g} będzie półprosta. Rozważmy \mathfrak{g}^\perp (względem formy Killinga). Wtedy \mathfrak{g}^\perp jest ideałem dla którego forma Killinga jest równa 0. Zatem z Kryterium Cartana dla formy Killinga (Tw. 20.15) \mathfrak{g}^\perp jest rozwiązalny. Z półprostoty $\mathfrak{g}^\perp = \{0\}$. Zatem forma Killinga jest niezdegenerowana. \square

Dowód Tw. 13.13: Dowód analogiczny jak powyżej, z tą różnicą, że z Kryterium Cartana dla formy śladowej Tw. 20.13. \square

Rozważmy przemienną algebrę \mathbb{K}^n z bazą e_1, \dots, e_n . Dowolny operator $P \in L(\mathbb{K}^n)$ definiuje różniczkowanie na \mathbb{K}^n . Dlatego $\mathbb{R} \ni t \mapsto tP \in \text{Der}(\mathbb{K}^n)$ jest homomorfizmem algebr Liego. Niech $f = 1 \in \mathbb{R}$ będzie bazą w \mathbb{R} . Rozważmy algebrę Liego $\mathfrak{g} := \mathbb{K}^n \rtimes_P \mathbb{K}$. Mamy

$$[e_i, f] = Pe_i, \quad [e_i, e_j] = 0, \quad [f, f] = 0.$$

Forma Killinga ma jedyny niezerowy wyraz dla

$$\langle f|f \rangle = \text{Tr}P^2.$$

Aby to pokazać, liczymy

$$\text{ad}(f) = - \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ad}(e_i) = - \begin{bmatrix} 0 & Pe_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oczywiście, $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = P\mathbb{K}^n$, która jest przemienna. Zatem algebra jest rozwiązalna.

Poza tym, łatwo sprawdzamy, że $\mathcal{D}_m(\mathfrak{g}) = P^m\mathbb{K}^n$. Dlatego \mathfrak{g} jest nilpotentna wtedy i tylko wtedy gdy P jest nilpotentny.

20.5 Algebry półproste i reduktywne a algebry rozwiązalne

Przypomnijmy, że algebra Liego \mathfrak{g} jest półprosta gdy nie posiada niezerowych ideałów przemiennych, a jest *reduktywna* gdy jest sumą prostą półprostej i przemiennej algebry Liego.

Twierdzenie 20.16 *Niech \mathfrak{g} będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

- (1) \mathfrak{g} jest algebrą półprostą.
- (2) \mathfrak{g} nie posiada niezerowych ideałów rozwiązalnych.
- (3) Radykał algebry \mathfrak{g} jest równy $\{0\}$.

Dowód. (2) \Rightarrow (1) jest oczywiste

(1) \Rightarrow (2). Niech \mathfrak{a} będzie niezerowym ideałem rozwiązalnym. Wtedy istnieje k takie, że $\mathcal{D}^{k-1}\mathfrak{a} \neq \{0\}$ i $\mathcal{D}^k\mathfrak{a} = \{0\}$. $\mathcal{D}^{k-1}\mathfrak{a}$ jest więc przemienne. Poza tym, jest to ideał charakterystyczny w \mathfrak{a} . Zatem jest to ideał w \mathfrak{g} .

(2) \Rightarrow (3) Radykał jest ideałem rozwiązalnym.

(3) \Rightarrow (1) Załóżmy, że \mathfrak{a} jest niezerowym ideałem przemiennym. Radykał zawiera \mathfrak{a} , więc jest niezerowy. \square

Twierdzenie 20.17 *Niech \mathfrak{g} będzie dowolną algebrą Liego i \mathfrak{r} jej radykałem. Wtedy istnieje podalgebra półprosta \mathfrak{a} taka, że $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \rtimes \mathfrak{a}$.*

Dowód. Udowodnimy tylko słabszy fakt, który mówi, że $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ jest półprosta. Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy istnieje ideał rozwiązalny $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$. Niech \mathfrak{r}_1 będzie jego przeciwobrazem w \mathfrak{g} . Wtedy mamy $0 \rightarrow \mathfrak{r} \rightarrow \mathfrak{r}_1 \rightarrow \mathfrak{h} \rightarrow 0$. Ponieważ \mathfrak{r} i \mathfrak{h} są rozwiązalne, taki jest \mathfrak{r}_1 . Ale \mathfrak{r} jest największym ideałem rozwiązalnym w \mathfrak{g} . Zatem $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}$. Zatem $\mathfrak{h} = 0$. \square

Twierdzenie 20.18 *Niech \mathfrak{g} będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

- (1) \mathfrak{g} jest algebrą reduktywną.
- (2) \mathfrak{g} nie posiada nieprzemiennych ideałów rozwiązalnych.
- (3) Radykał algebry \mathfrak{g} jest przemienny.

20.6 Operator Casimira

Niech $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego a $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ jej ideałem. Wybierzmy bazę B_1, \dots, B_n w \mathfrak{b} . Załóżmy, że macierz

$$b_{ij} = \text{Tr } B_i B_j.$$

jest nieosobliwa. Niech $[b^{ij}]$ będzie jej odwrotnością. Operator Casimira dla ideału \mathfrak{b} jest zdefiniowany jako

$$C_{\mathfrak{b}} := \sum_{ij=1}^n B_i B_j b^{ij}.$$

Zauważmy, że operator Casimira nie zależy od wyboru bazy w \mathfrak{b} .

Twierdzenie 20.19 (1) *Operator Casimira komutuje z \mathfrak{g} .*

(2) $\text{Tr } C_{\mathfrak{b}} = \dim \mathfrak{b}$, w szczególności $C_{\mathfrak{b}} \neq 0$.

(3) *Jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ i algebra \mathfrak{g} działa nieprzywiedlnie w \mathcal{V} , to $C_{\mathfrak{b}} = \frac{\dim \mathfrak{b}}{\dim \mathcal{V}} \mathbb{1}$.*

Dowód. (1). Niech $A \in \mathfrak{g}$. Z tego, że \mathfrak{b} jest ideałem wynika, że

$$[A, B_i] = \sum_{k=1}^n t_i^k B_k.$$

Z niezmienniczości formy $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\rho}$ wynika, że

$$\begin{aligned} 0 &= \langle [A, B_i] | B_j \rangle_{\rho} + \langle B_i | [A, B_j] \rangle_{\rho} \\ &= t_i^k b_{kj} + b_{ik} t_j^k. \end{aligned}$$

W skrótownym zapisie, $t^{\#}b - bt = 0$. Mnożąc przez odwrotność b z obu stron dostajemy $b^{-1}t^{\#} + tb^{-1} = 0$, czyli

$$0 = b^{ik} t_k^j + t_k^i b^{kj}.$$

Dlatego

$$\begin{aligned} [A, \mathcal{C}_b] &= \sum_{i,j=1}^n (\rho([A, B_i])\rho(B_j) + \rho(B_i)\rho([A, B_j])) b^{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^n (t_i^k B_k B_j + B_i t_j^k B_k) b^{ij} = 0. \end{aligned}$$

□

20.7 Reprezentacje algebr półprostych

Stwierdzenie 20.20 *Algebry półproste Liego nie posiadają nietrywialnych reprezentacji 1-wymiarowych.*

Dowód. Jądro takiej reprezentacji musiałoby być ideałem kowymiary 1. Musiałby istnieć zatem ideał wymiaru 1, który byłby z konieczności przemienne, co jest niemożliwe. □

Stwierdzenie 20.21 *Niech \mathfrak{g} będzie algebrą Liego. Wtedy \mathfrak{g} jest rozwiązalna \Leftrightarrow wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne algebry \mathfrak{g} są jednowymiarowe.*

Dowód. \Rightarrow . Niech $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow L(\mathcal{V})$ będzie nietrywialną reprezentacją zespoloną. Wtedy istnieje $v \in \mathcal{V}$ i $\alpha \in \mathfrak{g}^\#$ takie, że $Av = \alpha(A)v$. Zatem $\mathbb{C}v$ jest podprzestrzenią niezmienniczą. Zatem jeśli \mathcal{V} jest nieprzywiedlna, to $\dim \mathcal{V} = 1$.

\Leftarrow . Niech \mathfrak{g} nie będzie rozwiązalna. Niech \mathfrak{r} będzie radykałem \mathfrak{g} . Wtedy $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ jest nietrywialną algebrą półprostą. Niech $\mathfrak{g}/\mathfrak{r} = \mathfrak{a}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{a}_n$ będzie rozkładem na proste składniki. Wtedy $(\mathfrak{g}/\mathfrak{r})/(\mathfrak{a}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{a}_n) \simeq \mathfrak{a}_1$. Reprezentacja dołączona $\mathfrak{a}_1 \rightarrow gl(\mathfrak{a}_1)$ jest nieprzywiedlna i $\dim \mathfrak{a}_1 > 1$. Podnosi się ona do reprezentacji (oczywiście, również nieprzywiedlnej) algebry \mathfrak{g} . □

Mówimy, że reprezentacja jest *półprosta*, jeśli dla każdej podprzestrzeni niezmienniczej znajdziemy dopełniającą podprzestrzeń niezmienniczą.

Stwierdzenie 20.22 *Jeśli reprezentacja jest półprosta i skończenie wymiarowa, to daje się rozłożyć na sumę prostą reprezentacji nierzywiedlnych.*

Każda niezerowa przemienne algebra posiada niepółproste reprezentacje. Np

$$\mathbb{K} \ni \alpha \mapsto \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 20.23 *Niech \mathfrak{g} będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

- (1) \mathfrak{g} jest półprosta.
- (2) Każda reprezentacja \mathfrak{g} jest półprosta.

Dowód. (2) \Rightarrow (1). Niech \mathfrak{b} będzie ideałem przemiennym w \mathfrak{g} . Reprezentacja $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(\mathfrak{g})$ jest półprosta. \mathfrak{b} jest podprzestrznią niezmienniczą. Zatem istnieje rozkład na podprzestrzenie niezmiennicze $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. Niezmienniczość względem ad oznacza bycie ideałem. Czyli $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Więc reprezentacje \mathfrak{b} podnoszą się do reprezentacji \mathfrak{g} . Każda niezerowa przemienna algebra posiada niepółproste reprezentacje.

(1) \Rightarrow (2) Niech \mathfrak{g} będzie półprostą algebrą Liego.

Krok 1. Załóżmy, że \mathcal{Y} jest podprzestrznią niezmienniczą kowymiary 1 dla reprezentacji $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(\mathcal{X})$ i ρ obcięta do \mathcal{Y} jest nieprzywiedlna. Pokażemy, że istnieje rozkład $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{T}$ na podprzestrzenie niezmiennicze.

Najpierw zauważmy, że Stw. 20.20 pokazuje, że reprezentacja ilorazowa na \mathcal{X}/\mathcal{Y} jest zerowa. Zatem $\rho(\mathcal{X}) \subset \mathcal{Y}$.

Oznaczmy ograniczenie ρ do \mathcal{Y} przez ρ_0 . Jeśli $\rho_0 = 0$, to $\rho(\mathfrak{g})\rho(\mathfrak{g})\mathcal{X} \subset \rho(\mathfrak{g})\mathcal{Y} = \{0\}$. Więc $\rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])\mathcal{X} = \{0\}$. Z półprostoty \mathfrak{g} wynika, że $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, więc $\rho = 0$

Założmy więc, że $\rho_0 \neq 0$. Niech $\mathfrak{a} := \text{Ker}\rho_0$. Z półprostoty \mathfrak{g} wynika, że istnieje ideał $\mathfrak{b} \neq \{0\}$ taki, że $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. Reprezentacja ρ_0 (czyli też ρ) ograniczona do \mathfrak{b} jest iniektywna. Zatem forma śladowa na \mathfrak{b}

$$\langle A|B \rangle_\rho = \text{Tr } \rho(A)\rho(B), \quad A, B \in \mathfrak{b},$$

jest nieosobliwa. Niech $\mathcal{C}_{\rho(\mathfrak{b})}$ będzie operatorem Casimira dla ideału $\rho(\mathfrak{b})$. Wtedy $\mathcal{C}_{\rho_0(\mathfrak{b})} = \mathcal{C}_{\rho(\mathfrak{b})}|_{\mathcal{Y}}$ jest operatorem Casimira dla ideału $\rho_0(\mathfrak{b})$. Mamy $\text{Tr}\mathcal{C}_{\rho_0(\mathfrak{b})} = \dim \mathfrak{b} \neq 0$,

$$\mathcal{C}_{\rho_0(\mathfrak{b})}\rho_0(A) = \rho_0(A)\mathcal{C}_{\rho_0(\mathfrak{b})}\rho_0(A), \quad A \in \mathfrak{g}.$$

Reprezentacja ρ_0 jest nieprzewiedlna, więc $\mathcal{C}_{\rho_0(\mathfrak{b})}$ jest skalarny. Więc $\text{Ker}\mathcal{C}_{\rho_0(\mathfrak{b})} = \{0\}$. Obraz $\mathcal{C}_{\rho(\mathfrak{b})}$ leży w \mathcal{Y} . Więc $\mathcal{C}_{\rho(\mathfrak{b})}$ musi mieć nietrywialne jądro, które jest podprzestrznią niezmienniczą dopełniającą do \mathcal{Y} .

Krok 2. Tak jak w Kroku 1, z tą różnicą, że nie zakładamy nieprzywiedlności ρ na \mathcal{Y} .

Stosujemy indukcję względem wymiaru \mathcal{X} . Niech $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Y}$ będzie nieprzywiedlną niezerową podprzestrznią ρ -niezmienniczą. Rozważmy reprezentację ilorazową ρ' na $\mathcal{X}' := \mathcal{X}/\mathcal{Z}$ z podprzestrznią niezmienniczą $\mathcal{Y}' := \mathcal{Y}/\mathcal{Z}$. Mamy $\dim \mathcal{X}' < \mathcal{X}$, $\dim \mathcal{X}'/\mathcal{Y}' = 1$. Zatem z założenia indukcyjnego wynika rozkład $\mathcal{X}' = \mathcal{Y}' \oplus \mathcal{R}'$ na sumę prostą podprzestrzeni ρ' -niezmienniczych. Niech \mathcal{Y}, \mathcal{T} będą przeciwobrazami $\mathcal{Y}', \mathcal{T}'$ względem kanonicznej projekcji $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}/\mathcal{Z}$. Wtedy, korzystając z tego, że $\rho(\mathfrak{g})\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$, dostajemy rozkład $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{T}$ na podprzestrzenie ρ -niezmiennicze.

Krok 3. Pokażemy, że dowolna reprezentacja jest półprosta.

Rozważmy reprezentację $\tau : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(\mathcal{V})$ i podprzestrzeń niezmienniczą \mathcal{W} . Zdefiniujmy nową reprezentację $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(\text{gl}(\mathcal{V}))$

$$\sigma(A) := \text{ad}(\tau(A)), \quad A \in \mathfrak{g}.$$

Niech

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &:= \{B \in \text{gl}(\mathcal{V}) : B\mathcal{V} \subset \mathcal{W}, B|_{\mathcal{W}} = \lambda \mathbb{1}_{\mathcal{W}}\}, \\ \mathcal{N} &:= \{B \in \text{gl}(\mathcal{V}) : B\mathcal{V} \subset \mathcal{W}, B|_{\mathcal{W}} = 0\}. \end{aligned}$$

Jeśli wprowadzimy dowolny rozkład $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{U}$, to elementy \mathcal{M} mają rozkład

$$B = \begin{bmatrix} \lambda \mathbb{1} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oczywiście, $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$, $\dim \mathfrak{M}/\mathfrak{N} = 1$. Niech $A \in \mathfrak{g}$. Mamy

$$\tau(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \sigma(A)B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \mathbb{1} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda \mathbb{1} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a_{11}b_{12} - \lambda a_{12} - b_{12}a_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zatem $\sigma(\mathfrak{g})\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$. Ograniczając σ do \mathfrak{M} dostajemy reprezentację spełniającą założenia Kroku 2. Zatem $\mathcal{M} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{T}$, gdzie \mathcal{T} jest niezmiennicze. Niech B będzie niezerowym elementem \mathcal{T} . Wtedy

$$B = \begin{bmatrix} \lambda \mathbb{1} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda \neq 0.$$

Zatem $\text{Ker} B \cap \mathcal{W} = \{0\}$. Mamy $B\mathcal{V} = \mathcal{W}$, dlatego $\dim \text{Ker} B + \dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{V}$. Zatem $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \text{Ker} B$. Mamy

$$\sigma(A)B = 0, \quad A \in \mathfrak{g},$$

Zatem

$$\tau(A)B = B\tau(A), \quad A \in \mathfrak{g}.$$

Stąd $\tau(A)\text{Ker} B \subset \text{Ker} B$. Czyli $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \text{Ker} B$ jest rozkładem na podprzestrzenie τ -niezmiennicze. \square

20.8 Różniczkowania półprostej algebry Liego

Stwierdzenie 20.24 Niech \mathfrak{a} będzie półprostym ideałem algebry Liego \mathfrak{g} . Wtedy \mathfrak{a} jest ideałem charakterystycznym.

Dowód. Mamy $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{a}$. Niech $\mathcal{D} \in \text{Der}(\mathfrak{g})$. Wtedy

$$\mathcal{D}\mathfrak{a} = \mathcal{D}[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = [\mathcal{D}\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] + [\mathfrak{a}, \mathcal{D}\mathfrak{a}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] + [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}.$$

\square

Stwierdzenie 20.25 Niech \mathcal{V} będzie przestrzenią zespoloną i $\mathfrak{g} \subset \text{gl}(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego. Załóżmy, że

- (1) \mathfrak{g} nie posiada nietrywialnych niezmienniczych podprzestrzeni
- (2) $\mathbb{1} \notin \mathfrak{g}$.

Wtedy \mathfrak{g} jest półprosta.

Dowód. Załóżmy, że \mathfrak{g} posiada ideał rozwiązalny \mathfrak{a} . Na mocy Tw. Liego istnieje funkcjonal pierwiastkowy $\alpha \in \mathfrak{a}^\#$ taki, że

$$\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{a}) := \{v \in \mathcal{V} : Av = \alpha(A)v, A \in \mathfrak{a}\} \neq \{0\}.$$

Ze Stwierdzenia 20.8 wynika i tego, że \mathfrak{a} jest ideałem w \mathfrak{g} , wynika, że $\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{a})$ jest podprzestrzenią niezmienniczą dla \mathfrak{g} . Zatem z (1), $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{a})$. Stąd $A = \alpha(A)\mathbb{1}$, $A \in \mathfrak{a}$. Z (2) wynika, że $\alpha = 0$. Więc $\mathfrak{a} = \{0\}$, co oznacza, że \mathfrak{g} jest półprosta. \square

Lemat 20.26 *Jeśli \mathfrak{g} jest półprosta, a $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$ jej rozkładem na proste ideały, to $\text{Der } \mathfrak{g} = \text{Der } \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \text{Der } \mathfrak{a}_n$.*

Dowód. Inkluzja \subset jest oczywista.

Niech $\mathcal{D} \in \text{Der}(\mathfrak{g})$. Ze Stw. 20.24 wynika, że ideały \mathfrak{a}_i są niezmiennicze względem \mathcal{D} . Zatem $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{D}_n$. \square

Twierdzenie 20.27 *Niech \mathfrak{g} będzie półprostą algebrą Liego. Wtedy $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{g})$ jest izomorfizmem.*

Dowód. Jądro homomorfizmu dołączonego jest centrum. Centrum jest zerowe. Zatem ad jest injekcją.

Pokażmy surjektywność ad .

Założmy najpierw, że \mathfrak{g} jest prosta. $\text{Der}(\mathfrak{g})$ jest podalgebrą w $gl(\mathfrak{g})$ nie zawierającą identyfikacji i nie posiadającą podprzestrzeni niezmienniczych. Dlatego, na podstawie Stwierdzenia 20.25 wnioskujemy, że $\text{ad}(\mathfrak{g})$ jest półprosta.

Jeśli \mathfrak{g} jest półprosta, i $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$ jej rozkładem na proste ideały, to na mocy Lematu 20.26, $\text{Der } \mathfrak{g} = \text{Der } \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \text{Der } \mathfrak{a}_n$. Zatem $\text{Der}(\mathfrak{g})$ jest półproste.

$\text{ad}(\mathfrak{g})$ jest ideałem w $\text{Der}(\mathfrak{g})$. Z półprostoty $\text{Der}(\mathfrak{g})$ wynika, że istnieje ideał \mathfrak{h} w $\text{Der}(\mathfrak{g})$ taki, że $\text{Der}(\mathfrak{g}) = \text{ad}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}$. Niech $\mathcal{D} \in \mathfrak{h}$, $A \in \mathfrak{g}$. Wtedy

$$0 = [\mathcal{D}, \text{ad}(A)] = \text{ad}(\mathcal{D}A).$$

Z injektywności ad wynika, że $\text{ad}(\mathcal{D}A) = 0$. To implikuje $\mathcal{D}A = 0$. Zatem $\mathcal{D} = 0$. Czyli, $\mathfrak{h} = 0$. \square

21 Nilpotentne algebry Liego

21.1 Struktura endomorfizmu liniowego

Niech $A \in L(\mathcal{V})$, gdzie \mathcal{V} jest skończenie wymiarowa zespolona.

Twierdzenie 21.1 *Niech $\lambda \in \mathbb{C}$. Następujące warunki są równoważne:*

- (1) $\text{Ker}(\lambda\mathbb{1} - A) \neq \{0\}$.
- (2) $\text{Ran}(\lambda\mathbb{1} - A) \neq \mathcal{V}$.
- (3) $\det(\lambda\mathbb{1} - A) = 0$.

Zbiór λ spełniających powyższe warunki nazywamy *spektrum* operatora A i oznaczamy $\text{spec}A$.

Mówimy, że D jest *półprostym* (*diagonalizowalnym*), gdy posiada bazę złożoną z wektorów własnych. Czyli jeśli $\text{spec}D = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, to $\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker}(\lambda_i\mathbb{1} - D)$ i względem tego rozkładu

$$D = \bigoplus_{i=1}^k \lambda_i \mathbb{1}_i.$$

Mówimy, że N jest *nilpotentny*, gdy dla pewnego p , $N^p = 0$. Najmniejszą taką liczbę, że $N^p = 0$ nazywamy jego *stopniem nilpotencji*.

Twierdzenie 21.2 *Niech \mathcal{V} będzie przestrzenią nad \mathbb{C} . Wtedy istnieje jednoznaczny rozkład $A = D + N$ na część półprostą i nilpotentną takie, że $DN = ND$.*

Dowód. Niech $\lambda \in \text{spec}A$. Ciąg podprzestrzeni $\text{Ker}(A - \lambda_i)^j$ jest rosnący, więc się stabilizuje dla dostatecznie dużych j . Niech p będzie najmniejszą liczbą taką, że $\text{Ker}(A - \lambda)^p = \text{Ker}(A - \lambda_i)^{p+1}$. Zdefiniujemy wtedy

$$\mathcal{V}^\lambda(A) := \text{Ker}(A - \lambda)^p = \bigcup_{j=0}^{\infty} \text{Ker}(A - \lambda)^j.$$

Pokazujemy wtedy, że $\mathcal{V} = \bigoplus_{\lambda \in \text{spec}A} \mathcal{V}^\lambda(A)$. Kładąc $D = \bigoplus_{\lambda \in \text{spec}A} \lambda$ i $N := A - D$ dostajemy rozkład. \square

Operator N na n wymiarowej przestrzeni taki, że $N^{p-1} \neq 0$ i $N^p = 0$ nazywamy *elementarnym operatorem nilpotentnym p -tego stopnia*. Każdy taki operator można w odpowiedniej bazie przedstawić w postaci macierzy z jedynekami bezpośrednio nad diagonalą, którą oznaczmy N_p .

Twierdzenie 21.3 *Jeśli N jest nilpotentny, to istnieje rozkład $\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{V}_i$ taki, że N zachowuje \mathcal{V}_i i $N|_{\mathcal{V}_i}$ jest elementarnym operatorem nilpotentnym.*

Twierdzenie 21.4 *Niech $BD = DB$. Wtedy B zachowuje rozkład na podprzestrzenie własne operatora D .*

Twierdzenie 21.5 *Niech $\mathbb{R} \ni t \mapsto \phi(t) \in \text{gl}(\mathcal{V})$ będzie reprezentacją algebr Liego. Wtedy reprezentację możemy rozłożyć na nierozkładalne składowe postaci $t \mapsto t(\lambda\mathbb{1} + N_k)$.*

Twierdzenie 21.6 (1) *Niech $N \in L(\mathcal{V})$ będzie nilpotentny. Wtedy $\text{ad}_N \in L(L(\mathcal{V}))$ też.*

(2) *Niech $D \in L(\mathcal{V})$ będzie nilpotentny. Wtedy $\text{ad}_D \in L(L(\mathcal{V}))$ też.*

(3) *Niech $A \in L(\mathcal{V})$ i niech $A = B + N$ będzie rozkładem na komutujące ze sobą operator półprostym i nilpotentnym. Wtedy $\text{ad}_A = \text{ad}_B + \text{ad}_N$ jest również takim rozkładem.*

Stwierdzenie 21.7 Niech $A, B \in L(\mathcal{V})$. Jeśli istnieje k takie, że $\text{ad}(A)^k B = 0$, to B zachowuje $\mathcal{V}^\lambda(A)$.

Dowód. Niech

$$\mathcal{V}^\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda)^m \ni x.$$

Założmy, że teza zachodzi, jeśli k zastąpimy przez $k - 1$. Mamy

$$(A - \lambda)^n Bx = \sum_{i=1}^n (A - \lambda)^i [B, A] (A - \lambda)^{n-i} x. \quad (21.145)$$

Mamy $\text{ad}(A)^{k-1} [B, A] = 0$. Zatem na mocy założenia indukcyjnego, $[B, A]$ zachowuje $\text{Ker}(A - \lambda)^m$.

Jeśli $n = 2m + 1$, to w sumie (21.145) wszystkie składniki są równe zero, bo albo $n - i - 1 \geq m$, i wtedy $(A - \lambda)^{n-i-1} x = 0$, albo $i \geq m$, i wtedy $y = [B, A] (A - \lambda)^{n-i} x \in \text{Ker}(A - \lambda)^m$, więc $(A - \lambda)^i y = 0$. \square

Stwierdzenie 21.8 (1) Niech $D \in \text{gl}(\mathcal{V})$ będzie półprostym. Wtedy $\text{ad}(D) \in \text{gl}(\text{gl}(\mathcal{V}))$ jest półprostym.

(2) Niech $N \in \text{gl}(\mathcal{V})$ będzie półprostym. Wtedy $\text{ad}(N) \in \text{gl}(\text{gl}(\mathcal{V}))$ jest półprostym.

Dowód. (1) Niech e_1, \dots, e_n będzie bazą taką, że $De_i = \lambda_i e_i$. Wtedy

$$\text{ad}(D)|e_i\rangle\langle e_j| = (\lambda_i - \lambda_j)|e_i\rangle\langle e_j|.$$

(2) Niech $N^p = 0$. Wtedy $\text{ad}(N)^{2p-1} = 0$. \square

Stwierdzenie 21.9 Niech $A = S + N$ będzie rozkładem $A \in L(\mathcal{V})$ na część półprostą i nilpotentną.

(1) $\text{ad}(A) = \text{ad}(S) + \text{ad}(N)$ jest kanonicznym rozkładem $\text{ad}(A) \in \text{gl}(\text{gl}(\mathcal{V}))$ na część półprostą i nilpotentną.

(2) Niech $0 = [B, A]$. Wtedy $0 = [B, S] = [B, N]$.

Dowód. (1) Sprawdzamy, że $\text{ad}(S)$ komutuje z $\text{ad}(N)$.

(2) Istnieje wielomian s taki, że $S = s(A)$. Dlatego też, istnieje wielomian \tilde{s} taki, że $\text{ad}(S) = \tilde{s}(\text{ad}(A))$. \square

21.2 Twierdzenie Engela

Twierdzenie 21.10 Niech \mathcal{V} będzie przestrzenią zespoloną i $\mathfrak{g} \subset \text{gl}(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego składającą się z operatorów nilpotentnych. Wtedy

(1) (**Twierdzenie Engela**) 0 jest funkcjonałem pierwiastkowym dla \mathfrak{g} , czyli istnieje $v \in \mathcal{V}$, $v \neq 0$ taki, że $Av = 0$, $A \in \mathfrak{g}$.

- (2) Istnieje baza w \mathcal{V} dla której \mathfrak{g} jest podalgebrą macierzy ściśle górnotrójkątnych.
(3) \mathfrak{g} jest nilpotentna.

Lemat 21.11 Niech \mathcal{V} będzie przestrzenią zespoloną. Niech $\mathfrak{A} \subset L(\mathcal{V})$ będzie algebrą łączną składającą się z operatorów nilpotentnych. Wtedy istnieje $v \in \mathcal{V}$, $v \neq 0$ taki, że $Av = 0$, $A \in \mathfrak{A}$.

Dowód. Można założyć, że $\mathfrak{A} \neq \{0\}$. Pokażemy najpierw, że \mathfrak{A} posiada nietrywialną podprzestrzeń niezmienniczą. Załóżmy, że tak nie jest. Znajdziemy $y \in \mathcal{V}$, $B \in \mathfrak{A}$ takie, że $z := By \neq 0$. Wtedy $\mathfrak{A}z$ jest niezerową podprzestrzenią niezmienniczą. Zatem $\mathfrak{A}z = \mathcal{V}$. Stąd istnieje $C \in \mathfrak{A}$ taki, że $Cz = y$. Czyli $CB y = y$, co oznacza, że CB nie jest nilpotentny. Ale $CB \in \mathfrak{A}$ (bo \mathfrak{A} jest algebrą) – sprzeczność.

Stosując teraz indukcję względem wymiaru dostajemy jednowymiarową podprzestrzeń niezmienniczą. Z powodu nilpotentności, elementy \mathfrak{A} muszą się na niej zerować. \square

Lemat 21.12 Niech \mathfrak{A} będzie algebrą łączną generowaną przez algebrę Liego $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$. Wtedy dla każdego $C \in \mathfrak{A}$ istnieją $A_1, \dots, A_k \in \mathfrak{g}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ i $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ takie, że

$$C = \sum_{i=1}^k \lambda_i A_i^{n_i}. \quad (21.146)$$

Dowód. Każdy element \mathfrak{A} jest kombinacją liniową wyrażeń postaci.

$$B_1 \cdots B_n, \quad B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{g}. \quad (21.147)$$

Wyrażenia typu (21.147) nazwiemy wyrażeniami długości n .

Niech $\phi \in \mathfrak{A}^\#$ zeruje się na wyrazach postaci (21.146). Trzeba pokazać, że $\phi = 0$. Pokażemy indukcyjnie, że ϕ zeruje się na wyrażeniach długości n

Założmy, że jest to prawda dla $n - 1$. Oczywiście,

$$\phi \left(\sum_{\sigma \in S_n} B_{\sigma(1)} \cdots B_{\sigma(n)} \right) = \partial_{t_1} \dots \partial_{t_n} \phi \left((t_1 B_1 + \cdots + t_n B_n)^n \right) \Big|_{t_1 = \dots = t_n = 0} = 0. \quad (21.148)$$

Ale

$$\sum_{\sigma \in S_n} B_{\sigma(1)} \cdots B_{\sigma(n)} = n! B_1 \cdots B_n + C$$

gdzie C jest kombinacją liniową wyrażeń długości $\leq n - 1$. Więc $\phi(B_1 \cdots B_n) = 0$. \square

Lemat 21.13 Niech $\dim \mathcal{V} = n$ i $A \in L(\mathcal{V})$. Wtedy następujące warunki są równoważne:

- (1) A jest nilpotentny.
(2) $\text{Tr} A^k = 0$, $k = 1, \dots, n$.

Dowód. (1) \Rightarrow (2) jest oczywisty.

(2) \Rightarrow (1). Niech $\text{spec}A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ z krotnościami m_1, \dots, m_k . Wtedy (2) oznacza

$$\sum_{i=1}^k m_i \lambda_i^j = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (21.149)$$

Położmy $\mu_i := m_i \lambda_i$. (21.149) implikuje

$$\sum_{i=1}^k \mu_i \lambda_i^j = 0, \quad j = 0, \dots, m-1. \quad (21.150)$$

Macierz $[\lambda_i^j]$ to macierz Vandermonda z wyznacznikiem $\prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j)$. Istnienie niezerowego rozwiązania (21.150) oznacza, że $\prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j) = 0$, czyli wszystkie λ_i są równe jakiemuś λ . Ale wtedy $\text{Tr}A^k = n\lambda^k = 0$, więc $\lambda = 0$. Zatem (21.150) ma tylko zerowe rozwiązanie, zatem $\lambda_i = 0$. \square

Lemat 21.14 *Niech $\mathfrak{A} \subset L(\mathcal{V})$ będzie algebrą łączną. Jeśli $\text{Tr}A = 0$, $A \in \mathfrak{A}$, to wszystkie elementy \mathfrak{A} są nilpotentne.*

Dowód. Natychmiastowa konsekwencja z Lematu 21.13. \square

Lemat 21.15 *Niech $\mathfrak{A} \subset L(\mathcal{V})$ będzie algebrą łączną generowaną przez algebrę Liego \mathfrak{g} składającą się z operatorów nilpotentnych. Wtedy wszystkie elementy \mathfrak{A} są nilpotentne.*

Dowód. Potęgi operatorów nilpotentnych są nilpotentne. Więc z Lematu 21.12 wynika, że \mathfrak{A} składa się ona z kombinacji liniowych operatorów nilpotentnych. Wobec tego, wszystkie operator w \mathfrak{A} mają ślad równy 0. Wystarczy więc zastosować Lemat 21.14. \square

Dowód Twierdzenia 21.10. (1) Niech \mathfrak{A} będzie algebrą łączną generowaną przez \mathfrak{g} . Z lematu 21.11 wynika, że istnieje wspólny zerowy wektor własny dla $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{g}$.

(1) implikuje (2) przez indukcję.

(2) pociąga za sobą (3). \square

21.3 Przestrzenie pierwiastkowe algebry nilpotentnej

Niech \mathcal{V} będzie przestrzenią zespoloną a $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego. Dla $\alpha \in \mathfrak{g}^\#$ definiujemy

$$\mathcal{V}_j^\alpha(\mathfrak{g}) := \bigcap_{A \in \mathfrak{g}} \text{Ker}(A - \alpha(A)\mathbb{1})^j.$$

Jest to rodzina rosnąca ze względu na j . Definiujemy

$$\mathcal{V}^\alpha(\mathfrak{g}) := \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{V}_j^\alpha(\mathfrak{g}).$$

Przez $\text{spec } \mathfrak{g}$ oznaczamy zbiór pierwiastków algebry \mathfrak{g} , to znaczy $\alpha \in \mathfrak{g}^\#$ dla których $\mathcal{V}^\alpha(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$.

Twierdzenie 21.16 Niech \mathfrak{g} będzie nilpotentną algebrą Liego. Wtedy

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{\alpha \in \text{spec } \mathfrak{g}} \mathcal{V}^\alpha(\mathfrak{g}).$$

Dla $A \in \mathfrak{g}$ zdefiniujemy

$$A_{\text{nil}} := A - \bigoplus_{\alpha \in \text{spec } \mathfrak{g}} \alpha(A) \mathbb{1}_{\mathcal{V}^\alpha(\mathfrak{g})}.$$

Wtedy $\mathfrak{g} \ni A \mapsto A_{\text{nil}} \in gl(\mathcal{V})$ jest reprezentacją o wartościach w operatorach nilpotentnych. Ponadto, $\alpha([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że wszystkie $A \in \mathfrak{g}$ mają widmo jednopunktowe. Kładąc

$$\langle \alpha | A \rangle := \frac{\text{Tr} A}{\dim \mathcal{V}}$$

mamy wtedy $\text{spec} A = \{\langle \alpha | A \rangle\}$. Więc $A - \langle \alpha | A \rangle$ ma widmo zerowe, więc są nilpotentne.

Niech istnieje $A \in \mathfrak{g}$ i $\text{spec} A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Wtedy na mocy Tw. 21.7, każdy $B \in \mathfrak{g}$ zachowuje rozkład $\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{V}^{\lambda_i}(A)$. Zatem możemy zastosować skończoną indukcję. \square

21.4 Przestrzenie pierwiastkowe w algebrach Liego

Stwierdzenie 21.17 Niech \mathfrak{g} będzie algebrą Liego i $\mathcal{D} \in \text{Der}(\mathfrak{g})$. Niech

$$\mathfrak{g}^\lambda(\mathcal{D}) := \bigcup_{j=1}^{\infty} \text{Ker}(\mathcal{D} - \lambda)^j$$

tak że

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{g}^{\lambda_i}(\mathcal{D}).$$

Wtedy

$$[\mathfrak{g}^\lambda(\mathcal{D}), \mathfrak{g}^\mu(\mathcal{D})] \subset \mathfrak{g}^{\lambda+\mu}(\mathcal{D}).$$

Dowód. Iterując

$$(\mathcal{D} - \lambda - \mu)[A, B] = [(\mathcal{D} - \lambda)A, B] + [A(\mathcal{D} - \mu)B],$$

dostajemy

$$(\mathcal{D} - \lambda - \mu)^n[A, B] = \sum \binom{n}{j} [(\mathcal{D} - \lambda)^j A, (\mathcal{D} - \mu)^{n-j} B].$$

Więc jeśli $(\mathcal{D} - \lambda)^k A = 0$ i $(\mathcal{D} - \mu)^m B = 0$, to $(\mathcal{D} - \lambda - \mu)^{k+m}[A, B] = 0$. \square

Twierdzenie 21.18 Niech \mathfrak{g} będzie algebrą Liego. Niech \mathfrak{h} będzie nilpotentną algebrą Liego i $\rho : \mathfrak{h} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{g})$ reprezentacją. Niech

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \text{spec } \rho} \mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h})$$

będzie rozkładem na przestrzenie pierwiastkowe. Wtedy

$$[\mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h}), \mathfrak{g}^\beta(\mathfrak{h})] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}(\mathfrak{h}).$$

W szczególności, możemy założyć, że \mathfrak{h} jest nilpotentną podalgebrą \mathfrak{g} i reprezentacja jest zadana przez

$$\mathfrak{h} \ni H \mapsto \text{ad}(H) \in \text{gl}(\mathfrak{g}).$$

Wśród pierwiastków mamy wtedy 0. Oczywiście, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. Zarówno \mathfrak{h} jak i $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ są podprzestrzeniami niezmienniczymi.

21.5 Algebry Cartana—przypadek ogólny

Niech \mathfrak{a} będzie podalgebrą algebry Liego \mathfrak{g} . *Normalizatorem* \mathfrak{a} nazywamy

$$\text{Nor} \mathfrak{a} := \{A \in \mathfrak{g} : [A, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}\}.$$

Stwierdzenie 21.19 *Nora jest największą z podalgebr algebry \mathfrak{g} zawierającą \mathfrak{a} jako ideał.*

Mówimy, że \mathfrak{h} jest podalgebrą Cartana algebry Liego \mathfrak{g} , gdy

- (1) \mathfrak{h} jest algebrą nilpotentną.
- (2) $\text{Nor} \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$.

Stwierdzenie 21.20 *Niech \mathfrak{h} będzie nilpotentną podalgebrą w \mathfrak{g} . Następujące warunki są równoważne.*

- (1) \mathfrak{h} jest podalgebrą Cartana w \mathfrak{g} .
- (2) $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$.

Dowód. (1) \Rightarrow (2). Oczywiście, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. Załóżmy, że nie ma równości. Oznaczmy przez ρ reprezentację

$$\mathfrak{h} \ni H \mapsto \text{ad}(H) \in \text{gl}(\mathfrak{g}).$$

Reprezentacja ρ ograniczona do $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ składa się z samych endomorfizmów nilpotentnych. Tak samo, reprezentacja ilorazowa ρ' w $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$. Na mocy Tw. Engela (Tw. 21.10), istnieje $B + \mathfrak{h} \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$, $B + \mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}$, dla którego $\rho'(\mathfrak{h})(B + \mathfrak{h}) = 0$. Oznacza to, że $B \notin \mathfrak{h}$ i $\text{ad}(\mathfrak{g})B \subset \mathfrak{h}$. Zatem algebra generowana przez \mathfrak{h} i B jest zawarta w normalizatorze \mathfrak{h} i jest większa od \mathfrak{h} . Więc \mathfrak{h} nie jest algebrą Cartana.

(2) \Rightarrow (1). Niech $C \in \text{Nor} \mathfrak{h}$, $C = \sum_{\alpha} C_{\alpha}$, $C_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h})$. Dla $B \in \mathfrak{h}$ mamy $\text{ad}(B)C_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h})$ i

$$\text{ad}(B)C = \sum_{\alpha} \text{ad}(B)C_{\alpha} \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}).$$

Dlatego $C_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$, czyli $C_{\alpha} = 0$, $\alpha \neq 0$. Zatem $C = C_0 \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. Czyli $\text{Nor} \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. \square

Stwierdzenie 21.21 *Niech \mathfrak{g} będzie algebrą Liego. Każda jej podalgebra Cartana jest jej maksymalną podalgebrą nilpotentną.*

Dowód. Niech $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$, gdzie \mathfrak{h} jest Cartana a \mathfrak{n} jest nilpotentna. Rozważmy wstępujący ciąg centralny $\{0\} = \mathcal{C}_0\mathfrak{n} \subset \dots \subset \mathcal{C}_m\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$. Niech k będzie najmniejszą z liczb dla których $\mathcal{C}_k\mathfrak{n} \not\subset \mathfrak{h}$. Niech $A \in \mathcal{C}_k\mathfrak{n} \setminus \mathfrak{h}$. Mamy

$$[A, \mathfrak{n}] \subset \mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{n} \subset \mathfrak{h},$$

zatem \mathfrak{h} jest ideałem algebry \mathfrak{a} generowanej przez \mathfrak{h} i A . Więc $\mathfrak{a} \subset \text{Nor}\mathfrak{h}$. Oczywiście, $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{a}$. Zatem $\text{Nor}\mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}$. \square

Twierdzenie 21.22 Niech $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ będzie formą Killinga na algebrze Liego \mathfrak{g} . Niech \mathfrak{h} będzie jej podalgebrą Cartana.

- (1) Jeśli $\alpha + \beta \neq 0$, to $\mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h})$ i $\mathfrak{g}^{\beta}(\mathfrak{h})$ są ortogonalne względem $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$.
- (2) Rozkład

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{(\alpha, -\alpha)} (\mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}(\mathfrak{h})) \quad (21.151)$$

jest rozkładem na sumę prostą ortogonalnych podprzestrzeni.

Dowód. Niech $A \in \mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h})$, $B \in \mathfrak{g}^{\beta}(\mathfrak{h})$ i $C \in \mathfrak{g}^{\gamma}(\mathfrak{h})$. Wtedy

$$(\text{ad}(A)\text{ad}(B))^n C \in \mathfrak{g}^{(\alpha+\beta)n+\gamma}(\mathfrak{h}).$$

Ponieważ dla dużych n , $\mathfrak{g}^{(\alpha+\beta)n+\gamma}(\mathfrak{h}) = \{0\}$, więc $\text{ad}(A)\text{ad}(B)$ jest nilpotentny. Zatem

$$\langle A|B \rangle = \text{Tr ad}(A)\text{ad}(B) = 0.$$

21.6 Elementy półproste i nilpotentne w półprostych algebrach Liego

Niech \mathfrak{g} będzie półprostą algebrą Liego nad \mathbb{C} .

Twierdzenie 21.23 $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{g})$ jest izomorfizmem.

Dowód. $\text{Ker ad} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Dla półprostych \mathfrak{g} , centrum jest zerowe. Zatem ad jest iniekcją.

Pokażemy teraz, że ad jest surjekcją. Niech $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{a}_n$ będzie rozkładem na ideały proste. (...) \square

Twierdzenie 21.24 Niech $A \in \mathfrak{g}$. Wtedy istnieją jedyne elementy $S, N \in \mathfrak{g}$ takie, że $\text{ad}_A = \text{ad}_S + \text{ad}_N$ jest kanonicznym rozkładem na część półprostą i nilpotentną. Mamy $A = S + N$.

Dowód. Mamy rozkład $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \text{spec ad}(A)} \mathfrak{g}^{\alpha}(A)$. Zdefiniujemy $\mathcal{S}, \mathcal{N} \in L(\mathfrak{g})$, $\mathcal{S} = \bigoplus_{\alpha \in \text{spec ad}(A)} \alpha$, $\mathcal{N} := \text{ad}(A) - \mathcal{S}$. Z tego, że $[\mathfrak{g}^{\alpha}(A), \mathfrak{g}^{\beta}(A)] = \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}(A)$, wynika, że $\mathcal{S} \in \text{Der}(\mathfrak{g})$. Dlatego $\mathcal{N} \in \text{Der}(\mathfrak{g})$. Z Tw. 21.23 wynika, że istnieją $S, N \in \mathfrak{g}$ takie, że $\mathcal{S} = \text{ad}(S)$, $\mathcal{N} = \text{ad}(N)$. \square

Stwierdzenie 21.25 Niech $A, B \in \mathfrak{g}$ i $A = S + N$ będzie kanonicznym rozkładem na część półprostą i nilpotentną. Jeśli $[A, B] = 0$, to $[S, B] = [N, B] = 0$.

Dowód. $\text{ad}(A) = \text{ad}(S) + \text{ad}(N)$ jest kanonicznym rozkładem na część półprostą i nilpotentną. Poza tym, $0 = \text{ad}([A, B]) = [\text{ad}(A), \text{ad}(B)]$. Więc $0 = [\text{ad}(S), \text{ad}(B)] = [\text{ad}(N), \text{ad}(B)]$. Ponieważ ad jest izomorfizmem, więc $0 = [S, B] = [N, B]$. \square

22 Struktura algebr półprostych

22.1 Podalgebra Cartana dla algebr półprostych

Twierdzenie 22.1 *Niech \mathfrak{g} będzie półprostą algebrą Liego nad \mathbb{C} a \mathfrak{h} jej podalgebrą. Następujące warunki są równoważne.*

- (1) \mathfrak{h} jest algebrą Cartana.
- (2) \mathfrak{h} jest maksymalną podalgebrą przemienną i wszystkie elementy \mathfrak{h} są półproste.

Poza tym, jeśli $\langle \cdot | \cdot \rangle$ jest niezdegenerowaną formą niezmienniczą, to jej ograniczenie do \mathfrak{h} jest niezdegenerowane.

Dowód. (2) \Rightarrow (1) Niech $H \in \mathfrak{h}$, $B \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. Z półprostoty H wynika, że $[H, B] = 0$. Zatem algebra generowana przez \mathfrak{h} i B jest przemienna. Z maksymalności \mathfrak{h} jako algebry przemiennej wynika, że $B \in \mathfrak{h}$. Więc $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. Więc \mathfrak{h} jest podalgebrą Cartana.

Niech $A, B \in \mathfrak{h}$ i $A = S + N$ będzie kanonicznym rozkładem na część półprostą i nilpotentną. Z przemienności \mathfrak{h} wynika $[A, B] = 0$. Zatem $[N, B] = 0$. Dlatego $(\text{ad}(N)\text{ad}(N))^n = \text{ad}(B)^n \text{ad}(N)^n = 0$. Stąd $\text{ad}(N)\text{ad}(N)$ jest nilpotentny. Czyli, $\langle B|N \rangle = \text{Trad}(B)\text{ad}(N) = 0$. Zatem N jest ortogonalny do \mathfrak{h} . Stąd $N = 0$.

(1) \Rightarrow (2) Z niezdegenerowania formy i rozkładu (21.151) wynika niezdegenerowanie formy na \mathfrak{h} .

Z nilpotentności \mathfrak{h} i kryterium Cartana wynika, że

$$\langle C|[A, B] \rangle = 0, \quad A, B, C \in \mathfrak{h}.$$

Zatem $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ jest ortogonalne do \mathfrak{h} . Z niezdegenerowania formy na \mathfrak{h} wynika, że $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \{0\}$. Zatem \mathfrak{h} jest przemienna.

Niech $A \in \mathfrak{h}$ i niech $A = S + N$ będzie kanonicznym rozkładem na część półprostą i nilpotentną. \square

22.2 Zbiór pierwiastków półprostej algebry Liego

Ustalmy zespoloną półprostą algebrą Liego \mathfrak{g} z algebrą Cartana \mathfrak{h} . Niech $\mathcal{R} \subset \mathfrak{h}^\#$ oznacza zbiór niezerowych funkcyjonałów pierwiastkowych. Dla $\alpha \in \mathcal{R}$, będziemy pisać \mathfrak{g}^α zamiast $\mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h})$

Dla $\alpha \in \mathfrak{h}^\#$ definiujemy $\alpha^\# \in \mathfrak{h}$ wzorem

$$\langle \alpha^\# | A \rangle = \alpha(A).$$

Niech $\mathcal{R}^\# := \{\alpha^\# : \alpha \in \mathcal{R}\}$.

Przenosimy iloczyn z \mathfrak{h} na $\mathfrak{h}^\#$ przez dualność:

$$\langle \alpha | \beta \rangle := \langle \alpha^\# | \beta^\# \rangle.$$

Dla $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ definiujemy *macierz Cartana* i *macierz Coxetera*

$$M(\alpha, \beta) := \frac{2\langle \alpha | \beta \rangle}{\langle \alpha | \alpha \rangle},$$

$$C(\alpha, \beta) := \frac{\langle \alpha | \beta \rangle}{\sqrt{\langle \alpha | \alpha \rangle} \sqrt{\langle \beta | \beta \rangle}}.$$

Twierdzenie 22.2 (1) $\alpha \in \mathcal{R}$ implikuje $-\alpha \in \mathcal{R}$.

(2) $A_{\pm} \in \mathfrak{g}^{\pm\alpha}$ implikuje $[A_+, A_-] = \langle A_+ | A_- \rangle \alpha^{\#}$.

(3) $\alpha \in \mathcal{R}$ implikuje $\langle \alpha | \alpha \rangle = \alpha(\alpha^{\#}) \neq 0$. Zatem możemy zdefiniować $H_{\alpha} := \frac{2\alpha^{\#}}{\langle \alpha | \alpha \rangle}$.

(4) Jeśli A_{\pm} są niezerowymi elementami $\mathfrak{g}^{\pm\alpha}$, to podalgebra Liego generowana przez A_+ , A_- i $\alpha^{\#}$ jest izomorficzna z $sl(2)$.

(5) $\alpha \in \mathcal{R}$ implikuje $\dim \mathfrak{g}^{\alpha} = 1$.

(6) $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$ implikuje

$$\langle H_1 | H_2 \rangle = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \alpha(H_1) \alpha(H_2). \quad (22.152)$$

(7) $\mathcal{R}^{\#}$ generuje liniowo \mathfrak{h} .

(8) Niech $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$. Wtedy $M(\alpha, \beta)$ jest liczbą całkowitą.

(9) Jeśli $\alpha \in \mathcal{R}$, $t \in \mathbb{C}$ i $t\alpha \in \mathcal{R}$, to $t = \pm 1$.

(10) Możliwe niezerowe wartości $M(\alpha, \beta)$ to

(i) $M(\alpha, \beta) = M(\beta, \alpha) = \pm 2$, wtedy $C(\alpha, \beta) = \pm 1$ i $\beta = \pm \alpha$

(ii) $M(\alpha, \beta) = M(\beta, \alpha) = \pm 1$, wtedy $C(\alpha, \beta) = \pm \frac{1}{2}$ i α, β mają tę samą długość.

(iii) $M(\alpha, \beta) = \pm 2$, $M(\beta, \alpha) = \pm 1$, wtedy $C(\alpha, \beta) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ i β jest $\sqrt{2}$ razy dłuższy od α .

(iv) $M(\alpha, \beta) = \pm 3$, $M(\beta, \alpha) = \pm 1$, wtedy $C(\alpha, \beta) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ i β jest $\sqrt{3}$ razy dłuższy od α .

(11) Niech $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \mathcal{R}$. Wtedy $M(\alpha, \beta) < 0$, istnieją $n_{\pm} \in \mathbb{Z}$ takie, że $-M(\alpha, \beta) = n_+ - n_-$,
i

$$\alpha + k\beta \in \mathcal{R}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n_- \leq k \leq n_+.$$

(12) \mathcal{R} jest niezmienniczy względem odbicia w hiperpłaszczyźnie prostopadłej do $\beta \in \mathcal{R}$. Czyli $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ implikuje $\alpha - \frac{2\langle \alpha | \beta \rangle \beta}{\langle \beta | \beta \rangle} \in \mathcal{R}$.

Dowód. (1) Forma $\langle \cdot | \cdot \rangle$ jest nieosobliwa na $\mathfrak{g}^{\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$, oraz zerowa na \mathfrak{g}^{α} i $\mathfrak{g}^{-\alpha}$. Zatem $\dim \mathfrak{g}^{\alpha} = \dim \mathfrak{g}^{-\alpha}$.

(2) Niech $H \in \mathfrak{h}$.

$$\begin{aligned} \langle [A_+, A_-] | H \rangle &= \langle A_+ | [A_-, H] \rangle \\ &= \langle A_+ | A_- \rangle \alpha(H) = \langle A_+ | A_- \rangle \langle \alpha^{\#} | H \rangle. \end{aligned}$$

Zatem, $[A_+, A_-] - \langle A_+ | A_- \rangle \alpha^{\#}$ jest ortogonalny do \mathfrak{h} , więc równy 0.

(3) Przypuśćmy, że $\alpha(\alpha^{\#}) = 0$. Niech $A_{\pm} \in \mathfrak{g}^{\pm\alpha}$, $\langle A_+ | A_- \rangle = 1$. Wtedy $[\alpha^{\#}, A_{\pm}] = \pm \alpha(\alpha^{\#}) A_{\pm} = 0$, $[A_+, A_-] = \alpha^{\#}$. Zatem A_+ , A_- i $\alpha^{\#}$ rozpinają 3-wymiarową podalgebrę nilpotentną. Rozpatrzmy reprezentację dołączoną tej podalgebry. Operator $\text{ad}(\alpha^{\#})$ ma na przekątnej wyrazy zerowe, więc jest nilpotentny. Ale $\alpha^{\#} \in \mathfrak{h}$, więc $\text{ad}(\alpha^{\#})$ jest półprosty. Zatem $\text{ad}(\alpha^{\#}) = 0$, skąd $\alpha^{\#} = 0$, co jest niezgodne z założeniem.

(4) Mnożąc A_{\pm} przez odpowiednie czynniki dostajemy $\langle A_+ | A_- \rangle = \frac{2}{\langle \alpha^{\#} | \alpha^{\#} \rangle}$. Wtedy dostajemy $[H_{\alpha}, A_{\pm}] = \pm 2A_{\pm}$, $[A_+, A_-] = H_{\alpha}$.

(5) Załóżmy, że $\dim \mathfrak{g}^\alpha > 1$. Wtedy $\dim \mathfrak{g}^{-\alpha} > 1$. Znajdziemy zatem $A_\pm \in \mathfrak{g}^{\pm\alpha}$, $B \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ takie, że $\langle A_+ | A_- \rangle = \frac{2}{\langle \alpha^\# | \alpha^\# \rangle}$ i $\langle A_+ | B \rangle = 0$. May $\text{ad}(A^+)B = 0$ i $\text{ad}(H_\alpha)B = -2B$. Zatem B jest wektorem najwyższej wagi dla reprezentacji $\text{Span}(A_+, A_-, H) \simeq \text{sl}(2, \mathbb{C})$ z wagą -2 . Reprezentacja taka nie jest skończenie wymiarowa. Więc $B = 0$.

(6) Niech $H \in \mathfrak{h}$, $A \in \mathfrak{g}$. Mamy rozkład $A = A_0 + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} A_\alpha$ i $\text{ad}(H)A = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \alpha(H)A_\alpha$. Biorąc pod uwagę, że $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$ dostajemy

$$\text{Tr ad}(H_1)\text{ad}(H_2) = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \alpha(H_1)\alpha(H_2).$$

(7) Jeśli wzór (22.152) przepiszemy jako

$$\langle H_1 | H_2 \rangle = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \langle H_1 | \alpha^\# \rangle \langle \alpha^\# | H_2 \rangle,$$

to widzimy, że $H \perp \text{Span} \mathcal{R}^\#$ oznacza $\langle H | H \rangle = 0$.

(8) Z własności skończenie wymiarowych reprezentacji $\text{sl}(2\mathbb{C})$ wynika, że $\text{ad}(H_\alpha)$ ma całkowite wartości własne. Dla $B \in \mathfrak{g}^\beta$ mamy

$$\text{ad}(H_\alpha)B = \frac{2\langle \alpha^\# | \beta^\# \rangle}{\langle \alpha^\# | \alpha^\# \rangle} B.$$

(8) Niech $\beta = t\alpha$.

$$2t = \frac{2\langle \alpha^\# | \beta^\# \rangle}{\langle \alpha^\# | \alpha^\# \rangle}, \quad \frac{2}{t} = \frac{2\langle \alpha^\# | \beta^\# \rangle}{\langle \beta^\# | \beta^\# \rangle}$$

są całkowite, więc $t \in \{1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$. Wystarczy rozważyć $t = 2$.

Wybermy niezerowe A_\pm jak w dowodzie (4) i $B_\pm \in \mathfrak{g}^{\pm 2\alpha}$. Algebra Liego $\text{Span}(A_+, A_-, H) \simeq \text{sl}(2, \mathbb{C})$ działa na 5-wymiarową przestrzeń $\text{Span}(A_+, A_-, B_+, B_-, H_\alpha)$ i ma w niej podprzestrzeń niezmienniczą $\text{Span}(A_+, A_-, H)$. Jako algebra półprosta, ma podprzestrzeń dopełniającą 2-wymiarową, w której H_α ma wartości własne 2, -2, co jest niemożliwe.

(9) Jeśli α i β nie są równoległe, to

$$M(\alpha, \beta)M(\beta, \alpha) = 4C(\alpha, \beta)^2 < 4.$$

Poza tym, $M(\alpha, \beta)$ i $M(\beta, \alpha)$ mają ten sam znak.

(10) Niech

$$n_+ := \sup \left\{ n : \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha} \neq \{0\} \right\}, \quad n_- := \inf \left\{ n : \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha} \neq \{0\} \right\}.$$

Rozważmy przestrzeń

$$\alpha := \bigoplus_{n=n_-}^{n_+} \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha}.$$

Wybermy niezerowe $B_\pm \in \mathfrak{g}^{\beta+n_\pm\alpha}$ oraz niech A_\pm będzie jak w dowodzie (4). Mamy

$$[H_\alpha, B_\pm] = \frac{2\langle \alpha^\# | \beta^\# \rangle + 2n_\pm \langle \alpha^\# | \alpha^\# \rangle}{\langle \alpha^\# | \alpha^\# \rangle} B_\pm = (m(\alpha, \beta) + 2n_\pm) B_\pm.$$

Poza tym, $[A_{\pm}, B_{\pm}] = 0$, (bo $\mathfrak{g}^{\beta+(n_{\pm}\pm 1)\alpha} = \{0\}$). Niech \mathfrak{a}_{\pm} będą minimalnymi podprzestrzeniami niezmienniczymi dla $\text{Span}(A_{+}, A_{-}, H) \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ zawierającymi B_{\pm} . Z teorii reprezentacji $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ wynika, że $\dim \mathfrak{a}_{-} = -M(\alpha, \beta) - 2n_{-} + 1$, $\dim \mathfrak{a}_{+} = M(\alpha, \beta) + 2n_{+} + 1$. Zatem,

$$\begin{aligned} \dim \mathfrak{a}_{+} + \dim \mathfrak{a}_{-} &= -2n_{-} + 2n_{+} + 2 \\ &= 2 \dim \mathfrak{a} > \dim \mathfrak{a}. \end{aligned}$$

Zatem $\mathfrak{a}_{+} \cap \mathfrak{a}_{-} \neq \{0\}$. więc $\mathfrak{a}_{+} = \mathfrak{a}_{-} = \mathfrak{a}$. Poza tym, $M(\alpha, \beta) = n_{-} + n_{+}$. \square

22.3 Układy pierwiastków

Niech \mathcal{R} będzie układem niezerowych wektorów \mathcal{R} w przestrzeni euklidesowej \mathcal{V} . Dla $\alpha, \beta \in \mathcal{V}$ zdefiniujemy macierz Cartana i Coxetera tak jak wyżej. Mówimy, że \mathcal{R} jest *układem pierwiastków*, gdy

- (1) \mathcal{R} rozpiną \mathcal{V} .
- (2) \mathcal{R} jest niezmienniczy względem odbicia w hiperpłaszczyźnie prostopadłej do $\beta \in \mathcal{R}$. Czyli $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ implikuje $\alpha - \frac{2\langle \alpha | \beta \rangle \beta}{\langle \beta | \beta \rangle} \in \mathcal{R}$.
- (3) Macierz Cartana jest całkowitoliczbowa.
- (4) $\alpha \in \mathcal{R}$ i $t\alpha \in \mathcal{R}$ implikuje $t = \pm 1$.

Twierdzenie 22.3 *Niech \mathcal{R} będzie układem pierwiastków. Wtedy własności (9) i (10) Twierdzenia 22.2 są spełnione.*

22.4 Pierwiastki dodatnie

Niech \mathcal{R} będzie układem pierwiastków w przestrzeni \mathcal{V} . Wybierzmy wektor $v_0 \in \mathcal{V}$ taki, że $\alpha(v_0) \neq 0$, $\alpha \in \mathcal{R}$. To pozwala nam podzielić \mathcal{R} na dwa rozłączne podzbiory

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{+} &:= \{\alpha \in \mathcal{R} : \alpha(v_0) > 0\}, \\ \mathcal{R}_{-} &:= \{\alpha \in \mathcal{R} : \alpha(v_0) < 0\} = -\mathcal{R}_{+}. \end{aligned}$$

Mówimy, że $\alpha \in \mathcal{R}_{+}$ jest *niezrozkładalny* (lub *prosty*), jeśli nie można go zapisać jako $\alpha = \beta + \gamma$, $\beta, \gamma \in \mathcal{R}_{+}$.

Mówimy, że $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}$ jest *układem fundamentalnym*, jeśli istnieje $v_0 \in \mathcal{V}$ takie, że \mathcal{F} jest zbiorem pierwiastków niezrozkładalnych w \mathcal{R} .

Twierdzenie 22.4 (1) *Jeśli $\alpha, \beta \in \mathcal{R}_{+}$ są niezrozkładalne, to $\langle \alpha | \beta \rangle \leq 0$.*

- (2) *Każdy $\alpha \in \mathcal{R}_{+}$ jest liniową kombinacją prostych pierwiastków z całkowitymi nieujemnymi współczynnikami.*
- (3) *Zbiór prostych pierwiastków jest bazą przestrzeni \mathcal{V} .*

Dowód. (1) Jeśli $\alpha - \beta = \gamma \in \mathcal{R}$, to $\gamma \in \mathcal{R}_+$ lub $\gamma \in \mathcal{R}_-$. W pierwszym przypadku, $\alpha = \gamma + \beta$ nie jest pierwiastkiem prostym, w drugim $\beta = \alpha + (-\gamma)$ nie jest pierwiastkiem prostym. Zatem $\alpha - \beta \notin \mathcal{R}$. A więc, $\langle \alpha | \beta \rangle \leq 0$ wynika z Tw. 22.2.

(2) Jeśli $\alpha \in \mathcal{R}_+$ nie jest prosty, może być zapisany jako $\alpha = \beta + \gamma$, $\beta, \gamma \in \mathcal{R}_+$. Powtarzając ten krok dostajemy w końcu rozkład. Ponieważ $\{\alpha(v_0) : \alpha \in \mathcal{R}_+\}$ jest zbiorem skończonym, stanie się to po skończonej liczbie kroków.

(3) Wystarczy pokazać liniową niezależność. Załóżmy, że $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ są proste i $m_1\alpha_1 + \dots + m_n\alpha_n = 0$. Możemy założyć, że $m_1, \dots, m_p \geq 0$ a pozostałe współczynniki są ≤ 0 i napisać

$$m_1\alpha_1 + \dots + m_p\alpha_p = k_{p+1}\alpha_{p+1} + \dots + k_n\alpha_n =: \gamma,$$

gdzie $k_{p+1}, \dots, k_n \geq 0$. Mamy

$$0 \leq \langle \gamma | \gamma \rangle = \sum_{i=1}^p \sum_{j=p+1}^n m_i k_j \langle \alpha_i | \alpha_j \rangle \leq 0.$$

Zatem $\gamma = 0$. Stąd

$$0 = \gamma(v_0) = m_1\alpha_1(v_0) + \dots + m_p\alpha_p(v_0),$$

co oznacza, że $m_i = 0$, $i = 1, \dots, p$. Podobnie pokazujemy, że $m_j = 0$, $j = p+1, \dots, n$. \square

22.5 Grupa Weyla

Niech \mathcal{V} będzie przestrzenią euklidesową. Dla $\alpha \in \mathcal{V}$ definiujemy

$$S_\alpha \beta := \beta - \frac{2\langle \beta | \alpha \rangle \alpha}{\langle \alpha | \alpha \rangle}.$$

Zauważmy, że jeśli kąt między α i β jest równy θ , to $S_\alpha S_\beta$ jest obrotem o kąt 2θ w płaszczyźnie zadanej przez α, β . W szczególności, jeśli $\theta = \pi/n$, to $(S_\alpha S_\beta)^n = \mathbb{1}$.

Niech \mathcal{R} będzie układem pierwiastkowym. Grupą Weyla związaną z \mathcal{R} nazywamy grupę generowaną przez $\{S_\alpha : \alpha \in \mathcal{R}\}$. Oznaczamy ją przez $\text{Weyl}_{\mathcal{R}}$. Oczywiście, \mathcal{R} jest zbiorem na którym działa $\text{Weyl}_{\mathcal{R}}$.

Mówimy, że \mathcal{C} jest *komórką Weyla*, jeśli jest domknięciem składowej spójnej

$$\mathcal{V} \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{R}} \pi_\alpha,$$

gdzie $\pi_\alpha := \{\beta \in \mathcal{V} : \langle \beta | \alpha \rangle = 0\}$. Mówimy, że π_α jest *ścianą komórki Weyla* \mathcal{C} , jeśli jej otwarta niepusta część zawarta w brzegu \mathcal{C} . Wtedy α ma określony znak na \mathcal{C} .

Twierdzenie 22.5 (1) *Dla każdej pary $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ komórek Weyla istnieje dokładnie jeden $W \in \text{Weyl}_{\mathcal{R}}$ taki, że $W\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$.*

(2) *Niech \mathcal{C} będzie komórką Weyla. Wtedy*

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}) := \{\alpha \in \mathcal{R} : \pi_\alpha \text{ jest ścianą } \mathcal{C} \text{ i } \alpha \geq 0 \text{ na } \mathcal{C}\}$$

jest układem fundamentalnym.

(3) Niech $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}$ będzie układem fundamentalnym. Wtedy

$$\mathcal{C}(\mathcal{F}) := \{\beta \in \mathcal{V} : \langle \beta | \alpha \rangle \geq 0, \alpha \in \mathcal{F}\}$$

jest komórką Weyla.

(4) Niech $\alpha \in \mathcal{R}$. Wtedy $\mathcal{W}\alpha = \mathcal{R}$.

22.6 Reprezentacje algebr Liego

Rozważmy reprezentację algebry Liego \mathfrak{g} na przestrzeni zespolonej \mathcal{V} . Dla uproszczenia notacji będziemy zakładać, że $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$. Ustalmy algebrę Cartana $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. $\beta \in \mathfrak{h}^\#$ nazywamy wagą, gdy odpowiadająca jej przestrzeń wagowa

$$\mathcal{V}^\beta := \{v \in \mathcal{V} : Hv = \beta(H)v, H \in \mathfrak{h}\}$$

jest niezerowa. Zbiór wag oznaczamy przez $\mathcal{W}(\mathcal{V})$. Krotność wagi β jest równa $m^\beta(\mathcal{V}) := \dim \mathcal{V}^\beta$.

Twierdzenie 22.6 Niech \mathfrak{g} będzie półprostą algebrą Liego.

(1) Niech $\alpha \in \mathcal{R}$, $\beta \in \mathcal{W}(\mathcal{V})$. Wtedy

$$\frac{2\langle \alpha | \beta \rangle}{\langle \alpha | \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}.$$

(2) Niech $\alpha \in \mathcal{R}$, $\beta \in \mathcal{W}(\mathcal{V})$ Wtedy istnieją $n_\pm \in \mathbb{Z}$ takie, że $-\frac{2\langle \alpha | \beta \rangle}{\langle \alpha | \alpha \rangle} = n_+ - n_-$, i

$$\alpha + k\beta \in \mathcal{R}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n_- \leq k \leq n_+.$$

(3) $\mathcal{W}(\mathcal{V})$ jest niezmienniczy względem odbicia w hiperpłaszczyźnie prostopadłej do $\beta \in \mathcal{R}$. Czyli $\alpha \in \mathcal{W}(\mathcal{V})$, $\beta \in \mathcal{R}$ implikuje $\alpha - \frac{2\langle \alpha | \beta \rangle}{\langle \beta | \beta \rangle} \beta \in \mathcal{W}(\mathcal{V})$.

Niech $L_{\mathcal{R}}$ oznacza kratę rozpiętą przez \mathcal{R} – kratę pierwiastkową. Niech $L_{\mathcal{W}}$ oznacza kratę wagową, zadaną przez

$$L_{\mathcal{W}} := \left\{ \beta \in \mathfrak{h}^\# : \frac{2\langle \alpha | \beta \rangle}{\langle \alpha | \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathcal{R} \right\}.$$

Wtedy $L_{\mathcal{R}}$ jest podkratą w $L_{\mathcal{W}}$.

23 Homotopia

23.1 Homotopia krzywych

Niech \mathcal{X} będzie rozmaitością i $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$. Oznaczmy przez $K(x_0, x_1, \mathcal{X})$ zbiór krzywych (gładkich, kawałkami ciągłych) zaczynających się w x_0 i kończących się w x_1 , tzn $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$.

Niech $\gamma_0, \gamma_1 \in K(x_0, x_1, \mathcal{X})$. Mówimy, że γ_0 jest homotopijnie równoważna γ_1 i piszemy $\gamma_0 \sim \gamma_1$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje funkcja ciągła $[0, 1] \times [0, 1] \ni (t, s) \mapsto H(t, s)$ taka, że $H(t, 0) = \gamma_0(t)$ i $H(t, 1) = \gamma_1(t)$.

Twierdzenie 23.1 *Homotopijna równoważność jest relacją równoważności.*

Dowód. Kładąc $H(t, s) = \gamma_0(t)$ dostajemy $\gamma_0 \sim \gamma_0$.

Kładąc $H_{10}(t, s) := H_{01}(t, 1 - s)$ dostajemy $\gamma_0 \sim \gamma_1 \Rightarrow \gamma_1 \sim \gamma_0$.

Kładąc

$$H_{02}(t, s) := \begin{cases} H_{01}(t, 2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}; \\ H_{12}(t, 2s - 1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

dostajemy $\gamma_0 \sim \gamma_1$, $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \gamma_0 \sim \gamma_2$. \square

Zbiór klas homotopii krzywych zaczynających się w x_0 i kończących w x_1 oznaczany jest przez

$$\Pi(x_0, x_1, \mathcal{X}) := K(x_0, x_1, \mathcal{X}) / \sim.$$

Twierdzenie 23.2 *Niech \mathcal{X} będzie spójna. Następujące warunki są równoważne:*

- (1) $\Pi(x_0, x_1, \mathcal{X})$ jest jednoelementowy dla każdego $x_0, x_1 \in \mathcal{X}$.
- (2) Istnieje $x_0 \in \mathcal{X}$ taki, że $\Pi(x_0, x_0, \mathcal{X})$ jest jednoelementowy.

Jeśli spełnione są warunki powyższego twierdzenia, mówimy, że zbiór \mathcal{X} jest jednospójny.

23.2 Składanie krzywych i grupa homotopii

Niech $\gamma \in K(x_0, x_1, \mathcal{X})$. Definiujemy $\gamma^{-1} \in K(x_1, x_0, \mathcal{X})$.

$$\gamma^{-1}(t) := \gamma(1 - t).$$

Oczywiście, jeśli $\gamma' \sim \gamma$, to $(\gamma')^{-1} \sim \gamma^{-1}$.

Niech $x_0, x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, $\gamma_0 \in K(x_0, x_1, \mathcal{X})$, $\gamma_1 \in K(x_1, x_2, \mathcal{X})$. Definiujemy $\gamma_0 \circ \gamma_1 \in K(x_0, x_2, \mathcal{X})$:

$$\gamma_0 \circ \gamma_1(t) := \begin{cases} \gamma_0(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ \gamma_1(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Oczywiście, jeśli $\gamma_0 \sim \gamma'_0$, $\gamma_1 \sim \gamma'_1$, to

$$\gamma_0 \circ \gamma_1 \sim \gamma'_0 \circ \gamma'_1.$$

Jeśli $\gamma_2 \in K(x_2, x_3, \mathcal{X})$

$$(\gamma_0 \circ \gamma_1) \circ \gamma_2 \sim \gamma_0 \circ (\gamma_1 \circ \gamma_2).$$

Jeśli przez x oznaczamy krzywą stałą równą $x \in \mathcal{X}$, to dla $x_0, x_1 \in \mathcal{X}$, $\gamma \in K(x_0, x_1, \mathcal{X})$,

$$x_0 \circ \gamma \sim \gamma \circ x_1 \sim \gamma.$$

W szczególności, dla każdego $x_0 \in \mathcal{X}$, $\Pi(x_0, x_0, \mathcal{X})$ jest grupą. Jeśli zbiór \mathcal{X} jest spójny, to grupa $\Pi(x_0, x_0, \mathcal{X})$ jest izomorficzna dla różnych $x_0 \in \mathcal{X}$. Nazywamy ją grupą homotopii zbioru \mathcal{X} . Oznaczamy ją przez $\Pi(\mathcal{X})$.

Przykłady

- (1) $\Pi(\mathbb{R}^n)$ jest grupą jednoelementową.

- (2) $\Pi(S^1) = \Pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$ (liczba okrążeń wokół zera).
- (3) Niech $a, b \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$. Wtedy $\Pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}) = \mathbb{F}_2$ – grupa wolna o dwóch generatorach. Jako generatory można wybrać τ_0 – okrążenie a , τ_1 – okrążenie b . Grupa \mathbb{F}_2 składa się z elementów następujących typów:

$$\begin{aligned} \tau_1^{n_p} \tau_0^{m_p} \cdots \tau_1^{n_0} \tau_0^{m_0}, & \quad \tau_0^{m_{p+1}} \tau_1^{n_p} \cdots \tau_1^{n_0} \tau_0^{m_0}, \\ \tau_1^{n_p} \tau_0^{m_p} \cdots \tau_0^{m_1} \tau_1^{n_0}, & \quad \tau_0^{m_{p+1}} \tau_1^{n_p} \cdots \tau_0^{m_1} \tau_1^{n_0}, \end{aligned} \quad (23.153)$$

gdzie $n_i, m_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

- (4) $\Pi(S^n)$ jest trywialna dla $n \geq 2$. Na przykład, $SU(2) \simeq S^3$ jest jednospójna.
- (5) W S^n wprowadzamy naturalne działanie grupy \mathbb{Z}_2 . Przestrzeń orbit S^n/\mathbb{Z}_2 nazywa się n -wymiarową przestrznią projektywną $P\mathbb{R}^n$. Dla $n \geq 2$ ma ona grupę homotopii \mathbb{Z}_2 . W szczególności, $SO(3) \simeq SU(2)/\mathbb{Z}_2 \simeq P\mathbb{R}^3$ ma grupę homotopii \mathbb{Z}_2 .

23.3 Nakrycia

Niech \mathcal{X} będzie rozmaitością spójną z punktem bazowym $x_0 \in \mathcal{X}$. Mówimy, że (\mathcal{Y}, Φ, y_0) jest nakryciem (\mathcal{X}, x_0) , jeśli \mathcal{Y} jest spójną rozmaitością, $\Phi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ jest gładkim odwzorowaniem, $\Phi(y_0) = x_0$ i dla każdego $x \in \mathcal{X}$ istnieje spójne otoczenie $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ zawierające x takie, że $\Phi^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_i \mathcal{W}_i$, gdzie \mathcal{W}_i są spójne, otwarte i nieprzecinające się, oraz $\Phi|_{\mathcal{W}_i}$ jest dyfeomorfizmem $\mathcal{W}_i \rightarrow \mathcal{U}$.

23.4 Nakrycie uniwersalne

Nakryciem uniwersalnym (\mathcal{X}, x_0) nazywamy $(\mathcal{X}^{\text{uc}}, \Phi, [x_0])$, gdzie

$$\mathcal{X}^{\text{uc}} := \bigcup_{x \in \mathcal{X}} \Pi(x_0, x, \mathcal{X}),$$

$\Phi^{\text{uc}} : \mathcal{X}^{\text{uc}} \rightarrow \mathcal{X}$ jest zadane przez $\Phi^{\text{uc}}([\gamma]) := \gamma(1)$. \mathcal{X}^{uc} jest wyposażone w naturalną strukturę rozmaitości. $(\mathcal{X}^{\text{uc}}, \Phi^{\text{uc}}, [x_0])$ jest nakryciem (\mathcal{X}, x_0) .

Zauważmy, że $\Pi(\mathcal{X}) = (\Phi^{\text{uc}})^{-1}(x_0)$.

23.5 Nakrycie wyznaczone przez podgrupę grupy homotopii

Niech (\mathcal{Y}, Φ, y_0) będzie nakryciem (\mathcal{X}, x_0) . Latwo się przekonać, że Φ indukuje homomorfizm $\Pi(\mathcal{Y}, y_0) \rightarrow \Pi(\mathcal{X}, x_0)$.

Niech K będzie podgrupą $\Pi(x_0, x_0, \mathcal{X})$. Dla $x \in \mathcal{X}$, w $\Pi(x_0, x, \mathcal{X})$ wprowadzamy relację: Dla $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \Pi(x_0, x, \mathcal{X})$ piszemy $[\gamma_1] \underset{K}{\sim} [\gamma_2]$, gdy $[\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1] \in K$. Jest to relacja równoważności. Będziemy oznaczali przez $[\gamma]^K$ klasę abstrakcji γ względem tej relacji. Definiujemy

$$\Pi^K(x_0, x, \mathcal{X}) := \Pi(x_0, x, \mathcal{X}) / \underset{K}{\sim},$$

$$\mathcal{X}^K := \bigcup_{x \in \mathcal{X}} \Pi^K(x_0, x, \mathcal{X}),$$

$$\Phi^K([\gamma]^K) = \gamma(1).$$

Wtedy $(\mathcal{X}^K, \Phi^K, [x_0]^K)$ jest nakryciem (\mathcal{X}, x_0) , którego grupą homotopii jest K .

Mamy oczywiście naturalne odwzorowanie

$$\Phi_K : \mathcal{X}^{\text{uc}} \rightarrow \mathcal{X}^K, \quad \Phi_K([\gamma]) = [\gamma]^K,$$

spełniające związek $\Phi^K \circ \Phi_K = \Phi$. Czyli $(\mathcal{X}^{\text{uc}}, \Phi_K, [x_0])$ jest nakryciem $(\mathcal{X}^K, [x_0]^K)$.

24 Globalna teoria grup Liego

24.1 Lokalna izomorficzność grup Liego

Będziemy mówili, że grupy Liego G_1 i G_2 są *lokalnie izomorficzne*, gdy istnieją otoczenia idetyczności $\mathcal{O}_i \subset G_i$, $i = 1, 2$, i dyfeomorfizm $\Phi : \mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2$ taki, że $g_1, g_2, g_1g_2 \in \mathcal{O}_1$ implikuje $\Phi(g_1)\Phi(g_2) = \Phi(g_1g_2)$. Jest to relacja równoważności.

Twierdzenie 24.1 *Niech G będzie spójną grupą Liego i \mathcal{O} otwartym podzbiorem zawierającym $\mathbb{1}$. Wtedy \mathcal{O} generuje G , czyli*

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O} \cdots \mathcal{O}.$$

Dowód. Niech G_0 będzie prawą stroną. Jest oczywiście otwarta. Niech $g \in G_0^{\text{cl}}$. Wtedy istnieje ciąg (g_n) w G_0 taki, że $g_n \rightarrow g$. Zatem $gg_n^{-1} \rightarrow \mathbb{1}$. Czyli dla dostatecznie dużych n , $gg_n^{-1} \in \mathcal{O}$. Zatem $g \in \mathcal{O}g_n \subset G_0$. Stąd G_0 jest domknięta. Ze spójności G wynika, że $G = G_0$. \square

$Z(G)$ oznacza centrum grupy, tzn

$$Z(G) := \{z \in G : zg = gz, g \in G\}.$$

Oczywiście, każda podgrupa w centrum dowolnej grupy jest normalna.

Twierdzenie 24.2 *Niech K będzie dyskretną podgrupą normalną w spójnej grupie Liego G .*

- (1) *Wtedy K jest zawarte w centrum grupy G .*
- (2) *Niech $\Phi : G \rightarrow G/K$ będzie kanonicznym homomorfizmem. Wtedy $Z(G/K) = \Phi(Z(G))$. W szczególności, $Z(G/K) \simeq Z(G)/K$.*
- (3) *G/K jest lokalnie izomorficzna z G .*

Dowód. (1) Niech $k \in K$. Funkcja $G \ni g \mapsto gkg^{-1} \in K$ jest ciągła. Dla $g = \mathbb{1}$ jej wartością jest k . Ponieważ K jest dyskretna a G spójna, funkcja musi być stała. Więc $gkg^{-1} = k$, $g \in G$.

(2) Oczywiście, korzystając z tego, że $K \subset Z(G)$ dostajemy $Z(G/K) \supset \Phi(Z(G))$.

Niech $b \in G$ i $\Phi(b) \in Z(G/K)$. Dla dowolnego $g \in G$,

$$\mathbb{1}_{G/K} = \Phi(g)\Phi(b)\Phi(g)^{-1}\Phi(b)^{-1} = \Phi(gbg^{-1}b^{-1}). \quad (24.154)$$

Funkcja

$$G \ni g \mapsto bgb^{-1}b^{-1} \quad (24.155)$$

jest ciągła. Na mocy (24.154), ma ona wartości w dyskretnej grupie K . G jest spójne. Więc (24.155) jest stała. Dla $g = \mathbb{1}$, jej wartością jest $\mathbb{1}$. Więc

$$gbg^{-1}b^{-1} = \mathbb{1}, \quad g \in G.$$

□

Twierdzenie 24.3 *Niech G_1 będzie lokalnie izomorficzna z G_2 i $\Phi : \mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2$ jest odwzorowaniem, o którym mowa w definicji lokalnej izomorficzności. Załóżmy, że Φ rozszerza się do homomorfizmu $\Phi : G_1 \rightarrow G_2$. Wtedy takie rozszerzenie jest jednoznacznie wyznaczone i jego jądro jest dyskretną podgrupą normalną w G_1 .*

24.2 Grupa homotopii grupy Liego

Niech G będzie spójną grupą Liego. Rozważając jej grupę homotopii, zawsze będziemy przyjmować, że $\mathbb{1}$ jest punktem bazowym.

Niech G^{uc} będzie nakryciem uniwersalnym G . Wprowadzamy działanie na G^{uc} :

$$[\gamma_1][\gamma_2] := [\gamma_1\gamma_2],$$

gdzie $\gamma_1\gamma_2(t) := \gamma_1(t)\gamma_2(t)$. Niech Φ^{uc} oznacza kanoniczne rzutowanie $\Phi^{\text{uc}} : G^{\text{uc}} \rightarrow G$.

Twierdzenie 24.4 *G^{uc} jest grupą Liego i Φ^{uc} jest surjektywnym homomorfizmem. Dlatego, $G = G^{\text{uc}}/\text{Ker}\Phi^{\text{uc}}$. $\Pi(G)$ można utożsamić z $\text{Ker}\Phi^{\text{uc}}$, która jest dyskretną podgrupą normalną, i dlatego jest zawarta w centrum G^{uc} .*

Zatem w rodzinie lokalnie równoważnych ze sobą grup Liego można wyróżnić “maksymalną” G^{uc} , która jest jednospójna.

Pouczające jest sprawdzić niezależnie, że grupa homotopii grupy Liego G jest przemienne.

Dowód. Niech $\gamma_i \in K(\mathbb{1}, \mathbb{1}, G)$. Zdefiniujmy

$$s_1(t) := \begin{cases} (2t, 0), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ (1, 2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}, \quad s_2(t) := \begin{cases} (0, 2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ (2t - 1, 0), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Niech $\Gamma(t_1, t_2) := \gamma_1(t_1)\gamma_2(t_2)$. Wtedy $[\gamma_1] \circ [\gamma_2]$ jest reprezentowane przez $\Gamma(s_1(t))$ a $[\gamma_2] \circ [\gamma_1]$ jest reprezentowane przez $\Gamma(s_2(t))$.

$\Gamma((1 - \theta)s_1(t) + \theta s_2(t))$ jest homotopią między nimi. □

Analizę spójnych grup Liego można ograniczyć do grup spójnych jednospójnych. Niech G taka będzie. Oznaczmy przez Z centrum G .

Twierdzenie 24.5 (1) *Każda spójna grupa Liego lokalnie równoważna grupie G jest izomorficzna z G/K , gdzie K jest podgrupą dyskretną grupy Z .*

(2) *Centrum grupy G/K jest równe Z/K .*

(3) *Grupa homotopii G/K jest równa K .*

Dowód. (3) Niech $[\gamma] \in \Pi(G/K)$. Wtedy możemy podnieść γ do krzywej $\tilde{\gamma} \in K(\mathbb{1}, k, G)$, tak że przy homomorfizmie kanonicznym $\Phi : G \rightarrow G/K$ mamy $\Phi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$. Oczywiście, $k \in K$. Dostajemy w ten sposób odwzorowanie $\tilde{\Phi}([\gamma]) = k$. Oczywiście, jest to surjektywny homomorfizm. Z jednopójności \tilde{G} sprawdzamy, że jest iniektywny. \square

W szczególności, jeśli centrum G jest dyskretne, to mamy też grupę minimalną G/Z z trywialnym centrum i grupą homotopii Z .

24.3 Rozmaitości

Niech \mathcal{P} będzie rozmaitością. \mathcal{P} można pokryć zbiorami otwartymi \mathcal{O} i mapami $\phi_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Mapy $\phi_{\mathcal{O}}(p) = x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ pozwalają utożsamić \mathcal{O} z otwartym podzbiorem $\phi_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}) \subset \mathbb{R}^n$.

Niech $\text{Diff}(\mathcal{P})$ oznacza zbiór dyfeomorfizmów rozmaitości \mathcal{P} . Jest to grupa. Dla $f \in C^\infty(\mathcal{P})$ i $\Phi \in \text{Diff}(\mathcal{P})$ kładziemy $\Phi^\# f(p) := f(\Phi(p))$. Piszemy też $\Phi_\# := (\Phi^\#)^{-1}$. $\text{Diff}(\mathcal{P}) \ni \Phi \mapsto \Phi_\#$ jest działaniem grupy.

Niech $p \in \mathcal{P}$. Standardowa definicja wektora stycznego do \mathcal{P} w punkcie p mówi o klasie abstrakcji krzywych. Jeśli krzywa $t \mapsto \gamma_t \in \mathcal{P}$ spełnia zadaje wektor styczny A w $p = \gamma_0$, będziemy pisali $A_t = \frac{d}{dt} \gamma_0$. Przez $T_p \mathcal{P}$ będziemy oznaczali przestrzeń styczną do \mathcal{P} w punkcie p . Jeśli $A \in T_p \mathcal{P}$, to mamy liniowe odwzorowanie $C^\infty(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{C}$ oznaczane przez $A^\# f$ albo $\langle A^\# | df \rangle = \left. \frac{d}{dt} f(\gamma_t) \right|_{t=0}$, dla krzywej γ_t definiującej A .

Zbiór $\bigcup_{p \in \mathcal{P}} T_p \mathcal{P}$ z naturalną strukturą rozmaitości nazywamy *wiązką styczną*. Funkcję gładką $\mathcal{P} \ni p \mapsto X(p) \in T_p \mathcal{P}$ taką, że $X(p) \in T_p \mathcal{P}$ nazywamy polem wektorowym. Zbiór pól wektorowych na \mathcal{P} oznaczamy przez $C^\infty(\mathcal{P}, T\mathcal{P})$. Pole wektorowe X zadaje odwzorowanie $X^\# : C^\infty(\mathcal{P}) \rightarrow C^\infty(X)$. We współrzędnych ma ono postać

$$X^\# f(x) = X^j(x) \partial_{x^j} f(x).$$

Komutator dwóch pól wektorowych jest też polem wektorowym:

$$[X^\#, Y^\#] = (X^j(x) \partial_{x^j} Y^i(x) - Y^j(x) \partial_{x^j} X^i(x)) \partial_{x^i}.$$

Pola wektorowe można przenosić przez dyfeomorfizm. Dla $\Phi \in \text{Diff}(\mathcal{P})$, definiujemy $\Phi_\# : C^\infty(\mathcal{P}, T\mathcal{P}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{P}, T\mathcal{P})$ przez

$$\Phi_\#(X^\#) := \Phi_\# X^\# \Phi_\#^{-1},$$

czyli

$$\Phi_\#(X^\#) f(x) = \left(X^\#(f \circ \Phi) \right) (\Phi^{-1}(x)).$$

We współrzędnych:

$$\Phi_\#(X^\#) = X^j(y) \frac{\partial \Phi^i(y)}{\partial y^j} \Big|_{y=\Phi^{-1}(x)} \partial_{x^i}.$$

Jeśli rodzina dyfeomorfizmów Φ_t zależy w sposób gładki od $t \in \mathbb{R}$, to

$$\frac{d}{dt} \Phi_t(x) = X_t(\Phi_t(x)). \quad (24.156)$$

zadaje rodzinę pól wektorowych X_t . Równoważnie,

$$\frac{d}{dt}\Phi_t^\# = \Phi_t^\# X_t^\#.$$

Można zadać rodzinę pól wektorowych $\mathbb{R} \ni t \mapsto X_t$ i rozważać istnienie rozwiązań (24.156) z $\Phi_0 = \text{Id}$. Rozwiązania takie lokalnie (w \mathcal{P} i w czasie) istnieją i są jednoznaczne.

W szczególności, jeśli

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(x) = X(\Phi_t(x)), \quad (24.157)$$

to Φ_t jest jednoparametrową grupą i piszemy $\Phi_t = e^{tX}$. Równoważnie,

$$\frac{d}{dt}\Phi_t^\# = X^\# \Phi_t^\# = \Phi_t^\# X^\#, \quad (24.158)$$

Jeśli X jest zadany polem wektorowym takim, że istnieje rozwiązanie (24.157 dla małych t , to istnieje dla $t \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 24.6 *Niech $G \subset \text{Diff}(\mathcal{P})$ będzie grupą domkniętą.*

- (1) *Niech Φ_t będzie krzywą w G taką, że $\text{Id} = \Phi_0$ i pole wektorowe X niech spełnia $\frac{d}{dt}\Phi_0 = X$. Wtedy grupa $\{e^{tX} : t \in \mathbb{R}\}$ jest zawarta w G .*
- (2) *Niech X, Y będą polami wektorowymi takimi, że e^{tX} i e^{tY} należą do G dla $t \in \mathbb{R}$. Wtedy $e^{t(\alpha A + \beta B)}$ należy do G dla $t \in \mathbb{R}$.*
- (3) *Niech $\{e^{tA} : t \in \mathbb{R}\}$ i $\{e^{tB} : t \in \mathbb{R}\}$ będą zawarte w G . Wtedy $\{e^{t[A, B]} : t \in \mathbb{R}\}$ jest zawarte w G .*

Zatem jeśli G jest grupą Liego w $\text{Diff}(\mathcal{P})$, to przestrzeń styczna do G jest algebrą Liego.

Dowód. Założymy dodatkowo, że \mathcal{P} jest przestrzenią liniową a wszystkie pola wektorowe odpowiadają transformacjom liniowym. By pokazać (1), piszemy:

$$G \ni \Phi_{t/n}^n \simeq (\mathbb{1} + X/n)^n \rightarrow e^{tX}.$$

By pokazać (2) wystarczy założyć, że $\alpha = \beta = 1$. Następnie sprawdzamy, że

$$e^{t(X+Y)} = e^{tX}e^{tY} + O(t^2).$$

(3) wynika z

$$e^{tX}e^{tY}e^{-tX}e^{-tY} = e^{t^2[X, Y]} + O(t^3),$$

które pokazujemy następująco:

$$\begin{aligned} & e^{tX}e^{tY}e^{-tX}e^{-tY} \\ &= \left(\mathbb{1} + tX + \frac{t^2}{2}X^2 \right) \left(\mathbb{1} + tY + \frac{t^2}{2}Y^2 \right) \left(\mathbb{1} - tX + \frac{t^2}{2}X^2 \right) \left(\mathbb{1} - tY + \frac{t^2}{2}Y^2 \right) + O(t^3) \\ &= \mathbb{1} + tX + tY - tX - tY + \frac{t^2}{2}X^2 + \frac{t^2}{2}Y^2 + \frac{t^2}{2}X^2 + \frac{t^2}{2}Y^2 \\ &\quad - t^2X^2 - t^2Y^2 + t^2XY + t^2XY - t^2XY - t^2YX + O(t^3) \\ &= \mathbb{1} + t^2[X, Y] + O(t^3). \end{aligned}$$

24.4 Algebra Liego grupy Liego

Niech G będzie grupą Liego. Jak zwykle, $\mathbb{1}$ oznacza jej element jednostkowy. Oznaczmy przez \mathfrak{g} przestrzeń styczną do G w punkcie $\mathbb{1}$, czyli $\mathfrak{g} = T_{\mathbb{1}}G$.

Mamy dyfeomorfizmy

$$\begin{aligned} L(g)h &:= gh, & R(g)h &:= hg^{-1}. \\ G \ni g &\mapsto L(g), R(g) \in \text{Diff}(G) \end{aligned}$$

są homomorfizmami grup

Mamy również $Kh := h^{-1}$. Oczywiście, $K^2 = \text{Id}$ i $KL(g)K = R(g)$.

Mówimy, że $B \in C^\infty(\mathcal{P}, T\mathcal{P})$ jest lewo- (pravo-)niezmiennicze, gdy

$$L(g)_\#B^\# = B^\#, \quad R(g)_\#B^\# = B^\#, \quad g \in G.$$

Twierdzenie 24.7 Dla każdego $A \in T_{\mathbb{1}}G$ istnieje dokładnie jedno pole lewo- i prawoniezmiennicze $L_A, R_A \in C^\infty(\mathcal{P}, T\mathcal{P})$ takie, że $L_A(\mathbb{1}) = R_A(\mathbb{1}) = A$.

$L_A f(g)$ jest równe wektorowi $A^\#$ działającemu na funkcję $G \ni h \mapsto f(gh)$. Każde pole lewoniezmiennicze jest tej postaci. Pola lewoniezmiennicze tworzą algebrę Liego.

$R_A f(g)$ jest równe wektorowi $A^\#$ działającemu na funkcję $G \ni h \mapsto f(hg)$. Każde pole prawoniezmiennicze jest tej postaci. Pola prawoniezmiennicze tworzą algebrę Liego.

Mamy $KL_AK = R_{-B}$.

Twierdzenie 24.8 Niech $A \in T_{\mathbb{1}}G$. Wtedy istnieje dokładnie jedna krzywa $\mathbb{R} \ni t \mapsto g(t) \in G$ spełniająca równanie

$$\frac{dg(t)}{dt}g(t)^{-1} = A.$$

Równoważnie,

$\mathbb{R} \ni t \mapsto g(t) \in G$ jest homomorfizmem grup.

Równoważnie:

$$\begin{aligned} \frac{dg(t)}{dt} &= L_A g(t), & \frac{d}{dt}L(g_t) &= L_A(L(g_t)), \\ & & \frac{d}{dt}R(g_t) &= -R_A(R(g_t)). \end{aligned}$$

Będziemy pisać $g(t) =: e^{tA}$. Daje to równoważną definicję komutatora:

Twierdzenie 24.9 Niech $A, B \in T_{\mathbb{1}}G$. Wtedy

$$[0, \infty[\ni s \mapsto \gamma(s) := e^{\sqrt{s}A}e^{\sqrt{s}B}e^{-\sqrt{s}A}e^{-\sqrt{s}B}$$

jest różniczkowalne w zerze i $\left. \frac{d}{ds}\gamma(s) \right|_{s=0} = [A, B]$.

Twierdzenie 24.10 Niech $\Phi : G \rightarrow H$ będzie homomorfizmem grup Liego z algebrami Liego $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$. Wtedy $\phi := \Phi_\# : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ jest homomorfizmem algebr Liego. G i H są lokalnie izomorficzne, wtedy i tylko wtedy gdy \mathfrak{g} i \mathfrak{h} są izomorficzne.

Twierdzenie 24.11 *Niech \mathfrak{g} jest algebrą Liego. Wtedy istnieje grupa Liego G , której algebra Liego jest izomorficzna z \mathfrak{g} .*

Szkic dowodu Z Twierdzenia Ado wynika, że algebrę \mathfrak{g} można zanurzyć w $gl(\mathcal{V})$ dla pewnej przestrzeni \mathcal{V} . Definiujemy G jako podgrupę w $GL(\mathcal{V})$ generowaną przez e^A dla $A \in \mathfrak{g}$. Następnie należy pokazać, że G jest rozmaitością i \mathfrak{g} jest jej przestrzenią styczną. \square

24.5 Przemienne grupy Liego

Twierdzenie 24.12 *Niech L będzie dyskretną podgrupą w \mathbb{R}^n . Niech $\text{Span}L$ będzie k wymiarowe. Wtedy istnieją e_1, \dots, e_k takie, że*

$$L = \{c_1 e_1 + \dots + c_k e_k, (c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{Z}^k\}.$$

Twierdzenie 24.13 *Każda abelowa spójna grupa Liego jest izomorficzna z $\mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^k$.*

24.6 Podgrupy grup Liego

Twierdzenie 24.14 *Niech H będzie domkniętą podgrupą grupy Liego G . Wtedy H jest też grupą Liego. Jeśli $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ są algebrami Liego grup G i H , wtedy nawias w \mathfrak{h} pokrywa się z nawiasem \mathfrak{g} obcięty do \mathfrak{h} . W szczególności, \mathfrak{h} jest podalgebrą Liego w \mathfrak{g} . Jeśli H jest normalna w G , to \mathfrak{h} jest ideałem w \mathfrak{g} .*

Nie każda podalgebra w \mathfrak{g} jest styczna do podgrupy w G .

Twierdzenie 24.15 *Niech G będzie grupą Liego z algebrą Liego \mathfrak{g} . Jeśli \mathfrak{h} jest ideałem w \mathfrak{g} takim, że istnieje podgrupa H styczna do \mathfrak{h} , to spójna składowa jedności H_0 jest podgrupą normalną w G .*