Kolokwium nr 1
Termin oddania: 19 października 2001
Mechanika Kwantowa IIB
Semestr zimowy 2001/2002

Rozwiązane zadanie należy oddać na ćwiczeniach w zaklejonej kopercie razem z małą kopertą, na której należy wpisać datę kiedy kolokwium było pisane oraz godzinę rospoczęcia i zakończenia (hh:mm).

Zadanie 1a

Niech trzy ortonormalne funkcje falowe:

$$\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x)$$

tworzą bazę w trójwymiarowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_1$ stanów jednocząstkowych. Rozważyć stan Ψ należący do przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_3$ stanów trójcząstkowych:

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) = [\phi_1(x_1) + \phi_2(x_1)][\phi_1(x_2) + \phi_3(x_2)][\phi_2(x_3) + \phi_3(x_3)]$$

a. Czy Ψ jest stanem cząstek nierozróżnialnych?

b. Znaleźć normę stanu Ψ w $\mathcal{H}_3$.

c. Znaleźć bazę stanów trój-fermionowych, rozpinającą przestrzeń $\mathcal{H}_3^F$.

d. Znaleźć bazę stanów trój-bozonowych, rozpinającą przestrzeń $\mathcal{H}_3^B$.

e. Rozłożyć stan Ψ na trzy składowe, $\Psi = \Psi_F + \Psi_B + \Psi_X$, (ortogonalne w $\mathcal{H}_3$) takie, że $\Psi_F \in \mathcal{H}_3^F$ oraz $\Psi_B \in \mathcal{H}_3^B$.

f. Znaleźć normę składowej Ψ_F.

g. Znaleźć normę składowej Ψ_B.

h. Przedstawić Ψ_F w reprezentacji II kwantyzacji (poprzez operatory kreacji fermionów działające na próżnię).

i. Przedstawić Ψ_B w reprezentacji II kwantyzacji (poprzez operatory kreacji bozonów działające na próżnię).

j. Posługując się reprezenacjami II kwantyzacji sprawdzić wyniki otrzymane dla norm stanów Ψ_F i Ψ_B

Kolokwium nr 1, poprawka nr 1
Termin oddania: dowolny
Mechanika Kwantowa IIB
Semestr zimowy 2001/2002

Rozwiązane i podpisane zadanie należy oddać na ćwiczeniach w zaklejonej kopercie razem z małą kopertą, na której należy wpisać datę kiedy kolokwium było pisane oraz godzinę rozpoczęcia i zakończenia (hh:mm).

Zadanie 1b
Niech trzy ortonormalne funkcje falowe:

$$\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x)$$

tworzą bazę w trójwymiarowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_1$ stanów jednocząstkowych. Rozważyć stan Ψ należący do przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_3$ stanów trójcząstkowych:

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) = [\phi_1(x_1) + \phi_2(x_1) + \phi_3(x_1)][\phi_1(x_2) + \phi_2(x_2) + \phi_3(x_2)][\phi_1(x_3) + \phi_2(x_3) + \phi_3(x_3)]$$

a. Czy Ψ jest stanem cząstek nierozróżnialnych?

b. Znaleźć normę stanu Ψ w $\mathcal{H}_3$.

c. Znaleźć iloczyny skalarne Ψ ze wszystkimi stanami bazy tensorowej w $\mathcal{H}_3$.

d. Znaleźć bazę stanów trój-bozonowych, rozpinającą przestrzeń $\mathcal{H}_3^B$.

e. Rozłożyć stan Ψ na trzy składowe, $\Psi = \Psi_F + \Psi_B + \Psi_X$, takie, że $\Psi_F \in \mathcal{H}_3^F$ lub $\Psi_F = 0$, $\Psi_B \in \mathcal{H}_3^B$ lub $\Psi_B = 0$, oraz $\Psi_X \in \mathcal{H}_3^X$ lub $\Psi_X = 0$.

f. Rozłożyć stan Ψ_B na bazę stanów trój-bozonowych.

Kolokwium nr 1, poprawka nr 2
Termin oddania: dowolny
Mechanika Kwantowa IIB
Semestr zimowy 2001/2002

Rozwiązane i podpisane zadanie należy oddać na ćwiczeniach w zaklejonej kopercie razem z małą kopertą, na której należy wpisać datę kiedy kolokwium było pisane oraz godzinę rozpoczęcia i zakończenia (hh:mm).

Zadanie 1c
Niech trzy ortonormalne funkcje falowe:

$$\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x)$$

tworzą bazę w trójwymiarowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_1$ stanów jednocząstkowych. Rozważyć stan Ψ należący do przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_3$ stanów trójcząstkowych:

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) = [\phi_1(x_1) - \phi_2(x_1) + \phi_3(x_1)][\phi_1(x_2) + \phi_2(x_2) - \phi_3(x_2)][\phi_1(x_3) + \phi_2(x_3) + \phi_3(x_3)]$$

a. Czy Ψ jest stanem cząstek nierozróżnialnych?

b. Znaleźć normę stanu Ψ w $\mathcal{H}_3$.

c. Znaleźć iloczyny skalarne Ψ ze wszystkimi stanami bazy tensorowej w $\mathcal{H}_3$.

d. Znaleźć bazę stanów trój-bozonowych, rozpinającą przestrzeń $\mathcal{H}_3^B$.

e. Rozłożyć stan Ψ na trzy składowe, $\Psi = \Psi_F + \Psi_B + \Psi_X$, takie, że $\Psi_F \in \mathcal{H}_3^F$ lub $\Psi_F = 0$, $\Psi_B \in \mathcal{H}_3^B$ lub $\Psi_B = 0$, oraz $\Psi_X \in \mathcal{H}_3^X$ lub $\Psi_X = 0$.

f. Rozłożyć stan Ψ_B na bazę stanów trój-bozonowych.

Kolokwium nr 2
Termin oddania: 26 października 2001
Mechanika Kwantowa IIB
Semestr zimowy 2001/2002

Rozwiązane zadanie należy oddać na ćwiczeniach w zaklejonej kopercie razem z małą kopertą, na której należy wpisać datę kiedy kolokwium było pisane oraz godzinę rospoczęcia i zakończenia (hh:mm).

Zadanie 2a
Rozważyć transformację dla fermionów o postaci:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_2^+ \\ \alpha_2 &= a_1^+ \\ \alpha_\mu &= a_\mu \quad \text{dla} \quad \mu = 3\ldots M. \end{aligned}$$

a. Sprawdzić, że jest to transformacja kanoniczna

b. Znaleźć dla tej transformacji macierze A i B oraz macierz $\mathcal{A}$ w podwojonej liczbie wymiarów.

c. Znaleźć macierz $\mathcal{Y}$ taką, że $\mathcal{A}=\exp(i\mathcal{Y})$.

d. Znaleźć transformację unitarną $\hat{A}=\exp(i\hat{Y})$ w przestrzeni Focka odpowiadającą zadanej transformacji kanonicznej.

e. Znaleźć próżnię $|\Psi\rangle$ operatorów α_μ.

f. Obliczyć $\hat{A}|0\rangle$

Wskazówka: Ponieważ w indeksach $\mu = 3\ldots M$ rozważane transformacje są tożsamościowe, więc opłaca się badać macierze tylko w pozostałych indeksach.

Problem nie będący częścią kolokwium - tylko dla ochotników:
Porównać otrzymane wyniki ze transformacją kanoniczną, która jest złożeniem dwu transformacji niewłaściwych:
pierwszej: $\alpha_1 = a_1^+$ oraz $\alpha_\mu = a_\mu$ dla $\mu \neq 1$
drugiej: $\alpha_2 = a_2^+$ oraz $\alpha_\mu = a_\mu$ dla $\mu \neq 2$
Przedyskutować podobieństwa i różnice.

Kolokwium nr 2, poprawka nr 1
Termin oddania: dowolny
Mechanika Kwantowa IIB
Semestr zimowy 2001/2002

Rozwiązane i podpisane zadanie należy oddać na ćwiczeniach w zaklejonej kopercie razem z małą kopertą, na której należy wpisać datę kiedy kolokwium było pisane oraz godzinę rozpoczęcia i zakończenia (hh:mm).

Zadanie 2b

Rozważyć transformację dla fermionów o postaci:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1^+ \\ \alpha_2 &= a_2^+ \\ \alpha_\mu &= a_\mu \quad \text{dla} \quad \mu = 3 \ldots M. \end{aligned}$$

a. Znaleźć dla tej transformacji macierze A i B oraz macierz $\mathcal{A}$ w podwojonej liczbie wymiarów.

b. Znaleźć macierz $\mathcal{Y}$ taką, że $\mathcal{A}$=exp($i\mathcal{Y}$). Uwaga! Spośród wielu możliwych rozwiązań należy wybrać rozwiązanie $\mathcal{F}$-nieparzyste, $\mathcal{F}\mathcal{Y}\mathcal{F} = -\mathcal{Y}^*$

c. Znaleźć transformację unitarną $\hat{A}$=exp($i\hat{Y}$) w przestrzeni Focka odpowiadającą zadanej transformacji kanonicznej.

d. Zgadnąć próżnię $|\Psi\rangle$ operatorów α_μ.

e. Obliczyć $\hat{A}|0\rangle$ i porównać z uprzednio odgadniętą próżnią. Czy próżnie odgadnięte przez różnych studentów muszą być sobie równe?

Wskazówka 1: Ponieważ w indeksach $\mu = 3 \ldots M$ rozważane transformacje są tożsamościowe, więc opłaca się badać macierze tylko w pozostałych indeksach.

Wskazówka 2: Jeśli I jest macierzą tożsamościową w dwu wymiarach, to równanie w czterech wymiarach:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \exp\left\{ i\pi \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \right\}$$

jest spełnione dla dowolnych macierzy X mających obie wartości własne całkowite parzyste, i dowolnych macierzy Y mających obie wartości własne całkowite nieparzyste.

Kolokwium nr 2, poprawka nr 2
Termin oddania: dowolny
Mechanika Kwantowa IIB
Semestr zimowy 2001/2002

Rozwiązane i podpisane zadanie należy oddać na ćwiczeniach w zaklejonej kopercie razem z małą kopertą, na której należy wpisać datę kiedy kolokwium było pisane oraz godzinę rozpoczęcia i zakończenia (hh:mm).

Zadanie 2c
Rozważyć transformację dla fermionów o postaci:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -a_2^+ \\ \alpha_2 &= a_1^+ \\ \alpha_\mu &= a_\mu \quad \text{dla} \quad \mu = 3 \dots M. \end{aligned}$$

a. Sprawdzić, że jest to transformacja kanoniczna

b. Znaleźć dla tej transformacji macierze A i B oraz macierz $\mathcal{A}$ w podwojonej liczbie wymiarów.

c. Znaleźć macierz $\mathcal{Y}$ taką, że $\mathcal{A}$=exp$(i\mathcal{Y})$.

d. Znaleźć transformację unitarną $\hat{A}$=exp$(i\hat{Y})$ w przestrzeni Focka odpowiadającą zadanej transformacji kanonicznej.

e. Znaleźć próżnię $|\Psi\rangle$ operatorów α_μ.

f. Obliczyć $\hat{A}|0\rangle$

Wskazówka: Ponieważ w indeksach $\mu = 3 \dots M$ rozważane transformacje są tożsamościowe, więc opłaca się badać macierze tylko w pozostałych indeksach.

Kolokwium nr 3
Termin oddania: 9 listopada 2001
Mechanika Kwantowa IIB
Semestr zimowy 2001/2002

Rozwiązane i podpisane zadanie należy oddać na ćwiczeniach w zaklejonej kopercie razem z małą kopertą, na której należy wpisać datę kiedy kolokwium było pisane oraz godzinę rozpoczęcia i zakończenia (hh:mm).

Zadanie 3a
Rozważyć transformację dla bozonów o postaci:

$$\begin{aligned} \alpha &= a - za^+, \\ \alpha'^+ &= xa + ya^+ \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie x, y, z są liczbami rzeczywistymi, oraz $[a, a^+]$=1. W podwojonej liczbie wymiarów transformację tę oznaczamy γ=$\mathcal{B}^+c$, gdzie $\mathcal{B}$ jest macierzą 2×2 oraz

$$\gamma = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha'^+ \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} a \\ a^+ \end{pmatrix}.$$

a. Dla jakich stałych x, y, z jest to transformacja kanoniczna, czyli $[\alpha, \alpha'^+]$=1 ?

b. Dla jakich stałych x, y, z jest to unitarna transformacja kanoniczna, czyli α'=α ?

c. Znaleźć dla transformacji (1) macierz $\mathcal{B}$ w podwojonej liczbie wymiarów.

d. Dla transformacji kanonicznych o y=1, x=0 i dowolnych z znaleźć macierz $\mathcal{T}$ taką, że $\mathcal{B}$=$\exp(i\mathcal{J}\mathcal{T}^+)$, gdzie $\mathcal{J}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

e. Posługując się powyższym wynikiem, znaleźć transformację $\hat{B}$ w bozonowej przestrzeni Focka odpowiadającą zadanej transformacji kanonicznej, czyli taką że $\hat{B}a\hat{B}^{-1}$=α i $\hat{B}a^+\hat{B}^{-1}$=α'^+ .

f. Znaleźć próżnię $|\Psi\rangle$=$\hat{B}|0\rangle$ operatorów α.

g. Obliczyć normę $\langle\Psi|\Psi\rangle$ stanu próżni. Dla jakich wartości z próżnia istnieje?

Kolokwium nr 3, poprawka nr 1
Termin oddania: dowolny
Mechanika Kwantowa IIB
Semestr zimowy 2001/2002

Rozwiązane i podpisane zadanie należy oddać na ćwiczeniach w zaklejonej kopercie razem z małą kopertą, na której należy wpisać datę kiedy kolokwium było pisane oraz godzinę rozpoczęcia i zakończenia (hh:mm).

Zadanie 3b
Rozważyć transformację dla bozonów o postaci:

$$\begin{aligned} \alpha &= e^t a - a^+, \\ \alpha'^+ &= e^{-t} a^+ \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie t jest liczbą rzeczywistą, oraz $[a, a^+]$=1. W podwojonej liczbie wymiarów transformację tę oznaczamy γ=$\mathcal{B}^+ c$, gdzie $\mathcal{B}$ jest macierzą 2×2 oraz

$$\gamma = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha'^+ \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} a \\ a^+ \end{pmatrix}.$$

a. Dla jakich wartości t jest to transformacja kanoniczna, czyli $[\alpha, \alpha'^+]$=1 ?

b. Znaleźć dla transformacji (2) macierz $\mathcal{B}$ w podwojonej liczbie wymiarów.

c. Znaleźć macierz $\mathcal{T}$ taką, że $\mathcal{B}$=$\exp(i\mathcal{J}\mathcal{T}^+)$, gdzie $\mathcal{J}$=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

d. Posługując się powyższym wynikiem, znaleźć transformację $\hat{B}$ w bozonowej przestrzeni Focka odpowiadającą zadanej transformacji kanonicznej, czyli taką że $\hat{B} a \hat{B}^{-1}$=α i $\hat{B} a^+ \hat{B}^{-1}$=α'^+ .

e. Znaleźć próżnię $|\Psi\rangle$=$\hat{B}|0\rangle$ operatorów α.

f. Przedyskutować granicę $t \longrightarrow 0$ w kontekście wyników otrzymanych dla zadania nr 1 z kolokwium nr 3 w pierwszym terminie.

g. Podjąć próbę obliczenia normy $\langle\Psi|\Psi\rangle$ stanu próżni. Dla jakich wartości t próżnia istnieje?

Kolokwium nr 4
Termin oddania: 16 listopada 2001
Mechanika Kwantowa IIB
Semestr zimowy 2001/2002

Rozwiązane i podpisane zadanie należy oddać na ćwiczeniach w zaklejonej kopercie razem z małą kopertą, na której należy wpisać datę kiedy kolokwium było pisane oraz godzinę rozpoczęcia i zakończenia (hh:mm).

Zadanie 4a
Rozważyć stany należące do przestrzeni czterocząstkowej $\mathcal{H}_4$.

a. Znaleźć rozkład $\mathcal{H}_4$ na reprezentacje nieprzywiedlne grupy permutacji czterech elementów (czyli na klasy symetrii ze względu na przestawienia cząstek).

b. Znaleźć wymiary reprezentacji nieprzywiedlnych.

c. Znaleźć krotności występowania każdej reprezentacji nieprzywiedlnej w $\mathcal{H}_4$.

d. Znaleźć wymiar $\mathcal{H}_4$ i sprawdzić, że jest on równy sumie iloczynów wymiarów i krotności reprezentacji nieprzywiedlnych.

e. W przypadku gdy cząstki są nierozróżnialne o momencie pędu j=7/2, znaleźć momenty pędu stanów czterocząstkowych.

Wskazówka: Stany jednocząstkowe tworzą multiplet o momencie pędu j=7/2 i 8 różnych rzutach m=$-7/2, \ldots, +7/2$. Stan czterocząstkowy należy więc do przestrzeni $\mathcal{H}_4$ zbudowanej z M=8 stanów jednocząstkowych.

Kolokwium nr 4. poprawka nr 1
Termin oddania: dowolny
Mechanika Kwantowa IIB
Semestr zimowy 2001/2002

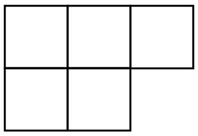
Rozwiązane i podpisane zadanie należy oddać na ćwiczeniach w zaklejonej kopercie razem z małą kopertą, na której należy wpisać datę kiedy kolokwium było pisane oraz godzinę rozpoczęcia i zakończenia (hh:mm).

Kartki z treścią zadania nie trzeba oddawać.

Zadanie 4b
Rozważyć stany należące do przestrzeni pięcio-cząstkowej $\mathcal{H}_5$.

a. Znaleźć rozkład $\mathcal{H}_5$ na reprezentacje nieprzywiedlne grupy permutacji pięciu elementów (czyli na klasy symetrii ze względu na przestawienia cząstek).

b. Znaleźć wymiar i krotność reprezentacji nieprzywiedlnej zadanej diagramem Younga:



c. Dla cząstek nierozróżnialne o momencie pędu j=1, znaleźć całkowite momenty pędu J stanów pięcio-cząstkowych.

Kolokwium nr 5
Termin oddania: 23 listopada 2001
Mechanika Kwantowa IIB
Semestr zimowy 2001/2002

Rozwiązane i podpisane zadanie należy oddać na ćwiczeniach w zaklejonej kopercie razem z małą kopertą, na której należy wpisać datę kiedy kolokwium było pisane oraz godzinę rozpoczęcia i zakończenia (hh:mm).

Zadanie 5a
Rozważyć trzeci rząd szeregu perturbacyjnego Goldstone'a dla układu fermionów o zachowanej liczbie cząstek.

1. Napisać wzór na poprawkę do energii w trzecim rzędzie.
2. Ile jest wszystkich możliwych schematów zwężeń w elemencie macierzowym zawierającym trzy operatory oddziaływania dwuciałowego?
3. Ile jest zwężeń niezwiązanych w trzecim rzędzie?
4. Ile jest w trzecim rzędzie związanych diagramów bez względu na ich topologiczną równoważność?
5. Znaleźć wszystkie (20?) diagramy Goldstone'a w trzecim rzędzie (topologicznie nierównoważne), które odpowiadają kreacji dwu par cząstka-dziura w dolnym oddziaływaniu wraz z anihilacją dwu par cząstka-dziura w górnym oddziaływaniu.
6. Ile jest wśród diagramów z punktu (5.) diagramów niezawierających zwężeń wewnętrznych (samo-oddziaływań)?
7. Ile jest wśród diagramów z punktu (5.) diagramów symetrycznych ze względu na jednoczesne odwrócenie wszystkich linii oddziaływań?
8. Napisać dla diagramów z punku (7.) odpowiadające im wyrażenia algebraiczne.

Kolokwium nr 5, poprawka nr 1
Termin oddania: dowolny
Mechanika Kwantowa IIB
Semestr zimowy 2001/2002

Rozwiązane i podpisane zadanie należy oddać na ćwiczeniach w zaklejonej kopercie razem z małą kopertą, na której należy wpisać datę kiedy kolokwium było pisane oraz godzinę rozpoczęcia i zakończenia (hh:mm).

Proszę poprawić wszystkie błędy zrobione w kolokwium nr 5 i oddać zrówno kartki z poprawkami jak i samo kolokwium nr 5.

Zadanie 5b
Rozważyć trzeci rząd szeregu perturbacyjnego Goldstone'a dla układu fermionów o zachowanej liczbie cząstek.

1. Napisać wzór na poprawkę do energii w trzecim rzędzie.
2. Ile jest wszystkich możliwych schematów zwężeń w elemencie macierzowym zawierającym trzy operatory oddziaływania dwuciałowego?
3. Ile jest zwężeń niezwiązanych w trzecim rzędzie?
4. Ile jest w trzecim rzędzie związanych diagramów bez względu na ich topologiczną równoważność?
5. Znaleźć wszystkie (20?) diagramy Goldstone'a w trzecim rzędzie (topologicznie nierównoważne, **związane**), które odpowiadają kreacji dwu par cząstka-dziura w dolnym oddziaływaniu wraz z anihilacją dwu par cząstka-dziura w górnym oddziaływaniu.
6. Ile jest wśród diagramów z punktu (5.) diagramów niezawierających zwężeń wewnętrznych (samo-oddziaływań)?
7. Ile jest wśród diagramów z punktu (5.) diagramów symetrycznych ze względu na jednoczesne odwrócenie wszystkich linii oddziaływań?
8. Napisać dla diagramów z punku (7.) odpowiadające im wyrażenia algebraiczne.

Kolokwium nr 6
Termin oddania: 7 grudnia 2001
Mechanika Kwantowa IIB
Semestr zimowy 2001/2002

Rozwiązane i podpisane zadanie należy oddać na ćwiczeniach w zaklejonej kopercie razem z małą kopertą, na której należy wpisać datę kiedy kolokwium było pisane oraz godzinę rozpoczęcia i zakończenia (hh:mm).

Zadanie 6a
Rozważyć czwarty rząd szeregu perturbacyjnego Goldstone'a dla układu bozonów, który bez oddziaływania opisany jest stanem koherentnym.

1. Napisać wzór na poprawkę do energii w czwartym rzędzie.
2. Ile jest zwężeń niezwiązanych w czwartym rzędzie?
3. Znaleźć wszystkie diagramy Goldstone'a w czwartym rzędzie (topologicznie nierównoważne, związane), które zawierają tylko dwa typy procesów elementarnych: (1) emisję cząstki z kondensatu oraz (2) absorbcję cząstki w kondensacie.
4. Dla diagramów Goldstone'a z punktu (3.) znaleźć wszystkie diagramy Feynmana.
5. Ile jest wśród diagramów z punktu (3.) diagramów symetrycznych ze względu na jednoczesne odwrócenie wszystkich linii oddziaływań?
6. Napisać dla diagramu(ów) z punktu (3.), który(e) nie zawiera(ją) linii łączącej dolne i górne oddziaływanie odpowiadające mu(im) wyrażenie(a) algebraiczne.

Pytania dodatkowe, nie będące przedmiotem kolokwium:

1. Ile jest wszystkich możliwych schematów zwężeń w bozonowym elemencie macierzowym zawierającym trzy operatory oddziaływania dwuciałowego? (86?)
2. Ile jest wszystkich możliwych schematów zwężeń w bozonowym elemencie macierzowym zawierającym cztery operatory oddziaływania dwuciałowego?
3. Ile jest wszystkich możliwych schematów zwężeń w bozonowym elemencie macierzowym zawierającym n operatorów oddziaływania dwuciałowego?

Kolokwium nr 7
Termin oddania: 21 grudnia 2001
Mechanika Kwantowa IIB
Semestr zimowy 2001/2002

Rozwiązane i podpisane zadanie należy oddać na ćwiczeniach w zaklejonej kopercie razem z małą kopertą, na której należy wpisać datę kiedy kolokwium było pisane oraz godzinę rozpoczęcia i zakończenia (hh:mm).

Zadanie 7a

Rozważyć układ bozonów obsadzających dwa stany jednocząstkowe μ=1,2, $\epsilon_2<\epsilon_1$, z oddziaływaniem separowalnym $V_{\mu\nu\mu'\nu'}=gQ_{\mu\mu'}Q_{\nu\nu'}$ zadanym przy pomocy macierzy

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

1. Znaleźć energię średnią układu w stanie koherentnym $|z\rangle=\exp(z_1 a_1^+ + z_2 a_2^+)|0\rangle$.
2. Znaleźć wartość średnią rutianu układu w stanie koherentnym.
3. Znaleźć bezpośrednim rachunkiem punkty stacjonarne wartości średniej rutianu ze względu na zmiany parametrów z_1 i z_2.
4. Znaleźć macierz jednocząstkowego Hamiltonianu Hartree dla tego układu.
5. Znaleźć energie własne i jednocząstkowe stany własne Hamiltonianu Hartree.
6. Napisać warunek samozgodności dla Hamiltonianu Hartree z punktu (4) oraz podjąć próbę znalezienia rozwiązań samozgodnych poprzez jego rozwiązanie.
7. Dla jakich wartości natężenia oddziaływania g energia Hartee jest równa energii układu nieoddziałującego?
8. Sprawdzić, że punkty stacjonarne znalezione w punkcie (3) spełniają warunek samozgodności znaleziony w punkcie (6).
9. Znaleźć liczbę cząstek w układzie jako funkcję potencjału chemicznego.
10. Czy układ posiada krytyczną liczbę cząstek N_c, poniżej której (dla zadanego natężenia oddziaływania g) energia Hartee jest równa energii układu nieoddziałującego?
11. Czy układ posiada krytyczne natężenie oddziaływania $|g_c|$, poniżej którego (dla zadanego liczbę cząstek N) energia Hartee jest równa energii układu nieoddziałującego.

Kolokwium nr 7, poprawka nr 1
Termin oddania: dowolny
Mechanika Kwantowa IIB
Semestr zimowy 2001/2002

Rozwiązane i podpisane zadanie należy oddać na ćwiczeniach w zaklejonej kopercie razem z małą kopertą, na której należy wpisać datę kiedy kolokwium było pisane oraz godzinę rozpoczęcia i zakończenia (hh:mm).

Proszę poprawić wszystkie błędy zrobione w kolokwium nr 7 i oddać zrówno kartki z poprawkami jak i samo kolokwium nr 7.

Zadanie 7b
Rozważyć układ bozonów obsadzających dwa stany jednocząstkowe μ=1,2, $\epsilon_2<\epsilon_1$, z oddziaływaniem separowalnym $V_{\mu\nu\mu'\nu'}=gQ_{\mu\mu'}Q_{\nu\nu'}$ zadanym przy pomocy macierzy

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

1. Znaleźć energię średnią układu w stanie koherentnym $|z\rangle=\exp(z_1 a_1^+ + z_2 a_2^+)|0\rangle$.
2. Znaleźć wartość średnią rutianu układu w stanie koherentnym.
3. Znaleźć bezpośrednim rachunkiem punkty stacjonarne wartości średniej rutianu ze względu na zmiany parametrów z_1 i z_2.
4. Znaleźć macierz jednocząstkowego Hamiltonianu Hartree dla tego układu.
5. Znaleźć energie własne i jednocząstkowe stany własne Hamiltonianu Hartree.
6. Napisać warunek samozgodności dla Hamiltonianu Hartree z punktu (4) oraz podjąć próbę znalezienia rozwiązań samozgodnych poprzez jego rozwiązanie.
7. Dla jakich wartości natężenia oddziaływania g energia Hartee jest równa energii układu nieoddziałującego?
8. Sprawdzić, że punkty stacjonarne znalezione w punkcie (3) spełniają warunek samozgodności znaleziony w punkcie (6).
9. Znaleźć liczbę cząstek w układzie jako funkcję potencjału chemicznego.
10. Czy układ posiada krytyczną liczbę cząstek N_c, poniżej której (dla zadanego natężenia oddziaływania g) energia Hartee jest równa energii układu nieoddziałującego?
11. Czy układ posiada krytyczne natężenie oddziaływania $|g_c|$, poniżej którego (dla zadanego liczbę cząstek N) energia Hartee jest równa energii układu nieoddziałującego.

Wskazówki:

1. W punkcie (3) należy znaleźć jawne rozwiązania $z_1(\mu)$ i $z_2(\mu)$. Należy **koniecznie** przedyskutować jakie μ są dopuszczalne dla danego g (dodatniego lub ujemnego).

2. Warunek samozgodności dla Hamiltonianu Hartree z punktu (4) należy rozwiązywać dla zadanej normalizacji $N{=}z_1^2{+}z_2^2$ wektora własnego Hamiltonianu Hartree.

3. W punkcie (7) należy udzielić odpowiedzi na pytanie czy dla $g{\neq}0$ istnieją rozwiązania Hartree, dla których energia Hartree jest równa energii układu dla $g{=}0$. Proszę pamiętać, że tak właśnie było w przykładzie rozwiązanym na ćwiczeniach.

4. Punkt (9) należy uzupełnić szkicowym rysunkiem funkcji $N(\mu)$. Czy dla każdego N i g jest rozwiązanie na μ?

5. W punkcie (3) mamy 2 równania na minimum rutianu oraz trzy zmienne z_1, z_2 i μ; możemy więc wyznaczyć $z_1(\mu)$ i $z_2(\mu)$.

6. W punkcie (6) mamy 4 równania: 1 równanie z warunku na stan własny Hamiltonianu Hartree (dlaczego nie 2?), warunek samozgodności - czyli q w funkcji z_1 i z_2, równanie na liczbę cząstek $N{=}z_1^2{+}z_2^2$, i związek $\mu(q)$ (z warunku, że μ jest niższą energią własną Hamiltonianu Hartree), oraz 5 zmiennych: z_1, z_2, q, N i μ. Można więc 4 zmienne wyrazić przez piątą, na przykład otrzymując $z_1(\mu)$, $z_2(\mu)$, $N(\mu)$ oraz $q(\mu)$.

Kolokwium nr 7, poprawka nr 2
Termin oddania: dowolny
Mechanika Kwantowa IIB
Semestr zimowy 2001/2002

Rozwiązane i podpisane zadanie należy oddać na ćwiczeniach w zaklejonej kopercie razem z małą kopertą, na której należy wpisać datę kiedy kolokwium było pisane oraz godzinę rozpoczęcia i zakończenia (hh:mm).

Zadanie 7c

Rozważyć układ bozonów obsadzających dwa stany jednocząstkowe μ=1,2, $\epsilon_2<\epsilon_1$, z oddziaływaniem separowalnym $V_{\mu\nu\mu'\nu'}=gQ_{\mu\mu'}Q_{\nu\nu'}$ zadanym przy pomocy macierzy

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

1. Znaleźć energię średnią układu w stanie koherentnym $|z\rangle=\exp(z_1 a_1^+ + z_2 a_2^+)|0\rangle$.
2. Znaleźć wartość średnią rutianu układu w stanie koherentnym.
3. Znaleźć bezpośrednim rachunkiem punkty stacjonarne wartości średniej rutianu ze względu na zmiany parametrów z_1 i z_2.
4. Znaleźć macierz jednocząstkowego Hamiltonianu Hartree dla tego układu.
5. Znaleźć energie własne i jednocząstkowe stany własne Hamiltonianu Hartree.
6. Napisać warunek samozgodności dla Hamiltonianu Hartree z punktu (4) oraz podjąć próbę znalezienia rozwiązań samozgodnych poprzez jego rozwiązanie.
7. Dla jakich wartości natężenia oddziaływania g energia Hartee jest równa energii układu nieoddziałującego?
8. Sprawdzić, że punkty stacjonarne znalezione w punkcie (3) spełniają warunek samozgodności znaleziony w punkcie (6).
9. Znaleźć liczbę cząstek w układzie jako funkcję potencjału chemicznego.
10. Czy układ posiada krytyczną liczbę cząstek N_c, poniżej której (dla zadanego natężenia oddziaływania g) energia Hartee jest równa energii układu nieoddziałującego?
11. Czy układ posiada krytyczne natężenie oddziaływania $|g_c|$, poniżej którego (dla zadanego liczbę cząstek N) energia Hartee jest równa energii układu nieoddziałującego.

Wskazówki:

1. W punkcie (3) należy znaleźć jawne rozwiązania $z_1(\mu)$ i $z_2(\mu)$. Należy **koniecznie** przedyskutować jakie μ są dopuszczalne dla danego g (dodatniego lub ujemnego).

2. Warunek samozgodności dla Hamiltonianu Hartree z punktu (4) należy rozwiązywać dla zadanej normalizacji $N{=}z_1^2{+}z_2^2$ wektora własnego Hamiltonianu Hartree.

3. W punkcie (7) należy udzielić odpowiedzi na pytanie czy dla $g{\neq}0$ istnieją rozwiązania Hartree, dla których energia Hartree jest równa energii układu dla $g{=}0$. Proszę pamiętać, że tak właśnie było w przykładzie rozwiązanym na ćwiczeniach.

4. Punkt (9) należy uzupełnić szkicowym rysunkiem funkcji $N(\mu)$. Czy dla każdego N i g jest rozwiązanie na μ?

5. W punkcie (3) mamy 2 równania na minimum rutianu oraz trzy zmienne z_1, z_2 i μ; możemy więc wyznaczyć $z_1(\mu)$ i $z_2(\mu)$.

6. W punkcie (6) mamy 4 równania: 1 równanie z warunku na stan własny Hamiltonianu Hartree (dlaczego nie 2?), warunek samozgodności - czyli q w funkcji z_1 i z_2, równanie na liczbę cząstek $N{=}z_1^2{+}z_2^2$, i związek $\mu(q)$ (z warunku, że μ jest niższą energią własną Hamiltonianu Hartree), oraz 5 zmiennych: z_1, z_2, q, N i μ. Można więc 4 zmienne wyrazić przez piątą, na przykład otrzymując $z_1(\mu)$, $z_2(\mu)$, $N(\mu)$ oraz $q(\mu)$.

Egzamin pisemny
Termin oddania: 21 lutego 2002, godz. 12:00
Mechanika Kwantowa IIB
Semestr zimowy 2001/2002

Rozwiązane i podpisane zadania należy oddać w zaklejonej kopercie razem z małą kopertą, na której należy wpisać datę kiedy egzamin był pisany oraz godzinę rozpoczęcia i zakończenia (hh:mm).

Rozważyć układ dwu elektronów obsadzających dwa dwukrotnie zdegenerowane stany jednocząstkowe, μ=1,2,3,4. Stany te opisane są orbitalną liczbą kwantową α=a,b i rzutem spinu na oś z, $s_z=\pm\hbar/2$ lub $s_z=\uparrow\downarrow$, oraz mają spin całkowity $s=\hbar/2$, czyli:

μ	stan
1	$a\uparrow$
2	$b\uparrow$
3	$a\downarrow$
3	$b\downarrow$

Energie jednocząstkowe tych stanów wynoszą odpowiednio ϵ_a i ϵ_b, $\delta=\epsilon_a-\epsilon_b>0$, i są niezależne od rzutu spinu.

Zadanie 8a

(a) Podać stany bazy iloczynowej dla układu dwu elektronów w reprezentacji II kwantyzacji.

(b) Dla każdego ze stanów bazy podać wartość całkowitego rzutu spinu układu oraz całkowitą energię układu bez oddziaływania.

(c) Podać możliwe wartości całkowitego spinu układu oraz ich krotności.

(d) Podać postać w reprezentacji II kwantyzacji operatora podnoszącego całkowity rzut spinu o 1.

(e) Znaleźć stany o dobrym całkowitym spinie w reprezentacji II kwantyzacji.

(f) Znaleźć stan podstawowy układu i określić dla niego stany cząstkowe i dziurowe.

Zadanie 8b

Rozważyć powyższy układ dwu elektronów z oddziaływaniem $\hat{V}_Q$=g$\hat{Q}^+\hat{Q}$, gdzie g jest stałą sprzężenia, a operator jednocząstkowy $\hat{Q}$ ma postać:

$$\hat{Q} = a^+_{b\uparrow}a_{a\uparrow} + a^+_{b\downarrow}a_{a\downarrow}.$$

(a) Znaleźć dokładne stany własne i energie własne układu.

(b) Narysować widmo układu w funkcji stałej sprzężenia g.

(c) Podać rozkład operatora oddziaływania $\hat{V}_Q$ na część jednociałową i dwuciałową.

(d) **Problem dla chętnych:** Rozwiązać równania Hartree'ego-Focka i znaleźć energię Hartree'ego-Focka w funkcji stałej sprzężenia.

Zadanie 8c

Rozważyć powyższy układ dwu elektronów z oddziaływaniem $\hat{V}_P$=G$\hat{P}^+\hat{P}$, gdzie G jest stałą sprzężenia, a operator anihilacji pary P ma postać:

$$\hat{P} = a_{a\downarrow}a_{a\uparrow} + a_{b\downarrow}a_{b\uparrow}.$$

(a) Znaleźć dokładne stany własne i energie własne układu.

(b) Narysować widmo układu w funkcji stałej sprzężenia G.

(c) Obliczyć poprawki do energii stanu podstawowego odpowiadające wszystkim diagramom Goldstone'a do drugiego rzędu włącznie. Wyniki porównać z rozwinięciem dokładnej energii stanu podstawowego do drugiego rzędu w stałej sprzężenia.

Egzamin poprawkowy pisemny
Termin oddania: 11 kwietnia 2002, godz. 12:00
Mechanika Kwantowa IIB
Semestr zimowy 2001/2002

Rozwiązane i podpisane zadania należy oddać w zaklejonej kopercie razem z małą kopertą, na której należy wpisać datę kiedy egzamin był pisany oraz godzinę rozpoczęcia i zakończenia (hh:mm).

Rozważyć układ N bozonów obsadzających stany jednocząstkowe tworzące multiplet o całkowitym momencie pędu j=1 i rzutach m=−1, 0 i 1, którego Hamiltonian ma postać:

$$H = \epsilon J_0 + G J_+ J_-,$$

gdzie ϵ i G są stałymi ujemnymi, ϵ<0 i G< 0, a J_0 i $J_\pm$ są składowymi całkowitego momentu pędu układu wyrażającymi się przez składowe kartezjańskie J_x, J_y i J_z w standardowy sposób:

$$J_0 = J_z \qquad , \qquad J_\pm = J_x \pm i J_y.$$

Zadanie 9a

(a) Znaleźć macierzową reprezentację wszystkich składowych operatora momentu pędu w przestrzeni jednocząstkowej.

(b) Znaleźć wszystkie składowe operatora momentu pędu w reprezentacji II kwantyzacji.

(c) Podać wszystkie stany bazy przestrzeni N-bozonowej w reprezentacji II kwantyzacji.

(d) Znaleźć wymiar przestrzeni N-bozonowej.

(e) Znaleźć w przestrzeni N-bozonowej wszystkie możliwe wartości całkowitego momentu pędu oraz ich krotności.

(f) Sprawdzić, że suma iloczynów krotności i wymiarów multipletów o zadanych całkowitych momentach pędu jest równa wymiarowi przestrzeni N-bozonowj.

Zadanie 9b

(a) Posługując się własnościami operatorów momentu pędu znaleźć wszystkie dokładne energie własne układu N-bozonów.

(b) Znaleźć energię stanu podstawowego dla wszystkich (ujemnych) wartości obydwu stałych ϵ i G.

(c) Dla jakich wartości stałych ϵ i G stan podstawowy będzie kondensatem?

Zadanie 9c

(a) Przedstawić Hamiltonian układu w postaci sumy operatora jednociałowego H_0 i oddziaływania dwuciałowego V, czyli $H = H_0 + V$.

(b) Obliczyć hamiltonian Hartree dla układu N-bozonowego.

(c) Korzystając z faktu, że oddziaływanie dwuciałowe V jest separowalne, przedstawić hamiltonian Hartree w zależności od średniej wartości operatora $Q = \langle J_- \rangle$ w stanie Hartree i napisać dla tej średniej wartości warunek samozgodności.

(d) Korzystając z faktu, że potencjał chemiczny μ jest najmniejszą wartością własną hamiltonianu Hartree, znaleźć Q jako funkcję potencjału chemicznego μ. Dla jakich wartości stałych ϵ i G średnia Q może przybierać wartości niezerowe?

(e) Rozwiązać warunek samozgodności.

(f) Znaleźć średnie liczby cząstek w stanach o $m = -1$, 0 i 1, oraz średnią całkowitą liczbę cząstek N, jako funkcje potencjału chemicznego.

(g) Znaleźć energię Hartree jako funkcję potencjału chemicznego.

(h) Dla jakich wartości stosunku $y = \epsilon/G$ energia Hartree jest równa energii stanu podstawowego układu otrzymanej przez zaniedbanie oddziaływania dwuciałowego V.

(i) **Problem dla chętnych:** Dla zadanego stosunku $y = \epsilon/G$ znaleźć numerycznie energię Hartree jako funkcję liczby bozonów N i porównać z dokładną energią stanu podstawowego.