Seria XI zadań z Mechaniki Kwantowej II B do wykładu dr. hab. Krzysztofa Byczuka

r.p. 2008/2009

Zadanie 1 — Twierdzenie Gell-Manna i Lowa

Załóżmy, że założenia tw. Gell-Manna i Lowa są spełnione. Wówczas jeśli układ w $t \to -\infty$ znajdował się w stanie podstawowym hamiltonianu nieoddziałującego $\mathcal{H}_0$ i adiabatycznie ($\propto e^{-\epsilon|t|}$) dla $\epsilon \gtrsim 0$ włączono oddziaływanie $\mathcal{H}_1$ tak, że w $t = 0$ osiągnęło ono swą pełną moc, to w $t = 0$ układ znalazł się w stanie własnym pełnego hamiltonianu $\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$, ale niekoniecznie podstawowym. Czy da się odwrócić treść twierdzenia, tj. czy jeżeli chytrze wybralibyśmy stan własny hamiltonianu nieoddziałującego w $t \to -\infty$, przygotowali układ w tym stanie i adiabatycznie włączyli oddziaływanie, to znalazłby się on w $t = 0$ w stanie podstawowym hamiltonianu z oddziaływaniem? Odpowiedź proszę uzasadnić.

Zadanie 2 — Twierdzenie o elementach macierzowych

Do tej pory definiowaliśmy jednocząstkową funkcję Greena $G_{\alpha\alpha'}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = -i\langle\Psi_0|T[\psi_{H\alpha}(\vec{r}, t)\psi^\dagger_{H\alpha'}(\vec{r}', t')]|\Psi_0\rangle$ dla operatorów w obrazie Heisenberga i heisenbergowskiego stanu Ψ_0; α, α' to wskaźniki spinowe. Należy teraz uzasadnić, czemu równoważną definicją jest

$$G_{\alpha\alpha'}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \lim_{\epsilon\to 0^+} -i\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-i)^\nu}{\nu!}\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_\nu \frac{\langle\Phi_0|T[\mathcal{H}_1(t_1)\cdots\mathcal{H}_1(t_\nu)\psi_\alpha(\vec{r}, t)\psi^\dagger_{\alpha'}(\vec{r}', t')]|\Phi_0\rangle}{\langle\Phi_0|U_\epsilon(\infty, -\infty)|\Phi_0\rangle} e^{-\epsilon(|t_1|+\cdots+|t_\nu|)},$$

dla nieoddziałującego stanu $|\Phi_0\rangle$ odpowiadającego (por. tw. Gell-Manna i Lowa) stanowi $|\Psi_0\rangle$ oraz $U_\epsilon(\infty, -\infty) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-i)^\nu}{\nu!}\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_\nu\, T[\mathcal{H}_1(t_1)\cdots\mathcal{H}_1(t_\nu)]e^{-\epsilon(|t_1|+\cdots+|t_\nu|)}$

Zadanie 3 — Twierdzenie Wicka

Załóżmy, że chcemy obliczyć funkcję Greena jako średnią na stanie podstawowym gazu fermionów będącym kulą Fermi'ego $|KF\rangle$ o pędzie Fermi'ego k_F. Jaka definicja kontrakcji pozwala wykorzystać moc twierdzenia Wicka? Proszę wypisać ją *jawnie*, korzystając z operatorów kreacji i anihilacji. Bo naturalnie $c_{\vec{k}\sigma}|KF\rangle \neq 0$ dla $|\vec{k}| < k_F \ldots$

Rozwiązania przynieść na ćwiczenia 20 stycznia.