Seria II zadań z Mechaniki Kwantowej II B do wykładu dr. hab. Krzysztofa Byczuka

r.p. 2008/2009

Zadanie 1 — precesja spinu

Neutron znajduje się w polu magnetycznym $\vec{B} = B_0(\sin\alpha\cos\omega t,\ \sin\alpha\sin\omega t,\ \cos\alpha)$, gdzie stała α decyduje o wielkości składowej oscylującej pola. Proces przebiega adiabatycznie. Zakładając, że układ był w stanie podstawowym w chwili $t = 0$ proszę:

- wskazać do jakiej nierówności prowadzi warunek adiabatyczności ($\omega \ll \dots$);
- obliczyć fazę dynamiczną jakiej nabędzie układ po powrocie hamiltonianu do sytuacji z $t = 0$;
- określić ile wyniesie wówczas faza Berry'ego.

Zadanie 2 — dowolna ewolucja spinu

Rozważmy cząstkę o spinie 1/2 zorientowanym wzdłuż chwilowego pola $\vec{B}$, którego orientację przestrzenną określają parametry ϑ oraz φ — odpowiedni spinor to wówczas $\begin{pmatrix} \cos(\vartheta/2) \\ \sin(\vartheta/2)e^{i\varphi} \end{pmatrix}$. Wiedząc, że po pewnym czasie T adiabatyczna ewolucja pola magnetycznego doprowadzi do powrotu $\vec{B}$ do stanu początkowego należy wykazać, że faza Berry'ego jaką uzyska wskutek ewolucji układ wyniesie $-\Omega/2$, gdzie Ω jest kątem bryłowym jaki zatoczy wektor chwilowego średniego spinu w trakcie ewolucji.

Przydatne mogą być wzory na gradient i rotację we współrzędnych sferycznych (w końcu wektor spinu podróżuje po sferze!)

$$\nabla f = \hat{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\vartheta}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta} + \frac{\hat{e}_\varphi}{r\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \varphi},$$

$$\nabla \times \vec{V} = \frac{\hat{e}_r}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta V_\varphi) - \frac{\partial V_\vartheta}{\partial\varphi}\right) + \frac{\hat{e}_\varphi}{r}\left(\frac{\partial(rV_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial\vartheta}\right) + \hat{e}_\vartheta\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial V_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rV_\varphi)}{\partial r}\right).$$

Ponadto warto pamiętać o panu Stokesie — $\int_{\partial\Omega} \vec{V}\cdot d\vec{l} = \int_\Omega \hat{e}_r \cdot (\nabla\times\vec{V})d\Omega$ — aby całkę krzywoliniową na sferze lepiej oswoić.

Zadanie 3 — efekt Aharonova–Cashera

Bierze się tu nienaładowaną cząstkę o momencie magnetycznym μ w pustej przestrzeni, w której umieszczamy jeszcze równoległy do μ drut naładowany o liniowej gęstości ładunku λ. Hamiltonian naszej cząstki (może nią być neutron, ale niektóre atomy też są dobre) to $(1/2m)(-i\hbar\nabla - \vec{E}\times\vec{\mu})^2$, o ile jest ona zamknięta w pudle, które zabezpieczy ją przed zderzeniem z drutem. Załóżmy, że tak właśnie jest, a wektor $\vec{R}$ wskazuje środek pudła. W zadaniu trzeba

- sprawdzić, że funkcja $\Psi_{n,\vec{R}}(\vec{r}) = \exp[(i/\hbar)\int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot (\vec{E}(\vec{r}')\times\vec{\mu})]\psi_n(\vec{r})$
  - ma w ogóle sens (tj. nie ma problemu z jednoznacznością całki krzywoliniowej),
  - spełnia równanie Schródingera, jeśli $|\psi_n\rangle$ są rozwiązaniami problemu pudła bez pól zewnętrznych;
- obliczyć fazę jaką zyska funkcja cząstki, gdy nasze pudło adiabatycznie okrąży drut;
- zdefiniować wektorowy „potencjał dualny" tak, aby hamiltonian zagadnienia Aharonova–Cashera uzyskał wygląd hamiltonianu zjawisjka Aharonowa–Bohma ($e\vec{A} \to \Phi_0\vec{a}$), gdzie $\Phi_0 = 2\pi\hbar/e$. Jakim wzorem całkowym ten nowy „potencjał" będzie wiązał się z gęstością ładunku?

Zadanie 4 — (nieśmiertelny) dwuwymiarowy oscylator harmoniczny

Matematyka dostarczyła nam narzędzia do przesuwania funkcji o wektor: $\psi(\vec{r}+\vec{q}) = S_{\vec{q}}\psi(\vec{r}) = \exp[q_x(\partial/\partial x) + q_y(\partial/\partial y)]\psi(\vec{r})$ (warto sprawdzić rozwijając w szereg, to nie czary). $\mathcal{H}_0 = \hbar\omega_1(a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + 1)$ jest hamiltonianem oscylatora harmonicznego o minimum energii potencjalnej w środku układu współrzędnych. Poza tym określmy $\vec{q}(t) = q_0(\cos\omega t,\, \sin\omega t)$. Jeżeli hamiltonian będzie ewoluował adiabatycznie $\mathcal{H}(t) = S_{\vec{q}(t)}\mathcal{H}_0 S_{\vec{q}(t)}^\dagger$ to proszę:

- wskazać jak będzie zmieniać się operator energii potencjalnej układu;
- wykazać, że „rozwiązanie natychmiastowe" $\psi_n(t)$ dostajemy po prostu jako $S_{\vec{q}(t)}\psi_0$, gdzie ψ_0 jest rozwiązaniem zagadnienia własnego dla hamiltonianu $\mathcal{H}_0$ (niekoniecznie stanem podstawowym!);
- korzystając z operatora momentu pędu $l_z = (\hbar/i)(a_x^\dagger a_y - a_y^\dagger a_x)$ sprawdzić, że $(a_x^\dagger + i a_y^\dagger)|0\rangle$ odpowiada rozwiązaniu obracającemu się;
- sprawdzić , że w toku ewolucji nie pojawia się niezerowa faza geometryczna, tak dla stanu podstawowego jak dla rozwiązań „wirujących" (wystarczy sprawdzić jedno).

Rozwiązania proszę przynieść na ćwiczenia 21 października.