

Seria I zadań z Mechaniki Kwantowej II B do wykładu dr. hab. Krzysztofa Byczuka

r.p. 2008/2009

Zadanie 1 — precesja spinu

Rozważmy elektron o masie m i ładunku $-e$ w zewnętrznym polu magnetycznym $\vec{B}(t) = B_0[\sin \alpha \sin(\omega t), \sin \alpha \cos(\omega t), \cos \alpha]$ skupiając się jedynie na ewolucji w przestrzeni spinowej.

Proszę:

- zapisać hamiltonian układu jako macierz 2×2 i znaleźć spinory $\chi_{\pm}(t)$ określone w ten sposób, że w każdej chwili t są rozwiązaniem równania Schrödingera bez czasu z hamiltonianem $H(t)$ (innymi słowy: gdyby pole magnetyczne zamarzło w chwili t — przestało się zmieniać, to $\chi_{\pm}$ byłyby funkcjami własnymi z energiami $E_{\pm}$). $\chi_+(t)$ to ten spinor, któremu odpowiada niższa energia;

- pokazać, że jeżeli $\chi(0) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}$, to

$$|\langle \chi(t) | \chi_-(t) \rangle|^2 = \left[\frac{\omega}{\lambda} \sin \alpha \sin \left(\frac{\lambda t}{2} \right) \right]^2,$$

gdzie $\lambda = \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega\omega_1 \cos \alpha}$, a $\omega_1 = -eB_0/m$; (uwaga: problem daje się rozwiązać ściśle.)

- uzasadnić, dlaczego $|\langle \chi(t) | \chi_-(t) \rangle| \rightarrow 0$ w granicy adiabatycznej, tj. gdy $\omega \ll \omega_1$.

Zadanie 2 — puchnąca studnia

Tematem zadania jest jednowymiarowa studnia potencjału jednostajnie zwiększająca swe wymiary. Zależność potencjału od czasu dla $t > 0$ to: $V(x) = 0$ gdy $x \in [0, w(t)]$, gdzie $w(t) = a + vt$, $a, v > 0$ oraz $V(x) \rightarrow \infty$ poza w.w. przedziałem. W naszych warunkach ($v = \text{const.}$) istnieje dany analitycznie układ zupełny ścisłych rozwiązań

$$\Phi_n(x; t) = \sqrt{\frac{2}{w(t)}} \sin \left(\frac{n\pi}{w(t)} x \right) e^{i \frac{mvx^2 - 2aE_n(0)t}{2\hbar w(t)}},$$

gdzie analogicznie do poprzedniego zadania wprowadzamy „rozwiązania natychmiastowe” (innymi słowy: „rozwiązania zamrożonego hamiltonianu”) $u_n(x; t) = \sqrt{2/w(t)} \sin[n\pi x/w(t)]$ i odpowiadające im „energje natychmiastowe” $E_n = (n\pi\hbar)^2/[2mw^2(t)]$.

Ogólne rozwiązanie będzie miało zatem postać $\Psi(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x; t)$ dla pewnych stałych zespolonych $\{c_n\}$.

Należy:

- sprawdzić, że $\Phi_n(x; t)$ rzeczywiście spełniają równanie Schrödingera z odpowiednimi warunkami brzegowymi;
- pokazać, iż jeżeli w $t = 0$ cząstka jest w stanie opisywanym przez $u_1(x; 0)$ to

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-i\alpha z^2} \sin(nz) \sin z dz,$$

dla $\alpha = mav/(2\pi^2\hbar)$ (wielkość ta jest jest bezwymiarową prędkością przesuwania ścianki studni);

- podać interpretację wielkości α (do stosunku jakich dwóch wielkości jest proporcjonalna?);
- zdefiniować i obliczyć zewnętrzną (T_e) i wewnętrzną (T_i) skalę czasową, które charakteryzują podany proces w układzie, jeżeli w chwili T_e studnia osiąga wielkość $2a$ (czyli $w(T_e) = 2a$);
- wskazać, dlaczego granica adiabaticzna odpowiada $\alpha \ll 1$ (tj. $e^{-i\alpha z^2} \approx 1$)? Jak się ma to kryterium do innej definicji procesu adiabaticznego — $T_e \gg T_i$?

- wyznaczyć c_n w tej granicy (do rzędu α^2);
- znaleźć $\Psi(x; t)$ (również do rzędu α^2) i zbadać jego zgodność z twierdzeniem adiabatycznym;
- pokazać, że czynnik fazowy $\theta(t)$ pojawiający się w toku ewolucji zgodnie ze wzorem

$$\Psi(x; 0) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \xrightarrow{\text{adiabatycznie}} \Psi(x; t) = e^{i\theta(t)} \sqrt{\frac{2}{w(t)}} \sin\left(\frac{\pi}{w(t)}x\right),$$

wynosi

$$\theta(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_1(t') dt'.$$

Rozwiązane zadania należy przynieść na ćwiczenia 14 października 2008 r.