

Seria I zadań z Mechaniki Statystycznej
4 października 2007 r.

Zad 1. Błądzenie przypadkowe

Pchła na linie może skakać z prawdopodobieństwem p w prawo oraz $(1-p)$ w lewo zawsze o tę samą jednostkową odległość. Znajdź rozkład prawdopodobieństwa położenia pchły po n skokach, jego wartość średnią oraz dyspersję.

Zad 2. Rozkład Maxwella

Założmy, że cząsteczka gazu może się poruszać w jednym wymiarze, a rozkład jej prędkości dany jest wzorem

$$p(v) = Ae^{-\frac{mv^2}{2kT}},$$

gdzie m to masa cząsteczki, k - stała Boltzmanna, T - temperatura. Znajdź stałą normalizacyjną A oraz gęstość rozkładu prawdopodobieństwa wartości bezwzględnej prędkości $p(|v|)$.

Zad 3. Oscylator harmoniczny

Dla oscylatora harmonicznego o poziomach energetycznych $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$ (znajdującego się w równowadze termodynamicznej) prawdopodobieństwo obsadzenia n -tego poziomu wynosi

$$p_n = (1-x)x^n, \quad x = \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)$$

(tzw. rozkład Pascala). Pokazać, że dyspersja dla tego rozkładu jest większa niż dyspersja dla rozkładu Poissona o tej samej średniej, co w obecnym przypadku.

Zad 4. Pokazać, że dla dużych n rozkład Bernoullego $B(k, n, p)$ o prawdopodobieństwie sukcesu $p = 1/2$ dąży do rozkładu Gaussa ze średnią $n/2$ oraz dyspersją $n/4$.

Wskazówka: Wprowadź nową zmienną $x = k - n/2$ a następnie korzystając ze wzoru Stirlinga w rozwinięciu $\log B(k, n, p)$ pomiń wyrazy kwadratowe w x/N . Dodatkowo można skorzystać ze wzoru $\log(1+x) \approx x$, dla $x \ll 1$.

termin oddania: 16 października 2007 przed ćwiczeniami, zadania dostępne również na stronie:

www.fuw.edu.pl/~fdutka/mechstat