

Uniwersytet Warszawski  
Wydział Fizyki  
Instytut Fizyki Teoretycznej

Grzegorz Koczan

# Operator położenia w relatywistycznej mechanice kwantowej

$$\hat{Q}_+ = \sum_n \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \hat{\Phi}_n^{\dagger FW} |0\rangle \langle 0| \hat{\Phi}_n^{FW}$$



praca magisterska napisana  
w Zakładzie Optyki Kwantowej i Fizyki Atomowej  
pod kierunkiem  
dra hab. Krzysztofa Pachuckiego

Warszawa 2002



# Streszczenie

Celem niniejszej pracy jest zbadanie zagadnienia lokalizacji przestrzennej cząstek w relatywistycznej teorii kwantowej. Pojęcie lokalizacji jest tu rozumiane w sensie matematycznego opisu położenia cząstki, a nie w sensie jej empirycznej detekcji w pewnym obszarze przestrzennym. Praca ma zatem charakter teoretyczny, a jej głównym zadaniem jest podanie operatora położenia dla cząstek o spinach 0, 1/2 i 1. W konstrukcji powyższych operatorów zwrócono szczególną uwagę na to, aby (o ile to możliwe) ich składowe komutowały do zera. Wspomniane operatory położenia winny być uogólnieniem zwykłego operatora położenia, znanego z nierelatywistycznej mechaniki kwantowej, będącego w standardowej reprezentacji położeniowej operacją mnożenia przez współrzędne przestrzenne.

Praca składa się z dwóch części, które prezentują odrębne podejścia do zagadnienia operatora położenia. Podstawowe wyniki prezentowane w obu częściach są zgodne, ale różnią się formą i stopniem ogólności. W pierwszej części pracy zaprezentowane są propozycje relatywistycznych operatorów położenia ukształtowane w toku historycznego rozwoju mechaniki kwantowej. Najbardziej ogólne wersje podanych w tej części operatorów położenia opierają się na generatorach grupy Poincarego. Niestety wspomniane propozycje operatorów położenia nie są dobrze określone w przypadku bezmasowych cząstek z niezerowym spinem. Ponadto dość szczegółowo rozpatrywane jest tutaj pojęcie relatywistycznego środka masy-energii oraz jego związek z operatorem położenia. W kontekście tych rozważań definiowane są różne wersje własnego momentu pędu blisko powiązanego z pojęciem spinu. Wszystkie rozważania prowadzone są na poziomie operatorowym, a szczególny nacisk położony jest na postać podstawowych związków komutacyjnych omawianych operatorów.

Druga część pracy zawiera konstrukcję operatora położenia i gęstości prawdopodobieństwa w ramach formalizmu drugiej kwantyzacji, a dokładnie kwantowej teorii pól swobodnych. Konstrukcja ta opiera się na pewnej szczególnej dla operatora położenia reprezentacji, nazywanej tutaj *reprezentacją heterowariantną* z powodu jej nietypowych i nielokalnych praw transformacyjnych względem grupy Lorentza. W celu znalezienia reprezentacji heterowariantnej stosowane są heterowariantne położeniowe operatory anihilacji i kreacji, które z definicji powinny komutować (bądź antykomutować) do iloczynu delt Kroneckera i Diraca. Aby uniknąć niejednoznaczności konstrukcji operatora położenia cząstek obdarzonych spinem, zbiór baz spinowych został ograniczony do wyróżnionej (w danym układzie) przez transformację Lorentza klasy *cyklicznych baz spoczynkowych*. Konstrukcja operatora położenia jest wykonywana oddzielnie dla pól (cząstek) o spinach 0, 1/2 i 1. Przy tej okazji przytoczone są podstawy kanonicznego kwantowania tych pól, ze szczególnym uwzględnieniem konstruowania stanów Focka przy pomocy różnych funkcji falowych. W tym kontekście została dodatkowo przeanalizowana struktura *rozszerzonej* przestrzeni Focka pola elektromagnetycznego, która to przestrzeń nie posiada dodatnio

określonej normy. Został również sformułowany warunek niezależności obserwabli od swobody cechowania.

W przypadku pól opisujących cząstki naładowane zostały wprowadzone dwa typy operatora położenia, operator  $\hat{Q}_+$  dla cząstek i operator  $\hat{Q}_-$  dla antycząstek. Udało się nadać skonstruowanym operatorom położenia  $\hat{Q}_\pm$  formę wykorzystującą tzw. *spoczynkowe wartości pól*. Operatory gęstości prawdopodobieństw zostały wyrażone za pomocą transformacji pól typu Foldy'ego-Wouthuysena. W konsekwencji powyższa transformacja stosowana najczęściej dla pola Diraca została wprowadzona również dla pól skalarnych i wektorowych, włącznie z czteropotencjałem pola elektromagnetycznego.

Operatory położenia dla cząstek skalarnych po prostych modyfikacjach mogą być uogólnione na krzywoliniowe współrzędne trójwymiarowej hiperpowierzchni przestrzenopodobnej.

Ciekawostką jest fakt, że definicje operatorów położenia  $\hat{Q}_\pm$  dla cząstki skalarnej przenoszą się na teorię oddziałujących pól kwantowych, tzn. że definicje te są najprawdopodobniej dobrze określone także w tej teorii. Powyższe uogólnienie pojęcia operatora położenia traktowane jest tutaj jako propozycja, która nie została szczegółowo przeanalizowana, w szczególności na poziomie renormalizacji.

Wzór na operator położenia został uogólniony również na przypadek cząstek bezmasowych. Interesującym elementem pracy jest propozycja operatora gęstości prawdopodobieństwa i operatora położenia fotonu. Operatory te zostały wprowadzone w oparciu o *uogólnioną spoczynkową wartość czteropotencjału*, która jak się okazało jest praktycznie równoważna cechowaniu Coulomba czteropotencjału. Uzyskane operatory położenia i gęstości prawdopodobieństwa spełniają podstawowe kryteria poprawności, z wyjątkiem tego, że składowe operatora położenia nie komutują. Fakt ten jest konsekwencją nieistnienia stanów fotonowych dowolnie dobrze zlokalizowanych w każdym kierunku.

Osobnego rozpatrzenia wymagał ponadto przypadek bezmasowych fermionów o określonej skrętności. Teoria takich cząstek została opisana w ostatnim uzupełniającym rozdziale, który był napisany po obronie pracy magisterskiej. Konstrukcja operatora położenia bezmasowego lewoskrętnego fermionu była przeprowadzona analogicznie jak dla fotonu. W wyniku tej konstrukcji uzyskano operator położenia o niekomutujących składowych. Pod tym względem operatory położenia fotonu oraz bezmasowego jednoskrętnego fermionu są wyjątkowe.

# Podziękowania

Składam wyrazy podziękowania promotorowi niniejszej pracy magisterskiej, drowi hab. Krzysztofowi Pachuckiemu za opiekę naukową w trakcie studiów magisterskich oraz za nieustanną gotowość odpowiadania na pytania dotyczące relatywistycznej kwantowej teorii pola.

Chciałbym również podziękować prof. drowi hab. Iwo Białynickiemu-Biruli za konsultacje na tematy związane z pracą oraz zwrócenie mojej uwagi na fakt, że kowariantna funkcja falowa jest elementem macierzowym operatora pola policzonym na stanie próżni i zadanym stanie jednocząstkowym.



# Spis treści

<b>Streszczenie</b>	<b>iii</b>
<b>Notacja i ważniejsze wzory</b>	<b>ix</b>
<b>I Ujęcie historyczne</b>	<b>1</b>
<b>1 Historia zagadnienia operatora położenia</b>	<b>3</b>
1.1 Pierwszy etap rozwoju mechaniki kwantowej . . . . .	3
1.2 Środek masy-energii i operator Pryce'a . . . . .	5
1.3 Osiągnięcia Newtona i Wignera oraz Foldy'ego i Wouthuysena . . . . .	11
1.4 Przegląd wybranych współczesnych prac o lokalizacji cząstek . . . . .	12
1.5 Podsumowanie . . . . .	14
<b>II Operator położenia i funkcje falowe fokowskich stanów kwantowych pól swobodnych</b>	<b>17</b>
<b>2 Krótkie wprowadzenie</b>	<b>19</b>
<b>3 Rzeczywiste pole skalarne - neutralne cząstki bezspinowe</b>	<b>21</b>
3.1 Kwantowanie kanoniczne i przestrzeń Focka . . . . .	21
3.1.1 Reprezentacja inwariantna i heterowariantna . . . . .	22
3.2 Operator położenia w reprezentacji heterowariantnej i inwariantnej . . . . .	26
3.3 Zagadnienie gęstości czteroprądu prawdopodobieństwa położenia cząstki . . . . .	29
3.4 Uogólnienia operatora położenia . . . . .	32
3.4.1 Operator położenia we współrzędnych krzywoliniowych . . . . .	32
3.4.2 Wielocząstkowe operatory położenia . . . . .	34
<b>4 Zespolone pole skalarne - naładowane cząstki bezspinowe</b>	<b>35</b>
4.1 Operatory położenia cząstki i antycząstki . . . . .	36
4.2 Propozycja uogólnienia operatora położenia na teorię z oddziaływaniem . . . . .	36
<b>5 Pole Diraca - elektrony i pozytony</b>	<b>39</b>
5.1 Kwantowanie kanoniczne i przestrzeń Focka . . . . .	39
5.1.1 Bispinorowe bazy rozwiązań równania Diraca . . . . .	39
5.1.2 Związki antykomutacyjne . . . . .	42
5.1.3 Stany Focka i ich funkcje falowe . . . . .	43
5.2 Operator położenia i gęstość prawdopodobieństwa . . . . .	47

<b>6</b>	<b>Pole wektorowe z masą - cząstki Proca</b>	<b>51</b>
6.1	Kwantowanie kanoniczne . . . . .	51
6.1.1	Cykliczna baza spinowa . . . . .	53
6.2	Gęstość prawdopodobieństwa i operator położenia . . . . .	54
<b>7</b>	<b>Bezmasowe pole wektorowe - fotony</b>	<b>57</b>
7.1	Kowariantne kwantowanie kanoniczne . . . . .	57
7.1.1	Struktura rozszerzonej przestrzeni Focka . . . . .	57
7.1.2	Warunek konieczny dla obserwabli fizycznych . . . . .	59
7.2	Gęstość prawdopodobieństwa i operator położenia . . . . .	60
7.2.1	Wstępne próby . . . . .	60
7.2.2	Uogólniona transformacja FW czteropotencjału . . . . .	61
7.2.3	Propozycja gęstości prawdopodobieństwa położenia . . . . .	63
7.2.4	Propozycja operatora położenia fotonu . . . . .	64
<b>8</b>	<b>Krótkie podsumowanie</b>	<b>67</b>
<b>9</b>	<b>Uzupełnienie: bezmasowe fermiony jednoskrętne</b>	<b>71</b>
9.1	Równanie Weyla . . . . .	71
9.2	Kwantowanie kanoniczne . . . . .	72
9.3	Uogólniona transformacja Foldy'ego-Wouthuysena . . . . .	73
9.3.1	Operator położenia . . . . .	74
9.4	Wnioski o operatorze położenia dla cząstek bezmasowych ze spinem . . . . .	76



# Notacja i ważniejsze wzory

## N 1. JEDNOSTKI

Stosowany jest układ jednostek, w których z definicji:

$$\hbar = c = \varepsilon_0 = \mu_0 = 1. \quad (1)$$

Mimo to symbole  $\hbar$ ,  $c$  są czasami używane dla celów poglądowych, co nie powinno prowadzić do nieporozumień.

Podstawową jednostką jest *metr*. Jednostki układu SI takie jak sekunda, kilogram, Amper wyrażają się w metrach lub w metrach odwrotnych:

$$\begin{aligned} 1s &= c \cdot 1s = 2,997\,924\,58(00) \cdot 10^8 \text{ m}, \\ 1kg &= c/\hbar \cdot 1kg = 2,842\,788\,82(49) \cdot 10^{42} \text{ m}^{-1}, \\ 1A &= \sqrt{\mu_0/\hbar c} \cdot 1A = 6,304\,585\,35(54) \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

W elektrodynamice używany jest układ zrenormalizowany, w którym niejednorodne równania Maxwella mają postać:

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{B} &= \mathbf{j} - \partial_t \mathbf{E}, \\ \mathbf{div} \mathbf{E} &= \rho. \end{aligned} \quad (3)$$

## N 2. OZNACZENIA CZASOPRZESTRZENNE

We współrzędnych lorentzowskich ( $x^\mu$ ), gdzie  $\mu$  jak inne greckie wskaźniki przyjmuje wartości 0, 1, 2, 3, tensor metryczny ma postać:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Wskaźniki łacińskie  $i, j, \dots$  przyjmują wartości 1, 2, 3. Trójwektory są oznaczane wytłuszczoną czcionką np.:  $(x^i) = \mathbf{x}$ .

Stosowana jest konwencja sumacyjna Einsteina dla par powtarzających się indeksów greckich (jednego dolnego, a drugiego górnego) oraz dla par indeksów łacińskich o dowolnym położeniu:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu, \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a^i b^i = a_i b_i = -a_i b^i = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3. \end{aligned} \quad (5)$$

Dla całkowicie antysymetrycznych symboli Levi-Civity  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  i  $\varepsilon^{ijk}$  przyjęte jest, że:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{0123} &= -\varepsilon_{0123} = +1, \\ \varepsilon^{123} &= -\varepsilon_{123} = +1. \end{aligned} \quad (6)$$

Skierowana trójforma objętości jest zapisywana przy pomocy gwiazdki Hodge'a:

$$*dx^\mu = -\frac{1}{6}\varepsilon^\mu{}_{\nu\rho\sigma}dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma. \quad (7)$$

Zerowa składowa tego obiektu po uwzględnieniu orientacji zadanej przez numerację współrzędnych staje się zwykłą formą objętości:

$$*dx^0 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \equiv d^3\mathbf{x}. \quad (8)$$

Operacje różniczkowania są oznaczane następująco:

$$\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu \quad , \quad \partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu. \quad (9)$$

Wykorzystywana jest również operacja różniczkowania obustronnego:

$$\overleftrightarrow{\partial}_\mu = \overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu. \quad (10)$$

Ponadto używana jest nabra<sup>1</sup>, laplasjan i delambergjan:

$$\begin{aligned} \nabla &= (\partial^i) = (-\partial/\partial x^i) \\ \Delta &= \nabla^2 = \partial_i\partial_i \\ \square &= \partial_\mu\partial^\mu = \partial_t^2 - \Delta \end{aligned} \quad (11)$$

### N 3. OZNACZENIA W PRZESTRZENI HILBERTA.

Wektory stanu należące do przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$  oznaczane są przez  $|\Psi\rangle$ . Używana jest więc notacja bra-ketowa Diraca. Wektorowi jednocząstkowego stanu odpowiada w reprezentacji położeniowej *invariantna funkcja falowa*  $\Phi(x)$ , a w reprezentacji pędowej funkcja  $\tilde{\Phi}(p)$ , która również nie zależy od układu odniesienia. Ponadto zdefiniowane są *heterowariantne funkcje falowe*:  $\Psi(\mathbf{x})$  w reprezentacji położeniowej i  $\tilde{\Psi}(\mathbf{p})$  w reprezentacji pędowej. Funkcje te transformują się w złożony sposób przy zmianie inercjalnego układu odniesienia.

Operatory i macierze oznaczane są daszkami np.:  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{\beta}$ ; zaś ich sprzężenia hermitowskie krzyżykami  $\hat{a}^\dagger$ ,  $\hat{b}^\dagger$ ,  $\hat{\beta}^\dagger$ . Komutatory są oznaczane przy pomocy nawiasów kwadratowych i przecinka  $[ , ]$ , a antykomutatory przy pomocy nawiasów klamrowych i przecinka  $\{ , \}$ .

*Invariantny* schrödingerowski operator anihilacji cząstki bezspinowej o czteropędzie  $p$  oznaczany jest przez  $\hat{a}(p)$ , natomiast *invariantny* heisenbergowski operator anihilacji w reprezentacji położeniowej przez  $\hat{\phi}_{(+)}(x)$ . *Heterowariantne* odpowiedniki operatorów  $\hat{a}(p)$ ,  $\hat{\phi}_{(+)}(x)$  to odpowiednio  $\hat{a}_{\mathbf{p}}$  oraz  $\hat{a}_{t,\mathbf{x}}$ .

### N 4. TRANSFORMACJE FOURIERA

Trójwymiarowa transformacja Fouriera oraz transformacja odwrotna:

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{p}) = \int d^3\mathbf{x}\Psi(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad , \quad \Psi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\tilde{\Psi}(\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}. \quad (12)$$

<sup>1</sup>Niestandardowy znak nabli podyktowany jest ujemną sygnaturą współrzędnych przestrzennych oraz żądaniem, aby stanowiła ona przestrzenną część czterowektora ( $\partial^\mu$ ), a nie kowektora ( $\partial_\mu$ ).

Dla funkcji spełniających równanie Kleina-Gordona stosowana jest *inwariantna* trójwymiarowa transformacja Fouriera<sup>2</sup>:

$$\tilde{\phi}(p) = \int_{\Omega} *dx^{\mu} e^{ip \cdot x} \underbrace{(p_{\mu} + i\partial_{\mu})}_{i\overleftrightarrow{\partial}_{\mu}} \phi(x). \quad (13)$$

Całkowanie przebiega tutaj po dowolnej trójwymiarowej przestrzennopodobnej *hiperpowierzchni*  $\Omega$ <sup>3</sup>. Transformacja odwrotna ma postać:

$$\phi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - m^2) \epsilon(p_0) \tilde{\phi}(p) e^{-ip \cdot x}. \quad (14)$$

Występuje tutaj  $\delta$ -Diraca i funkcja znakowa signum  $\epsilon(\cdot)$ . Równanie to można przekształcić do postaci:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \left[ \tilde{\phi}(p) e^{-ip \cdot x} - \tilde{\phi}(-p) e^{ip \cdot x} \right], \quad (15)$$

przy czym przyjmujemy, że  $p_0 = +\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ .

## N 5. TRANSFORMACJA LORENTZA - PCHNIĘCIA

### Transformacja czterowektorów

Współrzędne czterowektora  $x$  w nowym primowanym układzie inercjalnym poruszającym się z czteroprędkością  $U^{\mu}$  wyrażają się następująco za pomocą współrzędnych w układzie wyjściowym:

$$x'^0 = U_{\mu} x^{\mu} \quad , \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \frac{U_{\mu} x^{\mu} + x_0}{1 + U_0} \mathbf{U}. \quad (16)$$

Powyższą transformację nazywaną *pchnięciem lorentzowskim* można zapisać w postaci macierzowej:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}(U) x^{\nu}, \quad (17)$$

gdzie składowe macierzy  $\Lambda^{\mu}_{\nu}(U)$  wynoszą odpowiednio:

$$\Lambda^0_{\mu}(U) = \Lambda^{\mu}_0(U) = U_{\mu} \quad , \quad \Lambda^k_l(U) = g^k_l - \frac{U^k U_l}{1 + U_0}. \quad (18)$$

Rozważaną macierz można także wyrazić pojedynczym równaniem:

$$\Lambda_{\mu\nu}(U) = g_{\mu\nu} - \frac{u_{\mu} u_{\nu} - (1 + 2u_0)(u_{\mu} g_{\nu 0} + u_{\nu} g_{\mu 0}) + (1 + 2u_0 + 2u_0^2) g_{\mu 0} g_{\nu 0}}{1 + u_0}, \quad (19)$$

przy czym czteroprędkość  $U$  została z prawej strony równania oznaczona małą literą dla skrócenia zapisu. Macierz transformacji Lorentza spełnia ogólne równanie:

$$\Lambda_{\mu\nu} \Lambda_{\rho\sigma} g^{\nu\sigma} = g_{\mu\rho}. \quad (20)$$

Macierz odwrotna do macierzy pchnięcia Lorentza jest postaci:

$$\Lambda_{\mu\nu}^{-1}(U) = \Lambda_{\mu\nu}(\tilde{U}), \quad (21)$$

<sup>2</sup>Transformacja ta jest niezmiennicza na powłoce masy  $p^2 = m^2$ .

<sup>3</sup>Przez termin hiperpowierzchnia rozumie się w tej pracy ciągłą nieograniczoną w każdym kierunku powierzchnię.

gdzie  $(\tilde{U}^\mu) = (U_0, -\mathbf{U})$ .

### Transformacja bispinorów Diraca

Bispinor  $\psi$  w wyniku pchnięcia lorentzowskiego do układu poruszającego się z czteropędkością  $U$  transformuje się następująco:

$$\psi' = \hat{S}(U)\psi, \quad (22)$$

gdzie macierz  $\hat{S}$  można wyrazić przy pomocy macierzy Diraca  $\hat{\gamma}^\mu$  i czteropędkości  $U$ :

$$\hat{S}(U) = \frac{1 + \hat{\gamma}_0 \hat{\gamma}_\mu U^\mu}{\sqrt{2(1 + U_0)}}. \quad (23)$$

Hermitowska macierz rozważanej transformacji spełnia ogólny związek:

$$\hat{S} \hat{\gamma}^\mu \hat{S}^{-1} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \hat{\gamma}^\nu, \quad (24)$$

gdzie macierz  $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu$  jest odwrotnością macierzy transformacji Lorentza dla czterowektorów, od której zależy zresztą macierz  $\hat{S}$ . Odwrotność macierzy pchnięcia lorentzowskiego bispinorów wyraża się wzorem:

$$\hat{S}^{-1}(U) = \hat{S}(\tilde{U}) = \hat{\gamma}_0 \hat{S}(U) \hat{\gamma}_0. \quad (25)$$

## N 6. TRANSFORMACJE TYPU FOLDY'EGO-WOUTHUYSENA

### Transformacja dla pola skalarnego

Dla pola skalarnego  $\phi(x)$  spełniającego równanie Kleina-Gordona definiujemy w danym układzie inercjalnym przekształcenie:

$$\phi_{FW}(t, \mathbf{x}) = \sqrt{2\sqrt{m^2 - \Delta}} \phi(t, \mathbf{x}), \quad (26)$$

gdzie  $m$  jest masą występującą w równaniu Kleina-Gordona dla pola  $\phi(x)$ . Przetransformowane pole  $\phi_{FW}(x)$  w niniejszej pracy jest nazywane *heterowariantną* postacią pola skalarnego lub reprezentacją Foldy'ego-Wouthuysena dla pola skalarnego. Łatwo zauważyć, że nowa postać pola skalarnego ma zmieniony wymiar w stosunku do jego pierwowzoru. Trudno mówić o unitarności jakiegokolwiek transformacji pola skalarnego, ale spełniona jest następująca tożsamość dla tzw. produktu skalarnego dwóch pól  $\phi(x)$  i  $\varphi(x)$ :

$$\int_{\Omega} *dx^\mu \phi_{(\pm)}^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_\mu \varphi_{(\pm)}(x) = \pm \int d^3\mathbf{x} \phi_{(\pm)}^{*FW}(t, \mathbf{x}) \varphi_{(\pm)}^{FW}(t, \mathbf{x}), \quad (27)$$

gdzie indeksy znakowe  $(\pm)$  oznaczają część danego pola o określonym znaku częstości<sup>4</sup>.

### Transformacja FW pola Diraca

W pierwszym kroku zostanie zdefiniowana *spoczynkowa* postać pola Diraca  $\psi_S(x)$  jako pchnięcie Lorentza pola Diraca  $\psi(x)$  z czteropędkością  $\hat{U}$  będącą operatorem:

$$\psi_S(x) = \hat{S}(\hat{U}) \psi(x), \quad (28)$$

---

<sup>4</sup>Produkt skalarny pól o przeciwnych częstościach jest równy zeru.

gdzie wspomniany operator czteroprędkości ma postać:

$$\hat{U}^\mu = \hat{\epsilon} i \partial^\mu / m, \quad (29)$$

przy czym  $\hat{\epsilon}$  jest operatorem znaku częstości (energii). Transformację Foldy'ego-Wouthuysena pola Diraca w danym układzie inercjalnym można teraz zdefiniować następująco:

$$\psi_{FW}(t, \mathbf{x}) = \sqrt{\hat{E}/m} \psi_S(t, \mathbf{x}), \quad (30)$$

gdzie  $\hat{E} = \sqrt{m^2 - \Delta}$ . Na podstawie (23) transformację FW można wyrazić bardziej bezpośrednio:

$$\psi_{FW}(t, \mathbf{x}) = \hat{U}_{FW} \psi(t, \mathbf{x}) \quad , \quad \hat{U}_{FW} = \frac{\hat{E} + \hat{\beta} \hat{H}_D}{\sqrt{2\hat{E}(m + \hat{E})}}, \quad (31)$$

gdzie występuje hamiltonian Diraca  $\hat{H}_D = i \hat{\alpha} \cdot \nabla + \hat{\beta} m$ , który jest tutaj zapisany za pomocą niekowariantnej wersji macierzy Diraca  $\hat{\beta} = \hat{\gamma}_0$ ,  $\hat{\alpha} = \hat{\gamma}_0 \hat{\gamma}$ . Wprowadzony operator  $\hat{U}_{FW}$  jest unitarny.

### Transformacja pola wektorowego z masą

Niech pole Proca  $A^\mu(x)$  spełnia równanie Kleina-Gordona z masą  $m$  i posiada zerową czterodivergencję. *Spoczynkową* wartość tego pola w danym układzie inercjalnym można zdefiniować następująco:

$$A_S^\mu(t, \mathbf{x}) = \Lambda^\mu_\nu(\hat{U}) A^\nu(t, \mathbf{x}), \quad (32)$$

gdzie  $\Lambda^\mu_\nu(\hat{U})$  jest macierzą pchnięcia lorentzowskiego z czteroprędkością  $\hat{U}$ , która jest operatorem zdefiniowanym równaniem (29). Przyjmując, że operator znaku częstości wynosi  $\hat{\epsilon} = i \partial_t / \hat{E}$  można na podstawie (16) wyliczyć składowe  $A_S^\mu$  i uzyskać:

$$A_S^0 \equiv 0 \quad , \quad \mathbf{A}_S = \mathbf{A} + \frac{1}{\hat{E}(m + \hat{E})} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}). \quad (33)$$

Łatwo jest przekształcić przestrzenną część *spoczynkowego* pola Proca do następującej postaci:

$$\mathbf{A}_S = \frac{m}{\hat{E}} \mathbf{A} + \frac{1}{\hat{E}(m + \hat{E})} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (34)$$

Transformację Foldy-Wouthuysena pola Proca można teraz zdefiniować równaniem:

$$\mathbf{A}_{FW}(t, \mathbf{x}) = \sqrt{2\hat{E}} \mathbf{A}_S(t, \mathbf{x}), \quad (35)$$

które prowadzi do wzoru:

$$\mathbf{A}_{FW} = \sqrt{2\hat{E}} \mathbf{A} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\hat{E}(m + \hat{E})}} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}). \quad (36)$$

Spełniona jest następująca tożsamość dla tzw. produktu skalarnego dwóch pól Proca  $A$  i  $A'$ :

$$- \int_{\Omega} * dx^\mu A_{(\pm)\nu}^* i \overleftrightarrow{\partial}_\mu A_{(\pm)}^\nu = \pm \int d^3\mathbf{x} \mathbf{A}_{(\pm)}^{*FW} \cdot \mathbf{A}_{(\pm)}'^{FW}. \quad (37)$$

### Transformacja czteropotencjału, a cechowanie Coulomba

Swobodne pole elektromagnetyczne może być opisane czteropotencjałem  $A^\mu(x)$ , którego delamercjan i czterodivergencja wynoszą zero. Niech umowny operator czteroprędkości będzie postaci:

$$\hat{U}^\alpha(\mu) = \hat{\epsilon} i\partial^\alpha / \mu, \quad (38)$$

gdzie  $\hat{\epsilon} = i\partial_t / \sqrt{-\Delta}$ , a  $\mu$  jest parametrem o wymiarze masy. Uogólnioną *spoczynkową* wartość czteropotencjału można zdefiniować w zadanym układzie następująco:

$$A_S^\alpha(t, \mathbf{x}) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \Lambda^\alpha_\beta(\hat{U}(\mu)) A^\beta(t, \mathbf{x}). \quad (39)$$

Rachunek oparty na (16) prowadzi do wzorów:

$$A_S^0 \equiv 0 \quad , \quad \mathbf{A}_S = \frac{1}{-\Delta} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (40)$$

Prawa strona drugiej równości jest wyrażeniem na potencjał wektorowy  $\mathbf{A}_{Coul.}$  w cechowaniu Coulomba, tzn. że:

$$\mathbf{A}_S \equiv \mathbf{A}_{Coul.}. \quad (41)$$

Warto wiedzieć, że powyższa identyczność ma miejsce tylko w klasycznej teorii pola. Transformacja czteropotencjału wzorowana na transformacji Foldy'ego-Wouthuysena jest tutaj definiowana następująco:

$$\mathbf{A}_{FW} = \sqrt{2\sqrt{-\Delta}} \mathbf{A}_S = \sqrt{2\sqrt{-\Delta}} \mathbf{A}_{Coul.} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-\Delta}} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (42)$$

Część I

Ujęcie historyczne





# Rozdział 1

## Historia zagadnienia operatora położenia

Historia zagadnienia relatywistycznego operatora położenia jest długa i ciekawa. Wielu autorów podało różne nierównoważne propozycje takich operatorów. Niektóre prace, takie jak WIGHTMANA [25], są obszerne i wykorzystują zaawansowane metody teorii reprezentacji grup.

### 1.1 Pierwszy etap rozwoju mechaniki kwantowej

Szczególna teoria względności została podana przez Alberta EINSTEINA w 1905 roku, zaś pełne sformułowanie mechaniki kwantowej nastąpiło ponad dwadzieścia lat później. Macierzowa mechanika kwantowa powstała w 1925 roku głównie za sprawą Wernera HEISENBERGA, współpracującego z Nielsem BOHREM<sup>1</sup>. W tym samym roku Max BORN i Pascual JORDAN wraz z HEISENBERGIEM oraz niezależnie Paul A.M. DIRAC wprowadzili kwantowy związek nieprzemienności pędu i położenia:

$$\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = i\hbar. \quad (1.1)$$

W roku 1926 N. BORN oraz N. WIENER znaleźli prostą reprezentację tego związku, w której operator położenia  $\hat{q}$  jest mnożeniem przez  $q$ , a  $\hat{p}$  jest operatorem różniczkującym  $-i\hbar\partial/\partial q$ . W tym samym roku Erwin SCHRÖDINGER opublikował swoje słynne równanie falowe. Kwadrat modułu występującej w nim funkcji falowej SCHRÖDINGER traktował jako pewną funkcję wagową opisującą cząstkę w przestrzeni. Ponadto podał On równanie ciągłości odpowiadające tej funkcji wagowej. Jednak jawną probabilistyczną interpretację tej funkcji podał BORN. Sformułował On również podstawy kwantowej teorii rozpraszania. Położeniowa interpretacja BORNA była szybko uogólniona dla pędu i innych wielkości przez Wolfganga PAULIEGO (w 1926 r.). W zasadzie na tym się kończy historia niereatywistycznego operatora położenia, którego teoria jest dość prosta<sup>2</sup>. Pewne trudności koncepcyjne może sprawiać jedynie zasada nieoznaczoności HEISENBERGA podana w 1927 roku.

---

<sup>1</sup>Przedstawione tutaj informacje o rozwoju podstaw mechaniki kwantowej były opracowane na podstawie książki Friedricha HUNDA *The history of Quantum Theory* [16].

<sup>2</sup>Mowa tu o aspektach fizycznych, gdyż w pełni ściśle matematycznie podejście oparte na operatorach rzutowych i operatorach gęstości lub trójkach GEL'FANDA rozwinęło się później i jest bardziej rozbudowane.

Relatywistyczna mechanika kwantowa w rozważanym okresie zaczyna dopiero powstawać. Równanie Kleina-Gordona zostało znalezione w 1926 niezależnie przez SCHRÖDINGERA, O. KLEINA, W. GORDANA i W.A. FOCKA. W następnym roku DIRAC znalazł równanie powszechnie znane jako równanie DIRACA. Pod koniec lat dwudziestych powstawały elementy elektrodynamiki kwantowej.

Jedne z pierwszych rozważań na temat relatywistycznej lokalizacji cząstek miały miejsce w kontekście tzw. drgawek elektronu (*Zitterbewegung*). W 1930 r. SCHRÖDINGER [24] zauważył, że średnia wartość położenia swobodnego elektronu nie zmienia się liniowo w czasie, tak jak w ruchu jednostajnym prostoliniowym, ale gwałtownie fluktuuje wokół takiej trajektorii na odległościach rzędu komptonowskiej długości fali elektronu  $\hbar/mc$ . W celu racjonalnego opisu tego zagadnienia wprowadził on pojęcie ruchu mikroskopowego i makroskopowego. Ruch makroskopowy jest uśrednionym po czasie ruchem mikroskopowym. W konsekwencji SCHRÖDINGER proponuje za operator położenia przyjąć operator położenia makroskopowego, który przybrał formę:

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{x} + i(\hat{\mathbf{p}} \hat{H}_D^{-2} - \hat{\boldsymbol{\alpha}} \hat{H}_D^{-1})/2. \quad (1.2)$$

Występuje tutaj hamiltonian<sup>3</sup> DIRACA  $\hat{H}_D = \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta}m$ , gdzie  $\hat{\mathbf{p}}$  jest operatorem pędu, zaś  $\hat{\beta}, \hat{\alpha}^i$  to macierze DIRACA o następujących własnościach antykomutacyjnych:

$$\{\hat{\alpha}^i, \hat{\alpha}^j\} = 2\delta^{ij}; \quad \{\hat{\beta}, \hat{\alpha}^i\} = 0; \quad \hat{\beta}^2 = 1. \quad (1.3)$$

Używany jest tutaj układ jednostek, w których  $\hbar = c = 1$ , natomiast sporadyczne występowanie stałych  $\hbar$  i  $c$  we wzorach podyktowane jest względami poglądowymi lub celem uproszczenia korespondencji z układem SI. Proponowany powyżej operator położenia  $\hat{\mathbf{R}}$  można znaleźć w podręcznikach A.S. DAWYDOWA [10] i W. GREINERA [13], gdzie jest on zdefiniowany jako *parzystą* część  $\mathbf{x}$ . Operator nazywa się *parzystym*, gdy stany o dodatniej energii przekształca w stany o dodatniej energii, a stany o ujemnej energii przekształca w stany o ujemnej energii. Innymi słowy operator *parzysty* nie zmienia znaku energii. Niech  $\hat{P}_+$  i  $\hat{P}_-$  oznaczają operatory rzutowania na stany odpowiednio o dodatniej i ujemnej energii:

$$\hat{P}_{\pm} = (1 \pm \hat{H}_D/\hat{E})/2, \quad (1.4)$$

gdzie  $\hat{E} = \sqrt{m^2 - \Delta}$  jest dodatnio określonym operatorem energii. Teraz *parzystą* część operatora  $\mathbf{x}$  oznaczaną za pomocą nawiasów kwadratowych można wyrazić w postaci:

$$[\mathbf{x}] = \hat{\mathbf{R}} = \hat{P}_+ \mathbf{x} \hat{P}_+ + \hat{P}_- \mathbf{x} \hat{P}_-. \quad (1.5)$$

W zasadzie powyższe wyrażenie zawiera dwa operatory położenia: operator położenia elektronu i operator położenia pozytonu. W dziedzinie funkcji o dodatnich częstościach występowałyby tylko jeden operator, który uprościłby się do postaci:

$$\hat{\mathbf{R}}_+ = \hat{P}_+ \mathbf{x} = \mathbf{x} + [\hat{P}_+, \mathbf{x}]. \quad (1.6)$$

Zaś w dziedzinie funkcji o ujemnych częstościach występowałyby analogiczny operator  $\hat{\mathbf{R}}_-$ . Łatwo wykazać, że:

$$\hat{\mathbf{R}}_{\pm} = \mathbf{x} + \frac{i\hat{\mathbf{p}}}{2\hat{E}^2} \mp \frac{i\hat{\boldsymbol{\alpha}}}{2\hat{E}}. \quad (1.7)$$

---

<sup>3</sup>Wszystkie hamiltoniany w tym rozdziale są odwracalne (nie posiadają zerowych wartości własnych).

Warto zauważyć, że pełny operator parzysty  $\hat{\mathbf{R}}$  nie jest sumą, ani średnią arytmetyczną operatorów  $\hat{\mathbf{R}}_+$  i  $\hat{\mathbf{R}}_-$ .

Wprowadzenie operatora  $\hat{\mathbf{R}}$  zamiast  $\mathbf{x}$  rozwiązuje problem *Zitterbewegung*, ale prowadzi do innej komplikacji. Okazuje się mianowicie, że składowe operatora  $\hat{\mathbf{R}}$  nie komutują. W takim opisie zatem nie można rozważać dowolnie dobrze zlokalizowanego elektronu. Zagadnienia tego typu oraz pewne fakty z kwantowej teorii pola spowodowały powstanie popularnej do dziś opinii, że w relatywistycznej mechanice kwantowej niemożliwa jest lokalizacja cząstki dokładniejsza od komptonowskiej długości fali. Niniejsza praca próbuje polemizować z tą opinią.

## 1.2 Środek masy-energii i operator Pryce'a

W 1935 roku Niels BORN i Leopold INFELD w pracy o kwantowaniu nieliniowej elektrodynamiki [9] zaproponowali ogólną definicję operatora położenia jako położenie środka masy-energii:

$$\hat{\mathbf{q}} = (\hat{H}^{-1}\hat{\mathbf{N}} + \hat{\mathbf{N}}\hat{H}^{-1})/2, \quad (1.8)$$

gdzie  $\hat{\mathbf{N}}$  jest operatorem momentu energii<sup>4</sup>:

$$\hat{\mathbf{N}} = \int \mathbf{x} \hat{T}_{00} d^3\mathbf{x}, \quad (1.9)$$

przy czym  $\hat{T}_{00}$  to składowa symetrycznego tensora energii-pędu  $\hat{T}_{\mu\nu}$ , nazywana gęstością hamiltonianu lub energii. Ostatnie dwa wzory można rozumieć w kontekście kwantowej teorii pola stanów jednocząstkowych albo zgodnie z formalizmem tzw. pierwszej kwantyzacji<sup>5</sup>, nazywanym czasami kwazirelatywistyczną mechaniką kwantową<sup>6</sup>. Dla ilustracji tego drugiego przypadku w uproszczonej nierelatywistycznej wersji warto podać przykład operatora gęstości hamiltonianu w zwykłej teorii SCHRÖDINGERA:

$$\hat{T}_{00}(\mathbf{x}) = \hat{\mathcal{H}}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2m}\nabla\delta^{(3)}(\mathbf{x})\nabla. \quad (1.10)$$

Operator gęstości hamiltonianu komutuje z  $\mathbf{x}$ , co zapewnia hermitowskość określonego  $\hat{\mathbf{N}}$ . Operator  $\hat{\mathbf{q}}$  można również przedstawić przy pomocy reprezentacji generatorów grupy POINCARÉGO w przestrzeni Hilberta, którymi są: czteropęd  $\hat{p}^\mu$  i tensor całkowitego momentu pędu  $\hat{J}^{\mu\nu}$ . Generatory te można wyrazić przez symetryczny tensor energii pędu następująco:

$$\hat{p}_\mu = \int_\Omega \hat{T}_{\mu\nu} * dx^\nu \quad ; \quad \hat{J}_{\mu\nu} = \int_\Omega (x_\mu \hat{T}_{\nu\rho} - x_\nu \hat{T}_{\mu\rho}) * dx^\rho, \quad (1.11)$$

gdzie  $\Omega$  jest dowolną trójwymiarową hiperpowierzchnią przestrzennopodobną, a  $*dx^\rho$  jest skierowaną trójformą objętości taką, że  $*dx^0 = d^3\mathbf{x}$ . Tutaj zerowa składowa czteropędu utożsamiana jest z hamiltonianem  $\hat{p}_0 = \hat{H}$ , a moment pędu liczony jest względem

---

<sup>4</sup>Momentem energii nazywa się też niekiedy wektor pchnięcia  $\hat{K}^i = \hat{J}^{i0} = \hat{N}^i - t\hat{p}^i$ , gdzie  $\hat{J}^{\mu\nu}$  jest tensorem momentu pędu. Można powiedzieć, że  $\hat{\mathbf{N}}(t)$  i  $\hat{\mathbf{K}}$  to ta sama obserwabla w dwóch różnych obrazach, odpowiednio HEISENBERGA i SCHRÖDINGERA.

<sup>5</sup>W zasadzie te dwa formalizmy powinny być tożsame, ale w teorii relatywistycznej różnią się one chociażby dodatnią określonością  $\hat{H}$ .

<sup>6</sup>Formalizm pierwszej kwantyzacji w kontekście polowym jest nazywany klasyczną teorią pola.

początku układu współrzędnych czasoprzestrzennych. Operator BORNA-IFELDA można teraz przepisać w postaci:

$$\hat{q}^\mu(t) = \{\hat{J}^{\mu 0} + t\hat{p}^\mu, \hat{H}^{-1}\}/2, \quad (1.12)$$

gdzie nawias klamrowy oznacza antykomutator, zaś składowa  $\hat{q}^0 = t$  jest tutaj dołączona tylko ze względów estetycznych, gdyż rozważany operator położenia nie jest wcale kowariantnym czterowektorem. Postać zależności od czasu w (1.12) pozwala przypuszczać, że operator BORNA-INFELDA jest zdefiniowany w obrazie HEISENBERGA. Prawdliwość tego przypuszczenia potwierdza reguła komutacji (1.16) operatora  $\hat{\mathbf{q}}$  z hamiltonianem podana dalej.

BORN i INFELD wykazali, że ich definicja o.p. (operatora położenia) dla cząstek o spinie 1/2 prowadzi do operatora SCHRÖDINGERA  $\hat{\mathbf{R}}$ <sup>7</sup>. Zwrócili oni także uwagę, że definicja o.p. **pociąga za sobą określenie operatorów prędkości, spinu i orbitalnego momentu pędu** (i vice versa). Wobec tego zdefiniowali oni wewnętrzny moment pędu (czyli spin) jako różnicę całkowitego momentu pędu  $\hat{\mathbf{J}} = (*\hat{J}^{i0}) = (\hat{J}^{23}, \hat{J}^{31}, \hat{J}^{12})$  i orbitalnego momentu pędu zdefiniowanego jako  $\hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{p}}$ , czyli:

$$\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{J}} - \hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{p}} \quad \text{lub} \quad \hat{s}^{kl} = \hat{J}^{kl} - \hat{q}^k \hat{p}^l + \hat{q}^l \hat{p}^k, \quad (1.13)$$

przy czym wektor spinu  $\hat{\mathbf{s}}$  jest dualny (w sensie trójwymiarowym) do antysymetrycznego tensora spinu  $\hat{s}^{kl}$ , tzn.  $\hat{s}^i = \varepsilon^{ijk} \hat{s}^{jk}/2$ . Hermitowskość zdefiniowanego spinu wynika ze związków komutacyjnych pędu i położenia. Do znalezienia tych związków można wykorzystać relacje komutacji generatorów grupy POINCARÉGO:

$$\begin{aligned} [\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] &= 0; \\ [\hat{J}_{\alpha\mu}, \hat{J}_{\nu\omega}] &= i g_{\{\alpha\omega} \hat{J}_{\mu\nu\}} \text{sum. cykl.}; \\ [\hat{p}_\alpha, \hat{J}_{\mu\nu}] &= i(g_{\alpha\mu} \hat{p}_\nu - g_{\alpha\nu} \hat{p}_\mu); \end{aligned} \quad (1.14)$$

przy czym prawa strona drugiego równania jest sumą czterech składników o cyklicznie permutowanych *żywych* wskaźnikach. Wyprowadzenia powyższych związków (oparte na regułach komutacji dla tensora energii-pędu) można znaleźć w pozycji [7]. Przydatny jest również wzór na komutator zawierający odwrotność operatora:

$$[\hat{A}^{-1}, \hat{B}] = -\hat{A}^{-1}[\hat{A}, \hat{B}]\hat{A}^{-1}. \quad (1.15)$$

Można teraz bez problemu wyliczyć komutator położenia i czteropędu:

$$[\hat{q}^k, \hat{p}^l] = i\delta^{kl} \quad ; \quad [\hat{\mathbf{q}}, \hat{H}] = i\hat{\mathbf{p}}/\hat{H}. \quad (1.16)$$

Są to w pełni zadawalające komutatory, w szczególności ten drugi prowadzi do poprawnej definicji prędkości w mechanice relatywistycznej. Mniej korzystnie przedstawia się sprawa innych komutatorów. Okazało się niestety, że wprowadzone przez BORNA, INFELDA współrzędne nie komutują. Komutatory składowych położenia zostały zgrabnie zapisane przy pomocy iloczynu wektorowego<sup>8</sup> i wyniosły:

$$\hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{q}} = -i\hat{\mathbf{s}}/\hat{H}^2 \quad \text{lub} \quad [\hat{q}^k, \hat{q}^l] = -i\hat{s}^{kl}/\hat{H}^2. \quad (1.17)$$

<sup>7</sup>Rzeczywiście przyjmując, że  $\hat{\mathbf{N}} = (\hat{H}\mathbf{x} + \mathbf{x}\hat{H})/2$  łatwo wykazać równoważność formuł (1.5) i (1.8). Mimo to używane są tutaj różne oznaczenia.

<sup>8</sup>Np. składowa  $(\hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{q}})^1 = [\hat{q}^2, \hat{q}^3]$ .

Komutatory te zostały przetłumaczone, nieco na wyrost, na zasadę nieoznaczoności położenia elektronu:

$$\Delta q^1 \Delta q^2 \geq \frac{\hbar^2}{4m^2}. \quad (1.18)$$

Ściśle zamiast znaku większości powinna znajdować się tutaj tylda, która oznaczałaby porównywalny rząd wielkości. Również związek komutacyjny wprowadzonego spinu nie był zgodny z oczekiwaniami ze standardowej teorii kwantowej i był zapisany w postaci:

$$\hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{s}} = i\hat{\mathbf{s}} - i\hat{H}^{-2}(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{p}})\hat{\mathbf{p}}. \quad (1.19)$$

W tym samym roku pod wpływem pracy BORNA i INFELDA istotnych postępów dokonał Moris H.L. PRYCE [22]. Zdefiniował on komutujące operatory współrzędnych oraz operator spinu o standardowych własnościach komutacji. Jego konstrukcja przebiegała jednak w innej kolejności niż BORNA-INFELDA. Mianowicie PRYCE wprowadził najpierw operator spinu, a później konsekwentnie operator położenia. Osiągnięcia PRYCE'A zostaną przedstawione poniżej w usystematyzowanej formie, ale podstawowe występujące tu obiekty są tożsame oryginalnym. W pierwszym kroku została wydzielona część spinowa całkowitego momentu pędu. W opisie kowariantnym tensor całkowitego momentu pędu  $\hat{J}_{\mu\nu}$  może być rozłożony na sumę tensora orbitalnego momentu pędu  $\hat{\Lambda}_{\mu\nu}$  i tensora spinu  $\hat{\Sigma}_{\mu\nu}$ . Stosowane będą również tensory dualne do tych, oznaczane gwiazdką HODGE'A i definiowane jako  $*\hat{J}_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\hat{J}^{\rho\sigma}/2$ , przy czym dla całkowicie antysymetrycznego symbolu przyjęta jest tutaj konwencja  $\varepsilon_{0123} = -1$ . Postulowany rozkład można teraz przeprowadzić stosunkowo prosto zauważając, że dualny tensor orbitalnego momentu pędu jest ortogonalny<sup>9</sup> do czteropędu (lub czteropędkości), niezależnie od postaci operatora położenia. Wobec tego zwężenie dualnego tensora całkowitego momentu pędu z czteropędnością charakteryzuje tylko część spinową tego tensora. Okazuje się, że to zwężenie jest czterowektorem PAULI-LUBAŃSKIEGO:

$$\hat{W}_\mu = *\hat{J}_{\mu\nu}\hat{u}^\nu, \quad (1.20)$$

gdzie czteropędność  $\hat{u}^\nu = \hat{p}^\nu/m$ , przy czym masę można zdefiniować równaniem:

$$m = \sqrt{\hat{p}_\mu\hat{p}^\mu}. \quad (1.21)$$

Zauważmy, że w definicji  $\hat{W}_\mu$  kolejność zwężonego iloczynu dualnego momentu pędu i czteropędkości nie odgrywa roli, dzięki czemu operator PAULI-LUBAŃSKIEGO jest hermitowski. Wynika to z trzeciego komutatora generatorów grupy POINCARÉGO, który się zeruje, gdy wszystkie trzy wskaźniki są różne. Również na podstawie tego komutatora można pokazać, że  $\hat{W}_\mu$  komutuje z czteropędem (lub czteropędnością). Czterowektor  $\hat{W}^\mu$  jest z definicji ortogonalny do czteropędkości. Wiadomo, że operator rzutu na podprzestrzeń ortogonalną do czteropędkości ma postać  $\hat{P}_{\mu\nu}^\perp = g_{\mu\nu} - \hat{u}_\mu\hat{u}_\nu$ . Można teraz zdefiniować dualny tensor spinu jako dualny tensor całkowitego momentu pędu z odjętą częścią ortogonalną do czteropędkości:

$$*\hat{\Sigma}_{\mu\nu} = *\hat{J}_{\mu\nu} - \hat{P}_{\mu\rho}^\perp\hat{P}_{\nu\sigma}^\perp(*\hat{J}^{\rho\sigma}) = \hat{W}_\mu\hat{u}_\nu - \hat{W}_\nu\hat{u}_\mu. \quad (1.22)$$

Na podstawie tego równania łatwo zauważyć, że zwykły tensor spinu (niedualny) jest ortogonalny do czteropędkości. Wychodząc z tego faktu można by przeprowadzić całą

---

<sup>9</sup>Tzn. że  $*\hat{\Lambda}_{\mu\nu}\hat{p}^\nu = 0$ , gdyż przyjmuje się, że tensor orbitalnego momentu pędu jest postaci biwektorowej  $\hat{\Lambda}_{\mu\nu} = \hat{Y}_\mu\hat{p}_\nu - \hat{Y}_\nu\hat{p}_\mu$ , gdzie  $\hat{Y}_\mu$  jest pewnym operatorem kojarzonym z położeniem.

konstrukcję od początku nie odwołując się do tensorów dualnych, ale równoważnie definiując tensor spinu jako ortogonalną do czteroprędkości część tensora całkowitego momentu pędu:

$$\hat{\Sigma}_{\mu\nu} = \hat{P}_{\mu\rho}^{\perp} \hat{P}_{\nu\sigma}^{\perp} \hat{J}^{\rho\sigma}. \quad (1.23)$$

We wzorze tym odgrywa rolę porządek operatorów, przy czym wystarczy, aby operatory rzutowe stały zawsze po tej samej stronie operatora momentu pędu, co zapewnia antysymetrię i hermitowskość tensora spinu. Tensor spinu można opisać dwoma wektorami: wektorem *relatywistycznego* spinu  $\hat{\Sigma} = (*\hat{\Sigma}^{i0}) = (\hat{\Sigma}^{23}, \hat{\Sigma}^{31}, \hat{\Sigma}^{12})$  oraz wektorem  $\hat{\Gamma} = (\hat{\Sigma}^{i0}) = \hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{W}}$ , gdzie  $\hat{\mathbf{u}}$ ,  $\hat{\mathbf{W}}$  to przestrzenne części czteroprędkości i czterowektora PAULI- -LUBAŃSKIEGO. Widać, że wektor  $\hat{\Gamma}$  znika tożsamościowo w układzie spoczynkowym, zatem tensor spinu może być opisany jednym niezależnym wektorem.

Ostatecznie PRYCE jako wektor spinu wprowadził spoczynkową wartość  $\hat{\Sigma}$  lub równoważnie spoczynkową wartość  $\hat{\mathbf{W}}$  lub  $\hat{\mathbf{s}}$ . Operator ten będzie nazywany *wektorem spinu spoczynkowego* i oznaczany symbolem dolara:

$$\hat{\mathcal{S}} = \hat{\mathbf{W}} + (1 + \hat{u}_0)^{-1} \hat{W}_0 \hat{\mathbf{u}}, \quad (1.24)$$

przy czym jeżeli jest używany formalizm pierwszej kwantyzacji należy zachować ostrożność, ograniczając się do stanów o dodatniej energii, co zapewnia odwracalność operatora  $1 + \hat{u}_0$ . Następnie PRYCE wychodząc z równania  $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{Q}} \times \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathcal{S}}$  znalazł nową definicję o.p.  $\hat{\mathbf{Q}}$ , którą można zapisać przy użyciu antykomutatora w postaci:

$$\hat{\mathbf{Q}} = \{\hat{\mathbf{N}} - (1 + \hat{u}_0)^{-1} \hat{\Gamma}, \hat{H}^{-1}\} / 2. \quad (1.25)$$

W wersji rozpisanej równanie to ma postać:

$$\hat{Q}^{\mu}(t) = \{t\hat{p}^{\mu} + \hat{J}^{\mu 0} - (1 + \hat{u}_0)^{-1} \hat{\Sigma}^{\mu 0}, \hat{H}^{-1}\} / 2, \quad (1.26)$$

przy czym jak łatwo się przekonać  $\hat{Q}^0 = t$ , co świadczy o konsystencji zdefiniowanego obiektu, ale nie o jego kowariantności. Powyższy wzór miałby zupełnie jednolitą formę, gdyby nie obecność zagadkowego czynnika  $(1 + \hat{u}_0)^{-1}$ , bez którego w definicji  $\hat{Q}^{\mu}$  występowałby tylko orbitalny moment pędu i czteropęd. Okazuje się jednak, że obecność tego czynnika jest kluczowa, ponieważ bez niego rozważany o.p. posiadałby identyczne związki komutacyjne<sup>10</sup> co operator  $\hat{X}^{\mu}$ , rozpatrywany dalej, którego składowe nie komutują. W wersji oryginalnej PRYCE podał wzór na  $\hat{\mathbf{Q}}$  w nieco innej formie odwołując się do wielkości wprowadzonych przez BORNA i INFELDA:

$$\hat{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{q}} + \frac{\hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{p}}}{m(m + \hat{E})}. \quad (1.27)$$

Autor omawianego artykułu nie podał interpretacji geometrycznej wprowadzonego spinu spoczynkowego  $\hat{\mathcal{S}}$ . Mimo to PRYCE odniósł ogromny matematyczny sukces znajdując obserwabla  $\hat{\mathbf{Q}}$  i  $\hat{\mathcal{S}}$  spełniające w pełni satysfakcjonujące reguły komutacyjne:

$$\hat{\mathcal{S}} \times \hat{\mathcal{S}} = i\hat{\mathcal{S}} \quad ; \quad \hat{\mathbf{Q}} \times \hat{\mathbf{Q}} = 0 \quad ; \quad [\hat{Q}^k, \hat{p}^l] = i\delta^{kl}. \quad (1.28)$$

Widać więc, że położeniowy operator PRYCE'A posiada definicję odwołującą się do pojęcia środka energii z subtelnie wyeliminowaną częścią spinową oraz pożądane własności

<sup>10</sup>Dotyczy to co najmniej tych komutatorów, które są dalej wypisane.

operatorowe (w sensie komutatorów). Operator  $\hat{Q}^\mu$  nie stanowi jednak czterowektora, ale jak się okaże dalej nie należy tego wymagać od o.p. Ponadto operator PRYCE'A nie jest dobrze określony dla cząstek bezmasowych ze spinem<sup>11</sup>. Fakt ten wynika bezpośrednio ze wzoru (1.27), w którym masa występuje w mianowniku, a wszystkie inne wielkości są nieosobliwe. Omawiana trudność jest konsekwencją nieistnienia układu spoczynkowego, a więc i spinu spoczynkowego  $\hat{\mathcal{S}}$  dla cząstek bezmasowych. Niekowariantny charakter tego ostatniego spinu jest również niezadowalający.

Po drugiej wojnie światowej PRYCE kontynuował badania nad o.p. i w 1948 roku opublikował pracę o relatywistycznym środku masy-energii [23]. W pracy tej autor dyskutuje kilka propozycji takiej definicji. Dwie z nich to  $\hat{\mathbf{q}}$  i  $\hat{\mathbf{Q}}$ , zaś kolejne dwie odwoływały się do spoczynkowego środka masy-energii rozważanego między innymi przez FOKKERA [11] w 1929 roku. Przez spoczynkowy środek masy-energii należy rozumieć środek energii w sensie BORNA-INFELDA obliczony w układzie spoczynkowym. Można go wyrazić w notacji kowariantnej następująco:

$$\hat{Y}^\mu(\tau) = \tau \hat{u}^\mu + \{\hat{J}^{\mu\nu}, \hat{u}_\nu\}/2m, \quad (1.29)$$

gdzie  $\hat{u}^\mu$  jest operatorem czteropędkości, a  $\tau$  czasem własnym, traktowanym tutaj jako zwykły skalar (a nie operator). Podstawowe związki komutacyjne dla tego operatora mają postać:

$$[\hat{Y}_\mu, \hat{p}_\nu] = -i\hat{P}_{\mu\nu}^\perp = -i(g_{\mu\nu} - \hat{u}_\mu \hat{u}_\nu) \quad ; \quad [\hat{Y}_\mu, \hat{Y}_\nu] = i\hat{J}_{\mu\nu}/m^2. \quad (1.30)$$

Niestety nie są to związki komutacyjne, jakich można by oczekiwać od operatora położenia. Pierwszy związek nie koresponduje z analogicznym związkiem nierelatywistycznym, zaś wynik drugiego komutatora zależy od punktu względem którego liczony jest moment pędu. Przykład ten jest argumentem na to, że nie należy wymagać, aby o.p. był wielkością kowariantną. Mimo to operator  $\hat{Y}^\mu$  może zostać użyty do wyrażenia kowariantnego orbitalnego momentu pędu:

$$\hat{\Lambda}_{\mu\nu}(\tau_0) = \hat{Y}_\mu(\tau_0)\hat{p}_\nu - \hat{Y}_\nu(\tau_0)\hat{p}_\mu, \quad (1.31)$$

gdzie  $\tau_0$  jest dowolnie wybranym czasem własnym. Natomiast kowariantny wewnętrzny moment pędu równy różnicy całkowitego i orbitalnego momentu pędu przy pomocy wzorów na generatory  $\hat{J}_{\mu\nu}$ ,  $\hat{p}_\mu$  może być zapisany w postaci:

$$\hat{\Sigma}_{\mu\nu} = \int_{\Omega} [(x_\mu - \hat{Y}_\mu)\hat{T}_{\nu\rho} - (x_\nu - \hat{Y}_\nu)\hat{T}_{\mu\rho}] * dx^\rho, \quad (1.32)$$

gdzie obszar jak i forma objętości są określone w ten sam sposób, co we wzorze np. na generator  $\hat{p}_\mu$ . Powyższe równanie jest podstawą prostej interpretacji tensora spinu, według której jest on momentem pędu obliczonym względem kowariantnego spoczynkowego środka masy-energii.

Następnie PRYCE reparametryzuje operator  $\hat{Y}^\mu(\tau)$ , przechodząc od czasu własnego  $\tau$  do czasu  $t$  w pewnym ustalonym układzie odniesienia. W teorii klasycznej, w której  $Y^\mu(\tau)$  opisuje prostą w czasoprzestrzeni taka reparametryzacja nie narusza współmienniczości. Inaczej przedstawia się sytuacja w wersji operatorowej, w której reparametryzacja łamie współmienniczość o.p. lub innymi słowy prowadzi do nowego operatora. Można się o tym przekonać przeprowadzając pełną konstrukcję. W pierwszym kroku należy założyć, że czas własny jest hermitowskim operatorem  $\hat{\tau}$ , a nowy o.p.  $\hat{X}^\mu$  ma postać operatora  $\hat{Y}^\mu$ ,

<sup>11</sup>Bardziej szczegółowo przypadek takich cząstek będzie dyskutowany dalej.

w którym czas własny i czteroprędkość są uporządkowane symetrycznie dla zapewnienia hermitowskości, czyli  $\hat{X}^\mu(\hat{\tau}) = \{\hat{\tau}, \hat{u}^\mu\}/2 + \{\hat{J}^{\mu\nu}, \hat{u}_\nu\}/2m$ . Następnie należy rozwiązać równanie  $\hat{X}^0(\hat{\tau}) = t$  ze względu na czas własny. Ostatecznie poszukiwany operator w funkcji czasu  $t$  (skalarne) ma formę:

$$\hat{X}^\mu(t) = t\hat{p}^\mu\hat{H}^{-1} + \{\hat{J}^{\mu\nu}, \hat{p}_\nu\}/2m^2 + \{\hat{J}_{\nu 0}, \hat{p}^\nu\hat{p}^\nu\hat{H}^{-1}\}/2m^2. \quad (1.33)$$

Operatory  $\hat{Y}^\mu(\tau)$ ,  $\hat{X}^\mu(t)$  będą dalej nazywane o.p. FOKKERA odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju. Warto podkreślić, że PRYCE w zasadzie nie wyodrębnił tego pierwszego operatora nie zdając sobie do końca sprawy, że operator  $\hat{X}^\mu(t)$  nie jest na poziomie kwantowym kowariantny. Ten ostatni fakt ostatecznie potwierdzają związki komutacyjne. Przykładowo komutator rozważanego o.p. z czteroprędką nie jest wielkością kowariantną, ale mimo to ma on satysfakcjonującą postać:

$$[\hat{X}^k, \hat{p}^l] = i\delta^{kl} \quad ; \quad [\hat{\mathbf{X}}, \hat{H}] = i\hat{\mathbf{p}}/\hat{H}. \quad (1.34)$$

Jak można się domyślać, współrzędne FOKKERA nie komutują:

$$\hat{\mathbf{X}} \times \hat{\mathbf{X}} = i\hat{\mathbf{s}}/m^2 \quad \text{lub} \quad [\hat{X}^k, \hat{X}^l] = i\hat{s}^{kl}/m^2, \quad (1.35)$$

gdzie prawa strona wyrażona jest za pomocą spinu BORNA-INFELDA. Mimo braku komutacji składowych operator FOKKERA drugiego rodzaju jest w niektórych podręcznikach przedstawiany jako poprawny operator położenia.

Operatory FOKKERA  $\hat{\mathbf{X}}$  i  $\hat{\mathbf{Y}}$  tracą sens dla cząstek bezmasowych ze spinem. PRYCE stwierdził, że w tym przypadku nie istnieje również operator  $\hat{\mathbf{Q}}$  o komutujących składowych. Ciekawostką jest jednak fakt, że jawne wzory na ten operator zarówno w przypadku fermionów jak i bozonów formalnie mają sens nawet dla  $m = 0$  (patrz np. wzór (1.44)). Pozorna sprzeczność tkwi w tym, że tak naprawdę przypadek cząstek bezmasowych to inna teoria (z inną liczbą stopni swobody), wymagająca osobnego rozpatrzenia. PRYCE rozpatrzył osobno przypadek fotonu i podał dla niego operator położenia typu BORNA-INFELDA:

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{x} - \frac{i\hat{\mathbf{p}}}{2\hat{p}^2} + \frac{\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\boldsymbol{\tau}}}{\hat{p}^2}, \quad (1.36)$$

gdzie  $\hat{\tau}^i$  to pewne macierze spinu, a  $\hat{p} = \sqrt{-\Delta}$ . PRYCE nie podał osobnej analizy przypadku bezmasowych fermionów. Jeżeli jednak podstawimy  $m = 0$  do wzoru na o.p. fermionu, podanego przez PRYCE'A, to otrzymamy:

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{x} + \frac{\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{S}}}{\hat{p}^2}, \quad (1.37)$$

gdzie  $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\boldsymbol{\alpha}} \times \hat{\boldsymbol{\alpha}}/4i$  jest zwykłym macierzowym operatorem spinu. W dalszej części tej pracy okaże się czy powyższy operator uzyskany w uproszczony sposób jest wyliczony prawidłowo.

Innym istotnym elementem pracy PRYCE'A z 1948 r. było zastosowanie opisanych definicji dla elektronu oraz dyskusja transformacji unitarnej pola DIRACA, po której operator  $\hat{\mathbf{Q}}$  będzie diagonalny. Jednak w części podsumowującej pracę PRYCE opowiada się za kowariantnym (jak mniemał) o.p.  $\hat{X}(t)$  i co za tym idzie fundamentalną nieoznaczonością położenia cząstek ze spinem rzędu komptonowskiej długości fali. Oznacza to, że nie doceniał on dostatecznie wagi wprowadzonego przez siebie operatora  $\hat{\mathbf{Q}}$ .



### 1.3 Osiągnięcia Newtona i Wignera oraz Foldy'ego i Wouthuysena

W 1949 roku pracę na temat lokalizacji układów elementarnych opublikowali T.D. NEWTON i E.P. WIGNER [21]. Autorzy wychodząc z rozważań natury teorio-grupowej doszli do następującej postaci o.p. w przedstawieniu pędowym dla cząstki bezspinowej:

$$\hat{Q}^k = -i \left( \frac{\partial}{\partial p_k} + \frac{p^k}{2E^2} \right), \quad (1.38)$$

gdzie  $p_k = -p^k$ , a  $E = +\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ , gdyż była rozważana jedynie dodatnia powłoka masy. Taką postać o.p. można również łatwo uzyskać obliczając hermitowską część zwykłego o.p.  $-i\partial/\partial p_k$ , jeśli skorzystać z niezmienniczej miary objętości w przestrzeni pędowej. Ponadto bezpośrednim rachunkiem można sprawdzić, że ten operator jest tożsamy operatorowi PRYCE'A<sup>12</sup>, co zresztą zostało zaznaczone w omawianej pracy. NEWTON i WIGNER podali również uogólny wzór na operator położenia dla cząstek o dowolnym spinie połówkowym  $s$ :

$$\hat{Q}^k = \hat{\Pi} \left[ \prod_{a=1}^{2s} (1 + \hat{\gamma}_a^0) \right] \frac{E^{2s+1/2}}{(E+m)^s} \left( -i \frac{\partial}{\partial p_k} \right) \frac{E^{-1/2}}{(E+m)^s} \hat{\Pi}, \quad (1.39)$$

gdzie  $\{\hat{\gamma}_a^\mu\}$  to  $8s$  uogólnionych macierzy DIRACA, natomiast  $\hat{\Pi}$  to operator rzutu na przestrzeń rozwiązań uogólnionego równania DIRACA<sup>13</sup>:

$$\hat{\Pi} = \prod_{a=1}^{2s} (\hat{\gamma}_a^\mu p_\mu + m) \hat{\gamma}_a^0 / 2E. \quad (1.40)$$

Okazało się, że np. dla  $s = 1/2$  wprowadzony o.p. jest znowu równoważny (według autorów) operatorowi PRYCE'A, jeżeli ograniczyć się do stanów o dodatniej energii. NEWTON i WIGNER napotkali na spore trudności przy próbie podania operatora położenia fotonu. Ponadto stwierdzili oni, że jeżeli jakaś cząstka jest zlokalizowana w punkcie czasoprzestrzennym w jednym układzie, to nie będzie ona zlokalizowana w innym układzie współrzędnych.

Praca NEWTONA i WIGNERA była podstawą dla wielu późniejszych matematycznych prac o operatorze położenia. Z ważniejszych należy wymienić tu obszerny artykuł A.S. WIGHTMANA *O lokalizacji układów kwantowomechanicznych* [25] z 1962 roku. Również w latach sześćdziesiątych nawiązywali do tej pracy G.W. MACKEY [20] oraz M.J. LUNN [19]. Pewną teorię operatora położenia cząstek bezmasowych podali E. ANGELOPOULOS, F. BAYEN i M. FLATO [1] w 1974 roku. Podstawą tych matematycznych prac było twierdzenie o nazwie *imprimitivity theorem*, którego najogólniejsza wersja została udowodniona przez MACKEY'A. Twierdzenie to dotyczy reprezentacji podgrup w przestrzeni HILBERTA, np. reprezentacji euklidesowej podgrupy grupy POINCARÉGO. Więcej szczegółów na temat tego twierdzenia i fizycznych zastosowań można znaleźć w podręczniku Asima O. BARUTA i Ryszarda RĄCZKI [4] do teorii grup (1977r.).

Bardziej intuicyjne fizycznie podejście przedstawili Leslie L. FOLDY i Siegfried A. WOUTHUYSEN [12] w 1950 roku. Ich praca była bezpośrednią kontynuacją rozważanej przez

<sup>12</sup>Operator PRYCE'A dla cząstki bezspinowej jest równoważny o.p. BORNA-INFELDA.

<sup>13</sup>Mowa o równaniu BARGMANNA-WIGNERA  $\hat{\gamma}_a^\mu \hat{p}_\mu \psi = m\psi$ .

PRYCE’A transformacji unitarnej, która diagonalizuje operator  $\hat{\mathbf{Q}}$ . W dodatku N6 transformacja Foldy’ego-Wouthuysena została zdefiniowana przy pomocy specjalnego pchnięcia lorentzowskiego. Zadaniem tej transformacji jest odseparowanie od siebie rozwiązań równania DIRACA o dodatnich i ujemnych energiach. Transformacja ta ma postać:

$$\psi_{FW} = \hat{U}_{FW}\psi, \quad \text{gdzie} \quad \hat{U}_{FW} = \frac{\hat{E} + \hat{\beta}\hat{H}_D}{\sqrt{2\hat{E}(m + \hat{E})}}, \quad (1.41)$$

przy czym  $\psi_{FW}$  jest przetransformowanym polem DIRACA,  $\hat{E} = +\sqrt{m^2 - \Delta}$ , a  $\hat{\beta}$  jest jedną z macierzy DIRACA. Równanie DIRACA po tej transformacji przyjmuje bardziej zbliżoną formę do równania SCHRÖDINGERA na funkcję falową:

$$i\partial_t\psi_{FW} = \hat{\beta}\sqrt{m^2 - \Delta}\psi_{FW}. \quad (1.42)$$

Autorzy zauważyli, że w nowej reprezentacji operator PRYCE’A jest zwykłym operatorem mnożenia przez  $\mathbf{x}$ , tzn. że:

$$\hat{U}\hat{\mathbf{Q}}\hat{U}^{-1} = \mathbf{x} \quad (1.43)$$

Mimo iż cała układanka zaczęła tworzyć jedną całość FOLDY i WOUTHUYSEN nazwali operator  $\hat{\mathbf{Q}}$  mało odważnie *mean position*, rezerwując termin *position* dla operatora, który w standardowej reprezentacji jest mnożeniem przez  $\mathbf{x}$ . *Mean position* wyrazili w standardowej reprezentacji w formie:

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{x} + \frac{i\hat{\beta}\hat{\boldsymbol{\alpha}}}{2\hat{E}} + i\frac{\hat{E}(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \times \hat{\boldsymbol{\alpha}}) \times \hat{\mathbf{p}} - 2\hat{\beta}(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}})\hat{\mathbf{p}}}{4\hat{E}^2(\hat{E} + m)}, \quad (1.44)$$

przy czym operator  $\hat{\mathbf{Q}}$  jest tu przedstawiony w obrazie SCHRÖDINGERA. W identycznej formie operator położenia elektronu został przedstawiony przez PRYCE’A w pracy z 1948 r. Istotnym argumentem FOLDY’EGO i WOUTHUYSENA na rzecz *mean position* była postać prędkości. Według starego operatora *position* operatorem prędkości byłaby  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ . Ponieważ operator ten nie jest stałą ruchu oraz jego kwadrat jest jedyneką<sup>14</sup>, to nie może on być sensownym operatorem prędkości. Natomiast pochodna czasowa *mean position* wyraża się takim samym równaniem co w relatywistycznej mechanice klasycznej<sup>15</sup>:

$$\frac{d\hat{\mathbf{Q}}(t)}{dt} = i[\hat{\mathbf{Q}}, \hat{H}_D] = \frac{\hat{\mathbf{p}}}{\hat{H}_D}. \quad (1.45)$$

Kwadrat takiej prędkości nie jest większy od jedynki, czyli prędkości światła.

## 1.4 Przegląd wybranych współczesnych prac o lokalizacji cząstek

O operatorach położenia Henri BACRY napisał krótką książkę *Localizability and Space in Quantum Physics* [2] wydaną w 1988 roku. W tym samym roku autor ten opublikował pracę *The position operator revisited* [3] nawiązującą do jego książki. BACRY reprezentuje alternatywne podejście starając się forsować położeniowe operatory *a la* SCHRÖDINGER

<sup>14</sup>Oznaczałoby to, że elektron porusza się z prędkością światła.

<sup>15</sup>Taką własność mają również o.p.  $\hat{\mathbf{R}}$  i  $\hat{\mathbf{q}}$ .

czy BORN-INFELD. To podejście zdaniem autora umożliwia definicję o.p. dla fotonów i cząstek ze skrętnością. BACRY konkluduje dalej, że ta cecha uniwersalności takich o.p. jest argumentem na ich poprawność. Ponadto, podobnie jak inni badacze, stara się On oprzeć swoje propozycje na generatorach grupy POINCARÉGO. Dla bezmasowych fermionów BACRY podaje następujący o.p.:

$$\hat{\mathbf{R}}_{\pm} = \mathbf{x} + \frac{i\hat{\mathbf{p}}}{2\hat{p}^2} \mp \frac{i\hat{\boldsymbol{\sigma}}}{2\hat{p}}, \quad (1.46)$$

gdzie  $\sigma^i$  to macierze PAULIEGO. Jeżeli uwzględnimy operator znaku w postaci  $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}/\hat{p}$ , to można pokazać, że powyższy o.p. ma taką samą postać jak operator (1.37) wynikający z pracy PRYCE'A<sup>16</sup>. Dla fotonu BACRY proponuje przyjęcie *transwersalny* o.p., tzn. taki, który nie narusza warunku bezźródłowości wektorowej funkcji falowej. Taki operator położenia fotonu przybrał formę:

$$\hat{\mathbf{R}}_{\perp} = \mathbf{x} + \frac{\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{S}}}{\hat{p}^2}, \quad (1.47)$$

gdzie  $(S^i)^{jk} = -i\varepsilon^{ijk}$  to macierze spinu. Mimo, że podany przez BACRYGO operator jest transwersalny, to nie jest on operatorem parzystym, gdyż brakuje w nim członu  $-i\hat{\mathbf{p}}/2\hat{p}^2$  (patrz wzór (1.36)). Brak tego członu byłby uzasadniony w reprezentacji funkcji falowej fotonu danej przez (1.49), ale BACRY pracował w reprezentacji (1.48). Pod koniec omawianej pracy autor podaje klasę funkcji własnych zetowej składowej o.p. fotonu.

O operatorach położenia napisano więcej prac, z których najnowsze zostały opublikowane już w XXI wieku. Niektóre z nowszych prac dotyczą dotychczas niedostatecznie zbadanego aspektu lokalizacji cząstek bezmasowych. Przykładem mogą być tutaj prace Iwo BIAŁYNICKIEGO-BIRULI [5] i [6]. Pierwsza z nich była opublikowana w 1993 roku i dotyczy funkcji falowej fotonu, w szczególności w reprezentacji położeniowej. Jak wiadomo funkcja taka wiąże się z położeniową gęstością prawdopodobieństwa, a zatem i z operatorem położenia. Szerzej tego typu aspekty związane z o.p. będą rozpatrywane w następnym rozdziale. Natomiast praca [6] z 1998 roku dotyczy *wykładniczej* lokalizacji fotonów. W pracy tej rozważone są stany fotonowe, opisane zespolonym wektorem HERTZA, którego zależność od tzw. *światlnych* współrzędnych  $t \pm |\mathbf{x}|$ , liczonych względem średniego położenia fotonu, ma charakter wykładniczy. Omawiana praca, podobnie jak poprzednia, częściowo odnosi się do znacznie starszej pracy L.D. LANDAU'A i Z. PEIERLSA [18] z 1930 roku, w której autorzy proponują nielokalną funkcję falową fotonu. Aby przedstawić definicję tej funkcji wygodnie jest wprowadzić zespolone natężenie RIEMANNA-SILBERSTEINA pola elektromagnetycznego:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{E} + i\mathbf{B}), \quad (1.48)$$

gdzie  $\mathbf{E}$  to wektor natężenia pola elektrycznego, a  $\mathbf{B}$  to wektor indukcji pola magnetycznego. Bardziej bezpośrednio potrzebna jest następująca zmodyfikowana postać tego zespolonego pola:

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{-\Delta}} \left[ \mathbf{E}(\mathbf{x}) + i\mathbf{B}(\mathbf{x}) \right] = \pi \int \frac{d^3\mathbf{x}'}{(2\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)^{5/2}} \mathbf{F}(\mathbf{x}'). \quad (1.49)$$

<sup>16</sup>Przy czym utożsamiamy macierze spinu, które w jednej teorii mają rozmiar 4x4, a w drugiej 2x2.

W drugiej części tej pracy magisterskiej wielkości powyższego typu są nazywane obiektami *heterowariantnymi*<sup>17</sup>. W teorii kwantowej polu  $\mathcal{F}$  odpowiada operator  $\hat{\mathcal{F}}$ , a funkcja falowa LANDAU’A-PEIERLSA jest elementem macierzowym tego operatora policzonym na stanie próżni i zadanym stanie jednofotonowym.

W 2001 roku szczegółową pracę [15] na temat operatora położenia fotonu opublikowali Margaret HAWTON i Wiliam E. BAYLIS. Punktem wyjścia w tej pracy jest operator PRYCE’A zapisany w postaci:

$$\hat{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{q}} + \frac{\hat{\mathbf{S}} \times \hat{\mathbf{p}}}{\hat{E}(m + \hat{E})}, \quad (1.50)$$

gdzie  $\hat{\mathbf{q}}$  to operator środka energii BORNA-INFELDA, a  $\hat{\mathbf{S}}$  to spoczynkowy spin PRYCE’A. Widać, że operator PRYCE’A w tej postaci byłby dobrze określony dla  $m = 0$ , gdyby dobrze określony był spin  $\hat{\mathbf{S}}$ . Wobec tego zamiast spinu  $\hat{\mathbf{S}}$  (który dla fotonów nie ma sensu) warto użyć macierzowego operatora spinu dla cząstek o spinie 1, znanego z mechaniki kwantowej. Właśnie w ten sposób postąpili HAWTON i BAYLIS. Okazało się jednak, że składowe tak otrzymanego operatora nie komutują. Mimo to autorzy poszli dalej modyfikując nieco ten operator, otrzymując na końcu operator o pożądanym związkach komutacyjnych, takich samych, jak dla wcześniej rozpatrywanego operatora PRYCE’A  $\hat{\mathbf{Q}}$ . Publikacja [15] nie zawiera jednak żadnego dostatecznie jawnego wzoru wyrażającego proponowany operator, co znacznie utrudnia weryfikację jednoznaczności i niezależności od cechowania tego operatora.

Mimo tych wszystkich cząstkowych sukcesów do dziś jedna z najbardziej podstawowych wielkości fizycznych (położenie) nie posiada powszechnie przyjętego i dostatecznie nieskomplikowanego opisu matematycznego w ramach relatywistycznej mechaniki kwantowej, nawet dla teorii bez oddziaływania.

## 1.5 Podsumowanie

W powyższej analizie historycznej rozpatrzono pięć propozycji hermitowskich operatorów położenia  $\hat{\mathbf{R}}$ ,  $\hat{\mathbf{q}}(t)$ ,  $\hat{\mathbf{Q}}(t)$ ,  $\hat{\mathbf{X}}(t)$ ,  $\hat{Y}^\mu(\tau)$ , przy czym operator PRYCE’A  $\hat{\mathbf{Q}}(t)$  wprowadzany był na co najmniej trzy sposoby. Historycznie pierwszym z wymienionych operatorów był operator SCHRÖDINGERA  $\hat{\mathbf{R}}$ , który okazał się równoważny operatorowi  $\hat{\mathbf{q}}$ . Heisenbergowski operator BORNA-INFELDA  $\hat{\mathbf{q}}(t)$  jest operatorem środka energii w dosłownym tego słowa znaczeniu. Jego atutem jest dobra określoność dla cząstek bezmasowych. Z kolei operatory FOKKERA  $\hat{Y}^\mu(\tau)$  i  $\hat{\mathbf{X}}(t)$  opisują środek energii w układzie spoczynkowym. Ten pierwszy operator jest kowariantny i służy do wyrażenia w zgrabnej formie kowariantnego tensora orbitalnego momentu pędu. Jednak jako kwantowomechaniczny operator położenia zdecydowanie na pierwszy plan wysuwa się równoważnie zdefiniowany przez PRYCE’A, NEWTONA i WIGNERA oraz FOLDY’EGO i WOUTHUYSENSA operator  $\hat{\mathbf{Q}}(t)$ . Jego najważniejszą własnością jest przemienność składowych. Niestety, zgodnie z PRYCEM, operator o tej własności nie istnieje dla cząstek bezmasowych ze spinem. Niemniej jednak HAWTON i BAYLIS polemizują z tą opinią na przykładzie fotonu.

Warto podkreślić, że większość rozważanych o.p. była zdefiniowana tylko za pomocą hilbertowskiej reprezentacji generatorów grupy POINCARÉGO tzn.  $\hat{p}^\mu$  i  $\hat{J}^{\mu\nu}$ .

<sup>17</sup>Zależne od współrzędnych przestrzennych obiekty *heterowariantne* mają zawsze (w przyjętych jednostkach) wymiar  $m^{-3/2}$ .

Zagadnienie relatywistycznego operatora położenia nie zostało w pełni wyczerpane. Przede wszystkim brakuje ujednoczenia i uproszczenia opisu matematycznego. Ponadto należałoby określić (jeśli istnieje) relatywistyczny prąd gęstości prawdopodobieństwa położenia dla różnych cząstek i zbadać jego własności. Również operatory spinu, wykorzystywane w definiowaniu operatorów położenia, posiadają wady np. niekowariatność. Rozważane obiekty spinowe mają zbyt klasyczny rodowód odwołujący się do klasycznie rozumianego własnego momentu pędu. Nadanie im cech operatorowych niewiele tutaj zmienia. Prawidłowe kwantowopolowe operatory spinu można uzyskać np. na podstawie twierdzenia NOETHER, a wynik nie koniecznie będzie się pokrywał z rozważanymi tutaj operatorami.

Poza tym nie zostało w pełni przejrzyste rozpatrzone zagadnienie jednocząstkowości o.p. w ścisłym znaczeniu tego słowa, tzn. z rozróżnieniem cząstek i antycząstek. Zgodnie z tym dla cząstek naładowanych powinny istnieć dwa operatory położenia, np. dla elektronów ( $p_0 > 0$ ) i pozytonów ( $p_0 < 0$ ). Poza tym należałoby całą teorię opisać konsekwentnie w języku jednocząstkowych stanów skwantowanych pól.

Również do końca nie jest jasne zagadnienie operatora położenia cząstek bezmasowych ze spinem. W przypadku fotonu PRYCE, BACRY oraz HAWTON i BALIS podali nierównoważne operatory położenia. Wobec tego pojawia się pytanie dlaczego operator położenia nie jest zdefiniowany uniwersalnie, bez wyróżniania przypadku z zerową masą.

Należy podkreślić, że cała niniejsza część pracy dotyczy jedynie teorii bez oddziaływania.



## Część II

Operator położenia i funkcje falowe  
fokowskich stanów kwantowych pól  
swobodnych





# Rozdział 2

## Krótkie wprowadzenie

W niniejszej części pracy zostanie podana konstrukcja funkcji falowej w *naturalnej*<sup>1</sup> reprezentacji położeniowej w ramach formalizmu drugiej kwantyzacji. Ważną cechą takiej funkcji falowej jest to, że przy jej pomocy iloczyn skalarny dwóch stanów jednocząstkowych wyraża się w identyczny sposób jak w teorii nierelatywistycznej. Jeżeli  $\Psi_1(\mathbf{x})$  i  $\Psi_2(\mathbf{x})$  są funkcjami falowymi pewnych dwóch jednocząstkowych stanów, to iloczyn skalarny tych dwóch stanów może być zapisany w postaci:

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int d^3\mathbf{x} \Psi_1^*(\mathbf{x}) \Psi_2(\mathbf{x}). \quad (2.1)$$

Drugim warunkiem na reprezentację położeniową i operator położenia  $\hat{\mathbf{Q}}$  jest żądanie, aby elementy macierzowe tego operatora wyrażały się następująco:

$$\langle \Psi_1 | \hat{\mathbf{Q}} | \Psi_2 \rangle = \int d^3\mathbf{x} \Psi_1^*(\mathbf{x}) \mathbf{x} \Psi_2(\mathbf{x}). \quad (2.2)$$

Powyzsza forma elementu macierzowego operatora położenia z reguły określa jego postać w reprezentacji położeniowej, w której powinien być on operacją mnożenia przez  $\mathbf{x}$ <sup>2</sup>:

$$\{\hat{\mathbf{Q}}\}_\Psi \Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \Psi(\mathbf{x}), \quad (2.3)$$

gdzie nawias klamrowy z indeksem dolnym określa konkretną reprezentację zawartego w nim operatora. Wprowadzone trzy warunki są jeszcze zbyt ogólne ponieważ dotyczą one dowolnego operatora wektorowego o widmie ciągłym i komutujących składowych. W celu nadania operatorowi  $\hat{\mathbf{Q}}$  pożądanego charakteru należy dokonać utożsamienia zmiennych  $x^i$ , występujących we wzorach (2.1)-(2.3), ze współrzędnymi przestrzennymi. Utożsamienie to będzie oczywiste, jeżeli definicja funkcji falowej  $\Psi(\mathbf{x})$  odnosić się będzie do operatora pola  $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ .

Widać zatem, że zagadnienie znalezienia operatora położenia zostało sprowadzone do konstrukcji funkcji falowej w specjalnej reprezentacji położeniowej, nazywanej w tej pracy reprezentacją *heterowariantną*. To drugie zadanie będzie dalej rozwiązane w oparciu o położeniowe operatory anihilacji  $\hat{a}_{\mathbf{x}}$  i kreacji  $\hat{a}_{\mathbf{x}}^\dagger$  cząstki w punkcie  $\mathbf{x}$  o „unormowanym” komutatorze:

$$[\hat{a}_{\mathbf{x}}, \hat{a}_{\mathbf{x}'}^\dagger] = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.4)$$

---

<sup>1</sup>Tzn. korespondującej wraz z prawami transformacyjnymi z analogiczną funkcją falową w teorii nierelatywistycznej.

<sup>2</sup>Zagadnienie to komplikują się w przypadku, gdy na funkcję falową narzucone są pewne więzy.

Definicja operatora  $\hat{a}_{\mathbf{x}}$  musi opierać się na operatorze pola.

W przypadku cząstek z niezerowym spinem należy uwzględnić spinowe stopnie swobody w ten sposób, aby heterowariantne operatory anihilacji i kreacji spełniały związek:

$$\{\hat{a}_{\mathbf{x},\sigma}, \hat{a}_{\mathbf{x}',\sigma'}^\dagger\}_s = \delta_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.5)$$

gdzie  $\{, \}_s$  jest komutatorem dla bozonów, a antykomutatorem dla fermionów, zaś  $\sigma$  i  $\sigma'$  indeksują spinowe stopnie swobody. Okazuje się, że związki typu (2.5) są silniejszym warunkiem na reprezentację heterowariantną, niż warunki postaci:

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \sum_{\sigma} \int d^3\mathbf{x} \Psi_1^*(\mathbf{x}, \sigma) \Psi_2(\mathbf{x}, \sigma) \quad , \quad \langle \Psi_1 | \hat{\mathbf{Q}} | \Psi_2 \rangle = \sum_{\sigma} \int d^3\mathbf{x} \Psi_1^*(\mathbf{x}, \sigma) \mathbf{x} \Psi_2(\mathbf{x}, \sigma), \quad (2.6)$$

gdzie  $\Psi_{1,2}(\mathbf{x}, \sigma)$  są kilkukomponentowymi funkcjami falowymi stanów  $|\Psi_{1,2}\rangle$ , o liczbie komponentów równym liczbie spinowych stopni swobody.

Przytoczone tutaj wzory są identyczne jak w teorii nierelatywistycznej, ale relatywistyczny charakter teorii tkwi między innymi w nietrywialnych prawach transformacyjnych rozważanych obiektów oraz w strukturze hamiltonianu.

W przypadku cząstek o niezerowym spinie, żądanie niezależności konstrukcji operatora położenia od wyboru bazy spinowej wymaga ograniczenia się do specjalnej klasy takich baz. Zostaną zatem wprowadzone tzw. *cykliczne bazy spoczynkowe* zdefiniowane przy pomocy pchnięć Lorentza tzw. *cyklicznych elementów bazy*, w wyróżnionym układzie inercjalnym.

Szczegóły konstrukcji położeniowych operatorów kreacji i anihilacji oraz funkcji falowej i operatora położenia zostaną dokładnie omówione na przykładzie rzeczywistego pola skalarnego opisującego neutralne cząstki bezspinowe. Następnie zostanie wykonane, przy użyciu baz cyklicznych, analogiczne postępowanie dla cząstek naładowanych oraz cząstek o spinach 1/2 (elektrony, pozytony) i 1 (cząstki Proca). Okaże się, że wyniki tych konstrukcji można wyrazić przy pomocy transformacji pól typu Foldy'ego-Wouthuysena lub tzw. *spoczynkowych wartości pól*.

Największych trudności przysporzy poszukiwanie operatora położenia fotonu. Ostatecznie zostanie podana propozycja takiego operatora oparta na uogólnionej transformacji Foldy'ego-Wouthuysena blisko związanej z cechowaniem Coulomba. Mimo tego proponowany operator nie zależy od swobody cechowania stanów, jaka występuje w przypadku kwantowania pola elektromagnetycznego metodą Gupty-Bleulera.

Ponadto okazało się, że szczególnej uwagi wymaga również zagadnienie operatora położenia bezmasowego fermionu o ustalonej skrętności. Zostało ono opisane w ostatnim uzupełniającym rozdziale.

W opracowaniu niniejszej części pracy pomocne były podręczniki [17], [14] i [8].

## Rozdział 3

# Rzeczywiste pole skalarne - neutralne cząstki bezspinowe

### 3.1 Kwantowanie kanoniczne i przestrzeń Focka

Punktem wyjścia teorii hermitowskiego<sup>1</sup> pola skalarnego  $\phi$  jest równanie Kleina-Gordona:

$$(\square + m^2)\hat{\phi}(x) = 0, \quad (3.1)$$

gdzie  $m$  jest masą kwantów tego pola. Wygodnie jest dokonać fourierowskiego rozkładu pola na fale płaskie. Inwariantna wersja takiego rozkładu opisana w uwagach notacyjnych N4 ma postać:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} [\hat{\phi}(p)e^{-ip \cdot x} - \hat{\phi}(-p)e^{ip \cdot x}], \quad (3.2)$$

gdzie  $p_0 = +\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ , a  $\hat{\phi}(p)$  to inwariantna trójwymiarowa transformata Fouriera pola. Niech  $\hat{a}(p) = \hat{\phi}(p)$ , wówczas na podstawie hermitowskości pola  $\hat{a}^\dagger(p) = -\hat{\phi}(-p)$ . Ostatecznie rozkład pola przybiera formę:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} [\hat{a}(p)e^{-ip \cdot x} + \hat{a}^\dagger(p)e^{ip \cdot x}]. \quad (3.3)$$

Na podstawie formalizmu kanonicznego klasycznego pola  $\phi$  w wyniku zastąpienia nawiasów Poissona komutatorami podzielonymi przez jednostkę urojoną, tzn.  $\{ , \}_{NP} \rightarrow [ , ]/i$ , uzyskuje się równoczesowe związki komutacyjne:

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \partial_t \hat{\phi}(t, \mathbf{x}')] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ [\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\phi}(t, \mathbf{x}')] &= 0 \\ [\partial_t \hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \partial_t \hat{\phi}(t, \mathbf{x}')] &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ze związków tych wynikają reguły komutacyjne operatorów  $\hat{a}(p)$ ,  $\hat{a}^\dagger(p)$  na dodatniej powłoce masy  $p^2 = m^2$ ,  $p_0 > 0$ :

$$\begin{aligned} [\hat{a}(p), \hat{a}^\dagger(p')] &= (2\pi)^3 2p_0 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\ [\hat{a}(p), \hat{a}(p')] &= 0 \\ [\hat{a}^\dagger(p), \hat{a}^\dagger(p')] &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

---

<sup>1</sup>Klasycznej wielkości rzeczywistej odpowiada operator hermitowski.

Operatory<sup>2</sup>  $\hat{a}(p)$ ,  $\hat{a}^\dagger(p)$ , nazywane dalej *inwariantnymi operatorami anihilacji i kreacji* cząstki o czteropędzie  $p_\mu$ , służą do konstrukcji hilbertowskiej przestrzeni stanów  $\mathcal{H}$ , zwanej przestrzenią Focka. Podstawą całej konstrukcji jest stan próżni  $|0\rangle$ , zdefiniowany jako wspólne jądro wszystkich operatorów anihilacji, tzn:

$$\forall_p: \hat{a}(p)|0\rangle = 0. \quad (3.6)$$

Okazuje się, że warunek ten definiuje całą jednowymiarową podprzestrzeń stanów próżni. Ta niejednoznaczność wyboru wektora próżni (co do zespolonego czynnika multiplikatywnego) nie odgrywa istotnej roli, gdyż dotyczy ona wszystkich stanów fizycznych<sup>3</sup>. Ze względów praktycznych jest stosowana normalizacja  $\langle 0|0\rangle = 1$ .

### 3.1.1 Reprezentacja inwariantna i heterowariantna

#### Przedstawienie pędowe

Jednocząstkowy stan  $|\Psi\rangle^{(1)}$  uzyskuje się wygładzając uogólniony wektor  $\hat{a}^\dagger(p)|0\rangle$  poprzez scałkowanie go po pędach wraz z pewną niezerową funkcją  $\tilde{\Phi}(p)$ :

$$|\Psi\rangle^{(1)} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \tilde{\Phi}(p) \hat{a}^\dagger(p)|0\rangle. \quad (3.7)$$

Użycie w tym wzorze niezmienniczej miary zapewnia niezależność funkcji  $\tilde{\Phi}(p)$  od układu odniesienia. Będzie ona nazywana *inwariantną funkcją falową*<sup>4</sup>. Można ją wyrazić bezpośrednio w postaci:

$$\tilde{\Phi}(p) = \langle 0|\hat{a}(p)|\Psi\rangle^{(1)} = \langle 0|\hat{\phi}(p)|\Psi\rangle^{(1)}. \quad (3.8)$$

Przy pomocy reguł (3.5) łatwo znaleźć postać iloczynu skalarnego dwóch stanów jednocząstkowych:

$${}^{(1)}\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle^{(1)} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \tilde{\Phi}_1^*(p) \tilde{\Phi}_2(p). \quad (3.9)$$

Na podstawie tego wyrażenia można ściśle zdefiniować jednocząstkową przestrzeń Focka  $\mathcal{H}^{(1)}$  w inwariantnej reprezentacji pędowej. Przestrzeń ta jest zbiorem klas funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a z kwadratem modułu z wagą  $(m^2 + \mathbf{p}^2)^{-1/2}$ , które to funkcje w obrębie danej klasy (stanowiącej element  $\mathcal{H}^{(1)}$ ) różnią się tylko na zbiorze miary zero.

W analogiczny sposób jak stany jednocząstkowe konstruuje się przy pomocy operatorów kreacji stany wielocząstkowe, np. dwucząstkowe stany są postaci:

$$|\Psi\rangle^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2!}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2p'_0} \tilde{\Phi}^{(2)}(p, p') \hat{a}^\dagger(p) \hat{a}^\dagger(p')|0\rangle, \quad (3.10)$$

przy czym ze względu na przemienność operatorów kreacji rozpatruje się tylko symetryczne dwucząstkowe funkcje falowe  $\tilde{\Phi}^{(2)}(p, p') = \tilde{\Phi}^{(2)}(p', p)$ . Z tego powodu dwucząstkowa przestrzeń Hilberta  $\mathcal{H}^{(2)}$  jest zszytyzowanym produktem tensorowym dwóch przestrzeni jednocząstkowych:

$$\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H}^{(1)} \{ \otimes \}_{sym} \mathcal{H}^{(1)}. \quad (3.11)$$

<sup>2</sup>Ściśle mówiąc są to operatory o wartościach dystrybucyjnych.

<sup>3</sup>Problem ten nie występuje, gdy zamiast wektorów stanów (czystych) używa się operatorów rzutu na jednowymiarowe podprzestrzenie zwane promieniami. Formalizm ten nie jest jednak tutaj stosowany.

<sup>4</sup>W przedstawieniu pędowym i obrazie Heisenberga.

Zsymetryzowany produkt tensorowy jest przestrzenią rozpinaną przez zsymetryzowane iloczyny tensorowe postaci:  $|\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle + |\Psi_2\rangle \otimes |\Psi_1\rangle$ . Przestrzeń ta wyposażona jest w iloczyn skalarny indukowany z przestrzeni jednocząstkowej.

Analogicznie dowolna  $n$ -cząstkowa przestrzeń Hilberta jest zsymetryzowaną potęgą tensorową przestrzeni jednocząstkowej z indukowanym iloczynem skalarnym. Suma prosta jednowymiarowej podprzestrzeni próżni  $\mathcal{H}^{(0)}$  (rozpinanej przez jeden wyróżniony stan próżni  $|0\rangle$ ) i podprzestrzeni jedno- oraz wielocząstkowych stanowi pełną przestrzeń Focka:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{(n)}. \quad (3.12)$$

Dotychczas prezentowany formalizm miał całkowicie invariantny charakter. Teraz zaś zostaną zdefiniowane operatory kreacji i anihilacji oraz funkcja falowa zależna od układu odniesienia. Zabieg ten uprości nieco teorię w danym układzie odniesienia i odegra szczególnie znaczenie w reprezentacji położeniowej.

Biorąc pod uwagę pierwsze równanie w (3.5) można tak przynormować operatory anihilacji i kreacji, aby komutowały do delty Diraca. Takie operatory będą nazywane *heterowariantnymi operatorami anihilacji i kreacji* i mają one postać:

$$\hat{a}_{\mathbf{p}} = \frac{\hat{a}(p)}{\sqrt{2p_0}} \quad , \quad \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} = \frac{\hat{a}^{\dagger}(p)}{\sqrt{2p_0}}. \quad (3.13)$$

Łatwo zauważyć, że rzeczywiście :

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^{\dagger}] = \delta^{(3)}\left(\frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}'}{2\pi}\right) = (2\pi)^{(3)}\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (3.14)$$

Można teraz zdefiniować jednocząstkową *heterowariantną funkcję falową*  $\tilde{\Psi}(\mathbf{p})$  jako funkcję wagową występującą w wyrażeniu na wektor stanu  $|\Psi\rangle^{(1)}$  przy heterowariantnym (tym razem) operatorze kreacji działającym na próżnię, tzn.:

$$|\Psi\rangle^{(1)} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \tilde{\Psi}(\mathbf{p}) \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}|0\rangle. \quad (3.15)$$

Zatem bezpośredni wzór na taką funkcję falową ma postać:

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{p}) = \langle 0|\hat{a}_{\mathbf{p}}|\Psi\rangle^{(1)} \quad (3.16)$$

Wynika stąd związek funkcji heterowariantnej z invariantną:

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{p}) = \frac{\tilde{\Phi}(p)}{\sqrt{2p_0}}. \quad (3.17)$$

Warto zauważyć, że rozważane dwie wersje (heterowariantna i invariantna), właściwie tych samych obiektów (funkcji falowej oraz operatorów anihilacji i kreacji), różnią się wymiarem. Okazuje się, że obiekty w wersji heterowariantnej mają identyczne wymiary jak w teorii nierelatywistycznej. Zatem to heterowariantna funkcja falowa może korespondować z nierelatywistyczną funkcją falową. Z drugiej strony można by uzgodnić wymiary obiektów obu wersji przez przemnożenie obiektów invariantnych przez pierwiastek z masy. Postępowanie to byłoby jednak nienaturalne i nieuniwersalne, ponieważ nie miałyby ono sensu dla cząstek bezmasowych.

Obiekty heterowariantne transformują się przy zmianie układu odniesienia jak wielkość  $p_0^{-1/2}$ . Regułę transformacyjną tych obiektów można zapisać następująco:

$$\hat{a}'_{\mathbf{p}'} = \sqrt{\frac{p_0}{p'_0}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \quad \text{oraz} \quad \tilde{\Psi}'(\mathbf{p}') = \sqrt{\frac{p_0}{p'_0}} \tilde{\Psi}(\mathbf{p}), \quad (3.18)$$

gdzie wielkości primowane dotyczą układu primowanego, który względem pierwotnego układu nieprimowanego posiada czteroprędkość  $(U^\mu) = (U_0, \mathbf{U})$ . Stojącą po prawej stronie tych równań wielkość primowaną  $p'_0$  można wyrazić, przy pomocy transformacji Lorentza, przez nieprimowane składowe czteroprędku  $p'_0 = p_0 U_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{U}$  lub odwrotnie np.:

$$\tilde{\Psi}'(\mathbf{p}') = \sqrt{\frac{p'_0 U_0 + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{U}}{p'_0}} \tilde{\Psi}\left(\mathbf{p}' + p'_0 \mathbf{U} + \frac{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{U}}{1 + U_0} \mathbf{U}\right). \quad (3.19)$$

### Przedstawienie położeniowe

Również w reprezentacji położeniowej będą wprowadzone inwariantne i heterowariantne operatory anihilacji i kreacji oraz inwariantne i heterowariantne funkcje falowe. Na podstawie równania (3.3) widać, że skwantowane pole skalarne  $\hat{\phi}(x)$  dzieli się na część anihilującą i kreującą. Pierwsza z nich oscyluje w czasie z dodatnią, a druga z ujemną częstością, co uzasadnia oznaczenia:

$$\hat{\phi}_{(+)}(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \hat{a}(p) e^{-ip \cdot x} \quad , \quad \hat{\phi}_{(-)}(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \hat{a}^\dagger(p) e^{ip \cdot x}. \quad (3.20)$$

Te operatory będą nazywane *inwariantnymi położeniowymi operatorami* anihilacji i kreacji cząstki w punkcie  $x$ . Jak można było przypuszczać są one niezmienniczą odwrotną transformatą Fouriera inwariantnych pędowych operatorów anihilacji i kreacji. Warto zwrócić uwagę, że operatory  $\hat{\phi}_{(+)}(x)$ ,  $\hat{\phi}_{(-)}(x)$  zadane są w obrazie Heisenberga, gdy tymczasem operatory  $\hat{a}(p)$ ,  $\hat{a}^\dagger(p)$  są schrödingerowskie. Komutator inwariantnego położeniowego operatora anihilacji i operatora kreacji jest funkcją Wightmana o dodatnich częstościach:

$$[\hat{\phi}_{(+)}(x), \hat{\phi}_{(-)}(x')] = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} e^{-ip \cdot (x-x')} = i\Delta_{(+)}(x-x'). \quad (3.21)$$

Jeżeli *inwariantna funkcja falowa w reprezentacji położeniowej* zostanie wprowadzona jako niezmiennicza odwrotna transformacja Fouriera funkcji  $\tilde{\Phi}(p)$  ( $p_0 > 0$ ), tzn.:

$$\Phi(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \tilde{\Phi}(p) e^{-ip \cdot x} \quad , \quad \tilde{\Phi}(p) = \int_{\Omega} *dx^\mu e^{ip \cdot x} (p_\mu + i\partial_\mu) \Phi(x), \quad (3.22)$$

to wówczas jednocząstkowy stan w obrazie Heisenberga można wyrazić w postaci:

$$|\Psi\rangle^{(1)} = - \int_{\Omega} *dx^\mu \Phi(x) i \overleftrightarrow{\partial}_\mu \hat{\phi}_{(-)}(x) |0\rangle, \quad (3.23)$$

gdzie  $\overleftrightarrow{\partial}_\mu = \overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu$ . Ostatnie równanie może być także traktowane jako związek definiujący funkcję  $\Phi(x)$ , którą można również wyrazić bezpośrednio:

$$\Phi(x) = \langle 0 | \hat{\phi}_{(+)}(x) | \Psi \rangle^{(1)} = \langle 0 | \hat{\phi}(x) | \Psi \rangle^{(1)}. \quad (3.24)$$

Inwariantna funkcja falowa ma charakter funkcji falowej w obrazie Schrödingera, mimo że wektor stanu rozważany jest w obrazie Heisenberga. Taki mieszany wybór obrazów jest wygodny w reprezentacji położeniowej teorii relatywistycznej, gdyż *a priori* nie wyróżnia żadnego układu odniesienia. Z równania (3.22) wynika, że rozważana funkcja, oprócz zwykłego równania Kleina-Gordona, spełnia w każdym układzie inercyjnym następujące równanie:

$$i\partial_t\Phi(x) = \sqrt{m^2 - \Delta}\Phi(x). \quad (3.25)$$

Występowanie tylko dodatnich częstości w inwariantnej funkcji falowej  $\Phi$  odróżnia ją od pola skalarnego  $\phi$ , nawet gdy jest ono traktowane klasycznie. Ponadto brak ujemnych częstości zapewnia dodatniość normy wynikającej z iloczynu skalarnego w reprezentacji położeniowej:

$${}^{(1)}\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle^{(1)} = \int_{\Omega} *dx^\mu \Phi_1^*(x) i\overleftrightarrow{\partial}_\mu \Phi_2(x). \quad (3.26)$$

Można również zdefiniować inwariantne funkcje falowe dla stanów wielocząstkowych, np. dla dwucząstkowego stanu  $|\Psi\rangle^{(2)}$ :

$$\Phi^{(2)}(x, x') = \frac{1}{\sqrt{2!}} \langle 0 | \hat{\phi}_{(+)}(x) \hat{\phi}_{(+)}(x') | \Psi \rangle^{(2)}. \quad (3.27)$$

Przy pomocy takiej funkcji falowej można odtworzyć stan za pomocą formuły:

$$|\Psi\rangle^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2!}} \int_{\Omega} *dx^\mu \int_{\Omega'} *dx'^\nu \Phi^{(2)}(x, x') i\overleftrightarrow{\partial}_\mu i\overleftrightarrow{\partial}'_\nu \hat{\phi}_{(-)}(x) \hat{\phi}_{(-)}(x') | 0 \rangle, \quad (3.28)$$

gdzie całki wyliczane są po dowolnie obranych nieograniczonych trójwymiarowych hiperpowierzchniach przestrzennopodobnych  $\Omega$  i  $\Omega'$ .

Pora teraz zdefiniować *heterowariantny<sup>5</sup> położeniowy operator anihilacji*:

$$\hat{a}_x = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} = \sqrt{2\sqrt{m^2 - \Delta}} \hat{\phi}_{(-)}(x), \quad (3.29)$$

oraz *heterowariantny operator kreacji*:

$$\hat{a}_x^\dagger = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} = \sqrt{2\sqrt{m^2 - \Delta}} \hat{\phi}_{(+)}(x). \quad (3.30)$$

Powyższe operatory (podobnie jak  $\hat{\phi}_{(\pm)}$ ) zdefiniowane są w obrazie Heisenberga, co upraszcza ich reguły transformacyjne. Na podstawie (3.14) łatwo przekonać się, że równoczesowy związek komutacyjny tych operatorów ma postać:

$$[\hat{a}_{t,\mathbf{x}}, \hat{a}_{t,\mathbf{x}'}^\dagger] = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (3.31)$$

Heterowariantne położeniowe operatory anihilacji i kreacji są zdefiniowane właśnie w taki sposób, aby spełniały ten związek komutacyjny.

Można teraz w całkowitej analogii do reprezentacji pędowej zdefiniować *heterowariantną*

---

<sup>5</sup>Operator  $\hat{a}_x$  ma w pewnym sensie odwrotne reguły transformacyjne do analogicznego operatora w reprezentacji pędowej, gdyż w definicji  $\hat{a}_x$  czynnik  $\sqrt{2\tilde{p}_0}$  stoi w liczniku, a nie w mianowniku. Mimo to w obu przypadkach używany będzie termin *obiekt heterowariantny*, by niepotrzebnie nie komplikować terminologii.

funkcję falową  $\Psi(t, \mathbf{x})$  w reprezentacji położeniowej dla jednocząstkowego stanu  $|\Psi\rangle^{(1)}$  warunkiem:

$$|\Psi\rangle^{(1)} = \int d^3\mathbf{x} \Psi(t, \mathbf{x}) \hat{a}_{t,\mathbf{x}}^\dagger |0\rangle, \quad (3.32)$$

przy czym równanie to ma być spełnione dla dowolnego czasu  $t$ . Bardziej bezpośrednia formuła na funkcję  $\Psi(t, \mathbf{x})$  jest postaci:

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \langle 0 | \hat{a}_{t,\mathbf{x}} | \Psi \rangle^{(1)}. \quad (3.33)$$

Można jeszcze wyrazić heterowariantną położeniową funkcję falową za pomocą funkcji inwariantnej albo funkcji heterowariantnej w reprezentacji pędowej:

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \sqrt{2\sqrt{m^2 - \Delta}} \Phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \tilde{\Psi}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}. \quad (3.34)$$

Ostatnie wyrażenie jest, pomijając zależność czasową, zwykłą trójwymiarową transformacją Fouriera znaną z nierelatywistycznej mechaniki kwantowej. Podobnie jak w reprezentacji pędowej również w reprezentacji położeniowej funkcje: inwariantna oraz heterowariantna różnią się wymiarem i chociażby dlatego z tych dwóch funkcji tylko ta druga ma szansę korespondować z nierelatywistyczną funkcją falową. Warto dodać, że obydwie funkcje spełniają takie samo równanie falowe (3.25).

Oczywiście heterowariantne położeniowe funkcje falowe można zdefiniować również dla stanów wielocząstkowych, np. dla stanu dwucząstkowego:

$$\Psi^{(2)}(t, \mathbf{x}, t', \mathbf{x}') = \frac{1}{\sqrt{2!}} \langle 0 | \hat{a}_{t,\mathbf{x}} \hat{a}_{t',\mathbf{x}'} | \Psi \rangle^{(2)}. \quad (3.35)$$

Równoczesowa ( $t = t'$ ) funkcja falowa tego typu powinna korespondować z analogiczną nierelatywistyczną funkcją falową.

## 3.2 Operator położenia w reprezentacji heterowariantnej i inwariantnej

Kluczową własnością heterowariantnej funkcji falowej  $\Psi(t, \mathbf{x})$  w reprezentacji położeniowej jest wynikająca z (3.31) i (3.32) forma iloczynu skalarnego dwóch stanów jednocząstkowych  $|\Psi_1\rangle^{(1)}$ ,  $|\Psi_2\rangle^{(1)}$ :

$${}^{(1)}\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle^{(1)} = \int d^3\mathbf{x} \Psi_1^*(t, \mathbf{x}) \Psi_2(t, \mathbf{x}), \quad (3.36)$$

przy czym iloczyn skalarny oczywiście nie zależy od  $t$ . Powyższa postać iloczynu skalarnego jest identyczna jak w teorii nierelatywistycznej. Również identyczna jest przestrzeń dopuszczalnych funkcji  $\Psi(0, \mathbf{x})$ , stanowiąca jednocząstkową przestrzeń Hilberta w heterowariantnej reprezentacji położeniowej. Fakt ten wynika pośrednio z definicji przestrzeni Hilberta w inwariantnej reprezentacji pędowej ( $\tilde{\Phi}(p)$ ), podanej wcześniej. Definicja ta w prosty sposób przenosi się na pędową reprezentację heterowariantną ( $\tilde{\Psi}(\mathbf{p})$ ). Wówczas funkcyjna przestrzeń Hilberta jest zbiorem klas funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a z kwadratem modułu, które to funkcje w obrębie danej klasy różnią się tylko na zbiorze miary zero. Identyczna definicja obowiązuje w reprezentacji pędowej teorii



nierelatywistycznej. Wystarczy teraz zauważyć, że dla  $t = 0$  związek między pędową i położeniową reprezentacją heterowariantną jest taki sam jak w teorii nierelatywistycznej, co kończy dowód. Różnice teorii relatywistycznej i nierelatywistycznej w reprezentacji  $\Psi(t, \mathbf{x})$  tkwią tylko: w innej ewolucji czasowej (inne hamiltoniany) tych funkcji oraz innych regułach transformacyjnych. Różnice te nie ograniczają dowodu rozważanego faktu, gdyż ewolucja czasowa jest unitarna, a każdy obserwator inercjalny jest równouprawniony do opisu zjawisk fizycznych.

Na mocy daleko posuniętej analogii z teorią nierelatywistyczną można podać postać operatora położenia bez podawania odrębnych dowodów. W tym celu należy uświadomić sobie, że zmienne  $t$ ,  $\mathbf{x}$  występujące w wielkościach polowych lub w różnych funkcjach falowych są zawsze współrzędnymi czasoprzestrzennymi. Nic więc nie stoi na przeszkodzie, aby uznać  $\mathbf{x}$  występujący w heterowariantnej funkcji falowej za wartości własne operatora położenia  $\hat{\mathbf{Q}}$ . Zatem zgodnie z analogią do teorii nierelatywistycznej niezależny od czasu operator położenia (w obrazie Schrödingera) ma w reprezentacji heterowariantnej postać:

$$\{\hat{\mathbf{Q}}\}_\Psi = \mathbf{x}. \quad (3.37)$$

Uogólniona funkcja własna tego operatora o wartości własnej  $\mathbf{q}$  opisująca cząstkę zlokalizowaną w punkcie  $\mathbf{q}$  jest deltą Diraca:

$$\Psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{q}). \quad (3.38)$$

Wykorzystując znaną regularyzację delty Diraca będącą transformatą Fouriera stałej oraz równanie falowe typu (3.25) można otrzymać ewolucję czasową tej funkcji falowej:

$$\Psi_{q_0, \mathbf{q}}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-ip(x-q)} = -2\partial_t \Delta_{(+)}(x - q), \quad (3.39)$$

gdzie  $q_0$  jest czasem, w którym cząstka była zlokalizowana w punkcie  $\mathbf{q}$ , a  $\Delta_{(+)}$  jest funkcją Wightmana. Formuła (3.32) pozwala wyrazić uogólniony stan własny operatora położenia w bardziej abstrakcyjnej formie reprezentacji drugiej kwantyzacji:

$$|q_0, \mathbf{q}\rangle = \hat{a}_{q_0, \mathbf{q}}^\dagger |0\rangle. \quad (3.40)$$

Ze względu na heterowariantny charakter występującego tu operatora kreacji położeniowy uogólniony stan własny odnosi się do konkretnego układu odniesienia. Powyższą postać stanu własnego operatora położenia można było odgadnąć od razu wychodząc z definicji heterowariantnej funkcji falowej:

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \langle 0 | \hat{a}_{t, \mathbf{x}} | \Psi \rangle = \langle t, \mathbf{x} | \Psi \rangle. \quad (3.41)$$

W układzie, w którym cząstka jest zlokalizowana w  $q$  inwariantna funkcja falowa stanu  $|t, \mathbf{q}\rangle$  przyjmuje postać:

$$\Phi_q(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2p_0}} e^{-ip(x-q)}. \quad (3.42)$$

Identyczną funkcję falową rozważali w swojej pracy Newton i Wigner, którzy sprowadzili jej całkową formę dla chwili  $t = 0$  i  $q = 0$  do postaci:

$$\Phi_0(0, \mathbf{x}) = C(m/r)^{5/4} H_{5/4}^{(1)}(imr), \quad (3.43)$$

gdzie  $r = |\mathbf{x}|$ , a  $H_{5/4}^{(1)}$  jest funkcją Hankla pierwszego rodzaju z indeksem  $5/4$ . W dowolnym układzie inercyjnym funkcja  $\Phi_q(x)$  przyjmuje oczywiście takie same wartości (z definicji inwariantności), ale formuła (3.42) wyrażona we współrzędnych nowego układu nie będzie poprawna. Jeżeli czteroprędkość wyróżnionego układu wynosi  $U^\mu$  to łatwo wyrazić funkcję  $\Phi_q(x)$  za pomocą jawnie kowariantnej formuły:

$$\Phi_q(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \sqrt{2p_\mu U^\mu} e^{-ip(x-q)}. \quad (3.44)$$

Z równania tego wynika, że inwariantna funkcja falowa w reprezentacji pędowej ma prostą postać  $\tilde{\Phi}_q(p) = \sqrt{2p_\mu U^\mu} e^{ip \cdot q}$ . Dzięki niej stan własny zlokalizowany w zdarzeniu czasoprzestrzennym  $x$  w układzie poruszającym się z czteroprędkością  $U$  można wyrazić w jawnie kowariantnej postaci:

$$|x, U\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \sqrt{2p_\mu U^\mu} e^{ip \cdot x} \hat{a}^\dagger(p) |0\rangle. \quad (3.45)$$

Powyższy wzór oraz użycie czteroprędkości układu odniesienia pozwala wyrazić heterowariantne operatory kreacji  $\hat{a}_{t,\mathbf{x}}^\dagger$  w dowolnym układzie odniesienia w formie:

$$\hat{a}_{x,U}^\dagger = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \sqrt{2p_\mu U^\mu} e^{ip \cdot x} \hat{a}^\dagger(p). \quad (3.46)$$

Dzięki wprowadzeniu zależności od  $U$  dotychczas heterowariantne operatory kreacji nabierają inwariantnego charakteru jako funkcje  $x$  i  $U$ .

Należy podkreślić, że uogólniony stan  $|x, U\rangle$  jest zlokalizowany w  $x$  z zerową dyspersją tylko w układach inercjalnych o czteroprędkości  $U$ . We wszystkich innych układach, a także w innych niż  $x_\mu U^\mu$  chwilach czasu w układach o czteroprędkości  $U$  średnia wartość położenia i tym bardziej jego dyspersja nie są dobrze określone (nie mają sensu). Również średni pęd w stanach zlokalizowanych wyraża się całką rozbieżną. Te własności stanów uogólnionych nie są niczym nowym i występują również w teorii nierelatywistycznej. Jest jednak jedna różnica. W wersji nierelatywistycznej stan zlokalizowany w pewnej chwili w jednym układzie odniesienia jest również zlokalizowany w tej samej chwili w innych układach inercjalnych. Jest to możliwe, gdyż w nierelatywistycznej czasoprzestrzeni zwanej czasoprzestrzenią Galileusza istnieje pojęcie bezwzględnej równoczesności. Takie pojęcie nie istnieje w teorii względności.

Warto w tym miejscu przeanalizować uogólniony stan, który, jak mogłoby się wydawać, powinien opisywać inwariantnie zlokalizowaną w  $x$  cząstkę:

$$|\tilde{x}\rangle = \hat{\phi}_{(-)}(x) |0\rangle. \quad (3.47)$$

Przy pomocy tego stanu łatwo wyrazić inwariantną położeniową funkcję falową stanu jednocząstkowego jako:

$$\Phi(x) = \langle \tilde{x} | \Psi \rangle^{(1)}. \quad (3.48)$$

Wprowadzony stan  $|\tilde{x}\rangle$  posiada następującą inwariantną pędową funkcję falową:

$$\tilde{\Phi}_x(p) = \langle 0 | \hat{a}(p) | \tilde{x} \rangle = e^{ip \cdot x}. \quad (3.49)$$

Funkcja ta spełnia równanie własne postaci:

$$\left( i \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\mathbf{p}}{p_0} t \right) e^{ip \cdot x} = \mathbf{x} e^{ip \cdot x}. \quad (3.50)$$

Znajdujący się tu operator nie jest hermitowski z powodu wagi  $(2p_0)^{-1}$  występującej w iloczynie skalarnym. W konsekwencji nie istnieje hermitowski operator trójwektorowy ani czterowektorowy, dla którego stany  $|\tilde{x}\rangle$  są stanami własnymi o wartościach własnych odpowiednio:  $\mathbf{x}$  i  $x$ . Okazuje się, że hermitowska część operatora występującego w powyższym równaniu własnym jest operatorem położenia  $\hat{\mathbf{Q}}$  w pędowej reprezentacji inwariantnej w obrazie Schrödingera  $t = 0$ :

$$\{\hat{\mathbf{Q}}\}_{\tilde{\phi}} = i \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} - i \frac{\mathbf{p}}{2p_0^2}. \quad (3.51)$$

W ten sposób również rozważania nad stanem  $|\tilde{x}\rangle$  doprowadziły do prawidłowego operatora położenia. Mimo to w uogólnionym stanie  $|\tilde{x}\rangle$  średnie wartości położenia i pędu wyrażają się całkami rozbieżnymi. Oznacza to, że operator kreacji  $\hat{\phi}_{(-)}(x)$  nie kreuje wcale cząstki zlokalizowanej w punkcie  $x$ .

Na podstawie równania (3.51) łatwo wykazać, że w pędowej reprezentacji heterowariantnej operator położenia ma postać analogiczną do teorii nierelatywistycznej:

$$\{\hat{\mathbf{Q}}\}_{\tilde{\Psi}} = \frac{1}{\sqrt{2p_0}} \{\hat{\mathbf{Q}}\}_{\tilde{\phi}} \sqrt{2p_0} = i \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}. \quad (3.52)$$

W tej reprezentacji najprościej znaleźć związki komutacyjne położenia i czteropędu w podprzestrzeni jednocząstkowej:

$$[\hat{Q}^k, \hat{Q}^l] = 0 \quad ; \quad [\hat{Q}^k, \hat{p}^l] = i\delta^{kl} \quad ; \quad [\hat{Q}^k, \hat{H}] = i\hat{p}^k / \hat{H}; \quad (3.53)$$

gdzie  $\hat{H} = \hat{p}_0$  jest jednocząstkowym hamiltonianem. Komutatory te potwierdzają tylko preferowane w pierwszym rozdziale relacje komutacji dla pędu i położenia.

Na zakończenie tego paragrafu pora wyrazić operator położenia w abstrakcyjnej reprezentacji drugiej kwantyzacji:

$$\hat{\mathbf{Q}}(t) = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \hat{a}_{t,\mathbf{x}}^\dagger |0\rangle \langle 0| \hat{a}_{t,\mathbf{x}}, \quad (3.54)$$

przy czym występujący wewnątrz wzoru operator rzutu na próżnię można opuścić, jeżeli rozważana jest tylko przestrzeń jednocząstkowa. Powyższe równanie napisane jest w obrazie Heisenberga. Jego poprawność można sprawdzić działając operatorem  $\hat{\mathbf{Q}}(t)$  na stan własny  $|t, \mathbf{x}\rangle = \hat{a}_{t,\mathbf{x}}^\dagger |0\rangle$ , co po skorzystaniu z reguł komutacji dla heterowariantnych operatorów anihilacji i kreacji prowadzi do:

$$\hat{\mathbf{Q}}(t) |t, \mathbf{x}\rangle = \mathbf{x} |t, \mathbf{x}\rangle. \quad (3.55)$$

W następnym paragrafie operator położenia zostanie przedstawiony w równoważnej postaci bez odwoływania się do obiektów heterowariantnych. Umożliwi to uogólnienie operatora położenia na szeroką klasę krzywoliniowych układów współrzędnych w czasoprzestrzeni.

### 3.3 Zagadnienie gęstości czteropędu prawdopodobieństwa położenia cząstki

Gęstość prawdopodobieństwa położenia cząstki w dowolnym stanie jednocząstkowym  $|\Psi\rangle^{(1)}$  w wybranym układzie odniesienia można skonstruować przy pomocy heterowariantnej funkcji falowej analogicznie jak w teorii nierelatywistycznej:

$$\varrho(t, \mathbf{x}) = \Psi^*(t, \mathbf{x}) \Psi(t, \mathbf{x}) = {}^{(1)}\langle \Psi | \hat{a}_{t,\mathbf{x}}^\dagger |0\rangle \langle 0| \hat{a}_{t,\mathbf{x}} | \Psi \rangle^{(1)}. \quad (3.56)$$

Wobec powyższej formy równania na  $\hat{\rho}$  wygodnie jest wprowadzić operator położeniowej gęstości prawdopodobieństwa:

$$\hat{\rho}(t, \mathbf{x}) = \hat{a}_{t, \mathbf{x}}^\dagger |0\rangle \langle 0| \hat{a}_{t, \mathbf{x}}. \quad (3.57)$$

Niestety operator ten nie jest zerową składową żadnego czterowektora. Można to wykazać używając operatorów kreacji i anihilacji cząstki w punkcie, zależnych od czteroprędkości układu odniesienia, zdefiniowanych wzorami (3.46). Przy ich pomocy operator  $\hat{\rho}$  wyraża się w postaci:

$$\hat{\rho}(x, U) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2p'_0} \sqrt{2p_\mu U^\mu} \sqrt{2p'_\nu U^\nu} |p\rangle \langle p'| e^{i(p-p') \cdot x}, \quad (3.58)$$

gdzie  $|p\rangle$  to stan własny czteropędu równy  $\hat{a}^\dagger(p)|0\rangle$ . Gdyby z powyższego wzoru można było wyłączyć czteroprędkość tak, aby  $\hat{\rho} = \hat{j}_\mu U^\mu$ , to wówczas  $\hat{j}_\mu$  byłby kowariantnym czteroprądem gęstości prawdopodobieństwa. Niestety taki zabieg nie jest możliwy, o czym przekonuje wyeliminowanie najrozsądniejszego przypadku możliwości zachodzenia takiego rozkładu. Warto mianowicie sprawdzić, czy zamiana wyrażenia  $\sqrt{2p_\mu U^\mu} \sqrt{2p'_\nu U^\nu}$  w powyższej całce na  $p_\mu U^\mu + p'_\mu U^\mu$  nie zmieni jej wartości. Oznaczałoby to możliwość zapisania  $\hat{\rho}$  w postaci  $\hat{\phi}(x)|0\rangle i \overleftrightarrow{\partial}_t \langle 0| \hat{\phi}(x)$ . Zamiana taka nie jest jednak dopuszczalna, gdyż rozpatrywana całka z wyrażenia:

$$p_\mu U^\mu + p'_\mu U^\mu - \sqrt{2p_\mu U^\mu} \sqrt{2p'_\nu U^\nu} = (\sqrt{p_\mu U^\mu} - \sqrt{p'_\nu U^\nu})^2, \quad (3.59)$$

policzona w  $x = 0$  dla stanu o rzeczywistej dodatniej inwariantnej funkcji falowej  $\tilde{\Phi}(p)$  jest większa od zera:

$$\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2p'_0} (\sqrt{2p_\mu U^\mu} - \sqrt{2p'_\nu U^\nu})^2 \tilde{\Phi}(p) \tilde{\Phi}(p') > 0. \quad (3.60)$$

Oznacza to, że  $\hat{\rho}$  zależy nieliniowo od czteroprędkości układu odniesienia, w przeciwieństwie do zerowej składowej dowolnego różnego od zera czterowektora. Mimo to  $\hat{\rho}$  jest dodatnio określonym operatorem unormowanym do jedynki:

$$\int d^3 \mathbf{x} \hat{\rho}(t, \mathbf{x}) = \int d^3 \mathbf{x} |t, \mathbf{x}\rangle \langle t, \mathbf{x}| = \hat{1}^{(1)}, \quad (3.61)$$

gdzie  $\hat{1}^{(1)}$  to jednocząstkowy operator identyczności. Powyższy fakt jest tak zwanym rozkładem jedynki i jest on tożsamy z wersją nierelatywistyczną. Wobec warunku normalizacji prawdopodobieństwa w każdej chwili czasu można mówić o jego zachowaniu, a więc i o równaniu ciągłości gęstości prawdopodobieństwa:

$$\partial_t \hat{\rho} = -\text{div } \hat{\mathcal{J}}, \quad (3.62)$$

gdzie  $\hat{\mathcal{J}}$  jest trójprądem gęstości prawdopodobieństwa. Wektor ten można zadać jako rozwiązanie powyższego równania różniczkowego, wówczas:

$$\hat{\mathcal{J}}(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3 \mathbf{x}' \partial_t \hat{\rho}(t, \mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (3.63)$$

lub wykorzystując fakt, że  $e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} = \text{div}(i\mathbf{p} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}/\mathbf{p}^2)$  można go wyrazić w zmiennych pędowych w postaci:

$$\hat{\mathcal{J}}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2p_0}} \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3 \sqrt{2p'_0}} (p_0 - p'_0) \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}'}{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2} |p\rangle \langle p'| e^{i(p-p') \cdot x}. \quad (3.64)$$

Gęstość trójprądu  $\hat{\mathcal{J}}$  zależy nieliniowo od czteroprędkości  $U$  w stopniu bardziej złożonym niż nieliniowa zależność przestrzennej części dowolnego niezerowego czterowektora od czteroprędkości układu odniesienia. Gęstość prawdopodobieństwa wraz z jej trójprądem tworzą razem kwaziczterowektor czteroprądu  $\hat{\mathcal{J}}^\mu(x, U)$  będący funkcją zmiennych czasoprzestrzennych oraz czteroprędkości układu odniesienia.

Mimo, że czteroprąd gęstości prawdopodobieństwa odpowiadający operatorowi położenia  $\hat{\mathcal{Q}}$  nie jest kowariantny w teorii operatora położenia występuje również kowariantna gęstość pewnego *abstrakcyjnego* czteroprądu postaci:

$$\hat{j}_\mu(x) = \hat{\phi}(x)|0\rangle i \overleftrightarrow{\partial}_\mu \langle 0|\hat{\phi}(x) = |\tilde{x}\rangle i \overleftrightarrow{\partial}_\mu \langle \tilde{x}|. \quad (3.65)$$

Wcześniej była już rozważona zerowa składowa takiego czterowektora, gdzie było wykazane, że nie jest ona równa  $\hat{\rho}$ . Trudno kategorycznie rozstrzygnąć czy ta zerowa składowa jest dodatnio określonym operatorem czy nie (prawdopodobnie nie jest). Operator kowariantnej gęstości czteroprądu  $\hat{j}^\mu$  spełnia równanie ciągłości:

$$\partial_\mu \hat{j}^\mu(x) = 0, \quad (3.66)$$

na mocy równania Kleina-Gordona spełnianego przez pole  $\hat{\phi}(x)$ . Ponadto opisuje on rozkład pewnego unormowanego ładunku, gdyż:

$$\int_\Omega *dx^\mu \hat{j}_\mu(x) = \hat{1}^{(1)}, \quad (3.67)$$

gdzie  $\Omega$  to dowolna trójwymiarowa hiperpowierzchnia przestrzennopodobna. Niezależność całki od tej hiperpowierzchni wynika z równania ciągłości, natomiast jej jednostkowa wartość jest konsekwencją następującego faktu:

**Fakt 1** *Gęstości  $\hat{\rho} = \hat{\mathcal{J}}_0$  oraz  $\hat{j}_0$  opisują rozkłady ładunków o tej samej (jednostkowej) wartości, tzn.:*

$$\int d^3\mathbf{x} \hat{\mathcal{J}}_0(t, \mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x} \hat{j}_0(t, \mathbf{x}). \quad (3.68)$$

**Dowód:** Lewa strona równania rozpisana w zmiennych pędowych wyraża się następująco:

$$L = \int d^3\mathbf{x} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2p'_0} \sqrt{2p_0 2p'_0} |p\rangle \langle p'| e^{i(p-p')x}, \quad (3.69)$$

natomiast prawa:

$$P = \int d^3\mathbf{x} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2p'_0} (p_0 + p'_0) |p\rangle \langle p'| e^{i(p-p')x}. \quad (3.70)$$

Zamieniając kolejność całkowania (przy założeniu, że można tutaj tak postąpić)<sup>6</sup>, po wykonaniu całki po  $\mathbf{x}$  zgodnie z wzorem:

$$\int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} e^{i(p-p')x} = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (3.71)$$

<sup>6</sup>Zamiana kolejności całkowania jest tu możliwa na mocy twierdzenia Fubiniiego-Lebesgue'a, które zakłada tylko istnienie jednej z całek iterowanych. Aby móc zastosować tutaj powyższe twierdzenie należy najpierw obliczyć elementy macierzowe operatorów, co sprowadza zagadnienie do całek z funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a.

obydwie strony (L i P) przybiorą identyczną postać. ■

Na podstawie powyższego faktu można przypuszczać, że operatory gęstości cztero-prądów  $\hat{j}_\mu(x)$  i  $\hat{\mathcal{J}}_\mu(x, U)$ , lokalnie różne w każdym układzie odniesienia, wycalkowane po obszarach makroskopowych powinny przyjmować zbliżone wartości. Ponadto kowariantny operator  $\hat{j}_\mu$  może być użyty do wyrażenia operatora położenia w zadanym układzie współrzędnych:

**Fakt 2**

$$\hat{\mathbf{Q}}(t) = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \hat{\mathcal{J}}_0(t, \mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \hat{j}_0(t, \mathbf{x}). \quad (3.72)$$

**Dowód:** Wykazanie powyższego faktu przebiega analogicznie do dowodu *faktu 1*, z wykorzystaniem rozpisanej tam lewej (3.69) i prawej (3.71) strony. Lewa i prawa strona równania obecnie dowodzonego faktu różni się od tamtych tylko występowaniem czynnika  $\mathbf{x}$  w całkach. Z tego powodu potrzebny będzie wzór:

$$\int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} \mathbf{x} e^{i(p-p')x} = -ie^{i(p_0-p'_0)t} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (3.73)$$

Przy jego pomocy można najpierw obliczyć całkę po  $\mathbf{x}$ . Obliczenie następnej całki, tym razem po  $\mathbf{p}'$ , będzie wymagało różniczkowania po tej zmiennej. Można ograniczyć się do różniczkowania czynników, które są różne dla obu stron dowodzonej równości. W ten sposób lewa strona zawiera następujący zróżniczkowany czynnik:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} \left[ 2\sqrt{p_0 p'_0} \right]_{\mathbf{p}'=\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{p_0},$$

zaś prawa strona czynnik:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} [p_0 + p'_0]_{\mathbf{p}'=\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{p_0}.$$

Równość powyższych czynników oznacza identyczność wyrażeń całkowych prawej i lewej strony dowodzonego równania. ■

Fakt ten pokazuje, że ładunki<sup>7</sup> zadane gęstościami  $\hat{j}_\mu$  i  $\hat{\mathcal{J}}_\mu$ , oprócz tego, że mają taką samą wartość, również posiadają taki sam moment rozkładu w każdym układzie inercyjnym. Momenty kwadrupolowe tych dwóch rozkładów już się jednak nie pokrywają. Ponadto *fakt 2* uświadamia ponad wszelką wątpliwość konieczność niekowariantnego charakteru operatora położenia.

## 3.4 Uogólnienia operatora położenia

### 3.4.1 Operator położenia we współrzędnych krzywoliniowych

Można teraz przystąpić do uogólniania definicji operatora położenia opartego na kowariantnej gęstości abstrakcyjnego czteroprądu  $\hat{j}_\mu$ . W pierwszym kroku warto zapisać operator położenia w jawnej zależności od układu odniesienia, tzn. od czteroprędkości  $U_\mu$  tego

---

<sup>7</sup>Nie chodzi oczywiście o ładunki elektryczne, ale o prawdopodobieństwo opisywane przez  $\hat{\mathcal{J}}_\mu$  oraz pewien abstrakcyjny ładunek opisywany przez  $\hat{j}_\mu$ .

układu oraz od czasu własnego tego układu równego  $\tau = x_\mu U^\mu$ . Postać ta jest prostym uogólnieniem *faktu 2*:

$$\hat{Q}^\mu(\tau, U) = \int_{x_\alpha U^\alpha = \tau} *dx^\nu x^\mu [\hat{\phi}(x)|0\rangle i \overleftrightarrow{\partial}_\nu \langle 0|\hat{\phi}(x)], \quad (3.74)$$

przy czym występujący tu operator różniczkowania działa tylko w obrębie nawiasu kwadratowego dzięki czemu  $\hat{Q}_0 = \tau$ . Powyższa formuła na operator położenia jest już dość ogólna, gdyż nie wyróżnia żadnej reprezentacji przestrzeni Focka oraz wykorzystuje tylko podstawowe wielkości kowariantne. Formułę tę można jeszcze uogólnić na pewną klasę krzywoliniowych współrzędnych czasoprzestrzeni. Niech  $\{q^\mu\}_{\mu=0}^3$  oznaczają krzywoliniowe współrzędne określone na całej czasoprzestrzeni takie, że równanie  $q_0 = \text{const}$  zadaje nieograniczoną hiperpowierzchnię przestrzennopodobną  $\Omega_{q_0}$ . Hiperpowierzchnia ta parametryzowana jest trzema pozostałymi współrzędnymi  $\{q^k\}_{k=1}^3$ . W kwantowym opisie cząstek współrzędnym tym powinny odpowiadać operatory hermitowskie. W wyniku prostego uogólnienia wzoru (3.74) można zaproponować następującą postać tych operatorów współrzędnych:

$$\hat{Q}^\mu(q_0) = \int_{q_0 = \text{const}} *dq^\nu q^\mu [\hat{\phi}(q)|0\rangle i \overleftrightarrow{\partial}_\nu \langle 0|\hat{\phi}(q)]. \quad (3.75)$$

Występuje tutaj skierowana trójforma objętości postaci:

$$*dq^\nu = -\frac{1}{3!} \sqrt{-g} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}^\nu dq^\alpha \wedge dq^\beta \wedge dq^\gamma, \quad (3.76)$$

gdzie  $g$  jest wyznacznikiem tensora metrycznego we współrzędnych  $q^\mu$ .

Ostatecznie więc operator położenia może być traktowany jako operator współrzędnych krzywoliniowych  $\{q^k\}_{k=1}^3$  na pewnej hiperpowierzchni  $\Omega$ . Do realizacji tego podejścia potrzebna jest operacja różniczkowania  $\partial_n = n^\mu \partial_\mu$  w kierunku jednostkowego wektora  $n^\mu$  normalnego do hiperpowierzchni  $\Omega$  i skierowanego w przyszłość. Dzięki niemu można zdefiniować pęd kanoniczny pola na hiperpowierzchni  $\Omega$ :

$$\hat{\pi}|_\Omega = \partial_n \hat{\phi}|_\Omega. \quad (3.77)$$

Również istotny będzie element<sup>8</sup> objętości na tej hiperpowierzchni:

$$d^3\mathbf{q} = \sqrt{|G|} dq^1 dq^2 dq^3, \quad (3.78)$$

gdzie  $G$  jest wyznacznikiem tensora metrycznego hiperpowierzchni  $\Omega$  wyrażonym we współrzędnych  $q^k$ . Operator położenia można teraz zapisać w formie:

$$\hat{Q}^k(\Omega) = \int_\Omega d^3\mathbf{q} q^k i [\hat{\phi}|0\rangle \langle 0|\hat{\pi} - \hat{\pi}|0\rangle \langle 0|\hat{\phi}]. \quad (3.79)$$

Postać ta pokazuje *explicite* trójwymiarowy charakter operatora położenia. Ponadto daje ona potencjalną możliwość uogólnienia rozważanej teorii na czasoprzestrzeń zakrzywioną z grawitacją.

Należy pamiętać, że używane tutaj współrzędne muszą być określone globalnie, gdyż tylko globalnie gęstość prawdopodobieństwa może być zastąpiona przez gęstość związaną

---

<sup>8</sup>Zamiast elementu objętości można rozważać jej antysymetryczną formę różniczkową, jednak dzięki orientacji zadanej przez ponumerowane współrzędne nie ma potrzeby rozróżniania tych obiektów.

z kowariantnym czteroprądem  $\hat{j}_\mu$ . Jeżeli  $|\mathbf{q}\rangle$  oznacza uogólniony stan własny (unormowany do delty Diraca) operatora  $\hat{\mathcal{Q}}$ <sup>9</sup> to wspomniany operator gęstości prawdopodobieństwa na  $\Omega$  można przedstawić w postaci:

$$\hat{\varrho}_\Omega(\mathbf{q}) = |\mathbf{q}\rangle\langle\mathbf{q}|. \quad (3.80)$$

### 3.4.2 Wielocząstkowe operatory położenia

W rozdziale tym były już rozważane wielocząstkowe funkcje falowe w reprezentacji heterowariantnej. Nic więc nie stoi na przeszkodzie, aby zdefiniować wielocząstkowe operatory położenia. Zostanie to tutaj zrobione dla dowolnej  $n$ -cząstkowej przestrzeni Focka na podstawie trywialnej analogii z przestrzenią jednocząstkową. W ustalonym układzie inercyjnym stan własny rozważanego operatora można wyrazić za pomocą heterowariantnych operatorów kreacji i anihilacji:

$$|t_{(1)}, \mathbf{x}_{(1)}; t_{(2)}, \mathbf{x}_{(2)}; \dots ; t_{(n)}, \mathbf{x}_{(n)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{a}_{t_{(1)}, \mathbf{x}_{(1)}}^\dagger \hat{a}_{t_{(2)}, \mathbf{x}_{(2)}}^\dagger \dots \hat{a}_{t_{(n)}, \mathbf{x}_{(n)}}^\dagger |0\rangle. \quad (3.81)$$

Przy jego pomocy  $n$ -czasowy<sup>10</sup> i  $n$ -cząstkowy operator położenia można wyrazić w postaci:

$$\begin{aligned} \hat{Q}^{k_1 k_2 \dots k_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= \int d^3 \mathbf{x}_{(1)} \int d^3 \mathbf{x}_{(2)} \dots \int d^3 \mathbf{x}_{(n)} x_{(1)}^{k_1} x_{(2)}^{k_2} \dots x_{(n)}^{k_n} \\ &\cdot |t_{(1)}, \mathbf{x}_{(1)}; t_{(2)}, \mathbf{x}_{(2)}; \dots ; t_{(n)}, \mathbf{x}_{(n)}\rangle \langle t_{(1)}, \mathbf{x}_{(1)}; t_{(1)}, \mathbf{x}_{(1)}; \dots ; t_{(n)}, \mathbf{x}_{(n)}|. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Powyższy wzór analogicznie do teorii jednocząstkowej daje się wyrazić za pomocą kowariantnych stanów:

$$|\tilde{x}_{(1)}, \tilde{x}_{(2)}, \dots, \tilde{x}_{(n)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{\phi}_{(-)}(x_{(1)}) \hat{\phi}_{(-)}(x_{(2)}), \dots \hat{\phi}_{(-)}(x_{(n)}) |0\rangle. \quad (3.83)$$

Operator położenia może być teraz zapisany w postaci:

$$\begin{aligned} \hat{Q}^{k_1 k_2 \dots k_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= \int d^3 \mathbf{x}_{(1)} \int d^3 \mathbf{x}_{(2)} \dots \int d^3 \mathbf{x}_{(n)} x_{(1)}^{k_1} x_{(2)}^{k_2} \dots x_{(n)}^{k_n} \\ &\cdot |\tilde{x}_{(1)}, \tilde{x}_{(2)}, \dots, \tilde{x}_{(n)}\rangle i \overleftrightarrow{\partial}_{t_1} i \overleftrightarrow{\partial}_{t_2} \dots i \overleftrightarrow{\partial}_{t_n} \langle \tilde{x}_{(1)}, \tilde{x}_{(2)}, \dots, \tilde{x}_{(n)}|. \end{aligned} \quad (3.84)$$

W równoczesnej reprezentacji heterowariantnej ( $t_1 = t_2 = \dots = t_n$ ) rozważany operator położenia (w obrazie Schrödingera) jest po prostu mnożeniem przez zsymetryzowany iloczyn odpowiednich współrzędnych:

$$\{\hat{Q}^{k_1 k_2 \dots k_n}\}_\Psi = x_{(1)}^{k_1} x_{(2)}^{k_2} \dots x_{(n)}^{k_n}, \quad (3.85)$$

przy czym nawias okrągły oznacza symetryzację wskaźników, konieczną w rozważanej teorii nierozróżnialnych bozonów.

Dla stanów wielocząstkowych można także określić gęstość prawdopodobieństwa i pomocniczą kowariantną gęstość  $\hat{j}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$  oraz podać uogólnienie na krzywoliniowe układy współrzędnych w pełnej analogii do teorii jednocząstkowej. Postępowanie to nie będzie tutaj jednak wykonywane.

<sup>9</sup>Zbiór trzech współrzędnych krzywoliniowych oczywiście nie tworzy żadnego trójwektora, ale mimo to jest on tutaj oznaczony wytłuszczonym drukiem.

<sup>10</sup>Cząstki mogą być zlokalizowane tylko w określonych chwilach, należy zatem rozważać dowolne konfiguracje czasów lokalizacji  $n$  cząstek.



## Rozdział 4

# Zespolone pole skalarne - naładowane cząstki bezspinowe

Teoria zespolonego pola skalarnego jest bardzo podobna do omówionej w poprzednim rozdziale teorii pola rzeczywistego. Główna różnica polega na tym, że w tej teorii operator pola  $\hat{\phi}(x)$  nie jest operatorem hermitowskim, w związku z tym jego rozkład na fale płaskie jest trochę zmodyfikowany:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} [\hat{a}(p)e^{-ip \cdot x} + \hat{b}^\dagger(p)e^{ip \cdot x}], \quad (4.1)$$

gdzie występuje operator kreacji antycząstki  $\hat{b}^\dagger(p)$ . Operator ten spełnia takie same związki komutacyjne jak operator  $\hat{a}^\dagger(p)$ , z którym zresztą komutuje. Widać zatem, że rozważana teoria opisuje dwa typy cząstek, z których jedne nazywane są po prostu cząstkami, a drugie antycząstkami. Omawiane typy cząstek różnią się tylko znakiem ładunku elektrycznego i dlatego obiekty związane z cząstkami będą oznaczane indeksem  $+$ , a związane z antycząstkami indeksem  $-$ . W ten sposób pełna przestrzeń Hilberta-Focka rozpada się na produkt tensorowy przestrzeni cząstek i antycząstek:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \otimes \mathcal{H}_-, \quad (4.2)$$

przy czym przestrzenie  $\mathcal{H}_\pm$  są identyczne<sup>1</sup> jak przestrzeń Focka rzeczywistego pola skalarnego.

Położeniowe heterowariantne operatory anihilacji cząstek i kreacji antycząstek można zdefiniować tutaj następująco:

$$\hat{a}_{t,\mathbf{x}} = \sqrt{2\sqrt{m^2 - \Delta}} \hat{\phi}_{(+)}(x) \quad , \quad \hat{b}_{t,\mathbf{x}}^\dagger = \sqrt{2\sqrt{m^2 - \Delta}} \hat{\phi}_{(-)}(x), \quad (4.3)$$

gdzie  $\hat{\phi}_{(+)}$  to część anihilująca pola  $\hat{\phi}$ , a  $\hat{\phi}_{(-)}$  to część kreująca pola. Występujące w tych wzorach operacje wyciągania pierwiastków (dodatnich) między innymi z minus laplasjanu należy rozumieć w kontekście przedstawienia fourierowskiego pola.

---

<sup>1</sup>Chodzi tutaj o identyczność stosowanych realizacji tych przestrzeni, gdyż abstrakcyjnie wszystkie przestrzenie Hilberta o nieskończonej (przeliczalnej) liczbie wymiarów są izomorficzne.

## 4.1 Operatory położenia cząstki i antycząstki

Przy pomocy heterowariantnych operatorów anihilacji  $\hat{a}_{t,\mathbf{x}}$ , zdefiniowanych przez pierwsze równanie w (4.3) można wyrazić operator położenia cząstki w formie:

$$\hat{\mathbf{Q}}_+(t) = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \hat{a}_{t,\mathbf{x}}^\dagger |0\rangle \langle 0| \hat{a}_{t,\mathbf{x}}, \quad (4.4)$$

natomiast operator położenia antycząstki wyraża się przy pomocy heterowariantnych operatorów  $\hat{b}_{t,\mathbf{x}}$ :

$$\hat{\mathbf{Q}}_-(t) = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \hat{b}_{t,\mathbf{x}}^\dagger |0\rangle \langle 0| \hat{b}_{t,\mathbf{x}}. \quad (4.5)$$

Operator  $\hat{\mathbf{Q}}_+$  ma formalnie taką samą postać jak w teorii pola rzeczywistego, zatem może być wyrażony w postaci:

$$\hat{\mathbf{Q}}_+(t) = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \hat{\phi}^\dagger(t, \mathbf{x}) |0\rangle \langle 0| \overleftrightarrow{\partial}_t \langle 0| \hat{\phi}(t, \mathbf{x}). \quad (4.6)$$

Ponieważ  $\hat{\mathbf{Q}}_-$  różni się od  $\hat{\mathbf{Q}}_+$  tylko zamianą operatorów typu  $\hat{a}$  na operatory typu  $\hat{b}$  to może być on zapisany w formie:

$$\hat{\mathbf{Q}}_-(t) = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \hat{\phi}(t, \mathbf{x}) |0\rangle \langle 0| i \overleftrightarrow{\partial}_t \langle 0| \hat{\phi}^\dagger(t, \mathbf{x}). \quad (4.7)$$

Łatwo zauważyć, że gdyby pole  $\hat{\phi}$  było hermitowskie to operator  $\hat{\mathbf{Q}}_-$  byłby równy operatorowi  $\hat{\mathbf{Q}}_+$ . W reprezentacji heterowariantnej (w obrazie Schrödingera) rozważane operatory położenia są oczywiście operatorami mnożenia przez  $\mathbf{x}$ .

Uogólnienie operatorów  $\hat{\mathbf{Q}}_\pm$  dla krzywoliniowych współrzędnych na hiperpowierzchni przestrzennopodobnej przebiega tak samo, jak w teorii pola rzeczywistego. Również analogicznie wprowadza się tutaj wielocząstkowe operatory położenia. Ze względu na wierną analogię do poprzedniego rozdziału powyższe uogólnienia nie będą tutaj odrębnie rozważane.

## 4.2 Propozycja uogólnienia operatora położenia na teorię z oddziaływaniem

W rozdziale o hermitowskim polu skalarnym nie było proponowane pewne bardziej spektakularne, ale i kontrowersyjne uogólnienie operatora położenia na teorię oddziaływających pól kwantowych. Do tego celu najlepiej nadaje się postać operatora położenia zapisana z użyciem pędu kanonicznego pola  $\hat{\pi}(x)$ :

$$\hat{\mathbf{Q}}_+(t) = i \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} [\hat{\phi}^\dagger(t, \mathbf{x}) |0\rangle \langle 0| \hat{\pi}(t, \mathbf{x}) - \hat{\pi}^\dagger(t, \mathbf{x}) |0\rangle \langle 0| \hat{\phi}(t, \mathbf{x})]. \quad (4.8)$$

Ewentualne wykorzystanie w teorii z oddziaływaniem postaci  $\hat{\mathbf{Q}}_+$ , zawierającej pęd kanoniczny poparte jest przez następujący związek komutacyjny:

$$[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}')] = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (4.9)$$

który jest słuszny nawet w teorii z oddziaływaniem, a prawa strona tego związku ma charakter heterowariantny. Wszystkie wielkości występujące we wzorze (4.8) mają rację bytu w pełnej teorii oddziałujących pól kwantowych. Ponadto postać tego wzoru zapewnia niezależność operatora położenia od cechowania.

Interpretacja operatora  $\hat{Q}_+$  uogólnionego na teorię z oddziaływaniem jest istotnie utrudniona istnieniem w takiej teorii zjawiska kreacji par cząstka - antycząstka, a więc w istocie zjawiska zmiany liczby cząstek danego rodzaju. Zjawisko kreacji par zachodzi w czasoprzestrzeni, uzasadnionym jest zatem oczekiwanie, że istnieje pewien opis tego zjawiska, oparty na pojęciach czasoprzestrzennych, takich jak położenie i czas. Nie jest wykluczone, że takiego opisu dostarczą nam: operator położenia wprowadzony wzorem (4.8) oraz jego wielocząstkowe analogony.



# Rozdział 5

## Pole Diraca - elektrony i pozytony

### 5.1 Kwantowanie kanoniczne i przestrzeń Focka

W relatywistycznej mechanice kwantowej cząstki o spinie 1/2 opisywane są bispinorowym polem  $\hat{\psi}(x)$ , które stanowi czterekomponentowy zbiór skalarnych pól niehermitowskich (zespolonych) o specjalnych regułach transformacyjnych. Pole  $\hat{\psi}(x)$  spełnia równanie Diraca, które można zapisać w postaci kowariantnej następująco:

$$\hat{\gamma}^\mu i\partial_\mu \hat{\psi}(x) = m\hat{\psi}(x), \quad (5.1)$$

gdzie  $m$  jest masą kwantów pola (cząstek), a  $\{\hat{\gamma}^\mu\}_{\mu=0}^3$  to zbiór *kowariantnych* macierzy (4x4) Diraca spełniających poniższe związki antykomutacyjne:

$$\{\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (5.2)$$

Z równania Diraca i związków antykomutacyjnych macierzy gamma wynika, że każda składowa pola  $\hat{\psi}$  spełnia równanie Kleina-Gordona. Na tej podstawie można dokonać kowariantnej<sup>1</sup> trójwymiarowej transformacji Fouriera pola  $\hat{\psi}$  opisanego w dodatku N4 i wyrazić to pole za pomocą transformacji odwrotnej:

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} [\hat{\psi}(p) e^{-ip \cdot x} - \hat{\psi}(-p) e^{ip \cdot x}], \quad (5.3)$$

przy czym całkowanie przebiega tylko po dodatniej powłoce masy tzn.  $p_0 = +\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ . Transformata Fouriera  $\hat{\psi}(p)$  pola Diraca spełnia równanie:

$$\hat{\gamma}^\mu p_\mu \hat{\psi}(p) = m\hat{\psi}(p). \quad (5.4)$$

#### 5.1.1 Bispinorowe bazy rozwiązań równania Diraca

Wygodnie jest przedstawić operator  $\hat{\psi}(p)$  w dowolnej bazie podprzestrzeni takich bispinorów  $u$ , które spełniają algebraiczne równanie:

$$(\hat{\gamma}^\mu p_\mu - m)u(p) = 0. \quad (5.5)$$

Ponieważ rząd macierzy stojącej tutaj po lewej stronie wynosi 2 (nawet gdy  $m = 0$ ) to rozważana podprzestrzeń jest dwuwymiarowa (w sensie zespolonym). Można wybrać dwa bispinory bazowe tej podprzestrzeni, które zależą od  $p$ . Poniżej zostaną zaproponowane dwie takie bazy.

---

<sup>1</sup>W przypadku pola Diraca podawana transformacja nazywana jest kowariantną, a nie inwariantną ze względu na bispinorową naturę tego pola.

## Bispinorowa baza własna

W celu zdefiniowania bazy pierwszego rodzaju należy wyróżnić pewien unormowany czterowektor przestrzennopodobny  $n^\mu$  ( $n^2 = -1$ )<sup>2</sup>. W konstrukcji tej bazy używana będzie tylko ortogonalna do czteropędu część wektora  $n_\mu$ :

$$n_\mu^\perp(p) = n_\mu - \frac{n \cdot p}{m^2} p_\mu.$$

Bispinory bazowe z definicji spełniają równanie (5.5). W celu ich dookreślenia można zażądać, aby były one wektorami własnymi macierzy rzutu spinu na kierunek  $n_\mu^\perp$ , która to macierz ma postać:

$$\hat{s}_n = \frac{1}{2} \hat{\gamma}_5 \hat{\gamma}^\mu n_\mu^\perp, \quad (5.6)$$

gdzie  $\hat{\gamma}_5 = i\hat{\gamma}_0\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_2\hat{\gamma}_3$ . Podana macierz komutuje z macierzą występującą w równaniu Diraca. Macierz ta posiada dwie podwójne wartości własne  $+1/2$  i  $-1/2$ , które mogą być wartościami indeksu  $s_n$  porządkującego bispinory bazy. W celu bardziej bezpośredniego określenia tej bazy wygodnie jest wprowadzić operator projekcji na rozwiązania równania Diraca o określonym  $s_n$ :

$$\hat{\Pi}(p, \pm 1/2) = \frac{1 \pm \hat{\gamma}_5 \hat{\gamma}^\mu n_\mu^\perp}{2} \frac{m + \hat{\gamma}^\nu p_\nu}{2m}. \quad (5.7)$$

Operator ten jest poprawnym operatorem rzutowym o śladzie 1, ale nie jest on hermitowski. Ostatecznie można więc określić elementy bazy przez podanie macierzy rzutowej na każdy z nich. Dla dodatniej powłoki masy  $p_0 > 0$  bispinory te oznaczmy literą  $u$ :

$$u(p, s_n) \longleftrightarrow \hat{\Pi}(p, s_n), \quad (5.8)$$

zaś dla ujemnej powłoki masy literą  $v$ :

$$v(p, s_n) \longleftrightarrow \hat{\Pi}(-p, -s_n), \quad (5.9)$$

gdzie  $p_0 > 0$ , a strzałka oznacza odpowiedniość między wektorem oraz macierzą rzutową na kierunek tego wektora. Do pełnej jednoznaczności (pomijając dowolność faz) określenia elementów bazy potrzebne są jeszcze warunki ich normalizacji:

$$\bar{u}(p, s_n)u(p, s'_n) = \delta_{s_n s'_n} \quad ; \quad \bar{v}(p, s_n)v(p, s'_n) = -\delta_{s_n s'_n}, \quad (5.10)$$

gdzie  $\bar{u} = u^\dagger \hat{\gamma}_0$  to sprzężenie dirakowskie. Możliwość narzucenia takich warunków normalizacyjnych wynika z faktu, że bispinory sprzężone  $\bar{u}, \bar{v}$  są lewostronnymi wektorami własnymi tych samych macierzy, których wektory własne to niesprężone bispinory  $u, v$ . Ponadto bispinory dodatniej i ujemnej powłoki masy są ortogonalne (w sensie dirakowskim):

$$\bar{u}(p, s_n)v(p, s'_n) = 0, \quad (5.11)$$

co oznacza, że łącznie bispinory te tworzą dla każdego  $p$  bazę pełnej czterowymiarowej przestrzeni bispinorów. Niestety zdefiniowana baza nie jest ortonormalna w sensie zwykłego iloczynu skalarnego ze sprzężeniem hermitowskim, tzn. iloczynu typu  $u^\dagger v$ . Sytuacja

---

<sup>2</sup>W przypadku  $m = 0$  należałoby dodatkowo wyróżnić wektor czasopodobny, najlepiej ortogonalny do wektora  $n_\mu$ .

ta jest konsekwencją niehermitowskości macierzy, dla których  $u(p, s_n)$  i  $v(p, s_n)$  są wektorami własnymi oraz niekowariantnego charakteru zwykłego iloczynu bispinorów.

W praktyce w konkretnej reprezentacji macierzy Diraca można otrzymać przykładowo bispinor  $u(p, +1/2)$  wybierając niezerową kolumnę macierzy  $\hat{\Pi}(p, +1/2)$ , a następnie normalizując ją. Normalizację może usprawnić wykorzystanie wzoru  $\hat{\Pi} \hat{\Pi} = \hat{\gamma}_0 \hat{\Pi}$ , gdzie występuje sprzężenie dirakowskie macierzy zdefiniowane analogicznie do sprzężenia dirakowskiego bispinorów. Wprowadzona baza złożona z wektorów  $u(p, s_n), v(p, s_n)$  nie ma całkowicie kowariantnego charakteru, gdyż zależy od wyboru wektora  $n$ , ale w zamian za to posiada prostą interpretację fizyczną, odwołującą się do pojęcia spinu.

### Cykliczna baza bispinorowa

Ze względu na mniejszą swobodę w wyborze i większą ilość związków ortonormalności wygodniej jest stosować inną niż powyższa bazę, która będzie nazywana *bazą cykliczną*. Dzięki nadaniu elementom tej bazy wymiaru odwrotności pierwiastka długości jest ona dobrze określona nawet dla  $m = 0$ . Do określenia tej bazy potrzebne są cztery bispinory  $u_{(1)}^0, u_{(2)}^0, v_{(1)}^0, v_{(2)}^0$ , które będą pełniły rolę *wektorów cyklicznych*. Zakładamy, że bispinory te są wektorami własnymi macierzy  $\hat{\gamma}_0$ :

$$\hat{\gamma}_0 u_{(a)}^0 = +u_{(a)}^0 \quad , \quad \hat{\gamma}_0 v_{(a)}^0 = -v_{(a)}^0, \quad (5.12)$$

oraz, że są ortonormalne:

$$u_{(a)}^{0\dagger} u_{(b)}^0 = v_{(a)}^{0\dagger} v_{(b)}^0 = \delta_{ab}, \quad (5.13)$$

gdzie indeksy  $a, b$  przyjmują wartość 1 lub 2. Ortogonalność wektorów typu  $u$  do wektorów typu  $v$  jest zagwarantowana równaniami własnymi (5.12). Zdefiniowane bispinory są zadane z dokładnością do transformacji unitarnej, tzn. że dwie wersje (primowaną i nie primowaną) takich bispinorów można wzajemnie przekształcać na siebie przy pomocy pewnych dwóch dwuwymiarowych macierzy unitarnych  $R_{ab}^u, R_{ab}^v$  zgodnie z wzorami:

$$u_{(a)}^0 = \sum_{b=1}^2 R_{ab}^u u_{(b)}^0 \quad , \quad v_{(a)}^0 = \sum_{b=1}^2 R_{ab}^v v_{(b)}^0. \quad (5.14)$$

Elementy *cyklicznej bazy spinowej* w wyróżnionym układzie definiujemy jako odwrotne lorentzowskie pchnięcia bispinorów cyklicznych z czteroprędkością  $p/m$  tzn.:

$$u_{(a)}(p) = \sqrt{2m} \hat{S}^{-1}(p/m) u_{(a)}^0 \quad , \quad v_{(a)}(p) = \sqrt{2m} \hat{S}^{-1}(p/m) v_{(a)}^0, \quad (5.15)$$

przy czym czynnik  $\sqrt{2m}$  został dodany po to, aby usunąć osobliwość dla  $m = 0$ . Macierz  $\hat{S}(\cdot)$  jest macierzą pchnięcia lorentzowskiego bispinorów zależną od czteroprędkości. Na podstawie wzorów zawartych w dodatku **N5** otrzymujemy następujące równania na elementy bazy cyklicznej:

$$u_{(a)}(p) = \frac{m + \hat{\gamma}^\mu p_\mu}{\sqrt{m + p_0}} u_{(a)}^0 \quad , \quad v_{(a)}(p) = \frac{m - \hat{\gamma}^\mu p_\mu}{\sqrt{m + p_0}} v_{(a)}^0, \quad (5.16)$$

przy czym jak zwykle jest przyjęte, że  $p_0 = +\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ . Baza ta wbrew pozorom nie ma kowariantnego charakteru, gdyż wyróżnia układ odniesienia, w którym  $p = (m, \mathbf{0})$ . Z powyższego powodu rozważaną bazę można nazywać bardziej precyzyjnie *cykliczną bazą spoczynkową*. Warto również zauważyć, że bispinory  $u_{(1)}, u_{(2)}, v_{(1)}, v_{(2)}$  nie są w ogólności

wektorami własnymi operatora  $\hat{s}_n$ . Związki ortonormalizacyjne dla bazy cyklicznej mają podobną postać jak dla poprzedniej:

$$\bar{u}_{(a)}(p)u_{(b)}(p) = 2m\delta_{ab} \quad ; \quad \bar{v}_{(a)}(p)v_{(b)}(p) = -2m\delta_{ab}, \quad (5.17)$$

gdzie indeksy  $a, b$  przyjmują wartość 1 lub 2. Ponadto bispinory bazy cyklicznej spełniają relacje:

$$\begin{aligned} u_{(a)}^\dagger(p)u_{(b)}(p) &= 2p_0\delta_{ab}, \\ v_{(a)}^\dagger(p)v_{(b)}(p) &= 2p_0\delta_{ab}, \\ u_{(a)}^\dagger(p_0, \mathbf{p})v_{(b)}(p_0, -\mathbf{p}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Cykliczna baza spoczynkowa określona jest z dokładnością do transformacji unitarnej typu (5.14), która nie zależy od  $p$ . W dalszej części rozdziału stosowana jest wyłącznie cykliczna baza spoczynkowa bispinorów.

### 5.1.2 Związki antykomutacyjne

Z klasycznego formalizmu lagranżowskiego wynika, że pędem kanonicznie sprzężonym pola jest wielkość  $i\hat{\psi}^\dagger(x)$ <sup>3</sup>. Oznacza to, że w wyniku zastosowania metody kanonicznego kwantowania dla fermionów otrzymuje się następujące reguły antykomutacyjne:

$$\begin{aligned} \{\hat{\psi}_A(t, \mathbf{x}), \hat{\psi}_B^\dagger(t, \mathbf{x}')\} &= \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta_{AB}; \\ \{\hat{\psi}_A(t, \mathbf{x}), \hat{\psi}_B(t, \mathbf{x}')\} &= 0; \\ \{\hat{\psi}_A^\dagger(t, \mathbf{x}), \hat{\psi}_B^\dagger(t, \mathbf{x}')\} &= 0; \end{aligned} \quad (5.19)$$

gdzie  $A$  i  $B$  są czterowartościowymi indeksami bispinorowymi. Ze związków tych wynikają antykomutatory dla transformaty Fouriera pola na powłoce masy:

$$\begin{aligned} \{\hat{\psi}_A(p), \hat{\psi}_B(p')\} &= 0; \\ \{\hat{\psi}_A^\dagger(p), \hat{\psi}_B^\dagger(p')\} &= 0; \end{aligned} \quad (5.20)$$

oraz:

$$\{\hat{\psi}_A(p), \hat{\psi}_B^\dagger(p')\} = \begin{cases} (2\pi)^3 2p_0(p_0\delta_{AB} + m\beta_{AB} + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{AB})\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') & \text{gdy } \epsilon(p_0) = \epsilon(p'_0) \\ 0 & \text{gdy } \epsilon(p_0) = -\epsilon(p'_0), \end{cases} \quad (5.21)$$

gdzie występuje niekowariantna wersja macierzy Diraca  $\hat{\beta} = \hat{\gamma}_0$ ,  $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\gamma}_0\hat{\boldsymbol{\gamma}}$  oraz funkcja znakowa signum  $\epsilon(\cdot)$ . Wyprowadzenie tych związków wymaga zastosowania równania Diraca oraz całkowania przez części. Złożona postać algebraiczna ostatniego antykomutatora jest spowodowana istnieniem tylko dwóch spinorowych stopni swobody w czterekomponentowym obiekcie  $\hat{\psi}(p)$ . Rozkład  $\hat{\psi}(p)$  w cyklicznej bazie bispinorów znacznie upraszcza sytuację. Transformatę Fouriera pola na dodatniej powłoce masy, pełniącą rolę bispinorowego operatora anihilacji, można przedstawić w postaci:

$$\hat{\psi}(p) = \sum_{a=1}^2 \hat{b}_a(p) u_{(a)}(p), \quad (5.22)$$

<sup>3</sup>Jest to prawdą, gdy używana jest niesymetryczna zespolona gęstość lagranżjanu  $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\hat{\gamma}^\mu\partial_\mu - m)\psi$ .



gdzie  $\hat{b}_{1,2}(p)$  są operatorami anihilacji elektronu o czteropędzie  $p$  i określonym stanie spinowym. Transformata Fouriera pola na ujemnej powłoce masy, która jest operatorem kreacji pozytonu może być rozłożona analogicznie:

$$-\hat{\psi}(-p) = \sum_{a=1}^2 \hat{d}_a^\dagger(p) v_{(a)}(p), \quad (5.23)$$

gdzie  $\hat{d}_a^\dagger(p)$  pełni rolę operatora kreacji pozytonu. Na podstawie antykomutatora (5.21) oraz związków ortogonalizacyjnych elementów bazy cyklicznej można otrzymać antykomutatory operatorów anihilacji i kreacji:

$$\begin{aligned} \{\hat{b}_a(p), \hat{b}_b^\dagger(p')\} &= (2\pi)^3 2p_0 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ab}; \\ \{\hat{d}_a(p), \hat{d}_b^\dagger(p')\} &= (2\pi)^3 2p_0 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ab}; \end{aligned} \quad (5.24)$$

a pozostałe antykomutatory wynoszą zero.

Dzięki nowym oznaczeniom kwantowe pole Diraca można wyrazić w postaci:

$$\hat{\psi}(x) = \sum_{a=1}^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} [\hat{b}_a(p) u_{(a)}(p) e^{-ip \cdot x} + \hat{d}_a^\dagger(p) v_{(a)}(p) e^{ip \cdot x}]. \quad (5.25)$$

Pierwszy człon tego operatora zawierający tylko dodatnie częstości stanowi kowariantny bispinorowy operator anihilacji elektronu w reprezentacji położeniowej i jest oznaczany jako  $\hat{\psi}_{(+)}(x)$ . Drugi człon, który będzie oznaczany przez  $\hat{\psi}_{(-)}(x)$  to położeniowy kowariantny operator kreacji pozytonu. Składowe (komponenty) tych operatorów bispinorowych w bazie cyklicznej będą oznaczane jako  $\hat{\psi}_{(\pm)}^{(a)}(x)$  i są one zdefiniowane następująco:

$$\hat{\psi}_{(+)}^{(a)}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \hat{b}_a(p) e^{-ip \cdot x}, \quad \hat{\psi}_{(-)}^{(a)}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \hat{d}_a^\dagger(p) e^{+ip \cdot x}. \quad (5.26)$$

Ponadto przydatne okażą się tzw. *komponenty cykliczne* pełnego pola Diraca o postaci:

$$\hat{\psi}^{(a)}(x) = \hat{\psi}_{(+)}^{(a)}(x) + \hat{\psi}_{(-)}^{(a)}(x). \quad (5.27)$$

Wprowadzonych jednoskładnikowych komponent nie należy mylić z bispinorowymi składowymi w bazie cyklicznej, które nie mają bezpośredniego zastosowania w tej pracy.

### 5.1.3 Stany Focka i ich funkcje falowe

#### Inwariantna i heterowariantna reprezentacja pędowa

Wprowadzone w poprzednim paragrafie operatory kreacji i anihilacji umożliwiają zdefiniowanie fermionowej przestrzeni Focka. Jednowymiarowa podprzestrzeń stanu próżni, reprezentowana przez unormowany wektor  $|0\rangle$ , zdefiniowana jest jak dla pola skalarnego jako wspólne jądro wszystkich operatorów anihilacji. Przy pomocy wektora próżni i operatorów kreacji wprowadza się stany wielocząstkowe. W reprezentacji pędowej jednocząstkowe stany elektronu konstruuje się następująco:

$$|\Psi_+\rangle^{(1)} = \sum_{a=1}^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \tilde{\Phi}_+^{(a)}(p) \hat{b}_a^\dagger(p) |0\rangle, \quad (5.28)$$

gdzie  $\tilde{\Phi}_+^{(1)}(p)$ ,  $\tilde{\Phi}_+^{(2)}(p)$  to dwie komponenty kowariantnej funkcji falowej elektronu w reprezentacji pędowej wyrażone w cyklicznej bazie spoczynkowej. Komponenty te traktowane łącznie tworzą bispinorową kowariantną funkcję falową:

$$\tilde{\Phi}_+(p) = \sum_{a=1}^2 \tilde{\Phi}_+^{(a)}(p) u_{(a)}(p) = \langle 0 | \hat{\psi}(p) | \Psi_+ \rangle^{(1)}. \quad (5.29)$$

W celu podania matematycznie ścisłej realizacji jednocząstkowej przestrzeni Hilberta-Focka elektronów  $\mathcal{H}_+^{(1)}$  najwygodniej jest stosować niezależne dwie *komponenty cykliczne* tego bispinora. Wspomnianą przestrzeń można zdefiniować jako zbiór klas par funkcji  $\tilde{\Phi}_+^{(1)}(p)$ ,  $\tilde{\Phi}_+^{(2)}(p)$ , dla których istnieje następująca całka Lebesgue'a:

$$\|\Psi_+\|^2 = \sum_{a=1}^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^2 2p_0} \tilde{\Phi}_+^{*(a)}(p) \tilde{\Phi}_+^{(a)}(p), \quad (5.30)$$

przy czym w obrębie danej klasy dwie pary funkcji mogą różnić się tylko na zbiorze miary zero. Powyższa całka jest kwadratem normy jednocząstkowego stanu elektronu i jest niezmiennikiem dla funkcji bispinorowej, dlatego podana definicja jest niezależna od układu inercyjnego.

Stan jednocząstkowy pozytonu wygodnie jest reprezentować w postaci:

$$|\Psi_-\rangle^{(1)} = \sum_{a=1}^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \tilde{\Phi}_-^{*(a)}(p) \hat{d}_a^\dagger(p) |0\rangle, \quad (5.31)$$

gdzie występuje zespolone sprzężenie komponent pozytonowej funkcji falowej  $\tilde{\Phi}_-^{(a)}(p)$ . Dzięki temu sprzężeniu istnieje prosty wzór na pełną bispinorową funkcję falową pozytonu:

$$\tilde{\Phi}_-(p) = \sum_{a=1}^2 \tilde{\Phi}_-^{(a)}(p) v_{(a)}(p) = {}^{(1)} \langle \Psi_- | -\hat{\psi}(-p) | 0 \rangle. \quad (5.32)$$

Funkcje falowe  $\tilde{\Phi}_\pm(p)$  są kowariantne, a operatory  $\hat{b}_a(p)$ ,  $\hat{d}_a(p)$  mają pod pewnymi względami charakter zbliżony do kowariantnego<sup>4</sup>. Heterowariantne odpowiedniki tych obiektów z definicji powinny spełniać następujące kryteria: funkcja wagowa występująca w iloczynie skalarnym wyrażonym za pomocą heterowariantnych funkcji falowych powinna wynosić jeden, a antykomutator heterowariantnych operatorów anihilacji i kreacji powinien być unormowany do iloczynu delty Diraca i Kroneckera<sup>5</sup>. Okazuje się, że heterowariantne operatory anihilacji w reprezentacji pędowej należy wprowadzić w pełnej analogii do teorii pola skalarnego w postaci:

$$\hat{b}_{\mathbf{p},a} = \frac{\hat{b}_a(p)}{\sqrt{2p_0}}, \quad \hat{d}_{\mathbf{p},a} = \frac{\hat{d}_a(p)}{\sqrt{2p_0}}, \quad (5.33)$$

podobnie jak heterowariantne funkcje falowe:

$$\tilde{\Psi}_\pm^{(a)}(\mathbf{p}) = \frac{\tilde{\Phi}_\pm^{(a)}(p)}{\sqrt{2p_0}}. \quad (5.34)$$

<sup>4</sup>Chodzi tutaj o sposób występowania zmiennej  $p$  w związkach komutacyjnych (5.24).

<sup>5</sup>Omawiana normalizacja nie jest stosowana w stosunku do potęg czynnika  $2\pi$ , który zwykle występuje wraz z pędem, ponieważ  $2\pi/|\mathbf{p}|$  jest długością fali de Broglie'a.

## Inwariantna i heterowariantna reprezentacja położeniowa

Teraz zostanie omówiona najważniejsza dla zagadnienia operatora położenia reprezentacja położeniowa. Bispinorowe kowariantne funkcje falowe elektronu lub pozytonu w reprezentacji położeniowej najprościej jest wprowadzić jako niezmiennicze trójwymiarowe transformaty Fouriera:

$$\Phi_{\pm}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^2 2p_0} \tilde{\Phi}_{\pm}(p) e^{\mp ip \cdot x}, \quad (5.35)$$

gdzie znak plus oznacza funkcję falową elektronu, a znak minus - pozytonu. Przy pomocy takiej bispinorowej kowariantnej funkcji jednocząstkowy stan elektronu można wyrazić w formie:

$$|\Psi_{+}\rangle^{(1)} = \int_{\Omega} *dx^{\mu} \hat{\psi}_{(+)}(x) \hat{\gamma}_{\mu} \Phi_{+}(x) |0\rangle, \quad (5.36)$$

gdzie  $\Phi_{+}(x)$  to kowariantna bispinorowa funkcja falowa elektronu, którą można tradycyjnie przedstawić w postaci:

$$\Phi_{+}(x) = \langle 0 | \hat{\psi}_{(+)}(x) | \Psi_{+} \rangle^{(1)}. \quad (5.37)$$

Podobnie wyglądają wzory dla pozytonu (antycząstki elektronu):

$$|\Psi_{-}\rangle^{(1)} = \int_{\Omega} *dx^{\mu} \bar{\Phi}_{-}(x) \hat{\gamma}_{\mu} \hat{\psi}_{(-)}(x) |0\rangle, \quad \Phi_{-}(x) = {}^{(1)}\langle \Psi_{-} | \hat{\psi}_{(-)}(x) |0\rangle. \quad (5.38)$$

Bispinorowe funkcje falowe spełniają zwykłe równanie Diraca oraz ponadto *pierwiastkowe* równanie Kleina-Gordona (w dowolnym układzie inercjalnym):

$$i\partial_t \Phi_{\pm}(x) = \pm \sqrt{m^2 - \Delta} \Phi_{\pm}(x), \quad (5.39)$$

ponieważ zawierają one tylko częstości określonego znaku. Iloczyn skalarny dwóch stanów jednoelektronowych lub jednopozytonowych w reprezentacji kowariantnej funkcji bispinorowej ma prostą postać:

$${}^{(1)}\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle^{(1)} = \int_{\Omega} *dx^{\mu} \bar{\Phi}_1(x) \hat{\gamma}_{\mu} \Phi_2(x) = \int d^3\mathbf{x} \Phi_1^{\dagger}(t, \mathbf{x}) \Phi_2(t, \mathbf{x}), \quad (5.40)$$

gdzie  $\bar{\Phi}_1, \Phi_1^{\dagger}$  są dirakowsko i hermitowsko sprzężonymi bispinorowymi funkcjami falowymi. Iloczyn ten ma taką samą formę jak w teorii nierelatywistycznej. Można by przypuszczać, że reprezentacja bispinorowa  $\Phi_{\pm}(x)$  jest poszukiwaną reprezentacją heterowariantną, jednak mimo pozorów tak nie jest. Fakt, że rozważana reprezentacja jest kowariantna oczywiście nie jest wystarczającym tego dowodem. Wyjaśnienie zagadnienia jest dość subtelne i odwołuje się do przestrzeni dopuszczalnych falowych funkcji bispinorowych o określonej częstości. Wiąz polegający na występowaniu w funkcjach  $\Phi_{\pm}(x)$  tylko dodatnich albo tylko ujemnych częstości zmniejsza dwukrotnie liczbę bispinorowych stopni swobody. Stosowanie funkcji falowej o zależnych komponentach może prowadzić do nieporozumień lub przynajmniej trudności, np. nie każda mierzalna z kwadratem funkcja czterokomponentowa  $F(\mathbf{x})$  może być warunkiem początkowym dla jakiegokolwiek funkcji  $\Phi_{\pm}(x)$ . Drugi argument (pośrednio związany z pierwszym) opiera się na postaci antykomutatora operatorów anihilacji i kreacji elektronu:

$$\{\hat{\psi}_{(+)}^{\dagger}{}_A(x), \hat{\psi}_{(+)}^{\dagger}{}_B(x')\} = (\delta_{AB} i\partial_t + i\boldsymbol{\alpha}_{AB} \cdot \nabla + \beta_{AB} m) i\Delta_{(+)}(x - x'), \quad (5.41)$$

gdzie  $\Delta_{(+)}(\ )$  jest wprowadzoną wcześniej funkcją Wightmana o dodatnich częstościach, a  $\nabla^k = -\partial_k$ . Widać, że powyższy antykomutator, nawet dla  $t' = t$ , nie jest iloczynem delt Diraca i Kroneckera, zatem nie jest spełniony jeden z postulatów dla reprezentacji heterowariantnej. Kolejny argument na to, że operator  $\mathbf{x}$  nie jest operatorem położenia w reprezentacji  $\Phi_{\pm}(x)$ , oparty na postaci operatora prędkości, opisany jest w rozdziale pierwszym.

Powyższe argumenty świadczą o tym, że dla konstrukcji reprezentacji heterowariantnej (i nie tylko dla niej) wskazane jest wprowadzenie dwukomponentowej funkcji falowej zamiast funkcji  $\Phi_{\pm}(x)$  o czterech zależnych składowych. Zadanie to można wykonać tak, jak w reprezentacji pędowej przy pomocy *cyklicznych komponent* bispinorów  $\Phi_{\pm}(x)$ , które są po prostu kowariantną transformacją Fouriera komponent  $\tilde{\Phi}_{(\pm)}^{(a)}$ :

$$\Phi_{\pm}^{(a)}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^2 2p_0} \tilde{\Phi}_{\pm}^{(a)}(p) e^{\mp ip \cdot x}. \quad (5.42)$$

Komponenty  $\Phi_{\pm}^{(1)}(x), \Phi_{\pm}^{(2)}(x)$  są niezależne i mogą być traktowane łącznie jako dwuelementowe funkcje falowe elektronów lub pozytonów w reprezentacji położeniowej i w bazie cyklicznej. Konsystentnie w ten sam sposób były już wcześniej wprowadzone *komponetny cykliczne* położeniowych operatorów anihilacji i kreacji:

$$\hat{\psi}_{(+)}^{(a)}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^2 2p_0} \hat{b}_a(p) e^{-ip \cdot x} \quad , \quad \hat{\psi}_{(-)}^{(a)}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^2 2p_0} \hat{d}_a^\dagger(p) e^{+ip \cdot x}. \quad (5.43)$$

Dzięki tym operatorom komponenty funkcji falowych w bazie cyklicznej można wyrazić bezpośrednio:

$$\Phi_+^{(a)}(x) = \langle 0 | \hat{\psi}_{(+)}^{(a)}(x) | \Psi_+ \rangle \quad , \quad \Phi_-^{(a)}(x) = \langle \Psi_- | \hat{\psi}_{(-)}^{(a)}(x) | 0 \rangle. \quad (5.44)$$

Do kompletu potrzebne są jeszcze *bazowe bispinory cykliczne*  $\tilde{u}^{(a)}(x), \tilde{v}^{(a)}(x)$  w reprezentacji położeniowej, które są niezależnymi (w sensie spinowych stopni swobody) klasycznymi rozwiązaniami równania Diraca:

$$\tilde{u}_{(a)}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^2 2p_0} u_{(a)}(p) e^{-ip \cdot x} \quad , \quad \tilde{v}_{(a)}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^2 2p_0} v_{(a)}(p) e^{+ip \cdot x}. \quad (5.45)$$

Mówiąc precyzyjnie są to uogólnione rozwiązania, będące skomplikowanymi dystrybucjami. Fakt ten nie dyskredytuje jednak obiektów  $\tilde{u}_{(a)}(x), \tilde{v}_{(a)}(x)$ , ponieważ w zastosowaniach występują one zawsze pod znakiem całki. Przykładowo bispinorowa funkcja falowa elektronu wyraża się za pomocą swoich komponent następująco:

$$\Phi_+(x) = \sum_{a=1}^2 \int_{\Omega} *dy^\mu \Phi_+^{(a)}(x-y) i \overleftrightarrow{\partial}_{y^\mu} \tilde{u}_{(a)}(y), \quad (5.46)$$

gdzie  $\overleftrightarrow{\partial}_{y^\mu} = \overrightarrow{\partial}/\partial y^\mu - \overleftarrow{\partial}/\partial y^\mu$ . Występowanie całki pokazuje, że wyodrębnienie niezależnych stopni swobody bispinorowej funkcji falowej elektronu ma charakter nielokalny. W podobnej postaci można wyrazić wektor stanu odpowiadający funkcji  $\Phi_+(x)$ :

$$|\Psi_+\rangle = - \sum_{a=1}^2 \int_{\Omega} *dx^\mu \Phi_+^{(a)}(x) i \overleftrightarrow{\partial}_\mu \hat{\psi}_{(+)}^{(a)}(x) | 0 \rangle. \quad (5.47)$$

Ostatnie dwa równania najprościej jest dowieść wyrażając występujące pod znakiem całki obiekty w zmiennych pędowych, a następnie przekształcić całe wyrażenie do postaci będącej definicją lewej strony. Postępowanie to jest zresztą analogiczne jak w przypadku pola skalarnego. Istotną nowością polega tylko na istnieniu dodatkowych dwóch spinowych stopni swobody. Iloczyn skalarny dwóch stanów jednocząstkowych wyrażony w reprezentacji  $\Phi^{(a)}(x)$  ma formę:

$$\langle \Psi_{1\pm} | \Psi_{2\pm} \rangle = \pm \sum_{a=1}^2 \int_{\Omega} *dx^{\mu} \Phi_{1\pm}^{*(a)}(x) i \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \Phi_{2\pm}^{(a)}(x), \quad (5.48)$$

bardzo podobną jak dla pola skalarnego, a jedyną różnicą jest występowanie dwóch modów indeksowanych za pomocą  $a$ .

Bispinorowe pole Diraca  $\hat{\psi}(x)$  może być rozpatrywane jako zbiór dwóch pól  $\{\psi_{(+)}^{(a)}(x) + \psi_{(-)}^{(a)}(x)\}_{a=1}^2$ , dzięki czemu reprezentację heterowariantną dla cząstek o spinie  $1/2$  można wprowadzić w pełnej analogii do pola skalarnego. Heterowariantny operator anihilacji elektronu w punkcie  $\mathbf{x}$  w chwili  $t$  i w stanie spinowym  $a$  należy zatem zdefiniować następująco:

$$\hat{b}_{t,\mathbf{x};a} = \sqrt{2\sqrt{m^2 - \Delta}} \hat{\psi}_{(+)}^{(a)}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \hat{b}_{\mathbf{p},a} e^{-ip \cdot x}, \quad (5.49)$$

gdzie  $\hat{b}_{\mathbf{p},a}$  to heterowariantny operator anihilacji elektronu w reprezentacji pędowej. Identycznie wygląda równanie definiujące położeniowy operator anihilacji pozytonu  $\hat{d}_{t,\mathbf{x};a}$ . Dwuskładnikową heterowariantną funkcję falową elektronu (+) lub pozytonu (-) można konsekwentnie zdefiniować równaniem:

$$\Psi_{\pm}^{(a)}(t, \mathbf{x}) = \sqrt{2\sqrt{m^2 - \Delta}} \Phi_{\pm}^{(a)}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} \tilde{\Psi}_{\pm}^{(a)}(\mathbf{p}) e^{\mp ip \cdot x}, \quad (5.50)$$

gdzie  $\Phi_{\pm}^{(a)}(x)$  to komponenty cykliczne kowariantnej funkcji falowej, a  $\tilde{\Psi}_{\pm}^{(a)}$  to komponenty heterowariantnej funkcji falowej w reprezentacji pędowej. Iloczyn skalarny dwóch stanów wyrażony za pomocą niezależnych komponent funkcji heterowariantnej przyjmuje postać:

$$\langle \Psi_{1\pm} | \Psi_{2\pm} \rangle = \sum_{a=1}^2 \int d^3\mathbf{x} \Psi_{1\pm}^{*(a)}(t, \mathbf{x}) \Psi_{2\pm}^{(a)}(t, \mathbf{x}), \quad (5.51)$$

przy czym oczywiście iloczyn ten nie zależy od czasu, co wynika z unitarności ewolucji czasowej stanów.

## 5.2 Operator położenia i gęstość prawdopodobieństwa

Znajomość położeniowej reprezentacji heterowariantnej, w szczególności heterowariantnych operatorów anihilacji  $\hat{b}_{t,\mathbf{x};a}$  oraz  $\hat{d}_{t,\mathbf{x};a}$  determinuje postać operatora położenia elektronu:

$$\hat{Q}_+(t) = \sum_{a=1}^2 \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \hat{b}_{t,\mathbf{x};a}^{\dagger} |0\rangle \langle 0| \hat{b}_{t,\mathbf{x};a}. \quad (5.52)$$

Łatwo zauważyć, że gęstość prawdopodobieństwa występująca pod całką nie zależy od wyboru cyklicznej bazy spoczynkowej, ze względu na to, że transformacja unitarna (5.14)

nie zależy od zmiennej  $p$ . Operator położenia pozytonu jest analogiczny:

$$\hat{\mathbf{Q}}_-(t) = \sum_{a=1}^2 \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \hat{b}_{t,\mathbf{x};a}^\dagger |0\rangle \langle 0| \hat{d}_{t,\mathbf{x};a}. \quad (5.53)$$

Kierując się dość wierną analogią z polem skalarnym można bez konieczności dowodu przepisać *fakt 1* dla przypadku elektronu, co prowadzi do nowej postaci operatora położenia:

$$\hat{\mathbf{Q}}_+(t) = \sum_{a=1}^2 \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \hat{\psi}_{(+)}^{\dagger(a)}(t, \mathbf{x}) |0\rangle i \overleftrightarrow{\partial}_t \langle 0| \hat{\psi}_{(+)}^{(a)}(t, \mathbf{x}), \quad (5.54)$$

gdzie  $\hat{\psi}_{(+)}^{(1,2)}(t, \mathbf{x})$  są *cyklicznymi komponentami* kowariantnego operatora anihilacji elektronu  $\hat{\psi}_{(+)}(x)$ . We wzorze tym występuje zerowa składowa kwaziczterogęstości pewnego abstrakcyjnego, unormowanego do jedności, ładunku:

$$j_+^\mu(t, \mathbf{x}) = \sum_{a=1}^2 \hat{\psi}_{(+)}^{\dagger(a)}(t, \mathbf{x}) |0\rangle i \overleftrightarrow{\partial}^\mu \langle 0| \hat{\psi}_{(+)}^{(a)}(t, \mathbf{x}), \quad (5.55)$$

który spełnia równanie ciągłości. Obiekt  $j_+^\mu(t, \mathbf{x})$  jest analogonem czterogęstości  $\hat{j}^\mu(x)$  cząstki skalarnej, ale nie jest on kowariantny. Zatem zdefiniowany operator położenia elektronu w postaci (5.54) nie jest wyrażony przy pomocy obiektów kowariantnych, ani tak elementarnych wielkości jak pole Diraca  $\hat{\psi}(x)$  czy jego pęd kanoniczny  $i\hat{\psi}^\dagger(x)$ . Okazuje się, że rozważany operator położenia nie może być przekształcony do postaci:

$$\hat{\mathbf{Q}}_+(t) \neq \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \hat{\psi}^\dagger(t, \mathbf{x}) |0\rangle \langle 0| \hat{\psi}(t, \mathbf{x}). \quad (5.56)$$

O nie zachodzeniu powyższej równości świadczy kolejna tożsama forma operatora położenia, wynikająca z poniższego faktu.

**Fakt 3** *Następujące dwie postacie operatora gęstości prawdopodobieństwa położenia elektronu są równoważne:*

$$\hat{\varrho}_+(t, \mathbf{x}) = \sum_{a=1}^2 \hat{b}_{t,\mathbf{x};a}^\dagger |0\rangle \langle 0| \hat{b}_{t,\mathbf{x};a} = \hat{\psi}_{FW}^\dagger(t, \mathbf{x}) |0\rangle \langle 0| \hat{\psi}_{FW}(t, \mathbf{x}), \quad (5.57)$$

gdzie  $\hat{\psi}_{FW}(t, \mathbf{x})$  jest transformacją Foldy'ego-Wouthuysena pola Diraca określoną w danym układzie następująco<sup>6</sup>:

$$\hat{\psi}_{FW}(t, \mathbf{x}) = \hat{U}_{FW} \hat{\psi}(t, \mathbf{x}) \quad \text{gdzie} \quad \hat{U}_{FW} = \frac{m + \hat{E} + i\hat{\gamma} \cdot \nabla}{\sqrt{2\hat{E}(m + \hat{E})}}, \quad (5.58)$$

przy czym  $\nabla^k = -\partial_k$  oraz  $\hat{E} = +\sqrt{m^2 - \Delta}$ .

**Dowód:** Pierwszą postać operatora gęstości prawdopodobieństwa należy traktować jako definicję, wynikającą z podanej konstrukcji reprezentacji heterowariantnej. Druga postać będąca konsekwencją proponowanego przez Foldy'ego i Wouthuysena operatora *mean*

<sup>6</sup>Więcej szczegółów na temat transformacji Foldy'ego-Wouthuysena znajduje się w dodatku **N6**.

*position* w kontekście transformacji unitarnej  $\hat{U}_{FW}$  podlega dowodowi. Najwygodniej wykonać ten dowód rozpisując obie postacie  $\hat{\varrho}_+$  przy pomocy rozkładu fourierowskiego. Uzyskane w ten sposób wyrażenia całkowe będą identyczne, jeżeli prawdziwy jest wzór:

$$u_{FW(a)}^\dagger(p) u_{FW(b)}(p') = \sqrt{2p_0} \sqrt{2p'_0} \delta_{ab}, \quad (5.59)$$

gdzie  $u_{FW(a)}$  to transformacje Foldy'ego-Wouthuysena bispinorów  $u_{(a)}$ , wyrażone w zmiennych pędowych. W pierwszym kroku dowodu powyższej równości warto obliczyć iloczyn macierzy występujących w definicjach  $\hat{U}_{FW}$  i  $u_{(a)}$ , tzn.:

$$(m + p_0 + \hat{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \mathbf{p})(\hat{\boldsymbol{\gamma}}^\mu p_\mu + m) = p_0(m + p_0)(\hat{\gamma}_0 + 1) + \hat{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \mathbf{p} p_0(\hat{\gamma}_0 - 1). \quad (5.60)$$

Łatwo zauważyć, że bispinory cykliczne  $u_{(a)}^0$  występujące w definicjach  $u_{(a)}$ , są wektorami własnymi powyższej macierzy. Fakt ten po uwzględnieniu mianowników w definicjach  $\hat{U}_{FW}$  i  $u_{(a)}$  prowadzi do wzoru:

$$u_{FW(a)}(p) = \sqrt{2p_0} u_{(a)}^0, \quad (5.61)$$

skąd już na mocy ortonormalności  $u_{(1)}^0$  i  $u_{(2)}^0$  wynika prawdziwość (5.59). Słuszność tego wzoru oznacza równość obu wyrażeń całkowych na  $\hat{\varrho}_+$ . ■

Rozważony fakt oznacza, że skonstruowany na podstawie heterowariantnej reprezentacji położeniowej operator położenia  $\hat{\mathbf{Q}}$  jest tożsamy operatorowi *mean position* Foldy'ego-Wouthuysena<sup>7</sup>. Z drugiej strony reprezentacja Foldy'ego-Wouthuysena jest również heterowariantna na mocy antykomutatora:

$$\{\hat{\psi}_{(+)}^{FW}{}_A(t, \mathbf{x}), \hat{\psi}_{(+)}^{\dagger FW}{}_B(t, \mathbf{x}')\} = \frac{1}{2}(\delta_{AB} + \beta_{AB})\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (5.62)$$

który jest unormowany i diagonalny w reprezentacji Diraca.

Podobnie jak w przypadku pola skalarnego również dla pola Diraca można rozważać niekowariantny czteroprąd gęstości prawdopodobieństwa  $\hat{\mathcal{J}}_+^\mu$ . Jest on zdefiniowany przez zadanie zerowej składowej i równanie ciągłości:

$$\hat{\mathcal{J}}_+^0 = \hat{\varrho}_+ \quad , \quad \partial_\mu \hat{\mathcal{J}}_+^\mu = 0. \quad (5.63)$$

Obiekt ten jest nieco sztuczny i oczywiście nie jest on równy abstrakcyjnemu kwaziczteroprądowi  $\hat{j}_+^\mu$ .

Operator położenia pozytonu można teraz, kierując się analogią z elektronem, przedstawić dwojako:

$$\hat{\mathbf{Q}}_-(t) = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \hat{\varrho}_-(t, \mathbf{x}) = \int_{t=const} *dx_\mu \mathbf{x} \hat{j}_-^\mu(x), \quad (5.64)$$

gdzie gęstość prawdopodobieństwa wynosi:

$$\hat{\varrho}_-(t, \mathbf{x}) = \sum_{a=1}^2 \hat{d}_{t,\mathbf{x};a}^\dagger |0\rangle \langle 0| \hat{d}_{t,\mathbf{x};a} = \sum_A \hat{\psi}_A^{FW}(t, \mathbf{x}) |0\rangle \langle 0| \hat{\psi}_A^{\dagger FW}(t, \mathbf{x}), \quad (5.65)$$

a abstrakcyjny kwaziczteroprąd:

$$\hat{j}_-^\mu(t, \mathbf{x}) = \sum_{a=1}^2 \hat{\psi}_{(-)}^{(a)}(t, \mathbf{x}) |0\rangle i \overleftrightarrow{\partial}^\mu \langle 0| \hat{\psi}_{(-)}^{\dagger(a)}(t, \mathbf{x}). \quad (5.66)$$

<sup>7</sup>Ten zaś jest równoważny operatorowi wprowadzonemu przez Pryce'a oraz Newtona i Wignera.

Również dla fermionów można wprowadzić wielocząstkowe operatory położenia według tej samej procedury co dla cząstek bezspinowych. Wielocząstkowe operatory położenia elektronów i pozytonów będą zgodnie z zakazem Pauliego antysymetryczne. Niestety nie jest możliwe proste uogólnienie wprowadzonego w tym paragrafie operatora położenia na współrzędne krzywoliniowe pewnej hiperpowierzchni przestrzennopodobnej. Powyższa trudność jest konsekwencją tego, że nie udało się wyrazić operatora położenia za pomocą elementarnych obiektów polowych, co nie oznacza, że takie przedstawienie nie istnieje. Pod tym względem obiecująca wydaje się być reprezentacja spinorowa bispinorowego pola Diraca, która posiada naturalny podział bispinorowych stopni swobody na dwie grupy. Spinorowy opis pola Diraca nie jest jednak analizowany w tej pracy.

Na zakończenie tego rozdziału warto podkreślić, że cały wprowadzony w nim formalizm jest dobrze określony dla  $m = 0$ . Bezmasowe pole Diraca posiada dwa mody spinowe: polaryzacja lewoskrętna i prawoskrętna. Teoria bezmasowych fermionów oparta na jednej tylko skrętności została podana w rozdziale uzupełniającym.



# Rozdział 6

## Pole wektorowe z masą - cząstki Proca

### 6.1 Kwantowanie kanoniczne

Klasyczne czterowektorowe (rzeczywiste) pole Proca  $A^\mu(x)$  opisywane jest następującą gęstością lagranżjanu:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu, \quad (6.1)$$

gdzie tensor *natężenia* tego pola  $F_{\mu\nu}$  zdefiniowany jest równaniem:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (6.2)$$

Ponadto w niniejszym rozdziale przyjęte jest założenie, że masa jest ostro większa od zera.

Wynikające z lagranżjanu równanie pola przyjmuje postać:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) + m^2 A^\nu(x) = 0. \quad (6.3)$$

Zróżniczkowanie po pochodnej czasowej pola Proca prowadzi do definicji pędu kanonicznego tego pola:

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t A_\mu)} = F^{\mu 0}. \quad (6.4)$$

Łatwo zauważyć, że tylko przestrzenna część pędu kanonicznego jest różna od zera:

$$\pi^k = F^{k0} =: E^k, \quad (6.5)$$

gdzie zdefiniowany trójwektor jest formalnym analogonem natężenia pola elektrycznego. Składowa  $A_0$  nie posiada pędu kanonicznego, co można wytłumaczyć faktem, że jest ona na mocy równań pola całkowicie określona przez  $\boldsymbol{\pi}$ :

$$A_0 = \frac{1}{m^2} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}, \quad (6.6)$$

przy czym  $\nabla = (-\partial_k)$ . Z powyższego powodu składową  $A_0$  nazywa się czasem mianem *niedynamicznego stopia swobody*.

Formalizm kwantowania kanonicznego umożliwia zastąpienie klasycznych wielkości  $\mathbf{A}, \mathbf{E}$  przez hermitowskie operatory uogólnione  $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{E}}$ , które spełniają następujące równoczesowe związki komutacyjne:

$$\begin{aligned} [\hat{A}^k(t, \mathbf{x}), \hat{E}^l(t, \mathbf{x}')] &= -i\delta^{kl}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'); \\ [\hat{A}^k(t, \mathbf{x}), \hat{A}^l(t, \mathbf{x}')] &= 0; \\ [\hat{E}^k(t, \mathbf{x}), \hat{E}^l(t, \mathbf{x}')] &= 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Na podstawie tych komutatorów i operatorowej wersji równania (6.6) można otrzymać równoczesowe związki komutacyjne z zerową składową pola Proca:

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{A}}(t, \mathbf{x}), \hat{A}^0(t, \mathbf{x}')] &= -i \frac{1}{m^2} \nabla \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'); \\ [\hat{A}^0(t, \mathbf{x}), \hat{A}^0(t, \mathbf{x}')] &= 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Równanie Proca (6.3) warto jest teraz zapisać w równoważnej formie przy użyciu samego tylko czterowektorowego operatora  $\hat{A}^\mu$ :

$$(\square + m^2)\hat{A}^\mu(x) = 0 \quad , \quad \partial_\mu \hat{A}^\mu(x) = 0. \quad (6.9)$$

Pierwsze z tych równań oznacza, że każda składowa pola Proca spełnia równanie typu Kleina-Gordona. Powyższy fakt umożliwia wykonanie kowariantnej trójwymiarowej transformacji Fouriera pola Proca, a w szczególności transformacji odwrotnej:

$$\hat{A}^\mu(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \left[ \hat{A}^\mu(p) e^{-ip \cdot x} + \hat{A}^{\dagger \mu}(p) e^{ip \cdot x} \right], \quad (6.10)$$

gdzie  $\hat{A}^\mu(p)$  jest transformatą Fouriera pola  $\hat{A}^\mu(x)$ , a zerowa składowa  $p$  wynosi tyle co zwykle, tzn.:  $p_0 = +\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ . Z drugiego równania w (6.9) wynika ortogonalność transformaty Fouriera pola Proca i czterowektora  $p$ :

$$p \cdot \hat{A}(p) = 0. \quad (6.11)$$

Fakt ten umożliwia zapisanie  $\hat{A}^\mu(p)$  w bazie trzech wektorów  $\varepsilon_{(l)}^\mu$  przestrzennopodobnych i ortogonalnych do  $p$ , tzn. takich, że:

$$\varepsilon_{(l)} \cdot \varepsilon_{(k)} = -\delta_{lk} \quad , \quad p \cdot \varepsilon_{(l)} = 0. \quad (6.12)$$

Wspomniany rozkład przybiera formę:

$$\hat{A}^\mu(p) = \sum_{l=1}^3 \hat{a}^{(l)}(p) \varepsilon_{(l)}^\mu(p), \quad (6.13)$$

gdzie  $\hat{a}^{(l)}(p)$  to operatorowe współczynniki tego rozkładu nazywane dalej operatorami anihilacji cząstki o czteropędzie  $p$  i stanie spinowym scharakteryzowanym przez wartość  $l$ . Na podstawie związków (6.7) i (6.8) można znaleźć związki komutacyjne dla operatorów anihilacji i kreacji na powłoce masy:

$$[\hat{a}^{(l)}(p), \hat{a}^{\dagger(k)}(p')] = (2\pi)^3 2p_0 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta^{lk}, \quad (6.14)$$

a pozostałe równoczesowe komutatory wynoszą zero.

Ostatecznie fourierowski rozkład pola Proca ma postać:

$$\hat{A}^\mu(x) = \sum_{l=1}^3 \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \left[ \hat{a}^{(l)}(p) \varepsilon_{(l)}^\mu(p) e^{-ip \cdot x} + \hat{a}^{\dagger(l)}(p) \varepsilon_{(l)}^\mu(p) e^{ip \cdot x} \right]. \quad (6.15)$$

Powyższe przedstawienie pola  $\hat{A}^\mu$  w drodze bezpośredniego rachunku umożliwia znalezienie ogólnego komutatora dla dowolnych składowych pola Proca:

$$[\hat{A}^\mu(x), \hat{A}^\nu(x')] = - \left( g^{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \partial^\mu \partial^\nu \right) i \Delta(x - x') = - \hat{P}_\perp^{\mu\nu} i \Delta(x - x'), \quad (6.16)$$

gdzie  $\hat{P}_\perp^{\mu\nu}$  to operator rzutu na przestrzeń ortogonalną do czteropędu<sup>1</sup>, zaś  $\Delta(\ )$  jest funkcją Pauliego-Jordana zdefiniowaną następująco:

$$i\Delta(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} (e^{-ip \cdot x} - e^{+ip \cdot x}). \quad (6.17)$$

Przy pomocy operatorów anihilacji  $\hat{a}^{(l)}(p)$  i kreacji  $\hat{a}^{\dagger(l)}(p)$  definiuje się stan próżni i całą przestrzeń Focka. Nie ma potrzeby przytaczać tych definicji ze względu na dość wierną analogię w stosunku do poprzednich rozdziałów. Powyższa analogia tyczy się również konstrukcji różnego rodzaju funkcji falowych.

### 6.1.1 Cykliczna baza spinowa

Wybór bazy spinowej  $\{\varepsilon_{(l)}\}_{l=1}^3$  spełniającej warunki (6.12) charakteryzuje się dużym stopniem dowolności. Dowolność ta występuje oddzielnie dla każdego  $p$  i sprowadza się do trójwymiarowych obrotów, tzn. że obrót (mogący być funkcją  $p$ ) przestrzennopodobnych wektorów bazy zadaje również bazę spinową. Oczywiście rozsądnie jest ograniczać się tylko do baz ciągłych czy nawet różniczkowalnych względem  $p$ . Niestety takie ograniczenie nie zmienia faktu, że baza spinowa zadana jest z dokładnością co do obrotu parametryzowanego przez  $p$ . Zależność tego obrotu od  $p$  może istotnie utrudnić konstrukcje operatora położenia lub innymi słowy uczynić ją niejednoznaczną. Okazuje się jednak, że można wprowadzić pewną specjalną klasę baz spinowych, które są w szczególny sposób symetryczne względem transformacji Lorentza, a ich dowolność ogranicza się tylko do stałej macierzy obrotu i wyboru kierunku czasopodobnego. Idea wprowadzenia takich baz opiera się na określeniu danej bazy  $\varepsilon_{(l)}(q)$  dla pewnego wyróżnionego czteropędu  $q$ . Ustalony z góry czteropęd  $q$  będzie nazywany dalej *wektorem cyklicznym*, natomiast zbiór wektorów  $\{\varepsilon_{(l)}(q)\}$  - *elementami cyklicznymi bazy*. Elementy bazy spinowej dla dowolnego  $p$  można określić poprzez pchnięcie lorentzowskie elementów cyklicznych:

$$\varepsilon_{(l)}^\mu(p) = \Lambda^\mu_\nu(q \rightarrow p) \varepsilon_{(l)}^\nu(q), \quad (6.18)$$

gdzie  $\Lambda^\mu_\nu(q \rightarrow p)$  jest macierzą przekształcenia, które w układzie związanym<sup>2</sup> z  $q$  jest pchnięciem lorentzowskim przekształcającym  $q$  w  $p$ . Odniesienie do układu spoczynkowego względem  $q$  jest konieczne ze względu na to, że pchnięcia lorentzowskie nie tworzą grupy. Z tego samego faktu wynika jednoznaczność wektora cyklicznego dla danej bazy, która będzie nazywana *bazą cykliczną*. Dowolność bazy cyklicznej polega nie tylko na wyborze wektora cyklicznego  $q$ , ale również na swobodzie obrotowej jej elementów, tzn. że dwie dowolne bazy cykliczne  $\varepsilon_{(l)}(p)$  i  $\varepsilon'_{(l)}(p)$  spełniają relację:

$$\varepsilon_{(l)}(p) = R_{lk} \varepsilon_{(k)}(p), \quad (6.19)$$

gdzie występuje sumowanie po  $k$ , a  $R_{lk}$  jest macierzą ortogonalną.

W określonym układzie inercyjnym najprościej jest za wektor cykliczny przyjąć następujący czteropęd spoczynkowy  $q = (m, \mathbf{0})$ . Powyższy wybór będzie obowiązywał w tym rozdziale, a oparta na nim baza cykliczna będzie nazywana *cykliczną bazą spoczynkową*. W danym układzie inercyjnym cykliczna baza spoczynkowa przyjmuje postać:

$$\varepsilon_{(l)}^\mu(p) = \Lambda^\mu_\nu(\tilde{p}/m) \varepsilon_{(l)}^\nu(m, \mathbf{0}) = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu(p/m), \varepsilon_{(l)}^\nu(m, \mathbf{0}), \quad (6.20)$$

<sup>1</sup>Operator  $\hat{P}_\perp^{\mu\nu}$  może być nazywany transwersalnym tensorem metrycznym. Operator ten był wprowadzony już w pierwszej części pracy.

<sup>2</sup>Przez układ związany z  $q$  rozumie się tutaj układ spoczynkowy względem  $q$ , tzn. taki że  $q_0 = m$ .

gdzie  $\Lambda^\mu_\nu(\tilde{p}/m)$  jest macierzą pchnięcia lorentzowskiego z czteroprędkością o wartości:  $(\tilde{p}^\mu/m) = (p_0/m, -\mathbf{p}/m)$ .

## 6.2 Gęstość prawdopodobieństwa i operator położenia

W pierwszym kroku konstrukcji wygodnie jest zdefiniować trzy *heterowariantne operatory anihilacji cząstki w punkcie czasoprzestrzennym*:

$$\hat{a}_x^{(l)} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \sqrt{2p_0} \hat{a}^{(l)}(p) e^{-ip \cdot x}, \quad (6.21)$$

przy czym definicja ta obowiązuje w danym układzie inercjalnym i w cyklicznej spinowej bazie spoczynkowej. Postać operatorów  $\hat{a}_x^{(l)}$  dla cząstek Proca jest analogiczna jak w przypadku cząstek skalarnych i elektronów. Rozważane operatory spełniają postulowany dla operatorów heterowariantnych równoczesowy związek komutacyjny:

$$[\hat{a}_{t,\mathbf{x}}^{(l)}, \hat{a}_{t,\mathbf{x}'}^{(k)}] = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta^{lk}. \quad (6.22)$$

Za pomocą operatorów  $\hat{a}_x^{(l)}$  można następująco zdefiniować gęstość prawdopodobieństwa położenia cząstki Proca:

$$\hat{\rho}(t, \mathbf{x}) = \sum_{l=1}^3 \hat{a}_{t,\mathbf{x}}^{\dagger(l)} |0\rangle \langle 0| \hat{a}_{t,\mathbf{x}}^{(l)}. \quad (6.23)$$

Należy teraz wykazać, że zdefiniowana wielkość  $\hat{\rho}$  nie zależy od wyboru konkretnej cyklicznej bazy spoczynkowej. W tym celu warto zauważyć na podstawie (6.19), że związek między heterowariantnymi położeniowymi operatorami anihilacji zdefiniowanych w dowolnych dwóch cyklicznych bazach spoczynkowych odpowiednio  $\varepsilon'^l(p)$  i  $\varepsilon^l(p)$  jest następujący:

$$\hat{a}'_{t,\mathbf{x}}{}^{(l)} = R^{lk} \hat{a}_{t,\mathbf{x}}^{(k)}, \quad \hat{a}_{t,\mathbf{x}}^{(k)} = \hat{a}'_{t,\mathbf{x}}{}^{(l)} R^{lk}, \quad (6.24)$$

gdzie zastosowana jest konwencja sumacyjna Einsteina dla wskaźników łacińskich, natomiast macierz  $R^{lk}$  jest ortogonalna. Z ortogonalności macierzy  $R^{lk}$  wynika automatycznie równość:

$$\sum_{l=1}^3 \hat{a}'_{t,\mathbf{x}}{}^{\dagger(l)} |0\rangle \langle 0| \hat{a}'_{t,\mathbf{x}}{}^{(l)} = \sum_{l=1}^3 \hat{a}_{t,\mathbf{x}}^{\dagger(l)} |0\rangle \langle 0| \hat{a}_{t,\mathbf{x}}^{(l)}, \quad (6.25)$$

która dowodzi niezależność gęstości prawdopodobieństwa od wyboru bazy spinowej w ramach klasy cyklicznych baz spoczynkowych. Niezależność  $\hat{\rho}$  od cyklicznej bazy spoczynkowej sugeruje, że gęstość prawdopodobieństwa można zapisać w formie niewykorzystującej żadnej bazy spinowej. Powyższą myśl realizuje następujący fakt:

**Fakt 4** *Gęstość prawdopodobieństwa zdefiniowana równaniem (6.23) jest równoważna następującej postaci:*

$$\hat{\rho}(t, \mathbf{x}) = \hat{\mathbf{A}}^{FW}(t, \mathbf{x}) |0\rangle \cdot \langle 0| \hat{\mathbf{A}}^{FW}(t, \mathbf{x}), \quad (6.26)$$

gdzie kropka oznacza skalarny iloczyn trójwektorów, a  $\hat{\mathbf{A}}^{FW}$  jest transformacją Foldy'ego-Wouthuysena pola Proca<sup>3</sup>:

$$\hat{A}_{FW}^\mu(t, \mathbf{x}) = \sqrt{2\hat{E}} \Lambda^\mu_\nu(\hat{\epsilon} i\partial/m) \hat{A}^\nu(t, \mathbf{x}), \quad (6.27)$$

gdzie  $\hat{E} = +\sqrt{m^2 - \Delta}$ ,  $\hat{\epsilon} = i\partial_t/\hat{E}$ , natomiast  $\Lambda^\mu_\nu(\ )$  jest macierzą pchnięcia Lorentza zależącą od czteroprędkości.

<sup>3</sup>Transformacja FW pola Proca jest szczegółowo zdefiniowana w dodatku N6.

**Dowód:** W pierwszym kroku warto jawnie wyliczyć transformatę FM pola Proca wykorzystując fourierowski rozkład (6.15) tego pola w cyklicznej bazie spoczynkowej. Dzięki temu, że w definicji (6.20) elementów cyklicznej bazy spoczynkowej występuje odwrotna - niż w definicji transformacji FW - macierz pchnięcia Lorentza, można bez trudu otrzymać wzór:

$$\hat{\mathbf{A}}^{FW}(t, \mathbf{x}) = \sum_{l=1}^3 (\hat{a}_{t,\mathbf{x}}^{(l)} + \hat{a}_{t,\mathbf{x}}^{\dagger(l)}) \boldsymbol{\varepsilon}_{(l)}(m, \mathbf{0}). \quad (6.28)$$

Wstawienie powyższej postaci  $\hat{\mathbf{A}}^{FW}$  do prawej strony dowodzonej równości oraz skorzystanie z ortonormalności wektorów  $\boldsymbol{\varepsilon}_{(l)}(m, \mathbf{0})$  sprowadza prawą stronę (6.26) do lewej. ■

Ponieważ analogiczny do powyższego fakt jest prawdziwy dla cząstek o spinie 1/2, to nasuwa się wniosek, że reprezentacje typu Foldy'ego-Wouthuysena są charakterystycznymi reprezentacjami dla gęstości prawdopodobieństw i operatorów położenia. Z równania (6.28) i z zupełności trójbazy  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_{(l)}\}_{l=1}^3$  wynika następująca reguła komutacyjna dla anihilującej i kreującej części transformaty FW pola Proca:

$$[\hat{A}_{(+k)}^{FW}(t, \mathbf{x}), \hat{A}_{(-l)}^{FW}(t, \mathbf{x}')] = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta_{kl}. \quad (6.29)$$

Reguła ta jest zgodna z najsilniejszym warunkiem na reprezentację heterowariantną, jaką jest niewątpliwie reprezentacja Foldy'ego-Wouthuysena.

Znajomość gęstości prawdopodobieństwa determinuje postać operatora położenia:

$$\hat{\mathbf{Q}}(t) = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \varrho(t, \mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} [\hat{\mathbf{A}}^{FW}|0\rangle \cdot \langle 0|\hat{\mathbf{A}}^{FW}]. \quad (6.30)$$

Powyższą definicję operatora położenia odwołującą się do transformaty FW można równoważnie przekształcić do nieco innej postaci.

**Fakt 5** *Operator położenia cząstki Proca  $\hat{\mathbf{Q}}(t)$  zdefiniowany równaniem (6.30) jest równoważny poniższemu operatorowi:*

$$\hat{\mathbf{Q}}(t) = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} [\hat{\mathbf{A}}^S \cdot |0\rangle i \overleftrightarrow{\partial}_t \langle 0|\hat{\mathbf{A}}^S], \quad (6.31)$$

gdzie  $\hat{\mathbf{A}}^S$  jest spoczynkową wartością pola Proca zdefiniowaną następująco:

$$\hat{A}_S^\mu(t, \mathbf{x}) = \Lambda_\nu^\mu(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} i\partial/m) \hat{A}^\nu(t, \mathbf{x}). \quad (6.32)$$

**Dowód:** Spoczynkowa wartość pola Proca  $\hat{\mathbf{A}}^S$  różni się od reprezentacji  $\hat{\mathbf{A}}^{FW}$  tylko czynnikiem  $\sqrt{2\hat{E}}$ , a więc różnica jest taka sama jak pomiędzy polem skalarnym  $\hat{\phi}$  i jego heterowariantnym odpowiednikiem. Zatem dowód jest identyczny jak w przypadku pola skalarnego<sup>4</sup>. ■

Operator położenia cząstki Proca można jeszcze przekształcać na różne sposoby, na przykład do postaci wykorzystującej bezpośrednio jedynie podstawowe wielkości polowe, takie jak  $\hat{A}^\mu$ . Niestety w przedstawieniach powyższego typu całka definiująca operator położenia będzie zawierała zamiast wektora  $\mathbf{x}$  znacznie bardziej skomplikowany obiekt.

W celu znalezienia związków komutacyjnych dla operatora  $\hat{\mathbf{Q}}$  najwygodniej będzie wprowadzić heterowariantną funkcję falową w przedstawieniu pędowym, a dokładniej w pędowej reprezentacji typu Foldy'ego-Wouthuysena. Dla prostoty najwygodniej jest

---

<sup>4</sup>Chodzi o dowód *faktu 2*.

skorzystać z obrazu Schrödingera. Dla dowolnego jednocząstkowego stanu  $|\Psi\rangle^{(1)}$  pola Proca definiujemy następującą wektorową funkcję falową:

$$\tilde{\Psi}^{FW}(t, \mathbf{p}) = \langle 0 | \hat{\mathbf{A}}^{FW}(t, \mathbf{p}) | \Psi \rangle^{(1)}, \quad (6.33)$$

gdzie  $\hat{\mathbf{A}}^{FW}(t, \mathbf{p})$  jest zwykłą transformacją Fouriera (zmiennych przestrzennych) pola  $\hat{\mathbf{A}}(t, \mathbf{x})$ . W reprezentacji  $\tilde{\Psi}^{FW}(t, \mathbf{p})$  operator położenia ma postać

$$\{\hat{\mathbf{Q}}\}_{\tilde{\Psi}^{FW}} = i \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}. \quad (6.34)$$

Wiedząc, że w rozważanej reprezentacji operator czteropędu jest po prostu mnożeniem przez  $p^\mu$ , łatwo otrzymać związki komutacyjne położenia i czteropędu:

$$[\hat{Q}^k, \hat{Q}^l] = 0 \quad ; \quad [\hat{Q}^k, \hat{p}^l] = i\delta^{kl} \quad ; \quad [\hat{Q}^k, \hat{H}] = i\hat{p}^k / \hat{H}. \quad (6.35)$$

Spełnione jest zatem kolejne kryterium poprawności operatora położenia cząstki Proca.

# Rozdział 7

## Bezmasowe pole wektorowe - fotony

### 7.1 Kowariantne kwantowanie kanoniczne

W bieżącym paragrafie zostanie rozpatrzone hermitowskie czterowektorowe pole kwantowe spełniające równanie d'Alemberta:

$$\square \hat{A}^\mu(x) = 0. \quad (7.1)$$

Pole  $\hat{A}^\mu(x)$  opisuje czteropotencjał pola elektromagnetycznego pod warunkiem, że jest w jakiś sposób uwzględniony kowariantny warunek cechowania Lorentza. Wspomnianym warunkiem jest więz Gupty-Bleulera na fizyczne stany kwantowego czteropotencjału, który będzie zdefiniowany dalej.

Podstawą dalszych rozważań jest kowariantny fourierowski rozkład pola:

$$\hat{A}^\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^2 2p_0} \left[ \hat{a}^{(\lambda)}(p) \varepsilon_{(\lambda)}^\mu(p) e^{-ip \cdot x} + \hat{a}^{\dagger(\lambda)}(p) \varepsilon_{(\lambda)}^\mu(p) e^{ip \cdot x} \right], \quad (7.2)$$

gdzie  $p_0 = +|\mathbf{p}|$ . Występujące tutaj operatory kreacji i anihilacji spełniają następujące reguły komutacyjne na dodatnim stożku świetlnym ( $p^2 = 0, p_0 \geq 0$ )<sup>1</sup>:

$$[\hat{a}^{(\lambda)}(p), \hat{a}^{\dagger(\lambda')}(p')] = -(2\pi)^3 2p_0 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') g^{\lambda\lambda'}, \quad (7.3)$$

a pozostałe komutatory wynoszą zero. Baza wektorów polaryzacyjnych  $\varepsilon_{(\lambda)}^\mu$  jest unormowana do tensora metrycznego:

$$\varepsilon_{(\lambda)} \cdot \varepsilon_{(\lambda')} = g_{\lambda\lambda'}. \quad (7.4)$$

Ponadto dla ustalenia uwagi zakłada się, że czterowektor falowy (pęd)  $p^\mu$  leży w płaszczyźnie wektorów  $\varepsilon_{(0)}^\mu(p)$ ,  $\varepsilon_{(3)}^\mu(p)$  i pomiędzy nimi, tzn.:

$$p \cdot \varepsilon_{(1)}(p) = 0 \quad , \quad p \cdot \varepsilon_{(2)}(p) = 0 \quad , \quad p \cdot \varepsilon_{(3)}(p) < 0. \quad (7.5)$$

#### 7.1.1 Struktura rozszerzonej przestrzeni Focka

Pełna przestrzeń Focka  $\mathcal{F}$  jest zbudowana przy pomocy czteroelementowego zbioru operatorów kreacji  $\{\hat{a}^{\dagger(\lambda)}\}_{\lambda=0}^3$  i stanu próżni  $|0\rangle$ , zdefiniowanego standardowo. Przestrzeń ta jest nieskończenie wymiarową przestrzenią wektorową wyposażoną w formę półtoraliniową  $\langle | \rangle$ , będącą odpowiednikiem iloczynu skalarnego. Forma ta traktowana jako forma

---

<sup>1</sup>Termin stożek świetlny jest tu odpowiednikiem powłoki masy.

kwadratowa nie jest dodatnio określona na  $\mathcal{F}$ , ponieważ mody  $\hat{a}^{\dagger(0)}(p)$  posiadają ujemny kwadrat, o czym przekonuje następujące równanie:

$$\langle 0|\hat{a}^{(0)}(p)\hat{a}^{\dagger(0)}(p)|0\rangle = -(2\pi)^3 2p_0\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (7.6)$$

Przestrzeń  $\mathcal{F}$  nie jest więc przestrzenią Hilberta. Fizyczny stan  $|\Psi\rangle$  pola  $\hat{A}^\mu(x)$  winien spełniać następujący warunek konieczny:

$$\langle \Psi|\partial_\mu\hat{A}^\mu(x)|\Psi\rangle = 0, \quad (7.7)$$

przy czym równość zachodzi dla dowolnego  $x$ . Warunek konieczny można zamienić na silniejszy liniowy warunek Gupty-Bleulera, który dla pola hermitowskiego ma postać:

$$\partial_\mu\hat{A}_{(+)}^\mu(x)|\Psi\rangle = 0, \quad (7.8)$$

gdzie  $\hat{A}_{(+)}^\mu(x)$  jest anihilującą częścią pola, która posiada dodatnie częstotści. Powyższy warunek zapisany w zmiennych pędowych przyjmuje postać:

$$[\hat{a}^{(0)}(p) - \hat{a}^{(3)}(p)]|\Psi\rangle = 0, \quad (7.9)$$

gdzie  $p$  jest dowolne (w ramach dodatniego stożka świetlnego). Warunek Gupty-Bleulera definiuje fizyczną przestrzeń stanów  $\mathcal{S}$ , będącą podprzestrzenią pełnej przestrzeni  $\mathcal{F}$ .

Struktura pełnej przestrzeni Focka  $\mathcal{F}$  oraz przestrzeni stanów fizycznych  $\mathcal{S}$  kwantowego czteropotencjału jest dosyć subtelna. W analizie powyższych przestrzeni pomocne będą następujące operatory kreacji:

$$\hat{a}_+^\dagger(p) = \frac{\hat{a}^{\dagger(0)}(p) + \hat{a}^{\dagger(3)}(p)}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}_-^\dagger(p) = \frac{\hat{a}^{\dagger(0)}(p) - \hat{a}^{\dagger(3)}(p)}{\sqrt{2}}. \quad (7.10)$$

Nowe operatory kreacji są liniowo niezależną kombinacją swoich pierwowzorów i dlatego wraz z  $\hat{a}^{\dagger(1)}(p)$ ,  $\hat{a}^{\dagger(2)}(p)$  generują pełną przestrzeń Focka  $\mathcal{F}$ . Ponadto spełniają one nietypowe związki komutacyjne:

$$[\hat{a}_\pm(p), \hat{a}_\pm^\dagger(p')] = 0, \quad [\hat{a}_\pm(p), \hat{a}_\mp^\dagger(p')] = -(2\pi)^3 2p_0\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (7.11)$$

Rozważane operatory kreują abstrakcyjne fotony o polaryzacjach będących wektorami zerowymi, w szczególności operator  $\hat{a}_-^\dagger(p)$  kreuje foton o polaryzacji równoległej do  $p$ . Z warunku (7.9) i reguł komutacyjnych (7.11) można wywnioskować, że fizyczne wektory stanów nie zawierają modów  $\hat{a}_+^\dagger(p)$ . Fakt ten oznacza, że fizyczna przestrzeń stanów kwantowego czteropotencjału pola elektromagnetycznego jest generowana przez mody  $\hat{a}^{\dagger(1)}(p)$ ,  $\hat{a}^{\dagger(2)}(p)$ ,  $\hat{a}_-^\dagger(p)$ . Przestrzeń ta jest pseudohilbertowska, ponieważ niezerowe mody  $\hat{a}_-^\dagger(p)$  mają zerową pseudonormę i dlatego rozważana przestrzeń jest oznaczana przez  $\mathcal{S}$ , a nie przez  $\mathcal{H}$ . Jeżeli przez  $\mathcal{O}_\pm$  oznaczymy przestrzenie liniowe stanów fotonowych o wektorach polaryzacji leżących na stożku świetlnym, generowane odpowiednio przez  $\hat{a}_\pm^\dagger(p)$ , to przestrzeń Focka może być formalnie przedstawiona w postaci:

$$\mathcal{F} = \mathcal{S} \otimes \mathcal{O}_+. \quad (7.12)$$

Należy odnotować, że występujące w tym równaniu przestrzenie  $\mathcal{F}, \mathcal{S}$  mają charakter inwariantny, niezależny od wyboru wektorów bazowych  $\varepsilon_{(\lambda)}$  ani od wyboru cechowania (w ramach cechowania Lorentza). Powyższy fakt wynika między innymi z kowariantności



warunku Gupty-Bleulera (7.8). W przeciwieństwie do absolutnych (inwariantnych) przestrzeni  $\mathcal{F}$  i  $\mathcal{S}$  przestrzeń  $\mathcal{O}_+$  może zależeć od wyboru bazy polaryzacyjnej, natomiast przestrzeń  $\mathcal{O}_-$ , związana z polaryzacją wzdłuż świetlnego wektora falowego ma z całą pewnością inwariantny charakter.

Ponieważ przestrzeń  $\mathcal{S}$  zawiera mody  $\hat{a}_+^\dagger(p)$  o zerowej normie, to warto jest wydzielić w pewien sposób te mody z przestrzeni stanów, otrzymując właściwą przestrzeń Hilberta  $\mathcal{H}$  generowaną przez  $\hat{a}^{\dagger(1)}(p)$ ,  $\hat{a}^{\dagger(2)}(p)$ . Dzięki temu zabiegowi przestrzeni stanów pola wektorowego można wyrazić w formie:

$$\mathcal{S} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_-. \quad (7.13)$$

Oczywiście wydzielenie właściwej przestrzeni Hilberta z przestrzeni stanów zależy od wyboru bazy polaryzacyjnej, a w konsekwencji od wyboru cechowania. Przykładowo wybór  $\varepsilon_{(0)}(p) = e_{(0)}$ , gdzie  $e_{(0)}$  jest wektorem bazowym osi czasu w pewnym układzie inercyjnym, sprowadza się do cechowania Coulomba (cechowania promieniowania):  $\hat{A}_0|_{\mathcal{H}} = 0$ ,  $\nabla \cdot \hat{\mathbf{A}}|_{\mathcal{H}} = 0$  we wspomnianym układzie. Widać zatem, że istnienie podprzestrzeni  $\mathcal{O}_-$  podłużnych fotonów *zerowych* jest potrzebne w przestrzeni stanów  $\mathcal{S}$  tylko do zapewnienia niezmienniczości ze względu na wybór cechowania.

### 7.1.2 Warunek konieczny dla obserwabli fizycznych

Dowolna obserwabla  $\hat{O}$  będąca hermitowskim operatorem pewnej wielkości fizycznej nie może w żaden sposób zależeć od cechowania. Powyższy fakt oznacza między innymi to, że operator  $\hat{O}$  przekształca stany fizyczne w stany fizyczne. Zatem dla fizycznego stanu  $|\Psi\rangle \in \mathcal{S}$  winna zachodzić równość:

$$\partial_\mu \hat{A}_{(+)}^\mu(x) \hat{O}|\Psi\rangle \equiv 0. \quad (7.14)$$

Prawdziwość powyższego równania można zagwarantować nakładając na  $\hat{O}$  warunek:

$$\forall_{|\Psi\rangle \in \mathcal{S}} \quad [\partial_\mu \hat{A}_{(+)}^\mu(x), \hat{O}]|\Psi\rangle \equiv 0 \quad \wedge \quad \langle \Psi | [\partial_\mu \hat{A}_{(-)}^\mu(x), \hat{O}] \equiv 0. \quad (7.15)$$

Powyższa zależność jest kwantowomechanicznym warunkiem niezależności obserwabli  $\hat{O}$  od cechowania. Stosując ten warunek dla operatora projekcji na stan próżni  $|0\rangle\langle 0|$  można się przekonać, że nie wolno narzucić silniejszego warunku na obserwabla żądaniem, aby komutatory  $[\partial_\mu \hat{A}_{(\pm)}^\mu(x), \hat{O}]$  wynosiły zero. Fakt ten jest konsekwencją tego, że przestrzeń  $\mathcal{S}$  jest pseudohilbertowska. Warunek (7.15) powinien oczywiście zachodzić również dla operatora położenia.

W kwantowaniu metodą Gupty-Bleulera swobodzie cechowania podlegają wektory stanu, a nie bezpośrednio operator pola  $\hat{A}^\mu(x)$ . Ponadto swoboda związana z cechowania w przypadku kwantowym jest znacznie szersza niż w teorii klasycznej. Rozważmy mianowicie następującą transformację (uogólnionego cechowania<sup>2</sup>) stanu  $|\Psi\rangle \in \mathcal{S}$ :

$$|\Psi'\rangle = |\Psi\rangle + \int_{\Omega} *dx^\mu \chi(x) i \overleftrightarrow{\partial}_\mu \partial \cdot \hat{A}(x) |\Phi\rangle, \quad (7.16)$$

<sup>2</sup>Zwykle cechowanie polegałoby na podziałaniu operatorem przesunięcia, odpowiadającym stanowi o zerowej czterodwergencji, na stan  $|\Psi\rangle$ . Transformacja (7.16) jest jednak ogólniejsza ze względu na dowolność stanu  $|\Phi\rangle$ .

gdzie  $\chi(x)$  jest dowolną<sup>3</sup> całkowną z kwadratem funkcją spełniającą równanie d'Alemberta, a  $|\Phi\rangle$  jest zupełnie dowolnym stanem fizycznym. Ponieważ operatory  $\partial \cdot \hat{A}_{(+)}(x)$ ,  $\partial \cdot \hat{A}_{(-)}(x)$  komutują, to zdefiniowana transformacja określa stan fizyczny oraz nie zmienia iloczynu skalarnego dowolnych dwóch stanów fizycznych. Dzięki warunkowi (7.14) łatwo zauważyć, że transformacja typu (7.16) nie zmienia również wartości elementów macierzowych obserwabli fizycznych policzonych na stanach fizycznych. Omówione własności świadczą o tym, że stany  $|\Psi'\rangle$  i  $|\Psi\rangle$  opisują ten sam stan pola elektromagnetycznego z tą tylko różnicą, że mogą wykorzystywać inne cechy odpowiadające odpowiednim elementom macierzowym czteropotencjału. Zatem transformacja cechowania w postaci (7.16) zadaje relację równoważności w pseudohilbertowskiej przestrzeni  $\mathcal{S}$  zachodzącą pomiędzy dwoma stanami:

$$|\Psi'\rangle \approx |\Psi\rangle. \quad (7.17)$$

Relacja ”  $\approx$  ” wyznacza w przestrzeni stanów klasy równoważności. W obrębie danej klasy wybór konkretnego reprezentanta nie odgrywa pod względem wielkości fizycznych żadnej roli.

## 7.2 Gęstość prawdopodobieństwa i operator położenia

### 7.2.1 Wstępne próby

#### Próba wykorzystania bazy cyklicznej

W niniejszym paragrafie zastosowana będzie *cykliczna baza spinowa* zdefiniowana w wyróżnionym układzie współrzędnych następująco:

$$\varepsilon_{(\lambda)}^\mu(p) = \Lambda_{\nu}^{\mu}(q \rightarrow p) \varepsilon_{(\lambda)}^\nu(q), \quad (7.18)$$

gdzie  $q$  jest wybranym *wektorem cyklicznym* (czteropędem), a  $\Lambda_{\nu}^{\mu}(q \rightarrow p)$  jest macierzą pchnięcia lorentzowskiego w rozważanym układzie, które przekształca  $q$  w  $p$ . Cztery heterowariantne położeniowe operatory anihilacji, można zdefiniować, tak jak w poprzednich rozdziałach wzorem:

$$\hat{a}_{t,\mathbf{x}}^{(\lambda)} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \sqrt{2p_0} \hat{a}^{(\lambda)}(p) e^{-ip \cdot x}. \quad (7.19)$$

Wprowadzone operatory spełniają następujące reguły komutacyjne:

$$[\hat{a}_{t,\mathbf{x}}^{(\lambda)}, \hat{a}_{t,\mathbf{x}'}^{\dagger(\lambda')}] = -g^{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (7.20)$$

a pozostałe równoczesowe komutatory wynoszą zero. Można teraz rozważyć następującą propozycję operatora gęstości prawdopodobieństwa i w konsekwencji propozycję operatora położenia fotonu:

$$\hat{\rho}_I(t, \mathbf{x}) = -g_{\lambda\lambda'} \hat{a}_{t,\mathbf{x}}^{\dagger(\lambda)} |0\rangle \langle 0| \hat{a}_{t,\mathbf{x}}^{(\lambda')} \quad , \quad \hat{\mathbf{Q}}_I(t) = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \hat{\rho}_I(t, \mathbf{x}). \quad (7.21)$$

Można wykazać, że średnia wartość gęstości  $\hat{\rho}_I(t, \mathbf{x})$  dla stanów fizycznych jest nieujemna, zaś wkład do elementów macierzowych tej gęstości pochodzący od stanów z przestrzeni  $\mathcal{O}_-$

---

<sup>3</sup>Funkcja  $\chi(x)$  może być nawet zespolona, przy czym i tak odgrywa rolę tylko jej część  $\chi_{(+)}(x)$  z dodatnimi częstotliwościami.

jest równy zero. Operatory  $\hat{\rho}_I$ ,  $\hat{Q}_I$  nie zależą zatem od cechowania, ale zależą od wyboru wektora cyklicznego  $q$  bazy cyklicznej. W przypadku bezmasowych fotonów nie istnieje żaden wyróżniony w danym układzie inercyjnym czteropęd  $q$  i dlatego przedstawiona konstrukcja operatora położenia jest niejednoznaczna (zależna od  $q$ ). Niejednoznaczność operatora  $\hat{Q}_I$  dyskwalifikuje go jako kandydata na operator położenia.

### Próba wykorzystania heterowariantnego operatora pola

Związek komutacyjny anihilującej części pola  $\hat{A}_{(+)}^\mu(x)$  oraz części kreującej  $\hat{A}_{(-)}^\nu(x)$  jest następujący:

$$[\hat{A}_{(+)}^\mu(x), \hat{A}_{(-)}^\nu(x')] = -g^{\mu\nu} i \Delta_{(+)}(x - x'), \quad (7.22)$$

gdzie  $\Delta_{(+)}(x - x')$  jest funkcją Wightmana o dodatnich częstościach. Widać, że nawet równoczesowy komutator operatorów  $\hat{A}_{(\pm)}^\mu(x)$  nie jest „unormowany” do delty Diraca. Jeżeli heterowariantny operator pola  $\hat{\mathcal{A}}(x)$  zostanie zdefiniowany następująco:

$$\hat{\mathcal{A}}^\mu(x) = \sqrt{2\sqrt{m^2 - \Delta}} \hat{A}^\mu(x), \quad (7.23)$$

to wówczas będzie spełniony prosty równoczesowy związek komutacyjny:

$$[\hat{\mathcal{A}}_{(+)}^\mu(t, \mathbf{x}), \hat{\mathcal{A}}_{(-)}^\nu(t, \mathbf{x}')] = -g^{\mu\nu} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (7.24)$$

Dzięki heterowariantnemu operatorowi pola można zaproponować następującą postać dla operatora położenia:

$$\hat{Q}_{II}(t) = - \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \hat{\mathcal{A}}^\mu |0\rangle \langle 0| \hat{\mathcal{A}}_\mu = - \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \hat{A}^\mu |0\rangle i \overleftrightarrow{\partial}_t \langle 0| \hat{A}_\mu. \quad (7.25)$$

Powyższy operator posiada satysfakcjonujące związki komutacyjne, ale mimo to ma dwie (związane ze sobą) wady. Podstawowy problem polega na tym, że operator  $\hat{Q}_{II}$  nie spełnia warunku (7.15), co oznacza, że nie jest on obserwabłą fizyczną, gdyż zależy od swobody cechowania. Ponadto gęstości występujące w całce (7.25) nie są dodatnio określone nawet na stanach fizycznych. Zatem operator  $\hat{Q}_{II}$  nie jest poszukiwanym operatorem położenia fotonu.

## 7.2.2 Uogólniona transformacja FW czteropotencjału

Dotychczas nie powiodły się wstępne próby konstrukcji operatora położenia fotonu oparte na metodach, które funkcjonowały w przypadku masywnych cząstek Proca oraz cząstek o spinie mniejszym niż 1. W niniejszym i w następnych dwóch paragrafach nie będą podejmowane próby przeprowadzenia systematycznej konstrukcji operatora położenia fotonu analogiczne do wspomnianych wcześniej, ale wprowadzona zostanie bezpośrednia analogia w stosunku do gotowych postaci operatorów położenia i gęstości prawdopodobieństwa zdefiniowanych w poprzednich rozdziałach. Mianowicie przywołane operatory wykorzystują tzw. *spoczynkową* wartość pól oraz blisko z nią związaną transformację typu Foldy’ego-Wouthuysena. Pozornie wydawać by się mogło, że dla czteropotencjału nie mają sensu takie transformacje, gdyż nie istnieje układ inercjalny w którym fotony spoczywają. Mimo to można praktycznie jednoznacznie określić takie transformacje. W tym celu należy zdefiniować umowny operator czteropędności fotonu, który w terminach pierwszej kwantyzacji przyjmie postać:

$$\hat{U}(\mu) = \hat{\epsilon} i \nabla / \mu \quad , \quad \hat{U}_0(\mu) = \sqrt{1 - \Delta / \mu^2}, \quad (7.26)$$

gdzie występuje operator znaku częstości  $\hat{\epsilon} = i\partial_t/\sqrt{-\Delta}$  i paramert  $\mu$  o wymiarze masy. Przestrzenna część umownej czteroprędkości jest zdefiniowana dość naturalnie, gdyż jest ona proporcjonalna do pędu. Bardziej dyskusyjna jest postać zerowej składowej czteroprędkości, która powyżej została zdefiniowana tak, aby zagwarantować jej normalizację do jedności:  $\hat{U}_\nu(\mu)\hat{U}^\nu(\mu) = 1$  dla  $\mu > 0$ . Alternatywnie można by zdefiniować zerową składową czteroprędkości - analogicznie do składowych przestrzennych - równaniem  $\hat{U}'_0(\mu) = \hat{\epsilon} i\partial_t/\mu = \sqrt{-\Delta}/\mu$ . Wówczas czteroprędkość byłaby wektorem zerowym. Zastosowanie  $\hat{U}'_0$  zamiast  $\hat{U}_0$  nie zmieniłoby przedstawionych tutaj rachunków, a nawet by je uprościło.

Zostanie teraz zdefiniowana transformacja Lorentza, która w danym układzie inercjalnym jest pchnięciem o operatorową czteroprędkość  $\hat{U}^\nu(\mu)$ , po czym zostanie wykonana granica  $\mu \rightarrow 0$ . Gdyby czteroprędkość była klasyczna wystarczyłoby użyć wzorów<sup>4</sup>:

$$\hat{A}'_0 = U_\mu \hat{A}^\mu \quad , \quad \hat{\mathbf{A}}' = \hat{\mathbf{A}} - \mathbf{U}(1 + U_0)^{-1}(\hat{A}_0 + \hat{A}'_0). \quad (7.27)$$

Bespośrednie użycie powyższych wzorów uniemożliwiłoby wykonanie przejścia granicznego  $\mu \rightarrow 0$  ze względu na osobliwość  $\hat{A}'_0$ . Można jednak doprecyzować definicję poszukiwanej transformacji.

**Definicja** *Uogólniona spoczynkowa wartość czteropotencjału  $\hat{A}_S^\beta(t, \mathbf{x})$  w wyróżnionym układzie współrzędnych to wielkość polowa spełniająca poniższe warunki:*

1.

$$\forall_{|\Psi\rangle, |\Phi\rangle \in \mathcal{S}} \quad \langle \Psi | \hat{A}_S^\beta(x) | \Phi \rangle = \lim_{\mu \rightarrow 0} \langle \Psi | \Lambda^\beta_\alpha(\hat{U}(\mu)) \hat{A}^\alpha(x) | \Phi \rangle \quad (7.28)$$

2.

$$\partial \cdot \hat{A}_S(x) \equiv \partial \cdot \hat{A}(x). \quad (7.29)$$

gdzie  $\Lambda^\beta_\alpha(\hat{U}(\mu))$  są współczynnikami transformacji Lorentza (7.27) zastosowanej dla umownej czteroprędkości fotonu określonej przez (7.26) i będącej operatorem różniczkującym.

Wprowadzenie elementu macierzowego w pierwszym równaniu pozwala usunąć osobliwość związaną z  $\hat{A}_S^0$  dzięki warunkowi Gupty-Bleulera. Natomiast punkt 2 likwiduje dwuznaczność  $\hat{A}_S^\beta$  będącą konsekwencją równania  $\langle \Psi | \partial_t \hat{A}_0(x) | \Phi \rangle = \langle \Psi | \nabla \cdot \hat{\mathbf{A}}(x) | \Phi \rangle$ . Jediną alternatywną postać uogólnionej spoczynkowej wartości czteropotencjału można zdeterminować warunkiem znikania jego czterodywergencji zamiast warunku 2. Obydwie wersje rozważanej transformacji, jak wynika z dalszych rachunków, różnią się tylko zamianą  $\partial_t \hat{A}_0(x)$  na  $\nabla \cdot \hat{\mathbf{A}}(x)$ . Wydaje się jednak, że przyjęta konwencja jest bardziej naturalna<sup>5</sup>. Warto podkreślić, że powyższa dwuznaczność nie odgrywa żadnej fizycznej roli. Pewną trudność stanowi wyliczenie składowej  $\hat{A}_S^0$ , przy którym trzeba skorzystać z fourierowskiego rozwinięcia pola. Pod znakiem całki tego rozwinięcia na mocy warunku Gupty-Bleulera można skorzystać z reguły d'Hospitala, co prowadzi do zerowej wartości  $\hat{A}_S^0$ . Taką samą wartość uzyskuje się automatycznie stosując  $\hat{U}'_0(\mu)$  zamiast  $\hat{U}_0(\mu)$ . Obliczenie przestrzennej składowej uogólnionej spoczynkowej wartości czteropotencjału nie stwarza już problemu. Ostateczny wynik obliczeń jest następujący:

$$\hat{A}_S^0(t, \mathbf{x}) \equiv 0 \quad , \quad \hat{\mathbf{A}}_S(t, \mathbf{x}) = \hat{\mathbf{A}}(t, \mathbf{x}) - \nabla \Delta^{-1} \partial_t \hat{A}_0(t, \mathbf{x}). \quad (7.30)$$

<sup>4</sup>Patrz dodatek N5.

<sup>5</sup>Alternatywna wersja transformacji spełnia warunek cechowania Coulomba w postaci operatorowej, co nie jest w duchu metody Gupty-Bleulera.

Postać wektora  $\hat{\mathbf{A}}_S$  przypomina bardzo cechowanie Coulomba, zachodzą nawet charakterystyczne dla tego cechowania związki komutacyjne:

$$[\hat{A}_S^k(x), \hat{A}_S^l(x')] = (\delta^{kl} - \Delta^{-1} \partial^k \partial^l) i \Delta(x - x'), \quad (7.31)$$

gdzie  $\Delta(\cdot)$  jest funkcją Pauli-Jordana. Mimo tego podobieństwa do cechowania Coulomba dywergencja wektora  $\hat{\mathbf{A}}_S$  nie wynosi zero.

Ponadto uogólniona spoczynkowa wartość czteropotencjału spełnia warunek konieczny (7.15) na obserwabłą fizyczną, a nawet nieco silniejszy warunek:

$$[\hat{\mathbf{A}}^S(x), \partial \cdot \hat{A}_{(\pm)}(x')] \equiv 0. \quad (7.32)$$

Można teraz w standardowy sposób zdefiniować transformatę typu Foldy'ego-Wouthuysena wzorem:

$$\hat{\mathbf{A}}_{FW} = \sqrt{2\sqrt{-\Delta}} \hat{\mathbf{A}}_S = \sqrt{2}(-\Delta)^{-1/4} \hat{\mathbf{A}} + \sqrt{2}\nabla(-\Delta)^{-3/4} \partial_t \hat{A}_0. \quad (7.33)$$

### 7.2.3 Propozycja gęstości prawdopodobieństwa położenia

Dzięki temu, że udało się zdefiniować transformację typu Foldy'ego-Wouthuysena można zdefiniować gęstość prawdopodobieństwa położenia fotonu w pełnej analogii do gęstości prawdopodobieństwa innych cząstek wprowadzonych w tej części pracy. Operator ten ma mianowicie postać:

$$\hat{\rho}(t, \mathbf{x}) = \hat{\mathbf{A}}_{FW}(t, \mathbf{x})|0\rangle \cdot \langle 0|\hat{\mathbf{A}}_{FW}(t, \mathbf{x}). \quad (7.34)$$

Powyzsza gęstość prawdopodobieństwa jest z definicji nieujemna. Ponadto  $\hat{\rho}$  na mocy (7.32) spełnia dla dowolnego fizycznego stanu  $|\Psi\rangle$  następujący warunek niezależności od swobody cechowania:

$$\partial \cdot \hat{A}_{(+)}(x') \hat{\rho}(x)|\Psi\rangle \equiv 0. \quad (7.35)$$

Należy jeszcze sprawdzić normalizację prawdopodobieństwa. Rachunek oparty na rozwinięciu fourierowskim prowadzi do wyrażenia:

$$\int d^3\mathbf{x} \hat{\rho} = \hat{1}^{(1)} + \sqrt{2} \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} [\hat{a}^{\dagger(\lambda)}|0\rangle \langle 0|\hat{a}_- + \hat{a}_-^{\dagger}|0\rangle \langle 0|\hat{a}^{(\lambda)}] \varepsilon_{(\lambda)}^0, \quad (7.36)$$

gdzie  $\hat{a}_-$  jest operatorem anihilacji fotonu cechowania określonym równaniem (7.10), natomiast  $\hat{1}^{(1)}$  jest jednocząstkowym operatorem identyczności w pełnej przestrzeni Focka  $\mathcal{F}$ , zdefiniowanym następująco:

$$\hat{1}^{(1)} = \sum_{\lambda, \lambda'} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} g_{\lambda\lambda'} \hat{a}^{\dagger(\lambda)}|0\rangle \langle 0|\hat{a}^{(\lambda')}. \quad (7.37)$$

Pozornie wydaje się, że normalizacja  $\hat{\rho}$  jest niedopuszczalna, gdyż nie zapewnia jednostkowej wartości prawdopodobieństwa. Z fizycznego punktu widzenia ważne są tylko elementy macierzowe operatorów policzone na stanach fizycznych i w takim sensie prawdopodobieństwo położenia jest unormowane do jedności:

$$\langle \Psi | \int d^3\mathbf{x} \hat{\rho} | \Phi \rangle = \langle \Psi | \hat{1}^{(1)} | \Phi \rangle, \quad (7.38)$$

dla dowolnych stanów fizycznych  $|\Psi\rangle, |\Phi\rangle$ . Powyższy fakt jest prostą konsekwencją warunku Gupty-Bleulera. Normalizację prawdopodobieństwa można też sformułować w nieco inny sposób odwołując się do relacji "  $\approx$  " zachodzącej między stanami różniącymi się tylko swobodą cechowania:

$$\int d^3\mathbf{x} \hat{\rho}|\Phi\rangle \approx \hat{1}^{(1)}|\Phi\rangle. \quad (7.39)$$

Warto podkreślić, że powyższe subtelności związane z normalizacją prawdopodobieństwa w ogóle nie występują w metodzie kwantowania pola elektromagnetycznego, opartej - od samego początku - na cechowaniu Coulomba. Wbrew pozorom omawianych subtelności nie usunie zamiana operatora  $\partial_t \hat{A}_0(x)$  na  $\nabla \cdot \hat{\mathbf{A}}(x)$  w wyrażeniu na transformację FW, mimo że wówczas pole  $\hat{A}_{FW}(t, \mathbf{x})$  miałyby zerową dywergencję.

Wprowadzona gęstość prawdopodobieństwa spełnia zatem podstawowe trzy warunki konieczne: nie zależy od swobody cechowania, jest nieujemna i unormowana do „fizycznej” jedynek jednocząstkowej.

## 7.2.4 Propozycja operatora położenia fotonu

Na podstawie gęstości prawdopodobieństwa wprowadzonej w poprzednim paragrafie można zbudować następujący operator położenia fotonu:

$$\hat{Q}(t) = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} [\hat{A}_{FW}(t, \mathbf{x})|0\rangle \cdot \langle 0|\hat{A}_{FW}(t, \mathbf{x})]. \quad (7.40)$$

W celu analizy tego operatora położenia wygodnie jest wprowadzić funkcję falową w reprezentacji FW dla stanów jednocząstkowych:

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \langle 0|\hat{A}_{FW}(t, \mathbf{x})|\Psi\rangle^{(1)}. \quad (7.41)$$

Powyższa wektorowa funkcja falowa posiada zerową dywergencję i wyłącznie dodatnie częstotliwości. Można pokazać, że tak zdefiniowana funkcja falowa fotonu pokrywa się z funkcją Landau'a-Peierlsa (1.49), jeśli ograniczymy się wyłącznie do dodatnich częstotliwości.

Postać operatora  $\hat{Q}$  w reprezentacji Foldy'ego-Wouthuysena i obrazie Schrödingera można znaleźć na podstawie warunku:

$$\{\hat{Q}^i\}^{kl}\Psi^l(t, \mathbf{x}) = \langle 0|\hat{A}_{FW}^k(t, \mathbf{x})\hat{Q}^i(t)|\Psi\rangle^{(1)}. \quad (7.42)$$

W obliczeniach wykorzystany będzie komutator anihilującej i kreującej części transformaty FW czteropotencjału:

$$[\hat{A}_{(+)}^k(t, \mathbf{x}), \hat{A}_{(-)}^l(t, \mathbf{x}')] = (\delta^{kl} - \Delta^{-1}\partial^k\partial^l)\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (7.43)$$

Zastosowanie tego związku prowadzi do równania:

$$\{\hat{Q}^i\}^{kl}\Psi^l(t, \mathbf{x}) = (\delta^{kl} - \Delta^{-1}\partial^k\partial^l)x^i\Psi^l(t, \mathbf{x}). \quad (7.44)$$

Przy użyciu reprezentacji pędowej dla  $x^i$  i operatorów różniczkujących, po uwzględnieniu bezźródłowości funkcji falowej, można otrzymać następującą postać reprezentacji operatora położenia:

$$\{\hat{Q}^i\}^{kl} = x^i\delta^{kl} + \Delta^{-1}\delta^{il}\partial^k. \quad (7.45)$$

Otrzymana forma operatora położenia zapewnia to, że operator ten jest dobrze określony w dziedzinie wektorowych funkcji bezźródłowych. Ponadto  $\{\hat{Q}^i\}^{kl}$  wbrew pozorom jest

operatorem hermitowskim w dziedzinie swojej określoności, co jest ukryte poprzez występowanie indeksów macierzowych. Hermitowskość rozważanego operatora położenia nie budzi wątpliwości na poziomie drugiej kwantyzacji.

Można pokazać, że wzór (7.45) na o.p. fotonu jest równoważny z wzorem podanym przez Bacry'ego<sup>6</sup>:

$$\{\hat{\mathbf{Q}}\} = \mathbf{x} + \frac{\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{S}}}{\hat{p}^2}, \quad (7.46)$$

gdzie  $\hat{p} = \sqrt{-\Delta}$ , a  $(S^i)^{jk} = -i\varepsilon^{ijk}$ . Natomiast w następującej reprezentacji funkcji falowej fotonu:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \langle 0 | \hat{\mathbf{A}}_S(t, \mathbf{x}) | \Psi \rangle^{(1)}, \quad (7.47)$$

postać operatora  $\hat{\mathbf{Q}}$  przybierze formę (1.36) podaną przez Pryce'a.

Reprezentacja (7.45) i jej pędowy odpowiednik umożliwia znalezienie ważnych związków komutacyjnych dla operatora położenia. Najprościej jest otrzymać komutatory położenia i czteropędu:

$$[\hat{Q}^i, \hat{p}^j] = i\delta^{ij} \quad ; \quad [\hat{Q}^i, \hat{H}] = i\hat{p}^i / \hat{H}. \quad (7.48)$$

Powyższe związki mają zupełnie satysfakcjonującą postać. Z komutatora położenia i hamiltonianu wynika operator prędkości fotonu, który jest prawidłowo unormowany do jedności, to jest do wartości prędkości światła. Nieco bardziej skomplikowany jest komutator składowych operatora położenia:

$$\{[\hat{Q}^i, \hat{Q}^j]\}^{kl} = \Delta^{-1}(\hat{\delta}_{\perp}^{ki}\delta^{jl} - \hat{\delta}_{\perp}^{kj}\delta^{il}), \quad (7.49)$$

gdzie występuje transwersalna delta Kroneckera  $\hat{\delta}_{\perp}^{ki}$ , która jest następującym operatorem:

$$\hat{\delta}_{\perp}^{ki} = \delta^{ki} - \Delta^{-1}\partial^k\partial^i. \quad (7.50)$$

Element macierzowy komutatora składowych położenia policzony dla dwóch jednocząstkowych stanów wyraża się następująco:

$$\langle \Psi | [\hat{Q}^i, \hat{Q}^j] | \Phi \rangle = \int d^3\mathbf{x} (\Psi^{*i}\Delta^{-1}\Phi^j - \Psi^{*j}\Delta^{-1}\Phi^i), \quad (7.51)$$

lub przy użyciu iloczynu wektorowego w formie:

$$\langle \Psi | \hat{\mathbf{Q}} \times \hat{\mathbf{Q}} | \Phi \rangle = \int d^3\mathbf{x} \Psi^* \times (\Delta^{-1}\Phi). \quad (7.52)$$

Okazało się zatem, że składowe operatora położenia fotonu nie komutują. Wszystko wskazuje na to, że najprawdopodobniej nie istnieje poprawny operator położenia fotonu o komutujących składowych, co jest konsekwencją występowania więzu dla wektorowej funkcji falowej polegającym na zerowaniu się jej dywergencji. Z tego powodu nieprzemienność współrzędnych w przypadku fotonu nie deprecjonuje jeszcze operatora położenia. Operator  $\hat{\mathbf{Q}}(t)$  można interpretować jako operator położenia efektywnego, dla którego nie istnieją uogólnione stany własne wszystkich składowych jednocześnie. W tym sensie problem lokalizacji fotonu leży nie tyle w samym pojęciu operatora położenia co w fundamentalnych ograniczeniach nałożonych na stany. Z reguł komutacyjnych składowych

---

<sup>6</sup>Mimo, że Bacry podał ten wzór w nieodpowiedniej reprezentacji funkcji falowej.

operatora położenia wynika, że fotony nie mogą być dowolnie dobrze zlokalizowane w każdym kierunku jednocześnie. Według publikacji [6] istnieją natomiast stany o wykładniczej lokalizacji fotonów.

Na zakończenie warto podkreślić, że operator położenia fotonu  $\hat{Q}(t)$  jest skonstruowany analogicznie do operatorów innych cząstek i opiera się na transformacji typu Foldy'ego-Wouthuysena. Ponieważ istnieją tylko dwie takie transformacje, które są fizycznie równoważne, to można mówić o jednoznaczności operatora położenia. W zasadzie dyskutowana była dwuznaczność nie transformacji FW, a tzw. uogólnionej wartości spoczynkowej czteropotencjału  $\hat{A}_S$ , zatem warto zapisać operator położenia przy pomocy tego obiektu:

$$\hat{Q}(t) = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} [\hat{A}_S(t, \mathbf{x}) \cdot |0\rangle i \overleftrightarrow{\partial}_t \langle 0| \hat{A}_S(t, \mathbf{x})]. \quad (7.53)$$

Pole  $\hat{A}_S$  jest w praktyce równoważne wektorowemu potencjałowi pola elektromagnetycznego w cechowaniu Coulomba. Fakt ten nie oznacza jednak złamania cechowania, gdyż cały niniejszy rozdział był formułowany w ramach metody Gupty-Bleulera, która nie wyróżnia żadnego cechowania w obrębie kowariantnego cechowania Lorentza.



# Rozdział 8

## Krótkie podsumowanie

W niniejszym podsumowaniu zostanie podana synteza wiadomości o operatorze położenia dla cząstek o spinie  $s \in \{0, 1/2, 1\}$ . Wspomniane cząstki w ramach kwantowej teorii pola można opisywać kilkuelementowym zbiorem pojedynczych pól  $\{\hat{\Phi}_n(x)\}$  o wartościach operatorowych, posiadającym odpowiednie reguły transformacyjne. Liczba tych pól dla cząstek bezspinowych wynosi jeden, a dla cząstek o spinie  $1/2$  i  $1$  cztery, przy czym te cztery składowe są w pewien sposób zależne. Do zbudowania operatora położenia potrzebne są tzw. *spoczynkowe wartości* pól  $\hat{\Phi}_n^S$  zdefiniowane w danym układzie inercjalnym przez pchnięcie lorentzowskie tych pól „z operatorową czteroprędkością”, co można formalnie wyrazić wzorem:

$$\hat{\Phi}_n^S(t, \mathbf{x}) = \sum_k S_{nk}(\Lambda(\hat{u})) \hat{\Phi}_k(t, \mathbf{x}), \quad (8.1)$$

gdzie  $S_{nk}(\Lambda(\hat{u}))$  jest macierzą, według której transformuje się dane pole pod wpływem transformacji Lorentza opisywanej macierzą  $\Lambda^\mu_\nu(\hat{u})$ , zależącą w przypadku pchnięć tylko od czteroprędkości. W tym wypadku jest użyta następująca czteroprędkość, będąca operatorem różniczkującym:

$$\hat{u}^\mu = \hat{\epsilon} i \partial^\mu / m, \quad (8.2)$$

gdzie  $m$  jest masą kwantów danego pola, a  $\hat{\epsilon}$  jest operatorem znaku częstości określonym następująco:

$$\hat{\epsilon} = i \partial_t / \sqrt{m^2 - \Delta}. \quad (8.3)$$

Dzięki spoczynkowej wartości pól operator położenia cząstki (o dodatnich częstościach) wyraża się wzorem:

$$\hat{\mathbf{Q}}_+(t) = \frac{1}{(2m)^{2s-2[s]}} \sum_n \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \hat{\Phi}_n^{\dagger S}(t, \mathbf{x}) |0\rangle i \overleftrightarrow{\partial}_t \langle 0 | \hat{\Phi}_n^S(t, \mathbf{x}), \quad (8.4)$$

przy czym czynnik masowy stojący przed znakiem sumy równa się jeden dla bozonów ( $s = 0, 1$ ), natomiast dla fermionów ( $s = 1/2$ ) wynosi  $(2m)^{-1}$ , gdyż  $[s]$  oznacza funkcję *entier* od wartości spinu danej cząstki.

Jeżeli pola  $\hat{\Phi}_n(x)$  opisują cząstki naładowane elektrycznie, to potrzebny jest również operator położenia antycząstki:

$$\hat{\mathbf{Q}}_-(t) = \frac{1}{(2m)^{2s-2[s]}} \sum_n \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \hat{\Phi}_n^S(t, \mathbf{x}) |0\rangle i \overleftrightarrow{\partial}_t \langle 0 | \hat{\Phi}_n^{\dagger S}(t, \mathbf{x}). \quad (8.5)$$

Do wyrażenia gęstości prawdopodobieństwa położenia potrzebne są transformaty typu Foldy'ego-Wouthuysena rozważanych pól, które można prosto zdefiniować przy pomocy spoczynkowych wartości tych pól:

$$\hat{\Phi}_n^{FW} = \frac{\sqrt{2\hat{E}}}{(2m)^{s-|s|}} \hat{\Phi}_n^S, \quad (8.6)$$

gdzie  $\hat{E} = \sqrt{m^2 - \Delta}$ . Operator gęstości prawdopodobieństwa położenia cząstki wyraża się wzorem:

$$\hat{\varrho}_+(t, \mathbf{x}) = \sum_n \hat{\Phi}_n^{\dagger FW}(t, \mathbf{x}) |0\rangle \langle 0| \hat{\Phi}_n^{FW}(t, \mathbf{x}). \quad (8.7)$$

Analogicznie wyraża się gęstość prawdopodobieństwa antycząstki:

$$\hat{\varrho}_-(t, \mathbf{x}) = \sum_n \hat{\Phi}_n^{FW}(t, \mathbf{x}) |0\rangle \langle 0| \hat{\Phi}_n^{\dagger FW}(t, \mathbf{x}). \quad (8.8)$$

Wprowadzone operatory  $\hat{\mathbf{Q}}_{\pm}$  są równoważne operatorom położenia wprowadzonym różnymi metodami przez Pryce'a, Newtona i Wignera oraz Foldy'ego i Wouthuysena. Autorzy ci nie wprowadzili rozróżnienia operatora położenia dla cząstek i antycząstek, wobec czego jako operator położenia podali sumę  $\hat{\mathbf{Q}}_+ + \hat{\mathbf{Q}}_-$ .

Transformacja (8.6), a zatem operator położenia i jego gęstość prawdopodobieństwa, została określona również dla cząstek bezmasowych. Cel ten został zrealizowany przy pomocy odpowiedniego przejścia granicznego. Zagadnienie jednoznaczności wyniku tego przejścia granicznego wymaga pewnego komentarza. Istnieją dwa możliwe sposoby przeprowadzania tego przejścia. Pierwszy sposób wychodzi z teorii o niezerowej masie, w ramach której, jeśli to możliwe, dokonuje się formalnego przejścia granicznego  $m \rightarrow 0$  we wzorze (8.6). Drugi sposób wychodzi z teorii bezmasowej, w ramach której wprowadza się umowny czynnik masowy  $\mu$  zastępujący  $m$  we wzorze (8.6). Po wprowadzeniu czteroprędkości zależnej od umownej masy wykonuje się przejście graniczne  $\mu \rightarrow 0$ . W przypadku cząstki skalarnej obydwa przejścia graniczne nie następują trudności i są zgodne. Dla fermionów również istnieją obydwie granice, ale prowadzą one do jakościowo różnych wyników. Dla pola Diraca granica typu  $m \rightarrow 0$  prowadzi do o.p. o komutujących składowych. Wynik ten należy jednak traktować jako matematyczną ciekawostkę, gdyż bezmasowe fermiony są opisywane polem Weyla, a nie Diraca. W przypadku pola Weyla granica  $\mu \rightarrow 0$  prowadzi do o.p. typu Borna-Infelda, którego składowe nie komutują. W przypadku fotonów obydwa sposoby wykonania przejścia granicznego są fizycznie równoważne, tzn. tożsame dla stanów fizycznych. Uzyskany w wyniku przejścia granicznego o.p. fotonu jest operatorem typu Borna-Infelda o nieprzemiennych składowych. Reasumując można powiedzieć, że z uwzględnieniem prostych kryteriów fizycznych, uogólnienie transformacji Foldy'ego-Wouthuysena na cząstki bezmasowe jest jednoznaczne.

Dla pola skalarnego podano uogólnienie operatora położenia na krzywoliniowe współrzędne  $q^k$  przestrzennopodobnej hiperpowierzchni  $\Omega$ . Uzyskany uogólniony operator położenia  $\hat{\mathbf{Q}}^k(\Omega)$  zależy od hiperpowierzchni  $\Omega$  (w zastępstwie czasu). Innym uogólnieniem jest wprowadzenie wielocząstkowych operatorów położenia. N-cząstkowy operator położenia  $\hat{\mathbf{Q}}^{i_1 i_2 \dots i_N}$  można wprowadzić dla cząstek o dowolnym spinie, przy czym dla fermionów będzie on antysymetryczny ze względu na zamianę wskaźników, a dla bozonów symetryczny.

Operator położenia był w tej pracy konstruowany na kanwie tzw. *heterowariantnych* operatorów anihilacji i kreacji wyrażonych w *cyklicznej bazie spoczynkowej*. Heterowariantne operatory kreacji i anihilacji okazały się być składowymi kreującej i anihilującej

części pola w reprezentacji Foldy'ego-Wouthuysena. Kreujące i anihilujące części operatora  $\hat{\Phi}_n^{FW}$  spełniają proste równoczesowe związki przemienności dla zawężonego  $2s + 1$  elementowego zbioru indeksów  $\{\sigma\}$  dla cząstek i indeksów  $\{\rho\}$  dla antycząstek<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \{\hat{\Phi}_{(+)\sigma}^{FW}(t, \mathbf{x}), \hat{\Phi}_{(+)\sigma'}^{\dagger FW}(t, \mathbf{x}')\}_s &= \delta_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'); \\ \{\hat{\Phi}_{(-)\rho}^{\dagger FW}(t, \mathbf{x}), \hat{\Phi}_{(-)\rho'}^{FW}(t, \mathbf{x}')\}_s &= \delta_{\rho\rho'} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'); \end{aligned} \quad (8.9)$$

gdzie  $\{, \}_s$  dla bozonów jest komutatorem, a dla fermionów antykomutatorem. Należy uściślić, że w przypadku fotonów należy zastąpić deltę Kroneckera deltą transwersalną:

$$\hat{\delta}_{ij}^{\perp} = \delta_{ij} - \Delta_{-1} \partial_i \partial_j, \quad (8.10)$$

zaś w przypadku bezmasowych lewoskrętnych fermionów operatorem rzutu na dodatnie lub ujemne częstotliwości:

$$\hat{\delta}_{KL}^{(\pm)} = \frac{1}{2} \delta_{KL} \pm \frac{i\sigma_{KL} \cdot \nabla}{2\sqrt{-\Delta}}. \quad (8.11)$$

Operator  $\hat{\Phi}_n^{FW}$  może również służyć do wprowadzania *heterowariantnych funkcji falowych*. Niech stany  $|\Psi_{\pm}\rangle$  będą jednocząstkowymi stanami odpowiednio cząstki i antycząstki, wówczas stanom tym będą odpowiadały następujące heterowariantne funkcje falowe:

$$\Psi_{n+}(t, \mathbf{x}) = \langle 0 | \hat{\Phi}_n^{FW}(t, \mathbf{x}) | \Psi_{+} \rangle, \quad \Psi_{n-}(t, \mathbf{x}) = \langle \Psi_{-} | \hat{\Phi}_n^{FW}(t, \mathbf{x}) | 0 \rangle. \quad (8.12)$$

W reprezentacji heterowariantnej funkcji falowej elementy macierzowe operatora położenia wyrażają się zawsze następująco:

$$\langle \Psi | \hat{\mathbf{Q}} | \Phi \rangle = \sum_n \int d^3\mathbf{x} \Psi_n^* \mathbf{x} \Phi_n, \quad (8.13)$$

wobec czego w rozważanej reprezentacji operator położenia ma z reguły prostą postać:

$$\{\hat{\mathbf{Q}}\}_{\Psi} = \mathbf{x}. \quad (8.14)$$

Powyższa reguła nie jest prawdziwa dla fotonu i bezmasowego jednoskrętnego fermionu<sup>2</sup>, których operatory położenia mają bardziej złożone formy:

$$\{\hat{Q}_{fot.}^i\}^{kl} = x^i \delta^{kl} - \Delta^{-1} \delta^{il} \partial^k, \quad \{\hat{Q}_{lew.fer.}\} = \mathbf{x} + \frac{\nabla}{2\Delta} - \frac{i\sigma}{2\sqrt{-\Delta}}. \quad (8.15)$$

Podobnie przedstawia się zagadnienie przemienności składowych operatora położenia. Dla cząstek o niezerowej masie, a także bezmasowej cząstki skalarnej, składowe operatory położenia komutują:

$$[\hat{Q}^k, \hat{Q}^l] = 0; \quad (8.16)$$

natomiast dla fotonów i jednoskrętnych fermionów nie komutują. Przykładowo komutator składowych położenia fotonu ma postać:

$$\{[\hat{Q}^i, \hat{Q}^j]\}^{kl} = \Delta^{-1} (\hat{\delta}_{\perp}^{ki} \delta^{jl} - \hat{\delta}_{\perp}^{kj} \delta^{il}). \quad (8.17)$$

<sup>1</sup>Zawężone indeksy odnoszą się do niezerowych składowych transformacji FW pola. Dla pola wektorowego chodzi o indeksy przestrzenne, a dla pola Diraca o indeksy *górných* lub *dolnych* składowych w reprezentacji Diraca.

<sup>2</sup>Przypadek lewoskrętnych fermionów bezmasowych został opisany w rozdziale uzupełniającym, napisanym po obronie nieniejszej pracy.

Brak przemienności składowych położenia fotonu i jednoskrętnego fermionu, oznacza nieistnienie dla tych cząstek uogólnionych stanów zlokalizowanych. Fakt ten jest konsekwencją występowania więzu dla polaryzacji tych cząstek. Chodzi tutaj o polaryzację poprzeczną dla fotonów i określony zwrot polaryzacji podłużnej dla bezmasowych fermionów.

Operator położenia, podobnie jak i jego stany własne, nie jest wielkością kowariantną i zależy od układu odniesienia. Podobnie wygląda zagadnienie gęstości prawdopodobieństwa oraz gęstości czteroprądu prawdopodobieństwa położenia.

Jednym z kryteriów poprawności operatora położenia są uniwersalne reguły komutacyjne tego operatora z czteropędem:

$$[\hat{Q}^k, \hat{p}^l] = i\delta^{kl} \quad ; \quad [\hat{Q}^k, \hat{H}] = i\hat{p}^k/\hat{H}; \quad (8.18)$$

gdzie  $\hat{H} = \hat{p}_0$  jest jednocząstkowym hamiltonianem. Postać drugiego komutatora jest zgodna z klasyczną definicją prędkości.

Na tym zostanie zakończona analiza zagadnienia operatora położenia w relatywistycznej mechanice kwantowej.

# Rozdział 9

## Uzupełnienie: bezmasowe fermiony jednoskrętne

Niniejszy rozdział jest uzupełnieniem pracy magisterskiej i został napisany po jej obro-  
nie. Dotyczy on bezmasowych cząstek o spinie  $1/2$  z wyróżnionym zwrotem polaryzacji  
podłużnej. Teoria cząstek o spinie  $1/2$  i dowolnej polaryzacji opisana jest w rozdziale  
piątym i jest dobrze określona również dla przypadku  $m = 0$ . Zatem w takiej teorii  
istnieje formalny operator położenia o komutujących składowych, który w standardowej  
reprezentacji funkcji falowej ma postać:

$$\{\hat{\mathbf{Q}}\} = \mathbf{x} + \frac{\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{S}}}{\hat{p}^2} \left(1 - \hat{\beta} \frac{\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{\hat{p}}\right), \quad (9.1)$$

gdzie  $\hat{p} = \sqrt{-\Delta}$ , a  $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\boldsymbol{\alpha}} \times \hat{\boldsymbol{\alpha}}/4i$ . Powyższy wzór można trochę uprościć wykorzystując  
podział na dodatnie i ujemne częstotści:

$$\{\hat{\mathbf{Q}}_{\pm}\} = \mathbf{x} + (1 \mp \hat{\beta}) \frac{\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{S}}}{\hat{p}^2} = \mathbf{x} + (1 \mp \hat{\beta}) \left(\frac{i\hat{\mathbf{p}}}{2\hat{p}^2} \mp \frac{i\hat{\boldsymbol{\alpha}}}{2\hat{p}}\right). \quad (9.2)$$

Wprowadzenie wyróżnienia lewoskrętnej lub prawoskrętnej polaryzacji fermionów bezma-  
sowych komplikuje zagadnienie operatora położenia.

### 9.1 Równanie Weyla

Punktem wyjścia teorii cząstek o spinie  $1/2$  jest równanie Diraca. Równanie to dla  
 $m = 0$  przybiera postać:

$$i\partial_t\psi = i\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \nabla\psi. \quad (9.3)$$

W zwykłym równaniu Diraca ( $m \neq 0$ ) występuje dodatkowo macierz  $\hat{\beta}$ , która tak jak  
macierze  $\hat{\alpha}^i$  ma wymiar  $4 \times 4$ . Brak macierzy  $\hat{\beta}$  sprawia, że algebra Diraca sprowadza się  
do warunku:

$$\{\hat{\alpha}^i, \hat{\alpha}^j\} = 2\delta^{ij}; \quad (9.4)$$

który można realizować już przy pomocy macierzy wymiaru  $2 \times 2$ . Standardowym wyborem  
macierzy  $\hat{\alpha}^i$  są z dokładnością do znaku macierze Pauliego ( $\hat{\alpha}^i \rightarrow \pm\hat{\sigma}^i$ ). Wybór znaku  
w powyższym przyporządkowaniu oraz wybór określonej klasy realizacji macierzy Pauliego

decyduje o skrętności cząstki opisywanej rozważanym równaniem. Zostanie przyjęty znak plus oraz następująca realizacja macierzy Pauliego<sup>1</sup>:

$$\hat{\sigma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9.5)$$

Macierze te spełniają poniższy związek komutacyjny<sup>2</sup>:

$$[\hat{\sigma}^k, \hat{\sigma}^l] = -2i\epsilon^{klm}\hat{\sigma}^m. \quad (9.6)$$

Forma tego związku implikuje następującą postać operatora spinu:

$$\hat{\mathbf{s}} = -\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (9.7)$$

Wprowadzony wybór znaków oraz postaci macierzy Pauliego odpowiada fermionom lewoskrętnym, tzn. takim dla których spin jest antyrównoległy do pędu. Do niedawna panowało przekonanie, że w przyrodzie występują jedynie lewoskrętne fermiony bezmasowe. Powyższa teza opierała się na założeniu zerowej masy neutrin. Współczesne doświadczenia przemawiają jednak za niezerową masą neutrin.

Jeżeli  $\hat{\sigma}^0$  oznaczać będzie macierz jednostkową, to równanie bezmasowych lewoskrętnych fermionów przyjmie ostatecznie kwazikowariantną postać:

$$\hat{\sigma}^\mu \partial_\mu \varphi = 0. \quad (9.8)$$

Jest to tzw. równanie Weyla na pole spinorowe  $\varphi$  o dwóch składowych. Spinory tego typu transformują się przy zmianie układu inercyjnego zgodnie z zespoloną reprezentacją grupy Lorentza:

$$\varphi' = \frac{1 + \hat{\sigma}^\mu U_\mu}{\sqrt{2(1 + U_0)}} \varphi, \quad (9.9)$$

gdzie  $U_\mu$  jest czteroprędkością primowanego układu odniesienia.

## 9.2 Kwantowanie kanoniczne

Procedura kwantowania kanonicznego oparta na gęstości lagranżjanu  $\mathcal{L} = \varphi^\dagger \hat{\sigma}^\mu i \partial_\mu \varphi$  prowadzi do związków antykomutacyjnych dla operatorów pola Weyla  $\hat{\varphi}$ . Jedyne różny od zera jednoczasowy antykomutator ma postać:

$$\{\hat{\varphi}_K(t, \mathbf{x}), \hat{\varphi}_L^\dagger(t, \mathbf{x}')\} = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta_{KL}; \quad (9.10)$$

gdzie K i L to dwuwartościowe indeksy spinorowe. Z powyższego równania wynikają związki antykomutacyjne dla kowariantnej transformaty Fouriera pola  $\hat{\varphi}(p)$  na powłoce zerowej masy ( $p^2 = 0$ ). Jedyne nietrywialny antykomutator tego typu ma postać:

$$\{\hat{\varphi}_K(p), \hat{\varphi}_L^\dagger(p')\} = (2\pi)^3 2p_0 (p_0 \delta_{KL} + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{KL}) \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad \text{dla } \epsilon(p_0) = \epsilon(p'_0). \quad (9.11)$$

<sup>1</sup>Wprowadzona postać macierzy Pauliego wynika z pewnej konstrukcji i różni się od bardziej popularnej realizacji znakiem drugiej macierzy.

<sup>2</sup>Znak występujący po prawej stronie tego związku określa jedną z dwóch klas możliwych typów macierzy Pauliego.

Rozważana transformata Fouriera pola spełnia zwykle równanie algebraiczne:

$$\hat{\sigma}^\mu p_\mu \hat{\varphi}(p) = 0. \quad (9.12)$$

Wygodnie jest wprowadzić spinor bazowy  $u(p)$  spełniający analogiczne równanie:

$$\hat{\sigma}^\mu p_\mu u(p) = 0, \quad (9.13)$$

przy czym warto ograniczyć się do nieujemnych  $p_0$  oraz przyjąć następujący warunek normalizacyjny:

$$u^\dagger(p)u(p) = 2p_0. \quad (9.14)$$

Z równania (9.13) wynika ponadto warunek ortogonalności postaci:

$$u^\dagger(p)u(\tilde{p}) = 0, \quad (9.15)$$

gdzie  $\tilde{p}$  oznacza czteropęd o przeciwnym trójpędzie względem  $p$ . Spinory  $u(p)$ ,  $u(\tilde{p})$  tworzą zatem ortogonalną bazę spinorów, a pierwszy z nich spełnia równanie Weyla w reprezentacji pędowej. Umożliwia to zapisanie operatora pola w postaci następującej superpozycji fal płaskich:

$$\hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} [\hat{b}(p)u(p)e^{-ip \cdot x} + \hat{d}^\dagger(p)u(p)e^{ip \cdot x}], \quad (9.16)$$

gdzie został wprowadzony operator anihilacji fermionu  $\hat{b}(p)$  i operator kreacji antyfermionu  $\hat{d}^\dagger(p)$ <sup>3</sup>. Można wykazać, że operatory te spełniają typowe związki antykomutacyjne:

$$\begin{aligned} \{\hat{b}(p), \hat{b}^\dagger(p')\} &= (2\pi)^3 2p_0 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'); \\ \{\hat{d}(p), \hat{d}^\dagger(p')\} &= (2\pi)^3 2p_0 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'); \end{aligned} \quad (9.17)$$

a pozostałe antykomutatory wynoszą zero.

W dalszych rozważaniach dotyczących operatora położenia okaże się przydatny antykomutator dla anihilującej (kreującej) części pola. Na podstawie związku (9.11) można otrzymać następującą postać takiego antykomutatora:

$$\{\hat{\varphi}_{(+)\mathcal{K}}(x), \hat{\varphi}_{(+)\mathcal{L}}^\dagger(x')\} = (\delta_{\mathcal{KL}} i \partial_t + i \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{KL}} \cdot \boldsymbol{\nabla}) i \Delta_{(+)}(x - x'); \quad (9.18)$$

gdzie  $\Delta_{(+)}(\cdot)$  jest funkcją Wightmana o dodatnich częstościach.

### 9.3 Uogólniona transformacja Foldy'ego-Wouthuysena

Podobnie jak w przypadku fotonów również dla bezmasowych fermionów można przy pomocy przejścia granicznego zastosować wzór na transformacje Foldy'ego-Wouthuysena stosowany dla pól z niezerową masą kwantów. Czynność ta wymaga wprowadzenia operatora czteropędowości  $\hat{u}^\alpha(\mu)$  zależnego od umownej masy  $\mu$  fermionu. Zostanie tutaj zastosowana taka sama postać czteropędowości jak w przypadku fotonów<sup>4</sup>. Uogólnioną transformację FW dla pola Weyla można zdefiniować wzorem:

$$\hat{\varphi}^{FW} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\sqrt{-\Delta}}{\sqrt{\mu}} \frac{1 + \hat{\sigma}^\alpha \hat{u}_\alpha(\mu)}{\sqrt{1 + \hat{u}_0(\mu)}} \hat{\varphi}. \quad (9.19)$$

<sup>3</sup>W przypadku cząstek obojętnych należy zastąpić operator  $\hat{d}^\dagger(p)$  operatorem  $\hat{b}^\dagger(p)$ , co oznacza utożsamienie fermionu z antyfermionem.

<sup>4</sup>Dla fotonów rozważana była również alternatywna postać czteropędowości, której zastosowanie tak jak w niniejszym rozdziale nie zmienia wyników rachunków.

Powyższy wzór poza występowaniem przejścia granicznego i charakterystycznej dla pola Weyla reguły transformacyjnej różni się od wzoru dla fermionów z masą jedynie brakiem czynnika  $1/\sqrt{2}$ . Wartość czynnika liczbowego został dobrany tak, aby zapewnić unitarność rozważanej transformacji. Wykonanie przejścia granicznego na mocy równania Weyla i reguły de Hospitala prowadzi do trywialnego wyniku:

$$\hat{\varphi}^{FW} \equiv \hat{\varphi}. \quad (9.20)$$

Oczywiście transformacja będąca identycznością nie prowadzi tak jak w przypadku pola Diraca do żadnej separacji składowych pola Weyla. Niemożliwość zbudowania takiej separacji jest konsekwencją trywialnej postaci macierzy  $\hat{\sigma}^1 \equiv 1$ <sup>5</sup> oraz niewystępowania w teorii pola Weyla czynnika o wymiarze długości, jaki stanowiłaby masa.

### 9.3.1 Operator położenia

Trywialna postać uogólnionej transformacji Foldy’ego-Wouthuysena prowadzi do prostego przepisu na operator położenia cząstki:

$$\hat{Q}_+ = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \hat{\varphi}^\dagger|0\rangle\langle 0|\hat{\varphi}. \quad (9.21)$$

Jak widać powyższy operator jest momentem rozkładu gęstości prawdopodobieństwa położenia cząstki, która jest zadana wzorem:

$$\hat{\rho}_+ = \hat{\varphi}^\dagger|0\rangle\langle 0|\hat{\varphi}. \quad (9.22)$$

Aby otrzymać operator położenia  $\hat{Q}_-$  antycząstki i operator gęstości prawdopodobieństwa jej położenia  $\hat{\rho}_-$  wystarczy we wzorach (9.21) i (9.22) zamienić miejscami operatory  $\hat{\varphi}^\dagger$  i  $\hat{\varphi}$ .

Dalszą analizę operatora położenia wygodnie jest przeprowadzić w standardowej reprezentacji funkcji falowej, która dla danego stanu jednocząstkowego  $|\Psi_+\rangle$ <sup>(1)</sup> ma postać:

$$\Psi_+(x) = \langle 0|\hat{\varphi}(x)|\Psi_+\rangle^{(1)}. \quad (9.23)$$

Taka funkcja falowa jest kowariantnym polem spinorowym na czasoprzestrzeni. Funkcja  $\Psi_+$  posiada jedynie dodatnie częstości wobec czego spełnia następujące równania:

$$i\partial_t\Psi_+ = i\hat{\sigma} \cdot \nabla\Psi_+ = +\sqrt{-\Delta}\Psi_+. \quad (9.24)$$

Dla stanów antycząstek można wprowadzić analogiczną funkcję falową  $\Psi_-$  o ujemnych częstościach. Ponieważ własności tej funkcji w stosunku do funkcji o dodatnich częstościach różnią się w zasadzie tylko znakiem, to nie ma potrzeby jej oddzielnego rozpatrywania. W dalszych rozważaniach występować będzie jedynie funkcja o dodatnich częstościach, wobec czego opuszczanie indeksu „+” nie powinno prowadzić do nieporozumień.

W celu znalezienia jawnej postaci operatora położenia w reprezentacji funkcji falowej  $\Psi$  należy skorzystać z formuły definiującej:

$$\{\hat{Q}^i\}_{KL}\Psi_L = \langle 0|\hat{\varphi}_K\hat{Q}^i|\Psi\rangle, \quad (9.25)$$

<sup>5</sup>Macierz  $\hat{\gamma}^0$  z teorii Diraca nie ma takiej własności.



w której wykorzystano regułę sumacyjną dla spinorowego indeksu  $L$ . Prawą stronę powyższej formuły, po użyciu wzoru na o.p., można przekształcić wykorzystując komutator (9.18). W rachunkach tych wygodnie jest użyć następującego wzoru na funkcję Wightmana w zerowej chwili czasu:

$$i\Delta_{(+)}(0, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\sqrt{-\Delta}} \delta^{(3)}(\mathbf{x}). \quad (9.26)$$

Wstępne przekształcenia prowadzą do wzoru:

$$\{\hat{Q}^i\}_{KL}\Psi_L = \frac{1}{2}x^i\Psi_K + \frac{\sigma_{KL}^k i\partial^k}{2\sqrt{-\Delta}}x^i\Psi_L. \quad (9.27)$$

Przekomutowanie operatorów różniczkujących z  $x^i$  (najprościej w przedstawieniu pędowym) pozwala nadać o.p. postać:

$$\{\hat{Q}\} = \mathbf{x} + \frac{\nabla}{2\Delta} - \frac{i\boldsymbol{\sigma}}{2\sqrt{-\Delta}}. \quad (9.28)$$

Widać, że oprócz standardowego  $\mathbf{x}$  wprowadzony operator zawiera dodatkowe człony. Okazuje się, że te człony zapewniają parzystość o.p., polegającą na tym, że dany operator nie zmienia znaku częstości funkcji falowej. Parzystość operatora położenia jest niezbędna, jeśli ma mieć sens jakakolwiek jednoczątkowa interpretacja tego operatora. Na parzystość operatora położenia zwracał uwagę już Schrödinger (patrz ujęcie historyczne), a Bacry<sup>6</sup> uzyskał operator (9.28) jako parzystą część  $\mathbf{x}$ . Warto zaznaczyć, że pełna zgodność operatorów położenia Bacry'ego z operatorami położenia wprowadzonymi w tej pracy ma miejsce tylko w przypadku bezmasowych fermionów jednoskrętnych. Fakt ten wynika z trywialności uogólnionej transformacji Foldy'ego-Wouhuysena dla pola Weyla.

Warto przekształcić jeszcze postać o.p. i wyrazić go przy pomocy operatora spinu:

$$\{\hat{Q}\} = \mathbf{x} + \frac{\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{s}}}{\hat{p}^2}. \quad (9.29)$$

Powyzsza postać o.p. jest prawidłowa zarówno dla dodatnich jak i ujemnych częstości. Ponadto jest ona taka sama jak postać operatora typu Borna-Infelda dla pola Diraca, gdy położymy  $m = 0$  i utożsamimy macierze spinu o różnych wymiarach. Rozpatrywaną postać o.p. można również uzyskać opuszczając człon z macierzą  $\hat{\beta}$  we wzorze (9.1) na operator położenia fermionu o komutujących składowych dla  $m = 0$ .

Inną równie ważną własnością o.p. jest hermitowskość. Na pierwszy rzut oka dodatkowe człony operatora (9.28) wydają się być antyhermitowskie. Jednak na dziedzinie funkcji falowych o dodatnich częstościach rozważany operator jest hermitowski. Powyższy fakt dowodzi postać elementu macierzowego o.p. dla dwóch stanów:

$$\langle \Psi_1 | \hat{Q} | \Psi_2 \rangle = \int d^3\mathbf{x} \Psi_1^* \mathbf{x} \Psi_2, \quad (9.30)$$

którą można uzyskać bezpośrednio z wzoru (9.21) lub pośrednio na podstawie (9.27). Zatem z punktu widzenia elementów macierzowych operator  $\hat{Q}$  sprowadza się do mnożenia przez  $\mathbf{x}$ , a pozostała jego część odpowiada jedynie za „obcinanie ujemnych częstości”, dzięki czemu o.p. działa w dziedzinie funkcji o dodatnich częstościach. Zerowa wartość elementu

---

<sup>6</sup>Patrz wzór (1.46) lub pozycja [3].

macierzowego dla wspomnianej dodatkowej części o.p. wynika po prostu z ortogonalności funkcji falowych o przeciwnych częstościach.

Przestawienie (9.28) o.p. lub wzór (9.30) na jego elementy macierzowe może posłużyć do wyliczenia komutatora o.p. z czteropędem:

$$[\hat{Q}^k, \hat{H}] = i\hat{p}^k/\hat{H}; \quad [\hat{Q}^k, \hat{p}^l] = i\delta^{kl}. \quad (9.31)$$

Powyższe związki mają uniwersalną postać i zawierają prawidłową definicję operatora prędkości.

Na zakończenie zostanie zbadane zagadnienie przemienności składowych operatora położenia bezmasowego fermionu lewoskrętnego. Przy pomocy (9.28) drogą bezpośredniego rachunku (korzystającego z przestrzeni pędów) można otrzymać następujący związek komutacyjny:

$$[\{\hat{Q}^k\}, \{\hat{Q}^l\}] = \frac{\hat{\sigma}^k i\partial^l - \hat{\sigma}^l i\partial^k}{2\sqrt{-\Delta^3}} - \frac{i\varepsilon^{kln}\hat{\sigma}^n}{2\Delta}. \quad (9.32)$$

Powyższy komutator można zgrabnie zapisać przy pomocy iloczynu wektorowego:

$$\{\hat{\mathbf{Q}} \times \hat{\mathbf{Q}}\} = \frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}} \times i\nabla}{2\sqrt{-\Delta^3}} - \frac{i\hat{\boldsymbol{\sigma}}}{2\Delta}. \quad (9.33)$$

Rozważany komutator ma wciąż złożoną formę, ale jego elementy macierzowe upraszczają się do prostszej postaci:

$$\langle \Psi_1 | \hat{\mathbf{Q}} \times \hat{\mathbf{Q}} | \Psi_2 \rangle = \frac{1}{2i} \int d^3\mathbf{x} \Psi_1^* \hat{\boldsymbol{\sigma}} \Delta^{-1} \Psi_2. \quad (9.34)$$

Uproszczenie elementu macierzowego było możliwe dzięki temu, że pole Weyla jest spolaryzowane podłużnie, dzięki czemu spin jest antyrównoległy do pędu.

Okazuje się, że podobnie jak w przypadku fotonów różne składowe wprowadzonego o.p. nie komutują. Powyższy fakt oznacza nieistnienie uogólnionych stanów własnych o.p. dla bezmasowych fermionów jednoskrętnych. To istotne ograniczenie na lokalizację jednoskrętnych fermionów nie deprecjonuje jednak operatora położenia, a jedynie stanowi o jego nietypowych własnościach.

## 9.4 Wnioski o operatorze położenia dla cząstek bezmasowych ze spinem

W niniejszej pracy został podany dość ogólny wzór na operator położenia. Wzór ten opiera się na tzw. spoczynkowej wartości pola (opisującego dany rodzaj cząstek) blisko związanej z transformacją Foldy'ego-Wouthuysena. Odwołanie do układu spoczynkowego, w przypadku cząstek bezmasowych o nietrywialnych prawach transformacyjnych, takich jak fotony i bezmasowe fermiony, prowadzi do oczywistych trudności. Trudności te zostały rozwiązane przy pomocy specjalnego przejścia granicznego. W wyniku przeprowadzenia tego przejścia granicznego uzyskano operatory położenia fotonu i bezmasowego obuskrętnego oraz jednoskrętnego fermionu. Operatory te posiadają większość własności o.p. dla cząstek z masą, z wyjątkiem przemienności składowych. Na podstawie analizy przeprowadzonej w tej pracy, podpartej różnymi pracami naukowymi, można stwierdzić, że nie istnieje poprawny o.p. fotonu i bezmasowego jednoskrętnego fermionu o komutujących składowych. Natomiast bez problemów udało się zdefiniować o.p. bezmasowego

obuskrętnego o takiej własności. Jednakże warto pamiętać, że nawet niekomutujące operatory położenia są w sensie elementów macierzowych i w odpowiedniej reprezentacji zwykłym mnożeniem przez  $\mathbf{x}$ . Fakt ten odzwierciedla podstawową intuicję o.p. oraz ideę reprezentacji heterowariantnej, pełniącej w tej pracy rolę przedstawienia położeniowego w możliwie najwierniejszym tego słowa znaczeniu.

Warto zauważyć, że dla przypadku cząstek bezmasowych istnieje mniej propozycji operatorów położenia niż w przypadku cząstek z masą. Proponowane operatory położenia fotonu i bezmasowego fermionu jednoskrętnego pokrywają się z operatorami podanymi przez Pryce'a i Bacry'ego. Autorzy ci jednak wychodzili z o.p. typu Schrödingera-Borna-Infelda, bez konieczności wykonywania prześcia granicznego z operatorem typu  $\hat{Q}$ . Można zatem powiedzieć, że teoria operatora położenia w przypadku bezmasowym jest mimo swojej trudności dość jednoznaczna.

Reasumując należy stwierdzić, że cząstki bezmasowe spolaryzowane poprzecznie lub podłużnie lewoskrętnie albo prawoskrętnie charakteryzują się fundamentalną nieoznaczonością położenia. Nie chodzi tutaj o nieoznaczoność pędu i położenia jak w zasadzie nieoznaczoności Heisenberga, ale o niekreśloność samego tylko położenia. Warto jednak zauważyć na podstawie komutatorów (9.34) i (8.17), że omawiana nieokreśloność położenia jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu energii. Spostrzeżenie to sugeruje istnienie wysoko energetycznych stanów cząstek o stosunkowo dobrej lokalizacji przestrzennej. Głębsza analiza tej sugestii wychodzi jednak poza ramy tej pracy.



# Bibliografia

- [1] Angelopoulos E. & Bayen F. & Flato M., *O lokalizacji cząstek bezmasowych* (tytuł przetłumaczony), Phys. Scr. **9**, str. 173, 1974 r.
- [2] Bacry H., *Localizability and Space in Quantum Physics*, Springer-Verlag 1988 r.
- [3] Bacry H., *The position operator revisited*, Ann. Inst. Henri Poincare **49**, str. 245, 1988 r.
- [4] Barut A.O. & Rączka R., *Theory of Group Representations and Applications*, PWN 1977 r.
- [5] Białynicki-Birula I. *On the Wave Function of the Photon*, Acta Phys. Pol. A **86**, str. 97, 1993 r.
- [6] Białynicki-Birula I. *Exponential Localization of Photons*, Phys. Rev. Lett. **80**, nr 24, str. 5247, 1998 r.
- [7] Białynicki-Birula I. & Białynicka-Birula Z., *Elektrodynamika kwantowa*, PWN 1974 r.
- [8] Bogoljubov N.N. & Szirkov *Vvedenje v teorju kvantowannykh polej* Moskwa 1955 r.
- [9] Born M. & Infeld L., *The Quantization of New Field Theory*, Proc. Roy. Soc. **150A**, str. 141, 1935 r.
- [10] Dawydow A. S., *Mechanika kwantowa*, PWN 1967 r.
- [11] Fokker A.D., *Relativiteitsstheorie*, Groninger: P. Noordhoff, 1929 r.
- [12] Foldy L. & Wouthuysen S., *On the Dirac Theory of Spin 1/2 Particles and Its Non-Relativistic Limit*, Phys. Rev. **78**, str. 29, 1950 r.
- [13] Greiner W., *Relativistic Quantum Mechanics*, Springer-Verlag 1990 r.
- [14] Greiner W. & Reinhard J., *Field Quantization*, Springer 1993 r.
- [15] Hawton M. & Baylis W.E., *Photon position operators and localized bases*, Phys. Rev. A **64**, str. 012101-1, 2001 r.
- [16] Hund F., *The history of Quantum Theory*, Barnes & Noble 1974 r., tłum. z jezy. niemieckiego.
- [17] Itzykson C. & Zuber J.B., *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill 1980 r.
- [18] Landau L.D. & Peierls R., Z. Phys. **62**, str. 188, 1930 r.

- [19] Lunn M., *Position observables for relativistic systems*, J. Phys. **2A**, str. 17, 1969 r.
- [20] Mackey G.W., *Nieskończenie wymiarowe reprezentacje grup* (tytuł przetłumaczony), Bull. Am. Math. Soc. **69**, str. 628, 1963 r.
- [21] Newton T.D. & Wigner E.P., *Localized States for Elementary System*, Rev. Mod. Phys. **21**, str. 400, 1949 r.
- [22] Pryce M.H.L., *Commuting Co-ordinates in the New Field Theory*, Proc. Roy. Soc. **150A**, str. 166, 1935 r.
- [23] Pryce M.H.L., *The mass-centre in relativity*, Proc. Roy. Soc. **195A**, str. 62, 1948 r.
- [24] Schrödinger E., Physik-Math. **24**, str. 418, Sitzber. Press. Akad. Wiss. 1930 r.
- [25] Wightman A.S., *O lokalizacji układów kwantowomechanicznych* (tytuł przetłumaczony) Rev. Mod. Phys. **34**, str. 845, 1962 r.