Uniwersytet Warszawski
Wydział Fizyki
Instytut Fizyki Teoretycznej

Multipole w teoriach typu Kaluzy-Kleina

Ewa Czuchry

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem

Prof. dr. hab. Wojciecha Kopczyńskiego

Warszawa 1997

Streszczenie

Celem tej pracy jest zbadanie równań ruchu w teoriach typu Kaluzy-Kleina. Przyjmując założenie, że podstawowymi obiektami materii nie są ciała punktowe ale wielowymiarowe, badamy wpływ tej rozciągłości na równania ruchu. Do wyznaczenia równań ruchu stosowana jest metoda opisu rozciągłości ciała za pomocą tzw. momentów multipolowych. Za pomocą tego samego formalizmu badana jest także relacja między rozciągłością w wewnętrznych wymiarach a pojęciem uogólnionego ładunku.

Spis rzeczy

Wstęp

Teorie typu Kaluzy–Kleina są to teorie zakładające wielowymiarową strukturę czasoprzestrzeni tak, że oprócz trzech zwykłych wymiarów przestrzennych i jednego czasowego istnieją dodatkowe wymiary typu przestrzennego. Wyprowadzając w takiej wielowymiarowej czasoprzestrzeni równania pola otrzymuje się równania dla pola grawitacyjnego w czterowymiarowej przestrzeni, oraz równania dla pól z cechowaniem w dodatkowych wymiarach. Interpretujemy wtedy odpowiednie składowe tensora metrycznego jako składowe czterowymiarowego tensora pola grawitacyjnego, a pozostałe składowe jako dodatkowe pola. Tak więc w pięciowymiarowej, tradycyjnej teorii Kaluzy–Kleina — Kaluza (1921), Klein (1926) — otrzymujemy czterowymiarowe równiania Einsteina dla pola grawitacyjnego i równania Maxwella dla pola elektromagnetycznego opisywane przez potencjał tego pola zidentyfikowany z piątymi składowymi 5-wymiarowego tensora metrycznego.

Dodatkowe wymiary są dla nas nie tylko sztucznie wprowadzonym obiektem matematycznym, ale interpretujemy je jako istniejące fizycznie, nieobserwowalne z powodu ich małości — rzędu 10^{-33} cm — wymiary.

Pojawia się wtedy pytanie, co mogło by spowodować wyróżnienie trzech wymiarów przestrzennych spośród pozostałych tak, że ich rozmiary są wiele rzędów wielkości większe niż rozmiary przestrzeni *wewnętrznej*.

Jedną z możliwych odpowiedzi daje szczególna, niepunktowa forma materii (Kopczyński (1987a, 1987b)). Jeśli podstawowymi składnikami materii byłyby nie punkty materialne ale obiekty więcej wymiarowe: struny, membrany itd. — ogólnie obiekty $k{-}1$-wymiarowe poruszające się w m-wymiarowej czasoprzestrzeni — możemy wtedy otrzymać odpowiednie rozwiązanie kosmologiczne, w którym ewolucja przestrzeni *zewnętrznej* oraz przestrzeni *wewnętrznej* byłaby różna. Pierwsza by w tym modelu ekspandowała, a druga kurczyła sie do rozmiarów kilkadziesiąt rzędów wielkości mniejszych (Kopczyński 1987b) .

Rozciągłość materii w dodatkowych wymiarach może mieć aspekty nie tylko kosmologiczne, ale także modyfikować równania ruchu, powodując odchylenie od ruchu po liniach geodezyjnych. Można więc wyznaczyć równania ruchu zakładając niepunktową formę materii i porównać je z równaniami geodezyjnych.

Wyznaczenie równań ruchu w ogólnej teorii względności, ze względu na jej nieliniowość, nie jest zagadnieniem trywialnym. Do rozwiązania tego problemu potrzebna jest znajomość zarówno metryki zewnętrznej, w której porusza się ciało, jak i pola grawitacyjnego wytwarzanego w tej samej chwili przez to ciało.

Pewnym uproszczeniem może być założenie, że rozmiary poruszającego się ciała są bardzo małe tak, że jego wpływ na zewnętrzne pole można uznać za zaniedbywalnie mały. Przybliżenie to można więc stosować w przypadku ciała o rozmiarach takich, jak rozmiary dodatkowych wymiarów przestrzennych.

Następnym przybliżeniem opisu danego ciała jest jego charakterystyka za pomocą momentów multipolowych tensora energii-pędu, gdzie tylko najbardziej istotne momenty są brane pod uwage. Najprostszym przypadkiem cząstki multipolowej jest punktowe ciało próbne. Równania ruchu czastki próbnej były wyprowadzone z równań pola grawitacyjnego przez Infelda i Schilda (1949). Ogólna metoda wyprowadzania równań ruchu w liniowym przybliżeniu pola grawitacyjnego została podana przez Mathissona (1937). Znacznie mniej ogólną (niekowariantną) metodę podał Papapetrou (1951) dla ogólnej teorii względności. Tulczyjew (1959) rozwinął teorię Mathissona w zmodyfikowanej i uproszczonej formie, opisując ciało nie przez osobliwość w zaburzeniu liniowym ale przez osobliwy tensor energii-pędu i potem stosując równanie zachowania energii-pędu. Procedura ta była jednak wciąż niewspółzmiennicza.

Dixon (1964) podał wyprowadzenie równań ruchu dla ciał rozciągłych w kowariantnej postaci, na razie w przybliżeniu dipolowym. Metoda ta została uogólniona na wyższe momenty multipolowe i podana w bardziej ogólnej postaci (Dixon 1970a, 1970*b*, 1974).

Celem naszej pracy jest zbadanie równań ruchu w teoriach typu Kaluzy-Kleina. Przyjmując założenie o rozciągłości ciał w dodatkowych wymiarach zbadamy jej wpływ na równania ruchu. Do wyznaczenia równań ruchu zastosujemy metodę opisu rozciągłości ciała za pomocą momentów multipolowych. Za pomocą tego samego formalizmu zbadamy także relację między rozciągłością w wewnętrznych wymiarach a pojęciem uogólnionego ładunku.

Struktura danej pracy jest następująca. W rozdziale 1. wprowadzimy parę użytecznych pojęć matematycznych dotyczących funkcji od dwóch punktów, przede wszystkim wielkości bitensorowych. Opis ciał rozciągłych przy użyciu formalizmu momentów multipolowych jest podany w rozdziale 2. W rozdziale 3. określimy dokładnie problem, który chcemy rozwiązać oraz podstawowe założenia. W częściach 3.1 i 3.2 wyprowadzone są równania ruchu w przybliżeniu dipolowym i multipolowym. W rozdziale 4. zastosujemy poprzednie ogólne rozwiązania do szczególnego przypadku pięciowymiarowej stacjonarnej metryki sferycznie symetrycznej w wymiarach zewnętrznych oraz przyjrzymy sie ich fizycznej interpretacji.

W drugiej części pracy zbadamy pojęcie uogólnionego ładunku w teoriach typu Kaluzy–Kleina — rozdział 5. — i zastanowimy się nad jego definicją dla obiektów rozciągłych tak, żeby uzyskać odpowiednie prawa zachowania — rozdział 6.

Równania ruchu obiektów wielomiarowych

1. Narzędzia matematyczne

Do dalszych obliczeń będą nam potrzebne pewne narzędzia matematyczne, w szczególności wielkości bitensorowe, tzn. wielkości tensorowe zależne od dwóch punktów przestrzeni.

Niech x_1, x_2 będą dwoma dowolnymi punktami czasoprzestrzeni. Ogólnie istnieje pewna liczba linii geodezyjnych łączących te punkty. Niech $x^\alpha(u)$ będzie postacią parametryczną jednej z nich, a u parametrem afinicznym takim, że $x(u_1)=x_1$ i $x(u_2)=x_2$. Możemy wtedy zdefiniować biskalarną funkcję $\sigma(x_1, x_2)$, zwaną *funkcją świata*, jako:

$$\sigma(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(u_2-u_1)\int_{u_1}^{u_2} g_{\alpha\beta}(x(u))\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u\ . \tag{1.1}$$

Wyrażenie to jest niezależne od wyboru parametru afinicznego u, oraz może ogólnie przybierać wiele wartości, każda z nich odpowiadająca jednej z linii geodezyjnych łączących te punkty. Dla dostatecznie bliskich x_1 i x_2 wyrażenie to jest jednoznacznie określone.

Rozważmy teraz podstawowe własności biskalarnej funkcji świata σ. Całka występująca w wyrażeniu (1.1) przyjmuje wartość stacjonarną — to znaczy, rozważając tę wielkość za pomocą rachunku wariacyjnego: jeśli $x(u)$ jest linią geodezyjną, to warunek $\delta\sigma = 0$ dla dowolnej wariacji $\delta x(u)$ wzdłuż tej linii zostawia punkty końcowe ustalone, czyli $\delta x(u_1) = \delta x(u_2) = 0$.

W przypadku, gdy wariacja $\delta x(u)$ jest wzięta wzdłuż drogi całkowania — punkty końcowe nie są wtedy stałe: $\delta x(u_1) \neq 0$ i $\delta x(u_1) \neq 0$ — zmiana wartości σ jest dana przez:

$$\begin{gathered}\delta\sigma = (u_2-u_1)\ g_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta\delta x^\alpha\Big|_{u_1}^{u_2}\ ,\\ \text{gdzie}\quad \dot{x}^\alpha = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u}\ ,\end{gathered} \tag{1.2}$$

Mamy też z samego pojęcia wariacji funkcji dwóch punktów, że:

$$\delta\sigma = \frac{\partial\sigma}{\partial x_1^\alpha}\delta x_1^\alpha + \frac{\partial\sigma}{\partial x_2^\alpha}\delta x_2^\alpha\ . \tag{1.3}$$

Z powyższych równań wynikają wyrażenia na pochodne cząstkowe funkcji świata:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma}{\partial x_1^\alpha} &= -(u_2-u_1)g_{\alpha\beta}(x_1)\dot{x}^\beta(u_1)\ ,\\ \frac{\partial\sigma}{\partial x_2^\alpha} &= (u_2-u_1)g_{\alpha\beta}(x_2)\dot{x}^\beta(u_2)\ .\end{aligned} \tag{1.4}$$

Przyjmując, że $u_1 = 0$ oraz $u_2 = u$ i nazywając punkt x_1 punktem z oraz $x_2 = x$ a także przyjmując konwencję oznaczania składowych w punkcie z greckimi literami $\kappa, \lambda, \ldots$ a w punkcie x literami $\alpha, \beta, \ldots$ możemy napisać powyższe wyrażenia w prostszej postaci:

$$\begin{aligned} \sigma^\kappa &= -u\dot{x}^\kappa \ , \\ \sigma^\alpha &= u\dot{x}^\alpha \ , \end{aligned} \tag{1.5}$$

gdzie przyjęto oznaczenie:

$$\sigma_\kappa \equiv \left.\frac{\partial\sigma}{\partial x^\kappa}\right|_{u=0} \tag{1.6}$$

i analogicznie dla σ_α. Widzimy więc, że $-\sigma^\kappa(x,z)$ jest to wektor w z styczny do geodezyjnej łączącej punkty z i x, o długości równej długości tej geodezyjnej.

Będziemy też oznaczać różniczkę kowariantną funkcji świata i jej pochodnych przez odpowiednie wskaźniki, np:

$$\sigma_{\alpha\beta\kappa}(x,z) = \nabla_\kappa \nabla_{\beta\alpha}\sigma(x,z) \ . \tag{1.7}$$

Rozważmy teraz dowolne dwupunktowe pole tensorowe $t^\lambda_{\ \mu}(z,x)$ mające skalarny charakter w x.

Za pomocą wektora

$$X^\kappa \equiv -\sigma^\kappa(z,x) \tag{1.8}$$

możemy traktować $t^\lambda_{\ \mu}$ jako funkcję z^κ i X^κ zamiast z^κ i x^α. Wtedy pochodne $t^\lambda_{\ \mu}$ mogą być ciągle wyrażone przez $\nabla_\kappa t^\lambda_{\ \mu}$ i $\nabla_\alpha t^\lambda_{\ \mu}$, ale nie są to już operatory zbyt wygodne do wykorzystania.

Zdefinujmy teraz nowe operatory różniczkowe wyrażone w zmiennych z^κ i X^κ.

Pierwszy z nich:

$$\nabla_{*\kappa} \equiv \frac{\partial}{\partial X^\kappa} \tag{1.9}$$

można nazwać *różniczką wertykalną.*

Przy definiowaniu pierwszego operatora mieliśmy ustalony punkt z i zmienialiśmy X^κ. Definiując drugi operator różniczkowy będziemy chcieli raczej zmieniać punkt z trzymając ustalony wektor X^κ. Ponieważ X^κ ma punkt zaczepienia w z, nie jest to dokładnie możliwe, więc zamiast tego będziemy przenosić równolegle X^κ przy zmianie z.

Niech z porusza się wzdłuż krzywej o postaci parametrycznej $z(u)$ od punktu początkowego $u = 0$. Wzdłuż tej krzywej zdefiniujemy pole wektorowe $X^\kappa(u)$ przez przeniesienie równoległe wektora danego w $z(0)$. Wtedy $t^\lambda_{\ \mu}(z(u), X(u))$ jest dobrze zdefiniowanym polem wektorowym wzdłuż tej krzywej oraz:

$$\frac{\delta}{\mathrm{d}u} t^\lambda_{\ \mu} = \frac{\mathrm{d}z^\kappa}{\mathrm{d}u} \nabla_{\kappa *} t^\lambda_{\ \mu} \tag{1.10}$$

gdzie przez $\dfrac{\delta}{\mathrm{d}u}$ oznaczyliśmy różniczkę kowariantną wzdłuż geodezyjnej $z(u)$ a *różniczka horyzontalna* $\nabla_{\kappa *}$ jest zdefiniowana przez:

$$\nabla_{\kappa *} t^{\lambda}{}_{\mu} = \{\frac{\partial}{\partial z^{\kappa}} t^{\lambda}{}_{\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\kappa\nu} t^{\nu}{}_{\mu} - \Gamma^{\nu}_{\kappa\mu} t^{\lambda}{}_{\nu}\} - \Gamma^{\nu}_{\kappa\rho} X^{\rho} \frac{\partial}{\partial X^{\nu}} t^{\lambda}{}_{\mu} \,. \tag{1.11}$$

Wyrażenie w nawiasach klamrowych jest zwykłym wyrażeniem na pochodną kowariantną, gdy nie ma zależności od X^{κ}.

Potrzebna nam będzie jeszcze jedna wielkość. W czasoprzestrzeni ogólnego typu, albo w krzywoliniowym układzie współrzędnych w płaskiej czasoprzestrzeni, procedura całkowania składowych pola wektorowego nie jest procedurą współzmienniczą. Najprostszą metodą, aby uniknąć pojawiających się przy tym trudności, jest wprowadzenie nieosobliwego pola bitensorowego $H^{\lambda}_{\alpha}(z,x)$, które może byc użyte do przenoszenia przez obszar całkowania składowych dowolnego pola wektorowego $f^{\alpha}(x)$ przed wykonaniem całkowania do jednego ustalonego punktu z. W zasadzie H^{λ}_{α} może być wybrane dowolnie, zależnie od tego, do jakich celów jest nam ta wielkość potrzebna. Dwiema narzucającymi się wielkościami są bitensor propagacji równoległej $\bar{g}^{\lambda}_{\alpha}$ i różniczka drugiego rzędu biskalarnej funkcji świata $\sigma^{\lambda}_{\alpha}$. W dalszych rozważaniach będziemy się posługiwać jedynie ogólnym pojęciem $H^{\lambda}_{\alpha}(z,x)$.

2. Ciała rozciągłe w ujęciu klasycznym

2.1 Opis ciał rozciągłych

Określenie ogólnych własności charakteryzujących ciała rozciągłe, takich jak pęd p^{α} i moment pędu $S^{\alpha\beta}$ wymaga wyboru pewnej linii świata l, leżącej we wnętrzu tuby świata ciała i reprezentującej ruch ciała, a także pewnego pola wektorowego n^{λ} czasowych i unormowanych wektorów na l (Dixon 1964, 1970a, 1970*b*, 1974). Opisujemy l parametrycznie jako $z(s)$, gdzie s — parametr afiniczny.

Za pomocą tych wielkości chcemy uzyskać jednoznaczny opis ruchu ciała. Musimy więc traktować linię świata l oraz pole wektorowe na niej n^{λ} jako funkcje tensora energii-pędu ciała $T^{\alpha\beta}$, który zawiera pełne o nich informacje.

Najpierw zdefiniujmy niezależnie pęd i moment pędu ciała jako:

$$p^{\kappa}(z,\Sigma) = \int_{\Sigma} H_{\alpha}^{\kappa} T^{\alpha\beta} \mathrm{d}\Sigma_{\beta} \,, \tag{2.1}$$

$$S^{\kappa\lambda}(z,\Sigma) = \int_{\Sigma} H_{\alpha}^{[\kappa} \sigma^{\lambda]} T^{\alpha\beta} \mathrm{d}\Sigma_{\beta} \,, \tag{2.2}$$

gdzie Σ jest pewną hiperpowierzchnią typu przestrzennego przecinającą linię świata l w punkcie z.

Teraz dokonamy opisu ruchu ciała przez odpowiedni wybór linii świata centrum masy. Dokładne określenie linii świata centrum masy uzyskamy poprzez systematyczną redukcję dowolności wyboru z i Σ użytych w definicji pędu i momentu pędu, aż otrzymamy tylko jednoparametrową rodzinę krzywych.

Wybierzemy najpierw n^κ jako dowolny czasowy jednostkowy wektor w punkcie z. Możemy wtedy skonstruować hiperpowierzchnię $\Sigma(z,n)$ przechodzącą przez z i rozpiętą przez geodezyjne wychodzące z z i prostopadłe do n^κ. Otrzymamy wtedy gładką hiperpowierzchnię typu przestrzennego dobrze określoną w bliskim otoczeniu z.

Zakładając więc, że ciało jest odpowiednio małych rozmiarów oraz jego tuba świata zawiera $z(s)$ i jest najbliższym otoczeniem $z(s)$, możemy zdefiniować

$$p^\kappa(z,n) \equiv p^\kappa(z,\Sigma(z,n)) \; , \tag{2.3}$$

$$S^{\kappa\lambda}(z,n) \equiv S^{\kappa\lambda}(z,\Sigma(z,n)) \; . \tag{2.4}$$

Wtedy na linii świata l mamy dobrze określone pola tensorowe: n^κ, p^κ, $S^{\kappa\lambda}$.

Dalszym naturalnym posunięciem i analogicznym w podobnym sformułowaniu problemu w szczególnej teorii względności (Møller 1949, Pryce 1949) wydaje się być wybranie n^κ równoleglego do p^κ tak, że $\Sigma(z,n^\kappa)$ będzie chwilową przestrzenią obserwatora pozostającego w spoczynku względem danego ciała. Ponieważ jednak p^κ zależy samo w sobie od n^κ byłby to bardzo silny warunek na n^κ. Zależność p^κ od n^κ jest powiązana z natężeniem pola grawitacyjnego i znika w jego nieobecności.

Możemy więc założyć, że istnieje dokładnie jedno n^κ takie, że n^κ i p^κ są równoległe w przypadku, gdy pole grawitacyjne nie jest zbyt silne. Ogólną zależność między n^κ i p^κ podał Beiglböck (1967) — udowodnił on, że dla każdego punktu z w otoczeniu tuby świata danego ciała istnieje dokładnie jeden czasowy, jednostkowy wektor $n^\kappa(z)$ taki, że

$$n^{[\kappa}p^{\lambda]}(z,n) = 0 \; . \tag{2.5}$$

Możemy także wprowadzić uogólnienie newtonowskiego momentu dipolowego m^κ:

$$m^\kappa(z) = n_\lambda(z) S^{\kappa\lambda}(z) \; , \tag{2.6}$$

i dodajemy też warunek na linię świata l: chcemy, żeby dla wszystkich punktów na l znikał moment dipolowy $m^\kappa(z)$. Linię świata l tak zdefiniowaną możemy nazwać linią świata centrum masy ciała.

Warunek znikania momentu dipolowego na linii świata centrum masy został wprowadzony przez Beiglböcka (1967). Udowodnił on, że przy pewnych warunkach narzuconych na pole tensorowe $T^{\alpha\beta}(z)$ i własności topologiczne przestrzeni istnieje jednoznacznie wyznaczona linia l o postaci parametrycznej $z(s)$ taka, że w każdym jej punkcie:

$$n_\lambda(z) S^{\kappa\lambda}(z) = 0 \; . \tag{2.7}$$

Dokładny dowód tego twierdzenia oraz rozwiązanie zagadnienia wyboru linii świata centrum masy podał i rozwinął Shattner (1979a, 1979b).

Według poprzednich założeń możemy dalej przyjmować równoległość wektorów p^κ i n^κ i zamiast warunku (2.7) będziemy używać warunku:

$$p_\lambda(z)S^{\kappa\lambda}(z) = 0 \ , \tag{2.8}$$

który wyznacza nam jednoznacznie linię świata centrum masy.

Linia świata centrum masy opisuje kinematyczne własności danego ciała. Chcemy znaleźć też wielkości odpowiednie do dynamiczego opisu własności ciała.

Musimy więc znaleźć wielkości, które opisują ciało materialne i zewnętrzne pole niezależnie od siebie. Oddzielenie zmiennych materialnych i polowych w równaniu

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} \tag{2.9}$$

jest zagadnieniem nietrywialnym. Można spróbować rozwiązać ten problem wychodząc z zasady zachowania energii-pędu:

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \ . \tag{2.10}$$

To równanie nie nakłada żadnych ograniczeń na geometrię czasoprzestrzeni i wtedy wielkości geometryczne są określone niezależnie od obiektów materialnych obecnych w czasoprzestrzeni. Pozostaje problem, czy można znaleźć opis ciał materialnych niezależny od geometrii czasoprzestrzeni, w której się znajdują, czyli określić to, co zostaje z $T^{\alpha\beta}$ po usunięciu informacji zawartej w (2.9).

Rozważania zawarte w pracy Dixona (1974) prowadzą do zdefiniowania pewnej dystrybucji na wiązce stycznej do rozmaitości czasoprzestrzennej. Oznaczona jest ona przez $\hat{T}^{\alpha\beta}$ i nazwana szkieletem energii-pędu (*energy-momentum skeleton*).

Nałożone są na tę dystrybucję dwa równania więzów. Pierwsze z nich:

$$\nabla_{*\lambda}\hat{T}^{\kappa\lambda} = 0 \ , \tag{2.11}$$

jest motywowane przez (2.10). Ten warunek więzów ma podstawowe znaczenie dla dalszych rozważań. Zauważmy, że operator różniczkowy tu się pojawiający jest *niezależny od koneksji afinicznej.*

Drugi warunek jest typu algebraicznego:

$$(n_\kappa X^\kappa)X^{[\lambda}\hat{T}^{\mu][\nu}X^{\rho]} = 0 \ . \tag{2.12}$$

Ogranicza on osobliwość do hiperpowierzchni $n_\kappa X^\kappa = 0$.

Szkielet energii-pędu $\hat{T}^{\alpha\beta}$ jest powiązany z tensorem energii-pędu pewną zależnością funkcjonalną. Mając dany pęd p^α, moment-pędu $S^{\alpha\beta}$ oraz szkielet energii-pędu $\hat{T}^{\alpha\beta}$

mamy jednoznacznie wyznaczony przez tę zależność tensor energii-pędu $T^{\alpha\beta}$. Związek między tymi wielkościami oraz dowód jego jednoznaczności jest zawarty w pracy Dixona (1974).

Dalej będziemy operować pojęciem szkieletu energii-pędu — dla prostoty rozważań i w celu skupienia się na sprawach istotnych — chociaż nie jest to jeszcze wielkość dokładnie zbadana. Dlatego też będziemy posługiwać się raczej tylko jej ogólnymi własnościami niż wnikać w szczególną jej postać.

Możemy teraz spróbować opisać własności ciała za pomocą zbioru wielkości zwanych momentami multipolowymi, oddającymi w sposób przybliżony strukturę wewnętrzną ciała.

Korzystając z równania (2.11) można zdefiniować 2^n-polowy moment w punkcie $z(s)\in l$ jako:

$$I^{\kappa_1\cdots\kappa_n\lambda\mu}(z(s)) = \int X^{\kappa_1}\cdots X^{\kappa_n}\hat{T}^{\lambda\mu}(z,X)\,\mathrm{D}X\ . \tag{2.13}$$

Z postaci tego wzoru automatycznie wynikają własności symetrii:

$$I^{\kappa_1\cdots\kappa_n\lambda\mu} = I^{(\kappa_1\cdots\kappa_n)\lambda\mu} = I^{\kappa_1\cdots\kappa_n(\lambda\mu)}\ . \tag{2.14}$$

Z równania (2.11) oraz z definicji momentów multipolowych (2.13) wynika

$$\nabla_{*\nu}(X^{\kappa_1}\cdots X^{\kappa_n}X^{\lambda}\hat{T}^{\mu\nu}) = (n+1)X^{(\kappa_1}\cdots X^{\kappa_n}\hat{T}^{\lambda)\mu}\ , \tag{2.15}$$

co po wycałkowaniu po X daje:

$$I^{(\kappa_1\cdots\kappa_n\lambda)\mu} = 0\ . \tag{2.16}$$

Dla $n=0,1$ mamy więc z tych własności:

$$\begin{aligned} I^{\lambda\mu} &=0\ ,\\ I^{\kappa\lambda\mu} &=0\ , \end{aligned} \tag{2.17}$$

Wynika z tego, że $\hat{T}^{\kappa\lambda}$ zawiera tylko informację o momentach kwadrupolowych i wyższych.

Można zdefiniować niezależnie momenty monopolowy i dipolowy:

$$I^{\lambda\mu} =p^{(\lambda}v^{\mu)}\ , \tag{2.18}$$

$$I^{\kappa\lambda\mu} =S^{\kappa(\lambda}v^{\mu)}\ , \tag{2.19}$$

które przedstawiają w inny sposób informację zawartą w składowych pędu i momentu pędu ciała.

2.2 Równania ruchu w przybliżeniu multipolowym

Zdefiniujmy siłę F^{κ} i moment siły $L^{\kappa\lambda}$ działające na ciało w punkcie z jako:

$$F^{\kappa}(z) = \frac{\delta}{\mathrm{d}s} p^{\kappa} - \frac{1}{2} v^{\lambda} S^{\mu\nu} R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} \,, \tag{2.20}$$

$$L^{\kappa\lambda}(z) = \frac{\delta}{\mathrm{d}s} S^{\kappa\lambda} - 2p^{[\kappa} v^{\lambda]} \,. \tag{2.21}$$

Dodatkowe człony w tych równaniach pozwalają nam otrzymać precesję momentu pędu ciała, gdy nie ma żadnych zewnętrznych momentów sił (precesja Thomasa) bez wprowadzania jakichkolwiek pojęć w rodzaju „ukrytego momentu siły".

Siłę F^{κ} i moment siły $L^{\kappa\lambda}$ można wyrazić przez $\hat{T}^{\kappa l}$ w następujący sposób:

$$F_{\kappa}(z) = \frac{1}{2} \int_{T_z \mathcal{M}} \hat{T}^{\lambda\mu} \nabla_{\kappa *} G_{\lambda\mu} \, \mathrm{D}X \,, \tag{2.22}$$

$$L_{\kappa\lambda}(z) = 2 \int_{T_z \mathcal{M}} \hat{T}^{\mu\nu} G_{\mu\nu[\kappa} X_{\lambda]} \, \mathrm{D}X \,. \tag{2.23}$$

gdzie $T_z\mathcal{M}$ jest to przestrzeń styczna do rozmaitości czasoprzestrzennej $\mathcal{M}$, a:

$$\begin{aligned} G_{\kappa\lambda\mu} &\equiv \frac{1}{2} \nabla_{*\{\kappa} G_{\mu\nu\}} \,, \\ G_{\kappa\lambda} &\equiv H^{\alpha}_{\ \kappa} H^{\beta}_{\ \lambda} \sigma_{\alpha\beta} \,, \end{aligned} \tag{2.24}$$

oraz $H^{\alpha}_{\ \kappa}$ jest bitensorem transportu przez obszar całkowania opisanym w rozdziale 1.

Wprowadzenie pojęcia pola własnego ciała pozwala przedstawić całkowitą siłę i moment siły działające na ciało w postaci sumy dwóch wielkości.

Żeby to było możliwe, koniecznym jest, aby siła F_{κ} i moment siły $L_{\kappa\lambda}$ były liniowe w zmiennych polowych. Tak też jest: $L_{\kappa\lambda}$ jest liniowe w $G_{\kappa\lambda\mu}$, a F_{κ} jest liniowe w $E_{\kappa\lambda\mu}$ zdefiniowanym jako:

$$E_{\kappa\lambda\mu}(z, X) \equiv \nabla_{\kappa *} G_{\lambda\mu} \,. \tag{2.25}$$

Ponieważ chcemy związać pole własne z chwilowym stanem układu, powinniśmy rozważać równania (2.20) i (2.21) w ustalonym punkcie $z \in l$. Dzięki temu wielkości $E_{\kappa\lambda\mu}$ i $G_{\kappa\lambda\mu}$ będą zmiennymi niezależnymi, ponieważ $E_{\kappa\lambda\mu}$ zawiera pochodne względem z.

To pokazuje nam, że chwilowe pole własne ciała w $z \in l$ powinno składać się z pary funkcji $G^{(s)}_{\kappa\lambda}$ i $E^{(s)}_{\kappa\lambda\mu}$ zdefiniowanych na $T_z\mathcal{M}$ i związanych z $\hat{T}^{\lambda\mu}$.

Z tych wielkości konstruujemy pola różnicy między polem całkowitym i polem własnym:

$$G^{(d)}_{\kappa\lambda} \equiv G_{\kappa\lambda} - G^{(s)}_{\kappa\lambda} \,, \tag{2.26}$$

$$E^{(d)}_{\kappa\lambda\mu} \equiv E_{\kappa\lambda\mu} - E^{(s)}_{\kappa\lambda\mu} \,. \tag{2.27}$$

Wtedy możemy także wprowadzić pojęcia siły własnej:

$$F_{\kappa}^{(s)}(z(s)) = \frac{1}{2}\int_{T_z\mathcal{M}} \hat{T}^{\lambda\mu} E^{(s)}_{\kappa\lambda\mu} \mathrm{D}X \ , \tag{2.28}$$

oraz siły będącej różnicą siły całkowitej i własnej:

$$F_{\kappa}^{(d)}(z(s)) = \frac{1}{2}\int_{T_z\mathcal{M}} \hat{T}^{\lambda\mu} E^{(d)}_{\kappa\lambda\mu} \mathrm{D}X \ . \tag{2.29}$$

Spróbujmy obliczyć różnicową siłę i moment siły.

Możemy założyć, że pole różnicy zmienia się wolno wewnątrz ciała, co pozwoli nam przybliżyć je przez tylko parę wyrazów z rozwinięcia w szereg Taylora wokół punktu $X = 0$. Mamy więc:

$$E^{(d)}_{\kappa\lambda\mu}(z, X) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} X^{\nu_1} \cdots X^{\nu_n} f_{\nu_1\cdots\nu_n\kappa\lambda\mu}(z) \ , \tag{2.30}$$

gdzie

$$f_{\nu_1\cdots\nu_n\kappa\lambda\mu}(z) = \lim_{X\to 0} \nabla_{*\nu_1\cdots\nu_n} E^{(d)}_{\kappa\lambda\mu} \ , \tag{2.31}$$

oraz

$$\nabla_{*\nu_1\cdots\nu_n} \equiv \nabla_{*\nu_1} \cdots \nabla_{*\nu_n} \ . \tag{2.32}$$

Liczba członów szeregu w (2.30) jest skończona i na razie dowolnie określona.

Wstawiając to do (2.29) i (2.30) otrzymujemy:

$$F_{\kappa}^{(d)} = \frac{1}{2} \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n!} I^{\nu_1\cdots\nu_n\lambda\mu} f_{\nu_1\cdots\nu_n\kappa\lambda\mu} \ , \tag{2.33}$$

oraz odpowiednie równanie dla momentu siły różnicy:

$$L^{(d)}_{\kappa\lambda} = 2 \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} l_{\rho_1\cdots\rho_n\mu\nu[\kappa} I_{\lambda]}{}^{\rho_1\cdots\rho_n\mu\nu} \ , \tag{2.34}$$

gdzie

$$l_{\rho_1\cdots\rho_n\kappa\mu\nu} = \lim_{X\to 0} \nabla_{*\rho_1\cdots\rho_n} G^{(d)}_{\kappa\lambda\mu} \ . \tag{2.35}$$

W przybliżeniu ciała próbnego zaniedbujemy pole własne. Wtedy wyrażenia (2.33) oraz (2.34) są całkowitą siłą i momentem siły działającymi na ciało.

We współrzędnych normalnych wyrażenie

$$\lim_{X\to 0} \nabla_{*\rho_1\cdots\rho_n} G^{(d)}_{\kappa\lambda}(z,X) \tag{2.36}$$

jest wielkością tensorową w punkcie z, która redukuje się do pochodnej cząstkowej

$$\partial_{\rho_1\cdots\rho_n} g_{\kappa\lambda} \tag{2.37}$$

w dowolnym normalnym układzie współrzędnych o początku w punkcie z.

Pole tensorowe spełniające ten warunek nazywamy n-tym rozszerzeniem $g_{\lambda\mu}$ i będziemy je oznaczać przez $g_{\lambda\mu,\nu_1\ldots\nu_n}$. Dokładny opis tej wielkości jest podany w Dodatku A.

Otrzymujemy więc, że:

$$l_{\rho_1\cdots\rho_n\kappa\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\{\mu\kappa,\lambda\}\rho_1\cdots\rho_n} \ . \tag{2.38}$$

Chcemy zastosować tę samą procedurę do $f_{\nu_1\cdots\nu_n\kappa\lambda\mu}$. Zauważając, że $\nabla_{\kappa *}$ i $\nabla_{*\lambda}$ komutują, otrzymujemy:

$$f_{\nu_1\cdots\nu_n\kappa\lambda\mu} = \nabla_\kappa(\lim_{X\to 0} \nabla_{*\nu_1\cdots\nu_n} G_{\lambda\mu}) = \nabla_\kappa g_{\lambda\mu,\nu_1\cdots\nu_n} \ . \tag{2.39}$$

Wstawiając otrzymane wyrażenia na siłę i moment siły do równań (2.20) i (2.21) otrzymujemy równania ruchu w przybliżeniu 2^N-polowym:

$$\frac{\delta}{\mathrm{d}s} p_k = \frac{1}{2} v^\lambda S^{\mu\nu} R_{\kappa\lambda\mu\nu} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n!} I^{\nu_1\cdots\nu_n\lambda\mu} \nabla_\kappa g_{\lambda\mu,\nu_1\cdots\nu_n} \ , \tag{2.40}$$

$$\frac{\delta}{\mathrm{d}s} S^{\kappa\lambda} = 2p^{[\kappa} v^{\lambda]} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n!} g^{\sigma[\kappa} I^{\lambda]\rho_1\cdots\rho_n\mu\nu} g_{\{\sigma\nu,\mu\}\rho_1\cdots\rho_n} \ . \tag{2.41}$$

Zaniedbując człony kwadrupolowe i wyższe otrzymujemy równania Mathissona-Papapetreou (Mathisson 1937, Papapetrou 1951) :

$$\frac{\delta}{\mathrm{d}s} p^k = \frac{1}{2} v^\lambda S^{\mu\nu} R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} \ , \tag{2.42}$$

$$\frac{\delta}{\mathrm{d}s} S^{\kappa\lambda} = 2p^{[\kappa} v^{\lambda]} \ . \tag{2.43}$$

2.3 Stałe ruchu

Jeżeli czasoprzestrzeń posiada pewne symetrie, istnieją pola Killinga ξ takie, że

$$\pounds_{\xi} g_{\alpha\beta} = 0 , \tag{2.44}$$

czyli

$$\nabla_{\alpha}\xi_{\beta} + \nabla_{\beta}\xi_{\alpha} = 0 , \tag{2.45}$$

to z zasady zachowania tensora energii-pędu:

$$\nabla_{\beta} T^{\alpha\beta} = 0 , \tag{2.46}$$

można otrzymać wyrażenia na stałe ruchu:

$$p^{\kappa}\xi_{\kappa} + \frac{1}{2} S^{\kappa\lambda}\nabla_{[\kappa}\xi_{\lambda]} = \text{const.} \tag{2.47}$$

3. Równania ruchu w przestrzeni m-wymiarowej

Chcemy wyznaczyć równania ruchu $(k-1)$-wymiarowego ciała w m-wymiarowej czasoprzestrzeni $\mathcal{M}$. Zakładamy, że ma ona strukturę $\mathcal{M}_E \times \mathcal{M}_I$, a tensor metryczny ma sygnaturę $(+, -, ..., -)$. Wprowadzono oznaczenia:

$\mathcal{M}_E$ — $(m-k+1)$-wymiarowa (czaso)przestrzeń *zewnętrzna*,
$\mathcal{M}_I$ — $(k-1)$-wymiarowa przestrzeń *wewnętrzna*.

Metryka jest postaci:

$$\mathrm{d}s^2 = g^2(x^{\alpha})\mathrm{d}s_E^2 - f^2(x^{\alpha})\mathrm{d}s_I^2, \qquad \alpha = 0, 1, ..., m-1 , \tag{3.1}$$

gdzie

$$\mathrm{d}s_E^2 = h_{ab}(x^a)\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b; \qquad a,\ b = 0, 1, \ldots, m-k , \tag{3.2}$$

$$\mathrm{d}s_I^2 = h_{kl}(x^k)\mathrm{d}x^k\mathrm{d}x^l; \qquad k,\ l = m-k+1, \ldots, m-1 . \tag{3.3}$$

Wprowadzono konwencję oznaczania współrzędnych *zewnętrznych* początkowymi literami alfabetu łacińskiego — $a, b, c, \ldots$; współrzędnych *wewnętrznych* środkowymi — $k, l, m \ldots$.

Zakładamy, że rozmiary przestrzeni wewnętrznej są bardzo małe i metryka przestrzeni zewnętrznej nie zależy od współrzędnych wewnętrznych. Postulujemy ponadto istnienie wektorów ξ o składowych tylko wewnętrznych takich, że:

$$\pounds_{\xi} g_{ab} = 0 \ , \tag{3.4}$$

czyli zapisując to wyrażenie *explicite* otrzymujemy warunek:

$$\xi^l g_{ab,l} + g_{al}\xi^l_{,b} + g_{lb}\xi^l_{,a} = 0 \ . \tag{3.5}$$

Ale jak wynika z naszych założeń:

$$\xi^l_{,b} = 0, \quad \xi^l_{,a} = 0. \tag{3.6}$$

Stąd otrzymujemy warunki na pochodne cząstkowe składowych tensora metrycznego:

$$g_{ab,l} = 0 \tag{3.7}$$

oraz

$$g_{ab}(x^\alpha) \equiv g(x)h_{ab} = g_{ab}(x^a) \ . \tag{3.8}$$

Narzucając pewne symetrie na przestrzeń wewnętrzną — przez wybór ξ^l — można otrzymać następne warunki na $g_{\alpha\beta}$.

Zakładamy, że $f(x^\alpha) = f(x^a)$. Wynika to z postaci $\mathcal{M} = \mathcal{M}_E \times \mathcal{M}_I$, tzn. współrzędne z $\mathcal{M}_E$ mogą jedynie wprowadzać dodatkowy *czynnik skali* przy $\mathrm{d}s_I$, ale nie mogą zmieniać geometrii przestrzeni $\mathcal{M}_E$.

Wyrazy $g^2 \mathrm{d}s_E^2$ przedstawimy w postaci $g_{ab}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b$.

Metryka na $\mathcal{M}$ jest wtedy postaci:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ab}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b - f^2(x^a)\mathrm{d}s_I^2 \ . \tag{3.9}$$

Przestrzeń wewnętrzna $\mathcal{M}_I$ posiada symetrie związane z działaniem na nią pewnej grupy symetrii G. Związane jest z nimi istnienie pól Killinga o liczbie równej liczbie generatorów grupy G.

Ze względu na brak brzegu przestrzeni wewnętrznej nie można w pełni stosować twierdzenia Beiglböcka o jednoznaczności wyboru linii świata środka masy. Stąd, a także z powodu istnienia symetrii wewnętrznych możemy jedynie określić klasę równoważności linii świata. Punkty przestrzeni wewnętrznej x^k i $x^{k'}$ są związane relacją równoważności, jeśli leżą one na jednej orbicie działania grupy G: $[x^k]$. Linia świata centrum masy w przestrzeni zewnętrznej jest otrzymana przez przecięcie płachty świata centrum masy powierzchnią $x^k = \mathrm{const}$. A więc płachta świata centrum masy jest postaci $l \times \mathcal{M}_I$. Ze względu na zakładane symetrie linia świata nie powinna zależeć od konkretnego wyboru współrzędnych x^k.

Dlatego też używanie dalej współrzędnych v^α linii świata ma sens jedynie w odniesieniu do składowych zewnętrznych, składowe wewnętrzne mogą być wybrane dowolnie, w obliczeniach więc będziemy kłaść $v^k = 0$.

Narzucamy więc jedynie ograniczenia na składowe zewnętrzne pędu i momentu pędu; warunek Beiglböcka:

$$p_\alpha S^{\alpha\beta} = 0 \, , \tag{3.10}$$

przyjmuje wtedy postać

$$p_a S^{ab} = 0 \, , \tag{3.11}$$

Dla współrzędnych mieszanych mamy wynikające stąd ograniczenie:

$$p_k S^{ka} = 0 \tag{3.12}$$

W teorii 5-wymiarowej możemy stąd otrzymać warunek na składowe mieszane spinu:

$$S^{ka} = 0 \, . \tag{3.13}$$

Na składowe wewnętrzne pędu i momentu pędu nie nakładamy już żadnych warunków.

3.1 Przybliżenie dipolowe

Policzymy teraz równania ruchu w przybliżeniu dipolowym dla $k-1$-wymiarowego ciała.

Ponieważ człony dipolowe zawierają składowe tensora krzywizny $R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}$, wyznaczymy najpierw symbole Christoffela w powyższych współrzędnych :

$$\begin{aligned}
\Gamma^c_{ab} &= \frac{1}{2} g^{cd}(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}) \, , \\
\Gamma^k_{ab} &= 0 \, , \\
\Gamma^c_{kl} &= -\frac{1}{2} g^{cd} \partial_d g_{kl} \, , \\
\Gamma^k_{al} &= \frac{1}{2} g^{km} \partial_a g_{lm} \, , \\
\Gamma^c_{kb} &= 0 \, , \\
\Gamma^m_{kl} &= \frac{1}{2} g^{mn}(\partial_k g_{ln} + \partial_l g_{kn} - \partial_n g_{kl}) \, .
\end{aligned} \tag{3.14}$$

oraz składowe tensora krzywizny o wskaźnikach wewnętrznych i zewnętrznych:

$$
\begin{aligned}
R^{d}{}_{cba} &= \partial_b \Gamma^d_{ac} - \partial_a \Gamma^d_{bc} + \Gamma^e_{ac}\Gamma^d_{eb} - \Gamma^e_{bc}\Gamma^d_{ea} \, , \\
R^{l}{}_{kba} &= \frac{1}{2} g^l{}_k (\partial_b(\frac{1}{f^2}\partial_a f^2) - \partial_a(\frac{1}{f^2}\partial_b f^2)) + \frac{1}{4}\frac{1}{f^4} g^l{}_k \partial_a f^2 \partial_b f^2 + \\
&\quad - \frac{1}{4}\frac{1}{f^4} g^l{}_k \partial_a f^2 \partial_b f^2 = 0 \, , \\
R^{m}_{lka} &= \partial_a (\frac{h^{mn}}{f^2} f^2 (\partial_k h_{nl} + \partial_l h_{nk} - \partial_n h_{kl})) = 0 \, , \\
R^{k}{}_{cba} &= 0 \, , \\
R^{n}{}_{mlk} &= \partial_l \Gamma^n_{km} - \partial_k \Gamma^n_{lm} + \Gamma^p_{kl}\Gamma^n_{pm} - \Gamma^p_{lm}\Gamma^d_{pk} \, , \\
R^{l}{}_{bka} &= \frac{1}{4} g^l{}_k \frac{1}{f^4} \partial_a f^2 \partial_b f^2 - \frac{1}{2} g^l{}_k \frac{1}{f^2} \partial_a \partial_b f^2 + \frac{1}{2} g^l{}_k \frac{1}{f^2} \Gamma^c_{ab} \partial_c f^2 \, .
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Podstawiając wyznaczone elementy $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ do równania (2.42) otrzymujemy równania ewolucji wzdłuż linii centrum masy składowych pędu zewnętrznych p^a i wewnętrznych p^k:

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta}{\mathrm{d}s} p^a(z^a, [z^k]) &= \frac{1}{2} v^\beta S^{\gamma\delta} R^a{}_{\beta\gamma\delta} = \\
&= \frac{1}{2} v^b S^{cd} R^a{}_{bcd} + \frac{1}{2} v^k S^{cd} R^a{}_{kcd} + v^b S^{ck} R^a{}_{bck} + v^l S^{ck} R^a{}_{lck} + \\
&\qquad + v^b S^{kl} R^a{}_{bkl} + v^k S^{lm} v^l R^a{}_{klm} = \\
&= \frac{1}{2} v^b S^{cd} R^a{}_{bcd} + \frac{1}{2} v^l S^c_l g^{ad} (\frac{1}{4}\frac{1}{f^4} \partial_d f^2 \partial_c f^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{f^2} \partial_d \partial_c f^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{f^2} \Gamma^b_{dc} \partial_b f^2) \\
&= \frac{1}{2} v^b S^{cd} R^a{}_{bcd} \, ,
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta}{\mathrm{d}s} p^k(z^a, [z^k]) &= \frac{1}{2} v^\beta S^{\gamma\delta} R^a{}_{\beta\gamma\delta} = v^a S^{bl} R^k{}_{abl} + \frac{1}{2} v^l S^{mn} R^k{}_{lmn} = \\
&= \frac{1}{2} v^l S^{mn} R^k{}_{lmn} - v^a S^{bk} (\frac{1}{4}\frac{1}{f^4} \partial_a f^2 \partial_b f^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{f^2} \partial_b \partial_a f^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{f^2} \Gamma^c_{ba} \partial_c f^2) \\
&= - v^a S^{bk} (\frac{1}{4}\frac{1}{f^4} \partial_a f^2 \partial_b f^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{f^2} \partial_b \partial_a f^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{f^2} \Gamma^c_{ba} \partial_c f^2) \, .
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Drugie z równań ruchu (2.43) pozostaje bez zmian:

$$
\frac{\delta S^{\kappa\lambda}}{\mathrm{d}s} = 2 p^{[\kappa} v^{\lambda]} \tag{3.18}
$$

czyli narzucenie odpowiednich warunków na metrykę nie zmienia jego postaci.

Składowe wewnętrzne pędu p^k odpowiadają uogólnionym ładunkom cząstek, prawo zachowania ładunku wymaga więc, żeby $\frac{\delta p^k}{\mathrm{d}s} = 0$. W przestrzeni 5-wymiarowej, z jednym dodatkowym wymiarem przestrzennym, zachodzi tożsamościowo $S^{b4} = 0$, tzn. znikają składowe mieszane tensora spinu. Wtedy mamy też $\frac{\delta p^4}{\mathrm{d}s} = 0$, co odpowiada zachowaniu ładunku elektrycznego w przybliżeniu dipolowym. Aby uogólniony ładunek był zachowany także w więcej wymiarowej przestrzeni potrzebne będzie przyjęcie dodatkowych założeń.

3.2 Przybliżenie multipolowe

Chcemy teraz rozważyć równania ruchu w przybliżeniu lepszym niż dipolowe. Postać równań ruchu jest dana wzorami (2.40) i (2.41); pozostaje nam oszacować momenty multipolowe korzystając z założonej małości dodatkowych wymiarów.

Moment 2^n-polowy wynosi:

$$I^{\kappa_1\cdots\kappa_n\lambda\mu}(z(s)) = \int_{T_z\mathcal{M}} X^{\kappa_1}\cdots X^{\kappa_n}\hat{T}^{\lambda\mu}(z,x)\,\mathrm{D}X\,. \tag{3.19}$$

Ponieważ według wcześniejszych założeń tensor metryczny $g_{\alpha\beta}$ jest macierzą blokowo-diagonalną, możemy przedstawić jego wyznacznik w postaci:

$$\det g_{\alpha\beta} = \det g_{ab}\cdot\det g_{kl} = g_E\cdot g_I\,. \tag{3.20}$$

Przyjmując, że cała przestrzeń wewnętrzna jest orbitą działania grupy symetrii mamy:

$$\hat{T}(z,X^a,X^k) = \hat{T}(z,X^a)\,, \tag{3.21}$$

Możemy więc rozseparować całkę w wyrażeniu (3.19):

$$\begin{aligned} I^{\kappa_1\cdots\kappa_n\lambda\mu}(z(s)) = &\left(\int_{T_z\mathcal{M}_E}\mathrm{D}X_E\sqrt{-g_E(z^a)}X^{\kappa_E^{(1)}}\cdots X^{\kappa_E^{(l)}}\hat{T}^{\lambda\mu}\right)\cdot\\ &\cdot\left(\int_{T_z\mathcal{M}_I}\mathrm{D}X_I\sqrt{g_I([z^k])}X^{\kappa_I^{(l+1)}}\cdots X^{\kappa_I^{(n)}}\right)\,. \end{aligned} \tag{3.23}$$

W zależności od charakteru składowych $\lambda\mu$ będziemy mieli do czynienia z różnymi postaciami wyrażeń na momenty multipolowe. Rozpatrzmy więc przypadki:

- λ,μ są składowymi zewnętrznymi, czyli a, b,
- λ,μ są składowymi mieszanymi a, k,
- λ,μ są składowymi wewnętrznymi.

W przypadku pierwszym mamy więc

$$
\begin{aligned}
I^{cd\cdots klab}(z^a,[z^k]) = &\left(\int_{T_z\mathcal{M}_E} \mathrm{D}X_E\sqrt{-g_E(z^a)}X^c\cdots X^d\hat{T}^{ab}\right)\cdot \\
&\cdot\left(\int_{T_z\mathcal{M}_E} \mathrm{D}X_I\sqrt{g_I([z^k])}X^k\cdots X^l\right) ,
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

czyli „zewnętrzny” moment $I_E^{c\cdots dab}$ jest dodatkowo wymnożony przez stałą $\int \mathrm{D}X_I\sqrt{g_I}X^k\cdots X^l$.

W pozostałych przypadkach nie ma tak jednoznacznej interpretacji otrzymanych członów multipolowych i należy się zastanowić nad interpretacją całki:

$$
\int_{T_z\mathcal{M}_E} \mathrm{D}X_E\sqrt{-g_E}X^{\kappa_E^{(1)}}\cdots X^{\kappa_E^{(l)}}\hat{T}^{kl} .
\tag{3.25}
$$

występującej w wyrażeniu:

$$
\begin{aligned}
I^{\kappa_1\cdots\kappa_n kl}(z(s)) = &\left(\int_{T_z\mathcal{M}_E} \mathrm{D}X_E\sqrt{-g_E}X^{\kappa_E^{(1)}}\cdots X^{\kappa_E^{(l)}}\hat{T}^{kl}\right)\cdot \\
&\cdot\left(\int_{T_z\mathcal{M}_I} \mathrm{D}X_I\sqrt{g_I}X^{\kappa_I^{(l+1)}}\cdots X^{\kappa_I^{(n)}}\right) .
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

Czyli właściwie trzeba się zastanowić, czym jest składowa wewnętrzna $\hat{T}^{kl}$. Dla tensora energii-pędu byłaby to zapewne gęstość energii, ale odjęliśmy od niego pewne wielkości, żeby otrzymać zawierający mniej informacji szkielet energii-pędu.

Drugą całkę można wyrazić w postaci:

$$
\int_{T_z\mathcal{M}_I} \mathrm{D}X_I\sqrt{g_I(z^a)}X^{k_1}\cdots X^{k_n} = \sqrt{g_I(z^a)}C^{k_1\ldots k_n} ,
\tag{3.27}
$$

gdzie $C^{k_1\ldots k_n}$ są współczynnikami liczbowymi zależnymi od geometrii przestrzeni wewnętrznej oraz wyboru konkretnych składowych $k_1,\ldots,k_n$; $g_I(z^a)$ jest wzięte na orbitach działania grupy symetrii odpowiadających danemu punktowi z^a. Możemy użyć tej wielkości, ponieważ ze względu na izometrie przestrzeni wewnętrznej $\pounds g_I = 0$ na danej orbicie.

Spróbujmy oszacować momenty multipolowe w przypadku, gdy ciało próbne jest punktowe w zewnętrznych wymiarach. Wtedy $I_E = 0$ i możemy zobaczyć, jaki wpływ na równania ruchu ma rozciągłość w wewnętrznych wymiarach.

Do równań ruchu mają jedynie wkład momenty o składowych:

$$
I^{m_1\cdots m_n\lambda\mu}(z(s)) = \int_{T_z\mathcal{M}_E} \mathrm{D}X_E\sqrt{-g_E}\hat{T}^{\lambda\mu}\int_{T_z\mathcal{M}_I} \mathrm{D}X_I\sqrt{g_I}X^{m_1}\cdots X^{m_n} .
\tag{3.28}
$$

Wtedy też można przedstawić $\hat{T}^{\lambda\mu}$ w postaci

$$\hat{T}^{\lambda\mu} = M\delta^{m-k}(X^a)\ , \tag{3.29}$$

czyli $\hat{T}^{\lambda\mu}$ jest skoncentrowane jedynie w punkcie $X^a = 0$ oraz na pewnym zwartym obszarze przestrzeni wewnętrznej. Wielkość M jest zaś stałą wymiarową. Mamy więc:

$$\int_{T_z\mathcal{M}_I} \mathrm{D}X_E\hat{T}^{\lambda\mu} = M\ , \tag{3.30}$$

oraz

$$I^{k_1\cdots k_n\lambda\mu}(z(s)) = M\sqrt{-g(z)}C^{k_1\cdots k_n}\ . \tag{3.31}$$

3.2.1 Równania ruchu dla składowych pędu

(a) Równania ruchu dla składowych zewnętrznych pędu są postaci:

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\mathrm{d}s}p_a(z^a,[z^k]) =& \frac{1}{2}v^bS^{cd}R_{abcd}+\\ &+\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n!}MR^{n+k-1}C^{k_1\cdots k_n\lambda\mu}\nabla_a g_{\lambda\mu,k_1\cdots k_n}(z^a,[z^k])\ ,\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}\text{oraz}\ \ \nabla_a g_{\lambda\mu,k_1\cdots k_n} =& \partial_a g_{\lambda\mu,k_1\cdots k_n}+\\ &-\Gamma^{\nu}_{a\lambda}g_{\nu\mu,k_1\cdots k_n}-\cdots-\Gamma^{\nu}_{ak_n}g_{\lambda\nu,k_1\cdots\mu}\end{aligned}$$

ale $\Gamma^c_{ak} = 0$ oraz $\Gamma^m_{ak} = \frac{1}{2}g^{mn}\partial_a g_{kn}$, mamy więc równanie postaci:

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\mathrm{d}s}p_a(z^a,[z^k]) =& \frac{1}{2}v^bS^{cd}R_{abcd}+\\ &+\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n!}MR^{n+k-1}C^{k_1\cdots k_n\lambda\mu}\Big(\partial_a g_{\lambda\mu,k_1\cdots k_n}+\\ &-\frac{1}{2}g^{mn}(\partial_a g_{\lambda n})g_{m\mu,k_1\cdots k_n}(z^a,[z^k])-\cdots+\\ &-\frac{1}{2}g^{mn}(\partial_a g_{k_n n})g_{\lambda\mu,k_1\cdots m}(z^a,[z^k])\Big)\ .\end{aligned} \tag{3.33}$$

(b) Równanie dla składowych wewnętrznych pędu.

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\mathrm{d}s}p_m(z^a,[z^k]) = v^a S_m{}^b\left(\frac{1}{4}\frac{1}{f^4}\partial_a f^2\partial_b f^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{f^2}\partial_b\partial_a f^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{f^2}\Gamma^c_{ba}\partial_c f^2\right) + \\ + \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n!}MR^{n+k-1}C^{k_1\cdots k_n\lambda\mu}\nabla_m g_{\lambda\mu,k_1\cdots k_n}(z^a,[z^k])\,.\end{aligned} \tag{3.34}$$

3.2.2 Równania ewolucji spinu

Zajmijmy się teraz równaniami dla spinu ciała. Równania ewolucji mają postać:

$$\frac{\delta}{\mathrm{d}s}S^{\kappa\lambda}(z^a,[z^k]) = 2p^{[\kappa}v^{\lambda]} + \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n!}g^{\sigma[\kappa}I^{\lambda]\rho_1\cdots\rho_n\mu\nu}g_{\{\sigma\nu,\mu\}\rho_1\cdots\rho_n}(z^a,[z^k])\,. \tag{3.35}$$

(a) Równania składowych zewnętrznych S^{ab}.
W tym przypadku $\kappa,\lambda = a,b$ i mamy dodatkowe człony postaci:

$$g^{c[a}I^{b]r_1\cdots r_n\lambda\mu}g_{\{cl,k\}r_1\cdots r_n} \tag{3.36}$$

oraz $g_{\{cl,k\}} = g_{cl,k} - g_{lk,c} + g_{kc,l}$, ale $I^{br_1\cdots r_n\mu\nu} = 0$, więc wszystkie dodatkowe człony znikają i pozostaje nam równanie postaci:

$$\frac{\delta}{\mathrm{d}s}S^{ab} = 2p^{[a}v^{b]}\,. \tag{3.37}$$

(b) Równania dla składowych mieszanych S^{am}.
Tutaj mamy dodatkowe człony postaci:

$$g^{ca}I^{mr_1\cdots r_n\lambda\mu}g_{\{cl,k\}r_1\cdots r_n} - g^{nm}I^{ar_1\cdots r_n\lambda\mu}g_{\{nl,k\}r_1\cdots r_n} \tag{3.38}$$

oraz $I^{ar_1\cdots r_n\mu\nu} = 0$, czyli mamy równanie postaci:

$$\frac{\delta}{\mathrm{d}s}S^{am} = -p^k v^a - \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n!}g^{ca}I^{mr_1\cdots r_n\lambda\mu}g_{\{cl,k\}r_1\cdots r_n}(z^a,[z^k])\,. \tag{3.39}$$

(c) Równanie dla składowych wewnętrznych S^{nm}
W tym przypadku mamy równanie postaci:

$$\frac{\delta}{\mathrm{d}s}S^{nm} = -\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n!}g^{pn}I^{mr_1\cdots r_n\lambda\mu}g_{\{\lambda\mu,p\}r_1\cdots r_n}(z^a,[z^k])\,. \tag{3.40}$$

3.3 Przybliżona postać momentów multipolowych

Oszacujemy teraz współczynniki $C^{k_1\cdots k_n}$ występujące w wyrażeniach na momenty multipolowe (3.31) zakładając szczególną postać przestrzeni wewnętrznej.

3.3.1 Sfera $k-1$-wymiarowa

Parametryzujemy sferę $k-1$-wymiarową o promieniu R kątami:

$$\underbrace{\phi, \theta, \dots, \chi}_{k-1}$$

takimi, że

$$\begin{aligned} 0 \leqslant &\phi \leqslant 2\pi \ , \\ 0 \leqslant &\theta \leqslant \pi \ , \\ &\vdots \\ 0 \leqslant &\chi \leqslant \pi \ . \end{aligned}$$

Współrzędne kartezjańskie x_i w k-wymiarowej przestrzeni wyrażają się przez te kąty następująco:

$$\begin{aligned} x_1 &= R\sin\chi \dots \sin\theta \sin\phi \ , \\ x_2 &= R\sin\chi \dots \sin\theta \cos\phi \ , \\ x_3 &= R\sin\chi \dots \cos\theta \ , \\ &\vdots \\ x_k &= R\cos\chi \ . \end{aligned} \tag{3.41}$$

Metryka jest postaci:

$$\mathrm{d}s^2 = R^2(\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi(\cdots(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2)\cdots)\ . \tag{3.42}$$

Elementy długości:

$$\begin{aligned} X^1 &= R\phi \ , \\ X^2 &= R\theta \ , \\ &\vdots \\ X^{k-1} &= R\chi \ . \end{aligned} \tag{3.43}$$

W równaniu (3.28) na momenty multipolowe mamy całkę po przestrzeni wewnętrznej postaci:

$$C^{k_1\cdots k_n} = \int_0^{2\pi} R\mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} R\mathrm{d}\theta \cdots \int_0^{\pi} R\mathrm{d}\chi \, (R^i\phi^i)(R^j\theta^j)\cdots(R^l\chi^l) \; = \tag{3.44}$$

gdzie $i + j + \cdots + l = n$

$$= \frac{2^{j+1}\pi^{n+k-1}}{(i+1)(j+1)\cdots(l+1)} R^{n+k-1} \tag{3.45}$$

co daje nam współczynniki $C^{k_1\cdots k_n}$ w wyrażeniach na momenty multipolowe.

4. Zastosowanie do 5-wymiarowej metryki sferycznie symetrycznej

Chcemy teraz zobaczyć, jak wyglądają nasze równania ewolucji pędu p^α i spinu $S^{\alpha\beta}$ wzdłuż linii świata centrum masy dla konkretnie wybranej metryki.

Ciekawym wyborem metryki i obiecującym nietrywialne rezultaty wydaje się być pięciowymiarowa metryka sferycznie symetryczna wytwarzana przez ciało rozciągłe w jednym wewnętrznym wymiarze i punktowe w wymiarach zewnętrznych, czyli pewnego rodzaju uogólnienie czterowymiarowej metryki Schwarzschilda.

Postać tej metryki przy założeniu istnienia pola Killinga ξ^μ w przestrzeni wewnętrznej oraz sferycznej symetrii i stacjonarności w wymiarach zewnętrzych została podana i wyprowadzona w pracy Chodosa i Dotweilera (1982). Zakładając najbardziej ogólną postać metryki we współrzędnych sferycznych r, θ, φ i dodatkowym wewnętrznym wymiarze x:

$$ds^2 = -e^\mu \mathrm{d}t^2 + \phi^2 \mathrm{d}x^2 + e^\beta[\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\, \mathrm{d}\varphi^2)] \,, \tag{4.1}$$

gdzie μ, β i ϕ zależą tylko od r, otrzymuje się uogólnienie izotropowej postaci metryki Schwarzschilda.

Korzystając z postaci metryki (4.1) i wymienionych wyżej założeń oraz z próżniowych równań Einsteina Chodos i Dotweiler (1982) otrzymują konkretne rozwiązanie. Współczynniki występujące we wzorze (4.1) wyrażają się następująco:

$$\phi^2 = \psi^p \,, \tag{4.2}$$

$$e^\mu = \psi^2/\phi^2 \,, \tag{4.3}$$

$$e^{\beta/2} = (1 - \frac{B^2}{r^2})/\psi \,, \tag{4.4}$$

gdzie

$$\psi = \left(\frac{r-B}{r+B}\right)^{\lambda/2B} \,, \tag{4.5}$$

gdzie p, λ i B są stałymi spełniającymi następujące zależności:

$$k \equiv \frac{4(4B^2 - \lambda^2)}{\lambda^2} \,, \tag{4.6}$$

$$p = 1 - \sqrt{1+k} \,. \tag{4.7}$$

Dla $\lambda = 2B$ metryka (4.1) jest po prostu metryką Schwarzschilda z dodatkowym członem $\mathrm{d}x^2$.

Znając składowe tensora metrycznego możemy z kolei wyznaczyć składowe tensora krzywizny. Dokładne obliczenia podane są w Dodatku B.

Podstawiając te wyrażenia do członów na równania ruchu dla momentu monopolowego i dipolowego otrzymujemy równania ruchu dla składowej zewnętrznej pędu. W przybliżeniu kwadrupolowym mamy:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\mathrm{d}s}p_0 =& \frac{1}{2}v^b S^{cd} R_{0bcd} + \\
& - \frac{1}{6} I^{4401} \frac{1}{2} e^{\mu} \mu' \left(-\frac{1}{2}(\partial_1 e^{-\beta})\partial_r \phi^2 - \frac{1}{2} e^{-\beta} \partial_{11}\phi^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{\phi^2}(\partial_1\phi^2)^2 e^{-\beta} \right) ,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\mathrm{d}s}p_1 =& \frac{1}{2}v^b S^{cd} R_{1bcd} + \\
& + \frac{1}{6} I^{4411} \partial_1 \left[\frac{1}{2}\beta' \left(\partial_1\phi^2\right) + \frac{1}{4}\frac{1}{\phi^2}\left(\partial_1\phi^2\right)^2 - \frac{1}{2}\partial_{11}\phi^2 \right] + \\
& - \frac{1}{3} I^{4411} \left(\frac{1}{2}\beta' + \frac{1}{\phi^2}\partial_1\phi^2 \right) \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\partial_1\phi^2\right) + \frac{1}{4}\frac{1}{\phi^2}\left(\partial_1\phi^2\right)^2 - \frac{1}{2}\partial_{11}\phi^2 \right] + \\
& - \frac{1}{6} I^{4433} \sin^2\theta \, \partial_1 \left[\partial_1\phi^2 (\frac{\beta'}{2}r^2 + r) \right] + \\
& + \frac{1}{6} I^{4433} \left(\frac{\beta'}{2} + \frac{1}{r} \right)^2 r^2 \sin^2\theta \, \partial_1\phi^2 - \frac{1}{12} I^{4422} \partial_1 \left[\left(\partial_1\phi^2\right) \left(\frac{\beta'}{2} r^2 + r \right) \right] + \\
& + \frac{1}{6} I^{4422} \left(\frac{\beta'}{2} + \frac{1}{r} \right)^2 r^2 \partial_1 \phi^2 ,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\mathrm{d}s}p_2 =& \frac{1}{2}v^b S^{cd} R_{2bcd} + \\
& + \frac{1}{6} I^{4433} \cos\theta \, \sin\theta \, r^2 \left(\frac{\beta'}{2} + \frac{1}{r} \right) \partial_1\phi^2 \\
& + \frac{1}{3} I^{4412} \left[\frac{1}{2}\beta' \left(\partial_1\phi^2\right) + \frac{1}{4}\frac{1}{\phi^2}\left(\partial_1\phi^2\right)^2 - \frac{1}{2}\partial_{11}\phi^2 \right] \cdot \\
& \cdot \left(\frac{\beta'}{2} r^2 + r \right) + \frac{1}{6} I^{4412} \left(\frac{\beta'}{2} + \frac{1}{r} \right)^2 r^2 \partial_1\phi^2 ,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\mathrm{d}s}p_3 =& \frac{1}{2}v^b S^{cd} R_{3bcd} + \\
& + \frac{1}{6} I^{4413} \left(\frac{\beta'}{2} + \frac{1}{r} \right) r^2 \sin^2\theta \, \left[\frac{1}{2}\beta' \left(\partial_1\phi^2\right) + \frac{1}{4}\frac{1}{\phi^2}\left(\partial_1\phi^2\right)^2 - \frac{1}{2}\partial_{11}\phi^2 + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}\partial_1\phi^2 \left(\frac{\beta'}{2} + \frac{1}{r} \right) \right] .
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Z samej już rozciągłości w wymiarach wewnętrznych oraz ich istnienia otrzymujemy klasyczną interpretację spinu cząstki. Jak wiemy z pracy Corinaldesi i Papapetrou (1951) sprzężenie spin-orbita powoduje dodatkowe poprawki do przesunięcia peryhelium planet w ruchu dookoła słońca wynikającego z zastosowania równań ogólnej teorii względności.

W danym przypadku mamy nie tylko człony dipolowe wynikające z istnienia spinu cząstki. Rozciągłość podstawowych obiektów materii wyraża się w obecności w równaniach ruchu członów kwadrupolowych i wyższych. To nam daje pewne rozróżnienie między ruchem cząstki punktowej ze spinem w 4-wymiarowej czasoprzestrzeni a struną — cząstka 1-wymiarową — poruszającą się w 5-wymiarowej czasoprzestrzeni.

Żeby rozwiązać powyższe równania, potrzebne są nam także równania ewolucji momentów kwadrupolowych wzdłuż linii świata centrum masy. Samo jednak wyprowadznie takich równań dla momentu monopolowego i dipolowego było bardzo poważnym problemem, a jak dotąd udane próby rozszerzenia tego zagadnienia na wyższe momenty nie zostały podjęte.

W obecnym stadium badań rozwiązanie powyższych rownań ruchu wydaje się zatem zagadanieniem wartym osobnych badań i osobnej pracy. Możemy jednak wyciągnąć pewne wnioski stosując analogię do ruchu ciał rozciągłych w zwykłej 4-wymiarowej czasoprzestrzeni. Moment kwadrupolowy ciała wyraża się na przykład wtedy w odbieganiu kształtu danego ciała od kulistego — powiedzmy, jak w przypadku Ziemi, spłaszczeniu na biegunach. Takie odkształcenie daje nam rotację osi obrotu ciała.

Tak więc w ruchu rozciągłych cząstek w 5-wymiarowej sferycznie symetrycznej przestrzeni pojawiają nam się dwa rodzaje dewiacji od ruchu po liniach geodezyjnych: poprawka do przesunięcia peryhelium i precesja spinu ciała.

Ładunek w teoriach typu Kaluzy–Kleina

5. Pojęcie ładunku uogólnionego

W klasycznych teoriach typu Kaluzy–Kleina (Kerner 1968) posługujemy się pojęciem wiązki głównej nad czterowymiarową czasoprzestrzenią V_4 z metryką g_{ij}. Grupa struktury jest pewną M-wymiarową grupą Liego G. Na wiązce tej możemy wprowadzić koneksję A będącą 1-formą o wartościach w algebrze Liego na danej rozmaitości. Krzywiznę utworzoną z tej koneksji, będącą jej różniczką kowariantną $\mathrm{D}A$, interpretujemy jako tensor pól Yanga–Millsa. Sama zaś koneksja jest uogólnionym potencjałem pola. Wiazkę traktujemy jako rozmaitość $M+4$-wymiarową i wprowadzamy na niej metrykę $g_{\alpha\beta}$.

Zakładamy, że metryka ta jest niezmienicza względem działania grupy G, to znaczy wprowadzamy w tej przestrzeni pola Killinga ξ^a_α określające izometrie przestrzeni, przez utożsamienie tych pól z generatorami grupy G.

Metrykę możemy zapisać wtedy w postaci:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{ij} + g_{ab}\xi^a_\alpha \xi^b_\beta A^\alpha_i A^\beta_j & g_{ab}\xi^a_\alpha A^\alpha_i \\ g_{ab}\xi^b_\beta A^\beta_j & g_{ab} \end{pmatrix} , \tag{5.1}$$

gdzie ξ^μ_a są to pola Killinga, wskaźnik a numeruje te pola przebiegając wartości od 1 do ilości generatorów grupy G, A^μ_a są zaś składowymi potencjału pól Yanga–Millsa.

Wprowadzając układ odniesienia, w którym:

$$\xi^a_\mu = \delta^a_\mu, \tag{5.2}$$

otrzymujemy postać metryki:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{ij} + g_{ab}A^a_i A^b_j & g_{ab}A^a_i \\ g_{ab}A^b_j & g_{ab} \end{pmatrix} , \tag{5.3}$$

gdzie g_{ab} jest to metryka na rozmaitości grupwej G.

Możemy teraz używając powyższych składowych tensora metrycznego wypisać równania linii geodezyjnych w przestrzeni $M+4$-wymiarowej, będące równaniami linii świata cząstki punktowej poruszającej się w tej przestrzeni.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} + 2g^{im}g_{ab}F^b_{jm}(A^a_\alpha \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s})\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} = 0 , \tag{5.4}$$

gdzie

$$F^b_{jm} \equiv \Gamma^b_{jm} = \partial_j A^b_m - \partial_m A^b_j + c^b_{de} A^d_j A^e_m \tag{5.5}$$

jest natężeniem pola Yanga–Millsa.

Zauważmy, że występujące w (5.4) wyrażenie $A^a_\alpha \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}$ jest stałe wzdłuż linii świata cząstki.

Wynika to z równania Killinga: $\xi_{(\mu;\nu)}=0$ i równania linii geodezyjnej $\nabla_p p = 0$ dla wektora stycznego $p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$ do geodezyjnej parametryzowanej s. Wtedy iloczyn skalarny $p \cdot \xi$ jest stały wzdłuż linii świata cząstki, ponieważ:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(p \cdot \xi) = (p^\mu p_\mu)_{;\nu} p^\nu = (p^\mu_{;} p^\nu)\xi_\mu + p^{(\mu} p^{\nu)} \xi_{[\mu;\nu]} = 0 \ . \tag{5.6}$$

czyli w naszym przypadku

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(A^a_\alpha \frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}s}) = 0 \ , \tag{5.7}$$

i iloczyn skalarny $A^a_\alpha \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}$ jest stałą ruchu.

Identyfikujemy tę wielkość z ładunkiem cząstki tak, że

$$Q^a = 2A^a_\alpha \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s} \ , \tag{5.8}$$

odpowiada uogólnionemu ładunkowi ciała podzielonemu przez jego masę.

Używając tego wyrażenia do równania ruchu (5.4) otrzymujemy:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} + g^{im} g_{ab} Q^a F^b_{jm} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} = 0 \ , \tag{5.8}$$

czyli jest to równanie ruchu cząstki o ładunku Q^a poruszającej się w polu grawitacyjnym i polu Yanga–Millsa.

W przypadku, gdy zewnętrzne pole Yanga–Millsa znika i $A^a_\alpha = 0$, wielkość $A^a_\alpha \frac{dx^\alpha}{ds}$ wychwytuje nam z dokładnością do stałej składową wewnętrzną prędkości, czyli na przykład dla równań Maxwella-Einsteina ładunek elektryczny jest proporcjonalny do wewnętrznej składowej prędkości czy też pędu (dla ciała punktowego nie ma tu rozgraniczenia). Ze względu na możliwą kwantyzację pędu, wybieramy raczej tę drugą zależność i otrzymujemy stąd automatycznie kwantyzację ładunku.

6. Równania zachowania ładunku dla obiektów wielowymiarowych

W teoriach typu Kaluzy–Kleina ładunek uogólniony wiążemy ze składowymi wewnętrznymi pędu ciała. W przypadku ciał punktowych dokonujemy po prostu utożsamienia tych wielkości. Dla ciał rozciągłych w wewnętrznych wymiarach utożsamienie to nie jest takie oczywiste.

Mozemy spróbować zdefiniować ładunek uogólniony jako:

$$Q^a = \int (p \cdot \xi^a) \mathrm{d}\mathcal{M}_I \ . \tag{6.1}$$

Prawo zachowania ładunku przybierałoby wówczas postać:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} Q^a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \int (p \cdot \xi^a) \mathrm{d}\mathcal{M}_I = 0 \ . \tag{6.2}$$

Pęd ciała p^α możemy wyznaczyć z równania (3.34) wyrażając go przez $\frac{\delta}{\mathrm{d}s} p^\alpha$:

$$\frac{\delta}{\mathrm{d}s} p^\alpha \equiv \dot{p}^\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} p^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\delta} u^\beta p^\delta \ . \tag{6.3}$$

Rozwiązaniem tego równania względem p^α jest:

$$p^\alpha(s) = C^\gamma(\dot{p}^\alpha) \ \left[\mathrm{T} e^{-\int_0^s \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} u^\beta \mathrm{d}s'} \right]^\alpha_{\ \gamma} \ , \tag{6.4}$$

gdzie T jest operatorem uporządkowania chronologicznego. Uzmienniając stałą C otrzymujemy:

$$C_\gamma \left(\dot{p}^\alpha(s) \right) = \int_0^s \dot{p}^\alpha(s') \left[\mathrm{T} e^{-\int_0^{s'} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} u^\beta \mathrm{d}s''} \right]^{-1} \mathrm{d}s' \ . \tag{6.5}$$

Zauważmy, że dla przeniesienia równoległego danego warunkiem:

$$\frac{\delta}{\mathrm{d}s} p^\alpha = 0 \ , \tag{6.6}$$

mamy postać p^α:

$$p^\alpha = \left(\mathrm{T} e^{-\int_0^s \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} u^\beta \mathrm{d}s'} \right)^\alpha_{\ \gamma} (p^\gamma)|_{s=0} \ , \tag{6.7}$$

czyli wielkość $\mathrm{T}e^{-\int_0^s \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} u^{\beta} \mathrm{d}s'}$ jest bitensorem propagacji równoległej $\bar{g}^{\ \alpha}_{\ \gamma}$. Stąd możemy wyrazić p^{α} jako:

$$p^{\alpha}(s) = \bar{g}^{\ \alpha}_{\ \gamma} \int_0^s (\bar{g}^{-1})^{\gamma}_{\ \delta}\, \dot{p}^{\delta} \mathrm{d}s' \ . \tag{6.8}$$

Równanie (6.2) przybiera wtedy postać:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} Q^a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \int \mathrm{d}\mathcal{M}_I \left[\xi^a_{\alpha}\ \bar{g}^{\ \alpha}_{\ \gamma} \int_0^s (\bar{g}^{-1})^{\gamma}_{\ \delta}\, \dot{p}^{\delta} \mathrm{d}s' \right] \ . \tag{6.9}$$

Z postaci tego równania nie widać, żeby wyrażenie po prawej stronie było tożsamościowo równe zeru. Należy się więc zastanowić nad inną definicją ładunku w danej teorii typu Kaluzy–Kleina, zakładającej rozciągłość podstawowych obiektów materii — podstawowych nośników ładunku uogólnionego.

Podsumowanie

Celem tej pracy było wyznaczenie równań ruchu w jednej z teorii typu Kaluzy–Kleina (Kopczyński 1987a) dla obiektów niepunktowych poruszających się w wielowymiarowej czasoprzestrzeni oraz zbadanie wpływu mikroskopowej rozciągłości podstawowych obiektów materii na ich ruch makroskopowy.

Otrzymano wynik, którego można się było spodziewać — dodatkowe człony pochodzące od rozciągłości w dodatkowych, wewnętrznych wymiarach występujące we wzorach (3.32)–(3.40). Z postaci równań widzimy, że rozciągłość objawia się w członach kwadrupolowych i wyższych w równaniach ruchu, ale nie jest związana *explicite* z członem dipolowym. Do tego ostatniego wkład ma jedynie wewnętrzny moment pędu, który daje nam klasyczną interpretację spinu cząstek.

W zasadzie otrzymany wynik jest raczej formalnego typu. W trakcie badań pojawiło się jednak dużo nowych interesujących problemów, związanych między innymi ze specyficznym charakterem przestrzeni wewnętrznej. Wynika stąd na przykład niemożność jednoznacznego wyznaczenia linii świata centrum masy ciała. Możliwe jest wyznaczenie tylko płachty świata centrum masy, która jest klasą równoważności wszystkich linii świata wynikających z twierdzenia o jednoznacznym wyborze środka masy (Beiglböck 1967, Shattner 1979) takich, że ich punkty leżą na orbitach działania grupy cechowania.

Oprócz zaplanowanego wyprowadzenia równań ruchu dla czastek w teoriach typu Klauzy-Kleina, podjęta została także próba zastosowania otrzymanych równań dla konkretnej postaci metryki — metryki sferycznie symetrycznej w trzech przestrzennych wymiarach zewnętrznych, stacjonarnej i posiadającej wektor Killinga w jednowymiarowej przestrzeni wewnętrznej — rozważania zawarte w rozdziale 5. Wprawdzie próba rozwiązania otrzymanego układu rownań napotkała wiele problemów formalnych, ale można było dokonać jakościowej ich analizy i otrzymać fizyczną interpretację wpływu wewnętrznej rozciągłości ciał na ich ruch w przestrzeni zewnętrznej.

Przy okazji wyprowadzenia równań ruchu w przybliżeniu multipolowym pojawił się problem związany z definicją ładunku dla obiektów rozciągłych w wewnętrznych nieobserwowalnych wymiarach, a także z prawem jego zachowania. Problem okazał się był dość nietrywialnym, ponieważ ze względu na rozciągłość ciała posiadającego taki uogólniony ładunek utożsamiony w teoriach danego typu z wewnętrznymi składowymi pędu, jego ruch nie odbywa się wzdłuż linii geodezyjnej, tak jak w klasycznych teoriach typu Kaluzy–Kleina, gdzie mamy do czynienia z obiektami punktowymi poruszającymi sie w wielowymiarowej czasoprzestrzeni; i nie otrzymujemy wtedy automatycznie prawa zachowania ladunku.

Zaproponowana została nowa definicja uogólnionego ładunku — dana składowa ładunku byłaby całką po przestrzeni wewnętrznej z rzutu składowych wewnętrznych pędu ciała na odpowiadający danej składowej (czy też raczej danej symetrii) wektor Killinga.

Problem zachowania ładunku uogólnionego przy takiej jego definicji pozostaje wciąż zagadnieniem otwartym, ale pewne kroki ku jego rozwiązaniu zostały już poczynione. Być może trudności pojawiające się z uzyskaniem prawa zachowania ładunku mogą sygnalizować pewne niespójności w hipotezie o rozciągłości podstawowych obiektów materii, a w każdym razie zmuszają nas do głębszego wniknięcia w ten problem.

Ogólnie postawiony na początku problem okazał się był bardzo interesującym. Praca nad jego rozwiązaniem, oprócz zaowocowania równaniami ruchu dla obiektów wielowymiarowych, pokazała także parę nowych zagadnień i problemów.

Podziękowania

Chciałabym podziękować prof. Wojciechowi Kopczyńskiemu za zasugerownie tematu pracy i skierowanie moich badań w odpowiednim kierunku oraz cenne uwagi językowe.

Dziękuję kolegom z Zakładu Fizyki Cząstek i Oddziaływań Fundamentalnych IFD za stworzenie mi warunków do pracy i umożliwienie korzystania z pomieszczeń i sprzętu należących do tego Zakładu.

Dodatek A.

Rozszerzenia tensorowe

W wyrażeniach na równania ruchu w przybliżeniu multipolowym (2.40) i (2.41) występują wielkości zwane n-tym rozszerzeniem tensora $g_{\lambda\mu}$. Wielkości te charakteryzują się tym, że w dowolnym normalnym ukłądzie współrzędnych redukują sie one do n-tej pochodnej cząstkowej tensora $g_{\lambda\mu}$. Dokładny opis ich własności podany jest w książce Schoutena (1954): *Ricci Calculus.*

Pierwsze rozszerzenie jest zwykłą różniczką kowariantną. Żeby rozciągnąć to do wyższych rozszerzeń wprowadźmy najpierw pojęcie tensora normalnego. Normalne pole tensorowe n-tego rzędu $N_{\alpha_1\ldots\alpha_n\beta\gamma}{}^{\delta}$ jest polem tensorowym, które się redukuje w początku dowolnego normalnego układu współrzędnych do pochodnej cząstkowej $\partial_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma}$. Ma ono więc własności symetrii:

(A.1) $$N_{\alpha_1\ldots\alpha_n\beta\gamma}{}^{\delta} = N_{(\alpha_1\ldots\alpha_n)(\beta\gamma)}{}^{\delta} ,$$

(A.2) $$N_{(\alpha_1\ldots\alpha_n\beta\gamma)}{}^{\delta} = 0 .$$

Dwa pierwsze wyrazy w postaci kowariantnej dane są przez

(A.3) $$N_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{2}{3}R_{\alpha(\beta\gamma)\delta} ,$$

(A.4) $$N_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} = \frac{5}{6}\nabla_{(\alpha}R_{\beta)(\gamma\delta)\varepsilon} - \frac{1}{6}\nabla_{(\gamma}R_{\delta)(\alpha\beta)\varepsilon} .$$

Tensory normalne wyższego rzędu otrzymamy rozważając różniczkę tensora krzywizny:

(A.5) $$\nabla_{\alpha_1\cdots\alpha_n}R_{\beta\gamma\delta}{}^{\varepsilon} = 2\partial_{\alpha_1\cdots\alpha_n[\beta}\Gamma^{\varepsilon}_{\gamma]\delta} + \mathcal{O}(\Gamma^2) .$$

W początku normalnego układu współrzędnych wyrażenie to przybiera postać zawierającą tensor normalny odpowiedniego rzędu:

(A.6) $$\nabla_{\alpha_1\cdots\alpha_n}R_{\beta\gamma\delta\varepsilon} = 2N_{\alpha_1\cdots\alpha_n[\beta\gamma]\delta\varepsilon} + \mathcal{O}(R^2) .$$

Z własności symetrii tensora normalnego otrzymujemy więc:

(A.7) $$N_{(\alpha_1\cdots\alpha_n)\beta\gamma} = -\frac{n-1}{n+1}\nabla_{(\alpha_3\cdots\alpha_n}R_{|\beta|\alpha_1\alpha_2)\gamma} + \mathcal{O}(R^2) .$$

Dla $n = 2$ lub $n = 3$ dodatkowe człony rzędu $\mathcal{O}(R^2)$ sa równe zeru ale dla $n \geq 4$ są one niezerowe.

Otrzymane wyrażenie użyjemy w definiowaniu rozszerzeń tensorowych dla tensorów dowolnego rzędu. Najpierw rozważymy tensory pierwszego rzędu — n-te rozszerzenie dowolnego wektora v_β może być wyrażone rekurencyjnie przez tensor normalny jako

$$E_{\alpha_1\ldots\alpha_n} v_\beta = \nabla_{(\alpha_1\ldots\alpha_n)} v_\beta + \sum_{r=2}^{n}\sum_{s=r}^{n} \binom{n-1}{r-1} N_{(\alpha_1\cdots\alpha_r|\beta|}{}^{\gamma} E_{\alpha_{r+1}\cdots\alpha_s} \nabla_{\alpha_{s+1}\cdots\alpha_n)} v_\gamma \,, \tag{A.8}$$

gdzie dla jasności opisu przez $E_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ oznaczyliśmy n-te rozszerzenie tensorowe.

Dla tensorów wyższego rzędu stosujemy tę procedurę dla każdego indeksu.

Dla tensora metrycznego mamy więc:

$$g_{\beta\gamma,\alpha_1\ldots\alpha_n} = 2N_{(\alpha_1\ldots\alpha_n)(\beta\gamma)} + 2\sum_{r=2}^{n-2} \binom{n-1}{r-1} \delta^{\varepsilon}_{(\beta} g_{\gamma)\delta,(\alpha_1\cdots\alpha_r} N_{\alpha_{r+1}\cdots\alpha_n)\varepsilon}{}^{\delta} \,. \tag{A.9}$$

Dwa piewsze rozszerzenia, występujące w przybliżeniu kwadrupolowym i oktupolowym równań (2.40) i (2.41) dane są więc wzorami:

$$g_{\lambda\mu,\nu\rho} = -\frac{2}{3} R_{\lambda(\nu\rho)\mu} \,, \tag{A.10}$$

$$g_{\lambda\mu,\nu\rho\sigma} = -\nabla_{(\nu} R_{|\lambda|\rho\sigma)\nu} \,. \tag{A.11}$$

Rozszerzenia następnych rzędów należy liczyć iteracyjnie ze wzoru (A.9).

Dodatek B.

Symbole Christoffela dla metryki danej wzorem (4.1) wynoszą:

(B.1)
$$
\begin{aligned}
\Gamma^0_{01} &= \frac{1}{2}\mu' \ , \\
\Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2}e^{\mu-\beta}\mu' \ , \\
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}\mu'' \ , \\
\Gamma^1_{22} &= -\ \frac{1}{2}r^2\beta' - r \ , \\
\Gamma^1_{33} &= -\ \left(\frac{1}{2}r^2\beta' + r\right)\sin^2\theta' \ , \\
\Gamma^1_{44} &= -\ \frac{1}{2}e^{-\beta}\partial_1\phi^2 \ ,
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\Gamma^2_{12} &= \frac{\beta'}{2} + \frac{1}{r}' \ , \\
\Gamma^2_{33} &= -\sin\theta\cos\theta \ , \\
\Gamma^3_{13} &= \frac{\beta'}{2} + \frac{1}{r}' \ , \\
\Gamma^3_{23} &= \operatorname{ctg}\theta \ , \\
\Gamma^4_{14} &= \frac{1}{2}\frac{1}{\phi^2}\partial_1\phi^2 \ .
\end{aligned}
$$

Nie znikające składowe tensora krzywizny dane są przez:

(B.2)
$$
\begin{aligned}
R^0{}_{110} &= \frac{\mu''}{2} - \frac{1}{2}\beta'\mu' \ , \\
R^2{}_{121} &= \frac{1}{2}r^2\beta'' \ , \\
R^3{}_{131} &= -\frac{1}{2}r^2\beta''\sin^2\theta \ , \\
R^3{}_{232} &= -\sin^2\theta\left(\left(\frac{\beta' r}{2}\right)^2 + 2\beta' r\right) \ , \\
R^4{}_{141} &= -\frac{1}{2}\left(\partial_1 e^{-\beta}\right)\partial_1\phi^2 - \frac{1}{2}e^{-\beta}\partial_{11}\phi^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{\phi^2}\left(\partial_1\phi^2\right)^2 e^{-\beta} \ , \\
R^4{}_{242} &= -\frac{1}{2}e^{-\beta}\partial_1\phi^2\left(\frac{\beta'}{2} + \frac{1}{r}\right) \ , \\
R^4{}_{343} &= -\frac{1}{2}e^{-\beta}\partial_1\phi^2\left(\frac{\beta'}{2} + \frac{1}{r}\right) \ .
\end{aligned}
$$

Stosując równania (2.40) i (2.41) możemy wyznaczyć poprawki rzędu kwadrupolowego do pochodnej pędu wzdłuż linii świata centrum masy.

Człon kwadrupolowy w wyrażeniu na pochodną składowej zerowej pędu wzdłuż linii świata wynosi:

(B.3)
$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}^{(4)}\left(\frac{\delta p_0}{ds}\right) =&\frac{1}{4}I^{4401}\nabla_0 g_{01,44} = -\frac{1}{6}I^{4401}\Gamma^1_{00}R_{1414} = \\
=&-\frac{1}{6}I^{4401}\frac{1}{2}e^{\mu}\mu'\left(-\frac{1}{2}(\partial_1 e^{-\beta})\partial_1\phi^2 - \frac{1}{2}e^{-\beta}\partial_{11}\phi^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{\phi^2}(\partial_1\phi^2)^2 e^{-\beta}\right) .
\end{aligned}$$

W wyrażeniu na pochodną składowej radialnej pędu wzdłuż linii świata mamy dodatkowe człony postaci:

(B.4)
$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}^{(4)}\left(\frac{\delta p_1}{ds}\right) =&\frac{1}{4}I^{4411}\nabla_1 g_{11,44} + \frac{1}{4}I^{4433}\nabla_1 g_{33,44} + \frac{1}{4}I^{4422}\nabla_1 g_{22,44} = \\
=&\frac{1}{4}I^{4411}\frac{2}{3}\left(\partial_1 R_{1414} - 2\Gamma^1_{11}R_{1414} - 2\Gamma^4_{14}R_{1414}\right) + \\
&+\frac{1}{2}I^{4433}\frac{2}{3}\left(\partial_1 R_{3434} - 2\Gamma^3_{13}R_{3434}\right) + \\
&+\frac{1}{2}I^{4422}\frac{2}{3}\left(\partial_1 R_{2424} - 2\Gamma^2_{12}R_{2424}\right) = \\
=&\frac{1}{6}I^{4411}\partial_1\left[\frac{1}{2}\beta'\left(\partial_1\phi^2\right) + \frac{1}{4}\frac{1}{\phi^2}\left(\partial_1\phi^2\right)^2 - \frac{1}{2}\partial_{11}\phi^2\right] + \\
&-\frac{1}{3}I^{4411}\left(\frac{1}{2}\beta' + \frac{1}{\phi^2}\partial_1\phi^2\right)\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\partial_1\phi^2\right) + \frac{1}{4}\frac{1}{\phi^2}\left(\partial_1\phi^2\right)^2 - \frac{1}{2}\partial_{11}\phi^2\right] + \\
&-\frac{1}{6}I^{4433}\sin^2\theta\,\partial_1\left[\partial_1\phi^2(\frac{\beta'}{2}r^2 + r)\right] + \\
&+\frac{1}{6}I^{4433}\left(\frac{\beta'}{2} + \frac{1}{r}\right)^2 r^2\sin^2\theta\,\partial_1\phi^2 - \frac{1}{12}I^{4422}\partial_1\left[\left(\partial_1\phi^2\right)\left(\frac{\beta'}{2}r^2 + r\right)\right] + \\
&+\frac{1}{6}I^{4422}\left(\frac{\beta'}{2} + \frac{1}{r}\right)^2 r^2\partial_1\phi^2 .
\end{aligned}$$

Mamy też człony kwadrupolowe w wyrażeniach na pochodne składowych kątowych pędu wzdłuż linii świata centrum masy:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Q}^{(4)}\left(\frac{\delta p_2}{ds}\right) =& \frac{1}{4} I^{4433} \nabla_2 g_{33,44} + \frac{1}{4} \nabla_2 g_{12,44} = \\
=& -\frac{1}{2} I^{4433} \frac{2}{3} \Gamma^{3}_{23} R_{3434} - \frac{1}{2} I^{4412} \frac{2}{3} \Gamma^{1}_{22} R_{1414} - \frac{1}{2} I^{4412} \frac{2}{3} R_{2424} = \\
=& \frac{1}{6} I^{4433} \cos\theta \ \sin\theta \ r^2 \left(\frac{\beta'}{2} + \frac{1}{r}\right) \partial_1 \phi^2 \\
& + \frac{1}{3} I^{4412} \left[\frac{1}{2}\beta' \left(\partial_1 \phi^2\right) + \frac{1}{4}\frac{1}{\phi^2}\left(\partial_1 \phi^2\right)^2 - \frac{1}{2}\partial_{11}\phi^2\right] \cdot \\
& \cdot \left(\frac{\beta'}{2} r^2 + r\right) + \frac{1}{6} I^{4412} \left(\frac{\beta'}{2} + \frac{1}{r}\right)^2 r^2 \partial_1 \phi^2 \ ,
\end{aligned}
\tag{B.5}
$$

oraz

(B.6)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Q}^{(4)}\left(\frac{\delta p_3}{ds}\right) =& \frac{1}{4} I^{4413} \nabla_3 g_{13,44} + \frac{1}{4} I^{4423} \nabla_3 g_{23,44} = \\
=& -\frac{1}{6} I^{4413} \left(\Gamma^{1}_{33} R_{1414} + \Gamma^{3}_{31} R_{3434}\right) + \\
& -\frac{1}{6} I^{4423} \left(\Gamma^{2}_{33} R_{2424} + \Gamma^{3}_{32} R_{3434}\right) = \\
=& \frac{1}{6} I^{4413} \left(\frac{\beta'}{2} + \frac{1}{r}\right) r^2 \sin^2\theta \ \left[\frac{1}{2}\beta' \left(\partial_1 \phi^2\right) + \frac{1}{4}\frac{1}{\phi^2}\left(\partial_1 \phi^2\right)^2 - \frac{1}{2}\partial_{11}\phi^2 + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}\partial_1 \phi^2 \left(\frac{\beta'}{2} + \frac{1}{r}\right)\right] \ .
\end{aligned}
$$

Mamy też poprawki rzędu kwadrupolowego do pochodnych składowych momentu pędu wzdłuż linii świata:

$$\mathrm{Q}^{(4)}\left(\frac{\delta S^{04}}{ds}\right) = -\frac{2}{3} g^{00} I^{4404} R_{0404} = 0 \,, \tag{B.7}$$

$$\mathrm{Q}^{(4)}\left(\frac{\delta S^{14}}{ds}\right) = -\frac{2}{3} g^{11} I^{4414} R_{1414} =$$

$$= \frac{1}{3} I^{4414} e^{-\beta}\left[\frac{1}{2}\beta'\left(\partial_1\phi^2\right) + \frac{1}{4}\frac{1}{\phi^2}\left(\partial_1\phi^2\right)^2 - \frac{1}{2}\partial_{11}\phi^2\right] \,, \tag{B.8}$$

$$\mathrm{Q}^{(4)}\left(\frac{\delta S^{24}}{ds}\right) = -\frac{2}{3} g^{22} I^{4424} R_{2424} =$$

$$= \frac{1}{3} I^{4424} e^{-\beta}\partial_1\phi^2\left(\frac{\beta'}{2} + \frac{1}{r}\right) \,, \tag{B.9}$$

$$\mathrm{Q}^{(4)}\left(\frac{\delta S^{34}}{ds}\right) = -\frac{2}{3} g^{33} I^{4434} R_{3423} =$$

$$= \frac{1}{3} I^{4434} e^{-\beta}\partial_1\phi^2\left(\frac{\beta'}{2} + \frac{1}{r}\right) \,. \tag{B.10}$$

Bibliografia

Beiglböck, W. 1967, *The Center of Mass in Einstein's Theory of Gravitation*, Commun. Math. Phys. **5**, 106–130.

Chodos, A. & Detweiler, S. 1982, *Spherically Symmetric Solutions in Five-Dimensional General Realtivity*, Gen. Rel. Grav **14**, 879–890.

Corinaldesi, E. & Papapetrou, A. 1951, *Spinning Test Particles in General Relativity. II*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **209**, 259–268.

Dixon, W. G. 1964, *A Covariant Multipole Formalism for Extended Test Bodies in General Relativity*, Nuovo Cimento **34**, 317–339.

Dixon, W. G. 1970a, *Dynamics of Extended Bodies in General Relativity I. Momentum an Angular Momentum*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **314**, 499–527.

Dixon, W. G. 1970b, *Dynamics of Extended Bodies in General Relativity II. Moments of the Charge-Current Vector*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **319**, 509–547.

Dixon, W. G. 1974, *Dynamics of Extended Bodies in General Relativity III. Equations of Motion*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A **277**, 59–119.

Infeld, L. & Schild, A. 1949, *On the Motion of Test Particles in General Relativity*, Rev. Mod. Phys. **21**, 408–413.

Kaluza, Th. 1921, *Zum Unittatsproblem der Physik*, Sitzungsber. d. Berl. Akad., 966; English transl. in Th. Appelquist, A. Chodos and P. G. O. Freund (eds.), *Modern Kaluza-Klein Theories*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1986.

Kerner, R. 1968, *Generalization of the Kaluza-Klein Theory for an Arbitrary Non-Abelian Gauge Group*, Ann. Inst. H. Poincaré **9**, 143.

Klein, O. 1926, *Quantum Theory and Five Dimensional Relativity*, Z. Phys. **37**, 895.

Kopczyński, W. 1987a, *A Fluid of Multidimensional Objects*, Phys. Rev. D **36**, 3582–3588.

Kopczyński, W. 1987b, *Cosmological Model of the Kaluza-Klein Type*, Phys. Rev. D **36**, 3589–3592.

Mathisson, M. 1937, *Neue Mechanik materieller Systeme*, Acta Phys. Polon. **6**, 163–200.

Møller, C. 1949a, *On the Definition of the Centre of Gravity of an Arbitrary Closed System in the Theory of Relativity*, Commun. Dublin Inst. Adv. Stud. Ser. A **5**, 1–42.

Møller, C. 1949b, *Sur la dynamique des systèmes ayant um moment angulaire interne*, Ann. Inst. H. Poincaré **9**, 251–278.

Papapetrou, A 1951, *Spinning Test Particles in General Relativity. I*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **209**, 248–258.

Pryce, M. H. L. 1949, *The Mass-Centre in the Restricted Theory of Relativity and its Connexion with the Quantum Theory of Elementary particles*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **195**, 62–81.

Shattner, R. 1979a, *The Center of Mass in General Relativity*, Gen. Rel. Grav. **10**, 377–393.

Shattner, R. 1979b, *The Uniqueness of the Center of Mass in General Relativity*, Gen. Rel. Grav. **10**, 395–399.

Schouten, J. A. 1954, *Ricci Calculus*, 2nd edn., Springer-Verlag, Berlin.

Tulczyjew, W. 1959, *Motion of Multipole Particles in General Relativity Theory*, Acta Phys. Polon. **18**, 393–409.